



Ecuación Ganadora
ACADEMIA

MATEMÁTICAS II • 2.º DE BACHILLERATO

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas lineales en Matemáticas II: Gauss, Rouché-Frobenius, Cramer, sistemas homogéneos, discusión con parámetros y problemas de planteamiento resueltos.

ecuacionganadora.com/recursos/matematicas-2-bachillerato/sistemas-de-ecuaciones-lineales.html

Álvaro López • Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia • 626 09 20 80

Este tema reúne todo el Álgebra: una pregunta típica de la PAU pide **discutir y resolver un sistema según los valores de un parámetro**, y para ello hacen falta las matrices, el rango y los determinantes. Aquí aprendes a **clasificar** un sistema (SCD, SCI o SI), a **resolverlo** por Gauss y por Cramer y a **discutirlo** con el teorema de Rouché-Frobenius.

Orden recomendado

Sigue los apartados en orden: cada uno usa lo anterior, y al final se aplican los sistemas a problemas con enunciado.

Clasificación de sistemas lineales

IDEA CLAVE

Un sistema lineal puede tener una solución, infinitas o ninguna, y no hay más posibilidades. En este apartado aprendes a escribirlo en forma matricial, a ponerle nombre a cada caso (SCD, SCI, SI) y a verlo como rectas o planos que se cortan: es el lenguaje con el que se plantean y se corrigen todos los problemas de sistemas de la PAU.

Sistema de ecuaciones lineales

DEFINICIÓN · SISTEMA LINEAL Y SOLUCIÓN

Una **ecuación lineal** con incógnitas $x_1, \dots, x_n$ es una igualdad de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, con a_i y b números reales: las incógnitas aparecen solo sumadas y multiplicadas por números, sin potencias ni productos entre ellas.

Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** (sistema $m \times n$) es un conjunto de m ecuaciones lineales que se deben cumplir a la vez. Una **solución** es una lista de números $(x_1, \dots, x_n)$ que cumple **todas** las ecuaciones. **Resolver** el sistema es hallar todas sus soluciones.

Por ejemplo, $(1, 2, 3)$ es solución de

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

porque $1 + 4 - 3 = 2$, $2 - 2 + 3 = 3$ y $1 + 2 + 3 = 6$. En cambio, $(4, 0, 2)$ cumple la primera y la tercera ecuación pero no la segunda ($8 - 0 + 2 = 10 \neq 3$), así que **no** es solución. Las ecuaciones $x^2 + y = 1$ o $xy = 2$ no son lineales.

Forma matricial y matriz ampliada

Con el producto de matrices, todo el sistema cabe en una sola igualdad.

DEFINICIÓN · FORMA MATRICIAL $AX=B$ Y MATRIZ AMPLIADA

El sistema $m \times n$ se escribe $AX = B$, donde

- A es la **matriz de coeficientes** ($m \times n$): la fila i contiene los coeficientes de la ecuación i , y la columna j , los de la incógnita x_j ;
- X es la **matriz columna de incógnitas** ($n \times 1$);
- B es la **matriz columna de términos independientes** ($m \times 1$).

La **matriz ampliada** A^* ($m \times (n+1)$) es A con la columna B añadida a la derecha. Contiene toda la información del sistema.

Para el sistema anterior:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_B, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

Al multiplicar AX , la fila i de A por la columna X da justo el miembro izquierdo de la ecuación i . Antes de escribir A , ordena todas las ecuaciones con las incógnitas en el mismo orden y los números a la derecha; si una incógnita no aparece en una ecuación, su coeficiente es 0.

Clasificación: SCD, SCI y SI

DEFINICIÓN · TIPOS DE SISTEMAS SEGÚN SUS SOLUCIONES

- **Sistema compatible determinado (SCD)**: tiene una **única** solución.
- **Sistema compatible indeterminado (SCI)**: tiene **infinitas** soluciones.
- **Sistema incompatible (SI)**: **no tiene** solución.

Compatible significa «tiene alguna solución»; determinado, que es una sola.

Tres ejemplos con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ SCD: } (2, 1) \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \text{ SCI} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \text{ SI}$$

En el segundo, la segunda ecuación es el doble de la primera: en realidad solo hay una condición, $x + y = 3$, y la cumplen infinitos pares. En el tercero, $x + y$ no puede valer a la vez 3 y 5.

Cómo se escribe la solución de un SCI

En un SCI no basta con dar una solución: hay que dar **todas**. Se elige una incógnita como **parámetro** (por ejemplo $y = t$) y se despejan las demás en función de ella. En el SCI anterior, $x = 3 - t$, $y = t$, es decir,

$$(x, y) = (3 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Cada valor de t da una solución: $t = 0$ da $(3, 0)$; $t = 1$ da $(2, 1)$. Si hay que dejar libres dos incógnitas, se usan dos parámetros (por ejemplo $y = s$, $z = t$). El número de parámetros es el número de incógnitas que quedan libres después de usar todas las condiciones independientes.

Por qué no hay otras posibilidades

PROPIEDAD · NÚMERO DE SOLUCIONES

Un sistema lineal tiene **ninguna, una o infinitas** soluciones. Nunca tiene exactamente dos, ni tres, ni ningún otro número finito mayor que uno.

La razón: si X_1 y X_2 son dos soluciones distintas ($AX_1 = B$ y $AX_2 = B$), para cualquier número λ

$$A(X_1 + \lambda(X_2 - X_1)) = AX_1 + \lambda(AX_2 - AX_1) = B + \lambda(B - B) = B$$

así que $X_1 + \lambda(X_2 - X_1)$ también es solución, y hay una distinta para cada λ . Geométricamente: si dos puntos son solución, **toda la recta que pasa por ellos** también lo es. Es un argumento que se usa mucho en la PAU: «como tiene dos soluciones distintas, tiene infinitas y es SCI».

Sistemas equivalentes

DEFINICIÓN · SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas con las mismas incógnitas son **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones (pueden tener distinto número de ecuaciones).

Estas transformaciones convierten un sistema en otro equivalente:

1. Cambiar el orden de las ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por un número **distinto de cero**.
3. Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.
4. Quitar una ecuación que es combinación de las demás (por ejemplo, la suma de otras dos, o $0 = 0$).

La idea es que cualquier solución del sistema de partida cumple la ecuación nueva, y que se puede deshacer el cambio, así que no se gana ni se pierde ninguna solución. Por ejemplo,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ -2y = -2 \end{cases}$$

son equivalentes: la segunda ecuación nueva es la segunda menos la primera. El segundo sistema se resuelve de abajo arriba ($y = 1$, $x = 2$). Esta es la idea del método de Gauss, que es el apartado siguiente.

Interpretación geométrica con dos incógnitas

Cada ecuación $ax + by = c$ (con a y b no nulos a la vez) es una **recta** del plano, y las soluciones del sistema son los puntos comunes a todas las rectas.

