



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2022	CONVOCATORIA: JUNIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

En les respostes heu d'escriure tots els passos del raonament utilitzat.

Problema 1. Donades les matrius $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Es demana:

- Demostrar que $C - AB^T$ té inversa i calculeu-la. (4 punts)
- Calcular la matriu X que verifica $CX = AB^T X + I$, on I és la matriu identitat. (3 punts)
- Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ per a tot número natural n . (3 punts)

Solució:

- $\det(C - AB^T) = 3 \neq 0$, per tant té inversa. $(C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.
- $X = (C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.
- $AB^T = 2I$, per tant $(AB^T)^n = 2^n I$.

Problema 2. Donada la matriu

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determineu:

- El rang de la matriu A en funció del paràmetre real m . (4 punts)
- La matriu inversa de A en el cas $m = 2$. (4 punts)
- El nombre real m per al qual el determinant de la matriu $2A$ és igual a -8 . (2 punts)

Solució:

- $\det(A) = m^2(2 - 3m)$. Si $m = 0$, el rang és 1; si $m = \frac{2}{3}$, el rang és 2; i si $m \neq 0, \frac{2}{3}$, el rang és 3.
- $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.
- $m = 1$.

Problema 3. Donades les rectes $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

- Indiqueu justificadament la posició relativa de r i s . (5 punts)
- Trobeu l'equació de la recta l que passa per l'origen i talla r i s . (5 punts)

Solució:

- Les rectes es creuen en l'espai.
- $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$

Problema 4. Donats els plans $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ i $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, i la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

- Calculeu la posició relativa de π_1 i π_2 . (3 punts)
- Calculeu el punt P' que és simètric al punt $P = (1,0,0)$ respecte del pla π_1 . (4 punts)
- Calculeu, si n'hi ha, el punt d'intersecció de π_1 i r . (3 punts)

Solució:

- π_1 i π_2 són paral·lels no coincidents.
- $(-3, 2, 2)$.
- $(-3, -8, 6)$.

Problema 5. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obteniu:

- El domini i els punts de tall amb els eixos. (1 punt)
- Les asímptotes de la funció. (2 punts)
- Els intervals de creixement i decreixement, i els extrems. (3 punts)
- La primitiva de la funció $f(x)$. (4 punts)

Solució:

- Domini $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Punts de tall $(0, -\frac{3}{4})$.
- AV $x = -2$, $x = 2$ AH $y = 1$.
- f creix en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ i decreix en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. $x = 0$ és un màxim.
- $x + \frac{7}{4} \ln(|x-2|) - \frac{7}{4} \ln(|x+2|) + C$.

Problema 6. Es desitja construir un quadrat i un triangle equilàter tallant en dues parts un cable d'acer de 240 m de longitud.

- Calculeu la suma de les àrees del triangle i del quadrat en funció del valor x que correspon amb els metres que mesura un costat del triangle. (3 punts)
- Calculeu la longitud de cable necessària per a construir el triangle de manera que la suma de les àrees del triangle i del quadrat siga mínima i calculeu l'àrea mínima. (7 punts)

Solució:

- $\left(\frac{240-3x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$.
- Costat del triangle $x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9} = 45.203$ m,
longitud $3x = 3 \frac{720}{4\sqrt{3}+9} = 135.609$ m,
àrea total $= \frac{14400}{11} (3\sqrt{3} - 4) = 1565.872$ m².

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se pide:

- Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
- Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
- Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n . (3 puntos)

Solución:

- $\det(C - AB^T) = 3 \neq 0$ luego tiene inversa. $(C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.
- $X = (C - AB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$.
- $AB^T = 2I$ luego $(AB^T)^n = 2^n I$.

Problema 2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar:

- El rango de la matriz A en función del parámetro real m . (4 puntos)
- La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)
- El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8 . (2 puntos)

Solución:

- $\det(A) = m^2(2 - 3m)$. Si $m = 0$ el rango es 1, si $m = \frac{2}{3}$ el rango es 2 y si $m \neq 0, \frac{2}{3}$ el rango es 3.
- $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & -1/8 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.
- $m = 1$.

Problema 3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

- Indicar justificadamente la posición relativa de r y s . (5 puntos)
- Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s . (5 puntos)

Solución:

- Las rectas se cruzan en el espacio.
- $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$

Problema 4. Dados los planos $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

- Calcular la posición relativa de π_1 y π_2 . (3 puntos)
- Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1 . (4 puntos)
- Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r . (3 puntos)

Solución:

- π_1 y π_2 son paralelos no coincidentes.
- $(-3,2,2)$.

c) $(-3, -8, 6)$.

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

- a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
- b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
- d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

Solución:

- a) Dominio $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Puntos de corte $(0, -\frac{3}{4})$.
- b) AV $x = -2$, $x = 2$ AH $y = 1$.
- c) f crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$. $x = 0$ es un máximo.
- d) $x + \frac{7}{4} \ln(|x - 2|) - \frac{7}{4} \ln(|x + 2|) + C$.

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

- a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
- b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)

Solución:

- a) $\left(\frac{240-3x}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$.
- b) Lado del triángulo $x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9} = 45.203$ m,
longitud $3x = 3 \frac{720}{4\sqrt{3}+9} = 135.609$ m,
área total $= \frac{14400}{11} (3\sqrt{3} - 4) = 1565.872$ m².