



COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD



PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2022	CONVOCATORIA: JULIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

CRITERIS DE CORRECCIÓ / CRITERIOS DE CORRECCIÓN

En les respostes heu d'escriure tots els passos del raonament utilitzat.

Problema 1. Donat el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}.$$

- a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre real a . (5 punts)
b) Trobeu totes les solucions del sistema quan aquest siga compatible. (5 punts)

Solució:

- a) El determinant del sistema és $\Delta = -(a+2)(a-1)$. Si $a \neq -2$ i $a \neq 1$, es tracta d'un SCD. Si $a = -2$, es tracta d'un SI. Si $a = 1$, es tracta d'un SCI.
b) Si $a \neq -2$ i $a \neq 1$, la solució és $x = \frac{1}{a+2}$, $y = \frac{2}{a+2}$, $z = \frac{a+1}{a+2}$. Si $a = 1$, la solució és $x = 1 - \lambda$, $y = \lambda$, $z = \lambda$.

Problema 2. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

- a) Calculeu els valors dels paràmetres a i b perquè es complisca $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 punts)
b) Per als valors a i b obtinguts en l'apartat anterior, calculeu A^3 i A^4 . (3 punts)
c) Calculeu $\det(A^{-50})$ quan $a^2 - b^2 \neq 0$. (3 punts)

Solució:

- a) $a = 1, b = 0$.
b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
c) $\det(A^{-50}) = \frac{1}{\det(A)^{50}} = \frac{1}{(a^2-b^2)^{50}}$.

Problema 3. Donats els punts $A = (2,0,0)$ i $B = (0,1,0)$, i la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

- a) Trobeu l'equació de la recta r que passa pels punts A i B . (2 punts)
b) Determineu l'equació implícita del pla que conté la recta s i és paral·lel a la recta r . (4 punts)
c) Calculeu la distància del punt A a la recta s . (4 punts)

Solució:

- a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$.
b) $x + 2y - 8z - 3 = 0$.
c) Distància = $\sqrt{\frac{27}{14}} = 1.389$.

Problema 4. Donats els punts $A = (2, 1, -2)$ i $B = (3, 2, 3)$, i el pla π definit per l'equació $2x + 2y + z = 3$. obteniu:

- a) El punt de tall C entre el pla π i la recta perpendicular a π que passa per B . (5 punts)
- b) L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són A, B i C . (5 punts)

Solució:

- a) La recta perpendicular a π que passa per B és $(x, y, z) = (3, 2, 3) + \lambda(2, 2, 1)$. El punt és $\left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right)$.
- b) Àrea $= \sqrt{50}$.

Problema 5.

- a) Calculeu, indicant tots els passos, la integral indefinida següent: (5 punts)

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx.$$

- b) Determineu, en funció de t , el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$. (2 punts)
- c) Determineu el valor de t major que 8 perquè $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$ siga igual a $\ln \frac{25}{4}$. (3 punts)

Solució:

- a) $2 \ln(|x - 7|) - 2 \ln(|x + 2|) + C$.
- b) $2 \ln(|t - 7|) - 2 \ln(|t + 2|) + 2 \ln(10)$.
- c) $t = 10$.

Problema 6. Considereu la funció $f(x) = e^{-x^2}$ per als valor positius de x . Per cada punt $M = (x, f(x))$ de la gràfica de f es tracen dues rectes paral·leles als eixos de coordenades, OX i OY . Aquestes dues rectes, juntament amb els eixos de coordenades, defineixen un rectangle.

- a) Determineu l'àrea del rectangle en funció de x . (3 punts)
- b) Trobeu el punt M que proporciona major àrea i calculeu aquesta àrea. (7 punts)

Solució:

- a) Àrea $= xe^{-x^2}$.
- b) L'àrea màxima és $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ i s'obté per al valor $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases}.$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro real a . (5 puntos)
 b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

Solución:

- a) El determinante del sistema es $\Delta = -(a + 2)(a - 1)$. Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ se trata de un SCD. Si $a = -2$ se trata de un SI. Si $a = 1$ se trata de un SCI.
 b) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ la solución es $x = \frac{1}{a+2}, y = \frac{2}{a+2}, z = \frac{a+1}{a+2}$. Si $a = 1$ la solución es $x = 1 - \lambda, y = \lambda, z = \lambda$.

Problema 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

- a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)
 b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 . (3 puntos)
 c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$. (3 puntos)

Solución:

- a) $a = 1, b = 0$.
 b) $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 c) $\det(A^{-50}) = \frac{1}{\det(A)^{50}} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}$.

Problema 3. Dados los puntos $A = (2,0,0)$ y $B = (0,1,0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

- a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B . (2 puntos)
 b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r . (4 puntos)
 c) Calcular la distancia del punto A a la recta s . (4 puntos)

Solución:

- a) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$.
 b) $x + 2y - 8z - 3 = 0$.
 c) Distancia $\sqrt{\frac{27}{14}} = 1.389$.

Problema 4. Dados los puntos $A = (2,1,-2)$ y $B = (3,2,3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

- a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B . (5 puntos)
 b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C . (5 puntos)

Solución:

- a) La recta perpendicular a π que pasa por B es $(x, y, z) = (3, 2, 3) + \lambda(2, 2, 1)$. El punto es $(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9})$.
 b) Área $\sqrt{50}$.

Problema 5.

- a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx.$$

- b) Determinar, en función de t , el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$. (2 puntos)
- c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$. (3 puntos)

Solución:

- a) $2 \ln(|x - 7|) - 2 \ln(|x + 2|) + C$.
- b) $2 \ln(|t - 7|) - 2 \ln(|t + 2|) + 2 \ln(10)$.
- c) $t = 10$.

Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x . Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY . Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

- a) Determinar el área del rectángulo en función de x . (3 puntos)
- b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)

Solución:

- a) $\text{área} = x e^{-x^2}$.
- b) El área máxima es $\frac{1}{\sqrt{2}e}$ y se obtiene para el valor $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.