Dos rectas	Coeficientes	Tipo
Secantes (se cortan en un punto) x e y no proporcionales		SCD
Paralelas (distintas)	proporcionales, pero el término independiente no	SI
Coincidentes	las dos ecuaciones son proporcionales	SCI
Por ejemplo, $2x - 4y = 6$ y $-x + 2y = 1$ son paralelas: los coeficientes son proporcionales ($2/(-1) = -4/2 = -2$), pero $6/1 = 6 \neq -2$.		

Interpretación geométrica con tres incógnitas

Cada ecuación $ax + by + cz = d$ (con a, b, c no nulos a la vez) es un **plano** del espacio. Dos planos son paralelos si sus coeficientes (a, b, c) son proporcionales.

Con **dos ecuaciones** (dos planos) el sistema nunca es SCD: dos planos se cortan en una recta (SCI con un parámetro), coinciden (SCI con dos parámetros) o son paralelos (SI).

Con **tres ecuaciones** (tres planos):

Posición de los tres planos	Tipo
Se cortan en un único punto	SCD
Tienen una recta común (los tres pasan por la misma recta, o dos coinciden y el tercero los corta)	SCI, un parámetro
Los tres coinciden	SCI, dos parámetros
Se cortan dos a dos en tres rectas paralelas (forman un «prisma»)	SI
Dos son paralelos y el tercero los corta	SI
Los tres son paralelos, o dos coinciden y el tercero es paralelo a ellos	SI

NOTA • INCOMPATIBLE NO ES LO MISMO QUE PARALELOS

Los planos $x + y = 1$, $y + z = 1$ y $x - z = 1$ no tienen dos paralelos entre sí, y sin embargo el sistema es incompatible: restando las dos primeras ecuaciones sale $x - z = 0$, que contradice la tercera. Cada pareja de planos se corta en una recta, pero las tres rectas son paralelas: es el caso del prisma. Para distinguir un prisma de una pareja de planos paralelos, mira si hay dos ecuaciones con los coeficientes de x, y, z proporcionales.

Decidir el tipo de un sistema grande «a ojo» no siempre es fácil. En los apartados siguientes lo harás con método: resolviendo por Gauss o, sin resolver, comparando rangos con el teorema de Rouché-Frobenius.

MÉTODO • CONSTRUIR UN SISTEMA CON CONDICIONES DADAS

1. **Que tenga una solución dada P :** al sustituir P en cada ecuación, el miembro izquierdo debe dar el término independiente. Si hay coeficientes desconocidos, cada ecuación da una condición sobre ellos.
2. **Que tenga infinitas soluciones (SCI) con el mismo conjunto de soluciones que otro:** añade una ecuación que sea combinación de las que ya hay (suma de dos, el doble de una...), con el término independiente combinado igual.
3. **Que sea incompatible (SI):** añade una ecuación con los coeficientes de una combinación de las anteriores pero con otro término independiente.
4. **Comprueba siempre** el resultado sustituyendo: la solución dada debe cumplir todas las ecuaciones.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Forma matricial y comprobar soluciones

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

- a) Escribe su matriz ampliada A^* (incógnitas en el orden x, y, z).
- b) ¿Cuál de los puntos $P = (4, 0, 2)$, $Q = (1, 2, 3)$ y $R = (3, 1, 2)$ es solución del sistema?

- a) **Matriz ampliada.** Cada fila recoge los coeficientes de x, y, z de una ecuación y, separado por la barra, su término independiente:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

En forma matricial, $AX = B$ con A la parte de la izquierda de la barra, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- b) **Sustituimos cada punto en las tres ecuaciones.**

Punto 1.ª ecuación (= 2) 2.ª ecuación (= 3) 3.ª ecuación (= 6)

$P = (4, 0, 2)$ $4 + 0 - 2 = 2$ sí $8 - 0 + 2 = 10$ no $4 + 0 + 2 = 6$ sí

$Q = (1, 2, 3)$ $1 + 4 - 3 = 2$ sí $2 - 2 + 3 = 3$ sí $1 + 2 + 3 = 6$ sí

$R = (3, 1, 2)$ $3 + 2 - 2 = 3$ no $6 - 1 + 2 = 7$ no $3 + 1 + 2 = 6$ sí

Solo Q cumple las tres: es la solución. P cumple dos de las tres ecuaciones y aun así **no** es solución: una solución tiene que cumplirlas todas.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Clasificar e interpretar sistemas de dos ecuaciones

Clasifica cada sistema, interprétalo geoméricamente y resuélvelo si es compatible.

- a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$

- a) **Reducción.** Sumando las dos ecuaciones, $3x = 6$, luego $x = 2$ y, de la segunda, $y = 3 - 2 = 1$. Hay una única solución, $(2, 1)$: es un **SCD**. Geométricamente, dos rectas **secantes** que se cortan en el punto $(2, 1)$. Se podía prever: los coeficientes $2, -1$ y $1, 1$ no son proporcionales.
- b) **Comparamos las ecuaciones.** Multiplicando la segunda por -2 queda $2x - 4y = -2$. El sistema pide que $2x - 4y$ valga a la vez 6 y -2 , lo cual es imposible: es un **SI**. Son dos rectas **paralelas** distintas (mismos coeficientes salvo un factor, distinto término independiente).
- c) **Comparamos las ecuaciones.** La primera, dividida entre -3 , es $-x + 2y = -3$: la misma que la segunda. Solo hay una condición, $x - 2y = 3$, y el sistema es un **SCI**: las dos rectas son **coincidentes**. Tomando $y = t$, $x = 3 + 2t$:

$$(x, y) = (3 + 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación con $t = 1$: $(5, 1)$ cumple $3 \cdot 5 - 6 = 9$ y $-5 + 2 = -3$.

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Añadir un plano a una recta

Se considera el sistema formado por los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + z = 1$, al que se añade una tercera ecuación $x + ay + z = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

- Resuelve el sistema formado solo por las dos primeras ecuaciones (toma $z = t$).
- Halla a y b para que el sistema de las tres ecuaciones sea compatible indeterminado.
- Para $a = -1$ y $b = 3$, clasifica el sistema de tres ecuaciones e interprétalo geoméricamente.
- Para $a = 2$ y $b = 5$, resuelve el sistema de tres ecuaciones.

- a) **Las dos primeras ecuaciones.** Sumándolas desaparecen y y z : $3x = 3$, luego $x = 1$. Sustituyendo en la primera, $1 + y - z = 2$, es decir, $y = 1 + z$. Con $z = t$:

$$(x, y, z) = (1, 1 + t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Es un SCI: dos planos no paralelos que se cortan en una **recta** r .

- b) **Idea clave.** Las soluciones de las tres ecuaciones son los puntos de r que además cumplen la tercera. Sustituimos el punto genérico de r en $x + ay + z = b$:

$$1 + a(1 + t) + t = b \iff (a + 1)t = b - 1 - a$$

Esta es una ecuación de primer grado en t , y hay tres posibilidades:

- Si $a + 1 \neq 0$, hay un único t : un único punto. **SCD**.
- Si $a + 1 = 0$ y $b - 1 - a = 0$, queda $0 \cdot t = 0$: vale para **todo** t , toda la recta es solución. **SCI**.
- Si $a + 1 = 0$ y $b - 1 - a \neq 0$, queda $0 \cdot t = \text{número no nulo}$: ningún t . **SI**.

El SCI exige $a = -1$ y $b = 1 + a = 0$. Con esos valores el tercer plano, $x - y + z = 0$, **contiene a la recta** r : los tres planos pasan por la misma recta.

- c) **Caso** $a = -1, b = 3$. Estamos en la posibilidad 3: $0 \cdot t = 3 - 1 + 1 = 3$, imposible. El sistema es **SI**. Geométricamente, el plano $x - y + z = 3$ es paralelo a la recta r pero no la contiene. Además, sus coeficientes $(1, -1, 1)$ no son proporcionales a $(1, 1, -1)$ ni a $(2, -1, 1)$, así que no es paralelo a ninguno de los otros dos planos: cada pareja de planos se corta en una recta y las tres rectas son paralelas. Es el caso del **prisma**.

- d) **Caso** $a = 2, b = 5$. Posibilidad 1: $(2 + 1)t = 5 - 1 - 2$, luego $3t = 2$ y $t = \frac{2}{3}$. Sustituyendo en r :

$$(x, y, z) = \left(1, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Comprobación en la tercera ecuación: $1 + 2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{12}{3} = 5$. Los tres planos se cortan en un único punto (SCD).

Para el examen: cuando se añade una ecuación a un sistema ya resuelto, sustituir la solución general en la ecuación nueva convierte el problema en una ecuación en t , y los tres casos (SCD, SCI, SI) se leen

directamente. Explica qué pasa en cada caso con una frase: la interpretación geométrica suele valer parte de la nota.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · CREER QUE EL NÚMERO DE ECUACIONES DECIDE EL TIPO

«Hay más incógnitas que ecuaciones, luego es SCI» es falso: $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$ tiene dos ecuaciones y tres incógnitas y es **incompatible** (planos paralelos). Lo único cierto es que, si hay más incógnitas que ecuaciones, **no puede ser SCD**. Tampoco «más ecuaciones que incógnitas» implica SI: un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas puede tener solución única si alguna ecuación es combinación de las otras.

ERROR TÍPICO · INCOMPATIBLE NO SIGNIFICA PLANOS PARALELOS

Muchos alumnos interpretan cualquier SI con tres incógnitas como «planos paralelos». Si no hay dos ecuaciones con coeficientes de x , y , z proporcionales, ningún par de planos es paralelo, y el SI se debe a que los planos forman un **prisma** (se cortan dos a dos en rectas paralelas). Antes de escribir la interpretación, compara los coeficientes de cada pareja de ecuaciones.

ERROR TÍPICO · DAR UNA SOLA SOLUCIÓN DE UN SCI

Si el sistema es compatible indeterminado, «resolverlo» es dar **todas** las soluciones con uno o varios parámetros, por ejemplo $(1, 1 + t, t)$. Escribir solo $(1, 1, 0)$ (el caso $t = 0$) es dar una solución particular, no la solución, y en la PAU se puntúa como apartado incompleto.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Se considera el sistema, con incógnitas x, y, z, w :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 3w - x = 2 \\ z = 2y + w - 1 \end{cases}$$

- a) Escribe la matriz ampliada A^* , con las incógnitas en el orden x, y, z, w .
- b) Indica la dimensión de la matriz de coeficientes A y la de A^* .

- a) 1. **Ordenamos cada ecuación** con las incógnitas en el orden x, y, z, w a la izquierda y el número a la derecha, poniendo coeficiente 0 a las incógnitas que faltan:

$$\begin{cases} x + y + 2z + 0w = 4 \\ -x + 0y + 0z + 3w = 2 \\ 0x - 2y + z - w = -1 \end{cases}$$

(la tercera se obtiene pasando $2y + w$ a la izquierda y -1 a la derecha).

2. **Matriz ampliada:**

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

- b) Hay 3 ecuaciones y 4 incógnitas: A es 3×4 y A^* , que tiene una columna más, es 3×5 .

EJERCICIO 2

★ Básico

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ kx - y + z = 7 \\ 2x + ky - z = -5 \end{cases}$$

- a) Halla el valor de k para que $(1, -2, 3)$ sea solución del sistema.
- b) Si la tercera ecuación se cambia por $2x + ky - z = 1$, halla los valores de k para los que $(1, -2, 3)$ es solución del nuevo sistema.

a) 1. **Primera ecuación** (no depende de k): $1 - 2 + 3 = 2$. Se cumple.

2. **Segunda ecuación**: $k \cdot 1 - (-2) + 3 = 7$, es decir, $k + 5 = 7$, luego $k = 2$.

3. **Tercera ecuación con $k = 2$** : $2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) - 3 = 2 - 4 - 3 = -5$. Se cumple.

Por tanto, $k = 2$. El paso 3 no se puede saltar: si la tercera ecuación no se cumpliera con $k = 2$, no habría ningún valor válido.

- b) La segunda ecuación no ha cambiado y sigue exigiendo $k = 2$. La tercera exige ahora $2 - 2k - 3 = 1$, es decir, $-2k = 2$ y $k = -1$. Las dos condiciones son incompatibles: **no hay ningún valor de k** .

EJERCICIO 3

★ Básico

Clasifica cada sistema (SCD, SCI o SI) e indica la posición relativa de las dos rectas.

a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- a) La segunda ecuación es exactamente el doble de la primera ($6x - 4y = 2$ es $2 \cdot (3x - 2y = 1)$). Solo hay una condición: **SCI**, rectas **coincidentes**.
- b) Los coeficientes de la segunda son el doble de los de la primera ($2x + 6y$), pero el término independiente no ($5 \neq 2 \cdot 2$). Si $x + 3y = 2$, entonces $2x + 6y = 4 \neq 5$: **SI**, rectas **paralelas**.
- c) Los coeficientes no son proporcionales ($4/1 \neq -1/2$): **SCD**, rectas **secantes**. (Resolviendo: de la primera $y = 4x - 7$; en la segunda, $x + 8x - 14 = 4$, $x = 2$, $y = 1$; se cortan en $(2, 1)$.)

EJERCICIO 4

★★ Medio

Clasifica cada sistema, describe la posición relativa de los tres planos y, si es compatible, resuélvelo.

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + 3z = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

a) 1. **Relación entre ecuaciones.** La tercera es la suma de las dos primeras: $(x + y + z) + (x - y + 2z) = 2x + 3z$ y $3 + 2 = 5$. Se puede quitar sin cambiar las soluciones (sistema equivalente).

2. **Resolvemos las dos primeras.** Restándolas: $2y - z = 1$, luego $y = \frac{1+z}{2}$. De la primera, $x = 3 - y - z = 3 - \frac{1+z}{2} - z = \frac{5-3z}{2}$. Con $z = t$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{5-3t}{2}, \frac{1+t}{2}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Es un **SCI**: ningún par de planos es paralelo y los tres pasan por la misma recta.

b) Los coeficientes de la segunda ecuación son el doble de los de la primera, pero $5 \neq 2 \cdot 1$: los dos primeros planos son **paralelos** y distintos. Ya no puede haber ningún punto común: **SI**. El tercer plano, $(1, -1, 1)$, no es paralelo a ellos y los corta.

c) 1. **Ningún par de planos es paralelo:** los coeficientes $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, -1)$ no son proporcionales dos a dos.

2. **Combinamos.** Restando la segunda ecuación a la primera, $x - z = 0$, que contradice la tercera, $x - z = 1$. **SI**.

3. **Interpretación.** Cada pareja de planos se corta en una recta y las tres rectas son paralelas: los planos forman un **prisma**.

EJERCICIO 5

★★ Medio

Se consideran los sistemas

$$S_1 : \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} px + y = 4 \\ x - qy = -5 \end{cases}$$

Halla p y q para que S_1 y S_2 sean equivalentes.

1. **Resolvemos S_1 .** Sumando las ecuaciones, $3x = 3$, luego $x = 1$ e $y = 2$. S_1 es un SCD con solución única $(1, 2)$.

2. **Condición.** Para que S_2 sea equivalente, su única solución debe ser también $(1, 2)$. En primer lugar, $(1, 2)$ debe cumplir S_2 :

$$p + 2 = 4 \Rightarrow p = 2, \quad 1 - 2q = -5 \Rightarrow q = 3$$

3. **No basta con eso:** hay que comprobar que S_2 no tiene más soluciones. Con $p = 2$, $q = 3$, S_2 es $2x + y = 4$, $x - 3y = -5$. De la primera, $y = 4 - 2x$; en la segunda, $x - 12 + 6x = -5$, $7x = 7$, $x = 1$, $y = 2$. Solución única: $(1, 2)$.

Los sistemas son equivalentes para $p = 2$, $q = 3$.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Halla los números reales a , b y c para que $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ sea solución del sistema

$$\begin{cases} ax + y + bz = 3 \\ x + by + cz = 6 \\ cx - ay + z = 4 \end{cases}$$

1. **Sustituimos el punto** en cada ecuación. Ahora las incógnitas son a , b y c :

$$\begin{cases} a - 1 + 2b = 3 \\ 1 - b + 2c = 6 \\ c + a + 2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b = 4 \\ -b + 2c = 5 \\ a + c = 2 \end{cases}$$

Es un sistema lineal en a , b , c , aunque el de partida tenga a , b , c como coeficientes.

2. **Resolvemos.** De la primera, $a = 4 - 2b$; de la tercera, $c = 2 - a = 2b - 2$. Sustituyendo en la segunda: $-b + 4b - 4 = 5$, $3b = 9$, $b = 3$. Entonces $a = -2$ y $c = 4$.

3. **Comprobación.** El sistema queda $-2x + y + 3z = 3$, $x + 3y + 4z = 6$, $4x + 2y + z = 4$, y con $(1, -1, 2)$: $-2 - 1 + 6 = 3$, $1 - 3 + 8 = 6$, $4 - 2 + 2 = 4$.

$a = -2$, $b = 3$, $c = 4$.

EJERCICIO 7

★★ Medio

Una familia compra 10 entradas para un museo por un total de 64 euros. Las entradas de adulto cuestan 8 euros, las de niño 5 euros y las de jubilado 4 euros. Sean x, y, z el número de entradas de adulto, de niño y de jubilado, respectivamente.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones y clasifícalo.
- b) Resuélvelo tomando $z = t$.
- c) Si además se sabe que compraron el cuádruple de entradas de niño que de jubilado, ¿cuántas entradas de cada tipo compraron?

- a) **Planteamiento.** Número de entradas y dinero total:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 8x + 5y + 4z = 64 \end{cases}$$

Son dos planos no paralelos (los coeficientes $(1, 1, 1)$ y $(8, 5, 4)$ no son proporcionales), que se cortan en una recta: **SCI**.

- b) **Resolución.** Restando a la segunda ecuación la primera multiplicada por 5: $3x - z = 14$, luego $x = \frac{14+z}{3}$. De la primera, $y = 10 - x - z = \frac{30-14-z-3z}{3} = \frac{16-4z}{3}$. Con $z = t$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{14+t}{3}, \frac{16-4t}{3}, t \right)$$

- c) **Condición añadida:** $y = 4z$, es decir, $\frac{16-4t}{3} = 4t$, luego $16 - 4t = 12t$ y $t = 1$. Sustituyendo, $x = 5$, $y = 4$, $z = 1$: 5 entradas de adulto, 4 de niño y 1 de jubilado. Comprobación: $5 + 4 + 1 = 10$ y $40 + 20 + 4 = 64$ euros.

Con la condición nueva el sistema pasa a tener tres ecuaciones y una sola solución. Sin ella, por el contexto, solo valen las soluciones con números naturales: $t = 1$ da $(5, 4, 1)$ y $t = 4$ da $(6, 0, 4)$; ningún otro t da tres naturales.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

Se considera el sistema

$$\begin{cases} ax + 2y = 4 \\ 3x + by = 6 \end{cases}$$

- a) Halla a y b para que el sistema sea compatible indeterminado.
- b) Halla a y b para que $(2, 1)$ sea la única solución del sistema.
- c) Si $b = 1$, halla el valor de a para el que el sistema es incompatible.

- a) **SCI = rectas coincidentes.** Las dos ecuaciones deben ser proporcionales, incluido el término independiente. Como $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, la primera ecuación debe ser $\frac{2}{3}$ de la segunda:

$$a = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2, \quad 2 = \frac{2}{3} b \Rightarrow b = 3$$

Con $a = 2$, $b = 3$: $2x + 2y = 4$ y $3x + 3y = 6$, las dos equivalen a $x + y = 2$.

- b) 1. **Que $(2, 1)$ sea solución:** $2a + 2 = 4 \Rightarrow a = 1$ y $6 + b = 6 \Rightarrow b = 0$.

2. **Que sea la única:** con $a = 1$, $b = 0$ el sistema es $x + 2y = 4$, $3x = 6$. La segunda da $x = 2$ y la primera $y = 1$: solución única. Las rectas son secantes (coeficientes $(1, 2)$ y $(3, 0)$ no proporcionales).

- c) Con $b = 1$, la segunda ecuación es $3x + y = 6$, luego $y = 6 - 3x$. En la primera: $ax + 12 - 6x = 4$, es decir, $(a - 6)x = -8$.

- Si $a \neq 6$, $x = \frac{-8}{a-6}$ y hay una solución.
- Si $a = 6$, queda $0 \cdot x = -8$: imposible. **SI**.

Geométricamente, con $a = 6$ la primera recta es $6x + 2y = 4$, o sea $3x + y = 2$, paralela a $3x + y = 6$.

Para el examen: en un sistema 2×2 , SCI significa coeficientes y términos independientes proporcionales, y SI significa coeficientes proporcionales pero términos no. En b) no te quedes en sustituir el punto: hay que justificar que la solución es única.

EJERCICIO 9**★★★ Dificil**

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

al que se quiere añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta z = 5$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- a) Resuelve el sistema de dos ecuaciones (toma $z = t$).
- b) Halla α y β para que el sistema de tres ecuaciones sea compatible indeterminado.
- c) Si $\beta = 1$, halla el valor de α para el que el sistema de tres ecuaciones es incompatible.

- a) Restando las ecuaciones, $2y = 2$ e $y = 1$. En la primera, $x + z = 2$, luego $x = 2 - z$. Con $z = t$:

$$(x, y, z) = (2 - t, 1, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Es la recta r en la que se cortan los dos planos.

- b) Sustituimos el punto genérico de r en $\alpha x + \beta z = 5$:

$$\alpha(2 - t) + \beta t = 5 \iff (\beta - \alpha)t = 5 - 2\alpha$$

Para que **todos** los puntos de r cumplan la ecuación (SCI) hace falta que la igualdad valga para todo t : $\beta - \alpha = 0$ y $5 - 2\alpha = 0$. Luego $\alpha = \beta = \frac{5}{2}$.

Comprobación: la ecuación $\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}z = 5$ equivale a $x + z = 2$, que es la media de las dos ecuaciones dadas. Es combinación de ellas, como debe ser.

- c) Con $\beta = 1$: $(1 - \alpha)t = 5 - 2\alpha$.

- Si $\alpha \neq 1$, hay un único t : SCD.
- Si $\alpha = 1$, queda $0 \cdot t = 3$: imposible, SI.

Con $\alpha = 1$, $\beta = 1$ la ecuación añadida es $x + z = 5$, mientras que en todos los puntos de r se cumple $x + z = 2$: el tercer plano es paralelo a la recta r sin contenerla.

Para el examen: la herramienta es la misma en b) y en c): sustituir la solución general en la ecuación nueva y estudiar la ecuación $kt = h$ que resulta ($k \neq 0$: SCD; $k = h = 0$: SCI; $k = 0 \neq h$: SI). Escribe los tres casos aunque solo pregunten por uno.

EJERCICIO 10

★★★ Dificil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se sabe que los puntos $X_1 = (1, 2, 0)$ y $X_2 = (3, 1, 1)$ son soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + py + qz = 5 \\ x + y - z = r \\ 2x + y + sz = 4 \end{cases}$$

- a) Halla p, q, r y s . (1 punto)
- b) Sin resolverlo, clasifica el sistema y justifica la respuesta. (0,5 puntos)
- c) Resuelve el sistema (toma $z = t$). (0,5 puntos)
- d) Halla la solución del sistema que cumple $x = 0$. (0,5 puntos)

a) Cada solución da una condición en cada ecuación.

1. Primera ecuación. Con X_1 : $1 + 2p + 0 = 5 \Rightarrow p = 2$. Con X_2 : $3 + p + q = 5 \Rightarrow q = 2 - p = 0$.

2. Segunda ecuación. Con X_1 : $1 + 2 - 0 = r \Rightarrow r = 3$. Con X_2 : $3 + 1 - 1 = 3$, que coincide (si no coincidiera, no habría solución).

3. Tercera ecuación. Con X_1 : $2 + 2 + 0 = 4$, se cumple para cualquier s . Con X_2 : $6 + 1 + s = 4 \Rightarrow s = -3$.

$p = 2, q = 0, r = 3, s = -3$, y el sistema es

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y - z = 3 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

- b) El sistema tiene al menos dos soluciones distintas, X_1 y X_2 . Un sistema lineal con dos soluciones distintas tiene infinitas, porque todos los puntos $X_1 + \lambda(X_2 - X_1)$ son solución. Es un **SCI**.
- c) **Resolución.** De la primera, $x = 5 - 2y$. En la segunda: $5 - 2y + y - z = 3$, luego $y = 2 - z$ y $x = 5 - 2(2 - z) = 1 + 2z$. Con $z = t$:

$$(x, y, z) = (1 + 2t, 2 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en la tercera: $2(1 + 2t) + (2 - t) - 3t = 4$. Se cumple para todo t (la tercera ecuación es combinación de las otras dos). Además, $t = 0$ da X_1 y $t = 1$ da X_2 : es la recta que pasa por los dos puntos dados, como predice b).

- d) $x = 0 \iff 1 + 2t = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$, que da

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Para el examen: en a), sustituye **cada** punto en **cada** ecuación y comprueba las condiciones que no se usan para despejar. En b) se pide justificar «sin resolver»: la frase clave es «un sistema lineal con dos soluciones distintas tiene infinitas». Clasificar por el número de ecuaciones y de incógnitas no puntúa.

Resumen

- Un sistema lineal $m \times n$ se escribe $AX = B$: A es la matriz de coeficientes, X la columna de incógnitas y B la de términos independientes. La matriz ampliada A^* es A con la columna B añadida.
- Una solución debe cumplir **todas** las ecuaciones.
- SCD (compatible determinado): una solución; SCI (compatible indeterminado): infinitas; SI (incompatible): ninguna. No hay otras posibilidades: dos soluciones distintas implican infinitas.
- La solución de un SCI se da con parámetros: $(1 + 2t, 2 - t, t)$.
- Sistemas equivalentes: mismas soluciones. Se obtienen intercambiando ecuaciones, multiplicando una por un número no nulo, sumándole a una otra multiplicada por un número o quitando una que sea combinación de las demás.
- Con dos incógnitas: rectas secantes (SCD), coincidentes (SCI) o paralelas (SI). Con tres: planos que se cortan en un punto (SCD), en una recta o coinciden (SCI), o no tienen punto común (SI: paralelos o prisma).
- Más incógnitas que ecuaciones impide que sea SCD, pero no impide que sea SI.

Método de Gauss

IDEA CLAVE

El método de Gauss resuelve cualquier sistema lineal haciendo ceros en la matriz ampliada hasta dejarla escalonada: entonces la última fila dice si el sistema es SCD, SCI o SI, y las soluciones salen de abajo arriba. Sirve para sistemas de cualquier tamaño, también con más ecuaciones que incógnitas o al revés, y es la forma más rápida de resolver en el examen.

La idea: un sistema escalonado se resuelve solo

Recuerda que un sistema es **compatible determinado (SCD)** si tiene una única solución, **compatible indeterminado (SCI)** si tiene infinitas e **incompatible (SI)** si no tiene ninguna.

Compara estos dos sistemas:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2y + 5z = -4 \\ 2x + 5y - z = 27 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 5 \\ 7z = -14 \end{cases}$$

Son **equivalentes** (tienen las mismas soluciones), pero el segundo se resuelve de abajo arriba sin pensar: $z = -2$, después $y = 5 + z = 3$ y por último $x = 6 - y - z = 5$. El método de Gauss consiste en pasar del primero al segundo con operaciones que no cambian las soluciones.

Operaciones elementales

Como las incógnitas siempre están en el mismo orden, se trabaja solo con los números: la **matriz ampliada** A^* , que es la matriz de coeficientes A con la columna de términos independientes añadida tras una barra. Cada fila de A^* es una ecuación. Llamamos $F_1, F_2, \dots$ a sus filas.

DEFINICIÓN · OPERACIONES ELEMENTALES POR FILAS

Estas operaciones transforman el sistema en otro **equivalente**:

1. Intercambiar dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$.
2. Multiplicar una fila por un número **distinto de cero**: $F_i \rightarrow kF_i$, con $k \neq 0$.
3. Sumar a una fila otra multiplicada por un número: $F_i \rightarrow F_i + kF_j$.

Combinando 2 y 3 se obtiene la operación más usada en la práctica: $F_i \rightarrow aF_i + bF_j$, con $a \neq 0$.

Por qué no cambian las soluciones: una solución del sistema cumple todas las ecuaciones, así que también cumple cualquier suma de múltiplos de ellas; y cada operación se puede deshacer ($F_i \rightarrow F_i + kF_j$ se deshace con $F_i \rightarrow$

$F_i - kF_j$), así que no aparecen soluciones nuevas. Por eso es imprescindible $k \neq 0$ al multiplicar: multiplicar una ecuación por 0 la borra y se pierde información.

NOTA · EN SISTEMAS SE PUEDE MULTIPLICAR LA FILA QUE CAMBIA

En el tema de determinantes, $F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1$ multiplicaba el determinante por 2. En un sistema no hay ningún determinante que conservar: multiplicar una ecuación por 2 no cambia sus soluciones. Por eso en Gauss puedes usar $F_i \rightarrow aF_i + bF_j$ (con $a \neq 0$) para evitar fracciones.

Forma escalonada

DEFINICIÓN · MATRIZ ESCALONADA

Una matriz es **escalonada** si:

- las filas nulas (si las hay) están abajo del todo, y
- en cada fila no nula, el primer elemento distinto de cero, llamado **pivote**, está más a la derecha que el pivote de la fila de arriba.

Debajo de cada pivote solo hay ceros: la matriz tiene forma de escalera.

Por ejemplo, las dos primeras matrices son escalonadas y la tercera no (el pivote de la fila 3 no está más a la derecha que el de la fila 2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

El método paso a paso

MÉTODO · MÉTODO DE GAUSS

1. **Escribe A^*** , con todas las ecuaciones ordenadas y un 0 donde falte una incógnita.
2. **Primer pivote**. Pon arriba una fila cuyo primer coeficiente sea cómodo (mejor un 1 o un -1 ; si hace falta, intercambia filas). Haz ceros **debajo** de él en la primera columna con operaciones $F_i \rightarrow F_i + kF_1$ o $F_i \rightarrow aF_i + bF_1$.
3. **Siguiente pivote**. Olvida la primera fila y la primera columna y repite el paso 2 con las filas que quedan, en la siguiente columna.
4. Sigue hasta que la matriz sea **escalonada**. Simplifica las filas que tengan un factor común cuando quieras.
5. **Lee las filas de abajo** para clasificar el sistema (tabla de la sección siguiente).
6. Si es compatible, **resuelve de abajo arriba** (sustitución hacia atrás) y **comprueba** la solución en las ecuaciones originales.

Lo resolvemos con el sistema del principio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & -1 & 27 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 15 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow \frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

La primera columna ya tiene ceros debajo del pivote (la fila 2 ya tenía un 0). Para el segundo pivote conviene el 1 de la fila 3, así que intercambiamos las filas 2 y 3:

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{array} \right)$$

Hay tres pivotes, uno por incógnita. De abajo arriba: $7z = -14$, luego $z = -2$; $y - z = 5$, luego $y = 3$; $x + y + z = 6$, luego $x = 5$. Comprobación en la tercera ecuación original: $2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 - (-2) = 27$. La solución es $(x, y, z) = (5, 3, -2)$.

Con la animación puedes repetir este mismo sistema paso a paso, ver los otros dos casos (indeterminado e incompatible) o escribir tu propio sistema 3×3 : cada operación se hace con fracciones exactas. Puede que elija otros pivotes que tú, pero la solución tiene que ser la misma.

Animación interactiva disponible en la versión web de este apartado.

Cómo se lee el resultado

Cuando A^* ya es escalonada, todo se decide con las filas de abajo:

Lo que aparece	Tipo	Por qué
Una fila $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c)$ con $c \neq 0$	SI	Esa fila es la ecuación $0 = c$, imposible
Ninguna fila $0 = c$ y tantos pivotes como incógnitas	SCD	Cada incógnita se despeja de su fila
Ninguna fila $0 = c$ y menos pivotes que incógnitas	SCI	Las incógnitas sin pivote quedan libres
Las filas $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid 0)$ son la ecuación $0 = 0$: se cumplen siempre y se pueden quitar . Significan que esa ecuación era combinación de las otras.		

En un SCI, las incógnitas que **no** tienen pivote hacen de **parámetros**: se les da un valor libre ($z = t$) y las demás se despejan de abajo arriba en función de él. El número de parámetros es el número de incógnitas menos el número de pivotes.

Por ejemplo, el sistema indeterminado de la animación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Quedan dos pivotes (columnas de x e y) para tres incógnitas: SCI con un parámetro, $z = t$. De la fila 2, $-y - 3t = -5$, luego $y = 5 - 3t$; de la fila 1, $x = 3 - y - t = -2 + 2t$:

$$(x, y, z) = (-2 + 2t, 5 - 3t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Si en el sistema incompatible de la animación haces lo mismo, llegas a una fila $(0 \ 0 \ 0 \mid 1)$: la ecuación $0 = 1$. El número de filas no nulas de la forma escalonada de A y de A^* es su **rango**, una idea que usarás en el teorema de Rouché-Frobenius.

Sistemas que no son cuadrados

Gauss funciona igual con cualquier número de ecuaciones e incógnitas.

- **Más incógnitas que ecuaciones** (por ejemplo 3×4): hay como mucho tantos pivotes como filas, así que siempre quedan incógnitas sin pivote. **Nunca es SCD**: es SCI o SI.
- **Más ecuaciones que incógnitas** (por ejemplo 4×3): al escalonar, alguna fila tiene que quedar con todos los coeficientes nulos. Si es $0 = 0$, sobra; si es $0 = c$ con $c \neq 0$, el sistema es SI. Una ecuación de más no impide que sea SCD.

Gauss con un parámetro

Si los coeficientes dependen de un parámetro m , se escalona igual, con dos precauciones:

MÉTODO • GAUSS CON UN PARÁMETRO

1. **Coloca el parámetro lo más abajo y a la derecha posible:** reordena las ecuaciones (o las incógnitas) para que los pivotes de arriba sean números, no expresiones con m .
2. **No dividas ni multipliques por una expresión con m** que pueda valer 0 sin separar antes ese caso. Si necesitas usar como pivote algo como $m - 1$, estudia aparte $m = 1$.
3. Escalona hasta que m solo aparezca en la última fila, del tipo $(0 \ 0 \ p(m) \mid q(m))$.
4. **Valores críticos:** los que anulan $p(m)$. Para los demás valores, $p(m) \neq 0$ y el sistema es SCD.
5. Para **cada** valor crítico, sustituye en la última fila: si queda $0 = 0$ es SCI; si queda $0 = c$ con $c \neq 0$, es SI. Revisa también las filas de arriba si contienen m .

NOTA • GAUSS-JORDAN

Si, además de hacer ceros debajo de cada pivote, se hacen también **encima** y se dividen las filas para que los pivotes valgan 1, la parte de A se convierte en la identidad y la solución se lee directamente en la última columna. Es el método de Gauss-Jordan que usaste para la [matriz inversa](#). Para resolver un sistema suele ser más rápido parar en la forma escalonada y sustituir hacia atrás.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un sistema 3×3 que empieza con el pivote mal colocado

Resuelve por el método de Gauss el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$$

1. **Primer pivote.** La primera ecuación empieza por 2; la segunda, por 1, que es más cómodo. Intercambiamos $F_1 \leftrightarrow F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

2. **Ceros en la primera columna:**

$$\xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1}]{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array} \right)} \xrightarrow{F_2 \rightarrow -\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array} \right)$$

Dividir la fila 2 entre -3 deja un pivote 1 y evita fracciones en el paso siguiente.

3. **Ceros en la segunda columna:**

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + 7F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array} \right)$$

4. **Clasificación.** Tres pivotes para tres incógnitas y ninguna fila $0 = c$: **SCD**.

5. **Sustitución hacia atrás.** $6z = 18$, luego $z = 3$. $y + z = 5$, luego $y = 2$. $x + 2y + z = 8$, luego $x = 8 - 4 - 3 = 1$.

6. **Comprobación** en las ecuaciones originales: $2 + 2 - 3 = 1$, $1 + 4 + 3 = 8$, $3 - 2 + 6 = 7$.

La solución es $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

EJEMPLO 2

★★ Medio

El mismo primer miembro: SCI o SI

Clasifica y, si es posible, resuelve por Gauss cada sistema.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x + 3y + 5z = 9 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ 2x + 3y + 5z = 9 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Los dos sistemas solo se diferencian en el término independiente de la tercera ecuación, así que hacemos las mismas operaciones a la vez y solo cambia la última columna.

a) 1. Ceros en la primera columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2. **Clasificación.** La última fila es $0 = 0$ y hay dos pivotes (columnas de x e y) para tres incógnitas: **SCI** con un parámetro. La incógnita sin pivote, z , es el parámetro: $z = t$.

3. **De abajo arriba.** Fila 2: $y + t = 1$, luego $y = 1 - t$. Fila 1: $x + 4 - y - 2t = 4 - (1 - t) - 2t = 3 - t$.

$$(x, y, z) = (3 - t, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en la tercera ecuación: $(3 - t) + 2(1 - t) + 3t = 5$ para todo t .

b) Con las mismas operaciones, la última columna pasa a ser $(4, 9 - 8, 6 - 4) = (4, 1, 2)$ y después $(4, 1, 2 - 1) = (4, 1, 1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La última fila es la ecuación $0x + 0y + 0z = 1$, es decir, $0 = 1$: **SI**.

La explicación es la misma en los dos casos: el primer miembro de la tercera ecuación es el de la segunda menos el de la primera. En a) también lo es el término independiente ($9 - 4 = 5$) y la ecuación sobra; en b), $9 - 4 = 5 \neq 6$ y la ecuación contradice a las otras dos.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Gauss con un parámetro: tres casos

Se considera el sistema, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + (m + 2)z = 5 \\ x + (m^2 - m + 1)z = m + 3 \end{cases}$$

- Discútelos según los valores de m usando el método de Gauss.
- Resuélvelo para $m = 0$, tomando $z = t$.
- Resuélvelo para $m = 3$.

- 1. Planteamiento.** El parámetro está solo en la columna de z y en los términos independientes, y la primera ecuación no tiene m : es un buen primer pivote. No hace falta reordenar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & m+2 & 5 \\ 1 & 0 & m^2-m+1 & m+3 \end{array} \right)$$

- 2. Ceros en la primera columna** (operaciones con números, sin dividir por nada que dependa de m):

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{smallmatrix}]{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m^2-m & m+1 \end{array} \right)}$$

Comprueba las cuentas de la fila 2: $(m + 2) - 2 \cdot 1 = m$ y $5 - 2 \cdot 2 = 1$; de la fila 3: $(m^2 - m + 1) - 1 = m^2 - m$ y $(m + 3) - 2 = m + 1$.

- 3. Ceros en la segunda columna.** El pivote es el 1 de la fila 2:

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & m^2-2m & m \end{array} \right)$$

La última fila es la ecuación $m(m - 2)z = m$.

- 4. Valores críticos.** El coeficiente $m(m - 2)$ se anula para $m = 0$ y $m = 2$.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$: el coeficiente no es nulo, hay tres pivotes y el sistema es **SCD**.
- Si $m = 0$: la última fila es $(0 \ 0 \ 0 \mid 0)$, es decir, $0 = 0$. Quedan dos pivotes para tres incógnitas: **SCI**.
- Si $m = 2$: la última fila es $(0 \ 0 \ 0 \mid 2)$, es decir, $0 = 2$: **SI**.

Discusión: $m = 0$, SCI; $m = 2$, SI; cualquier otro valor, SCD.

- Caso $m = 0$.** La matriz escalonada queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La fila 2 da directamente $y = 1$; z no tiene pivote y hace de parámetro, $z = t$. De la fila 1, $x = 2 + y - z = 3 - t$:

$$(x, y, z) = (3 - t, 1, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en la tercera ecuación original con $m = 0$ ($x + z = 3$): $3 - t + t = 3$.

c) **Caso $m = 3$.** La última fila es $(0 \ 0 \ 3 \mid 3)$, luego $3z = 3$ y $z = 1$. La fila 2 es $y + 3z = 1$, luego $y = -2$. La fila 1 da $x = 2 + y - z = 2 - 2 - 1 = -1$.

$$(x, y, z) = (-1, -2, 1)$$

Comprobación con $m = 3$: $-1 + 2 + 1 = 2$; $-2 + 2 + 5 \cdot 1 = 5$; $-1 + 7 \cdot 1 = 6 = m + 3$.

Para el examen: en la discusión, escribe la fila final con el parámetro y estudia **por separado** cada valor que anula su coeficiente, sustituyendo también en el término independiente. Dividir la última fila entre $m(m - 2)$ sin más, o simplificar $m(m - 2)z = m$ a $(m - 2)z = 1$ dividiendo entre m , hace perder el caso $m = 0$ y con él la mitad de la discusión.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • HACER DOS OPERACIONES A LA VEZ CON LAS MISMAS FILAS

Escribir en un solo paso $F_1 \rightarrow F_1 - F_2$ y $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$ parece ahorrar tiempo, pero las dos filas nuevas son opuestas y se pierde una ecuación: el sistema deja de ser equivalente y puede parecer SCI cuando era SCD. En cada paso, la fila que usas para hacer ceros (la del pivote) **no se toca**; solo cambian las de debajo.

ERROR TÍPICO • DIVIDIR ENTRE UNA EXPRESIÓN CON EL PARÁMETRO

Al discutir con Gauss, simplificar una fila como $(m - 1)z = m - 1$ a $z = 1$ es dividir entre $m - 1$, y eso solo vale si $m \neq 1$. El caso $m = 1$ (la fila $0 = 0$) desaparece de la discusión. Antes de dividir o de usar como pivote una expresión con m , separa los valores que la anulan.

ERROR TÍPICO · LEER $0 \cdot z = 0$ COMO $z = 0$

La fila $(0 \ 0 \ 0 \mid 0)$ dice $0 \cdot z = 0$, que se cumple para **cualquier** z : es un SCI y z queda libre. Escribir « $z = 0$ » convierte un SCI en una solución única falsa. Y al revés, $(0 \ 0 \ 0 \mid 5)$ no dice « $z = 5$ », dice $0 = 5$: el sistema es incompatible.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1

★ Básico

Resuelve por el método de Gauss el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ x + 3y - 2z = -7 \end{cases}$$

1. Ceros en la primera columna con el pivote 1 de la fila 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -2 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -11 \end{array} \right)$$

2. Ceros en la segunda columna. Para no usar fracciones, $F_3 \rightarrow 3F_3 + 2F_2$:

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow 3F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array} \right)$$

(fila 3: $3 \cdot (0, 2, -3 \mid -11) + 2 \cdot (0, -3, -1 \mid 0) = (0, 0, -11 \mid -33)$).3. Tres pivotes: SCD. De abajo arriba: $-11z = -33$, $z = 3$; $-3y - z = 0$, $y = -1$; $x = 4 - y - z = 4 + 1 - 3 = 2$.4. Comprobación: $2 - 1 + 3 = 4$; $4 + 1 + 3 = 8$; $2 - 3 - 6 = -7$.

$$(x, y, z) = (2, -1, 3)$$

EJERCICIO 2

★ Básico

Cada matriz es la matriz ampliada, ya escalonada, de un sistema con incógnitas x, y, z (en este orden). Clasifica cada sistema y, si es compatible, resuélvelo.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

- a) Tres pivotes (uno por incógnita) y ninguna fila $0 = c$: **SCD**. De abajo arriba: $2z = 4$, $z = 2$; $y + 3z = 5$, $y = -1$; $x + 2y - z = 3$, $x = 3 + 2 + 2 = 7$. Solución $(7, -1, 2)$.
- b) La última fila es $0x + 0y + 0z = 4$, es decir, $0 = 4$: **SI**. No hace falta mirar las otras filas.
- c) La última fila es $0 = 0$ y sobra. Quedan dos pivotes (columnas de x e y) para tres incógnitas: **SCI**, con z como parámetro, $z = t$. Fila 2: $y = 3 - t$. Fila 1: $x = 4 - y + 2t = 4 - (3 - t) + 2t = 1 + 3t$.

$$(x, y, z) = (1 + 3t, 3 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 3

★ Básico

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \\ 4x - y + 5z = 7 \end{cases}$$

- a) Escalona la matriz ampliada y clasifica el sistema.
b) Resuélvelo tomando $z = t$.

- a) 1. Ceros en la primera columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right)$$

2. Ceros en la segunda columna y simplificación de la fila 2 entre 3:

$$\xrightarrow[F_2 \rightarrow \frac{1}{3}F_2]{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

3. La última fila es $0 = 0$ y hay dos pivotes para tres incógnitas: **SCI** con un parámetro.

- b) $z = t$. Fila 2: $y - t = 1$, luego $y = 1 + t$. Fila 1: $x + y - 2t = 1 + 1 + t - 2t = 2 - t$.

$$(x, y, z) = (2 - t, 1 + t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en la tercera ecuación: $4(2 - t) - (1 + t) + 5t = 8 - 1 = 7$ para todo t . (La tercera ecuación es el doble de la primera más la segunda.)

EJERCICIO 4

★★ Medio

Resuelve por Gauss estos sistemas de cuatro ecuaciones con tres incógnitas. Si alguno es incompatible, indícalo.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \\ \\ \text{b)} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 10 \end{cases} \end{array}$$

a) 1. Ceros en la primera columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow[F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - F_1, F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \end{array} \right)$$

2. Simplificamos $F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2$, $F_3 \rightarrow -F_3$, $F_4 \rightarrow -\frac{1}{2}F_4$ y hacemos ceros con el pivote de la fila 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[F_4 \rightarrow F_4 - F_2]{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_4 \rightarrow 3F_4 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

3. La cuarta fila es $0 = 0$ (la cuarta ecuación sobra). Tres pivotes: **SCD**. $3z = 9$, $z = 3$; $y = 2$; $x = 6 - 2 - 3 = 1$. Solución $(1, 2, 3)$. Comprobación en la cuarta: $3 + 2 + 3 = 8$.

b) Las tres primeras ecuaciones son las mismas, así que las filas 1 a 3 se escalonan igual y dan $z = 3$, $y = 2$, $x = 1$. Solo cambia la cuarta: $F_4 \rightarrow F_4 - F_1$ da $(0, 1, 2 \mid 4)$; $F_4 \rightarrow F_4 - F_2$ da $(0, 0, 2 \mid 2)$; y $F_4 \rightarrow 3F_4 - 2F_3$ da

$$(0 \ 0 \ 0 \mid 6 - 18) = (0 \ 0 \ 0 \mid -12)$$

La ecuación $0 = -12$ es imposible: **SI**. Se comprueba directamente: el único punto que cumple las tres primeras ecuaciones es $(1, 2, 3)$, y en la cuarta da $1 + 4 + 9 = 14 \neq 10$.

EJERCICIO 5

★★ Medio

Se considera el sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ x - y + z - w = 0 \\ 2x + y + 3z + w = 7 \end{cases}$$

- a) Resuélvelo por Gauss, tomando $w = t$ como parámetro.
 b) Halla la solución del sistema en la que $y = w$.

- a) 1. Ceros en la primera columna:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

2. Simplificamos $F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2$ y hacemos cero debajo de su pivote:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3. **Clasificación.** Tres pivotes (columnas de x, y, z) para cuatro incógnitas y ninguna fila $0 = c$: SCI con $4 - 3 = 1$ parámetro. La incógnita sin pivote es w , así que $w = t$ es una elección natural.

4. **De abajo arriba.** Fila 3: $z = 1$. Fila 2: $y + t = 2$, $y = 2 - t$. Fila 1: $x = 4 - y - z - t = 4 - (2 - t) - 1 - t = 1$.

$$(x, y, z, w) = (1, 2 - t, 1, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Curiosamente, x y z valen lo mismo en todas las soluciones: solo varían y y w , y siempre suman 2.
 Comprobación en la tercera ecuación: $2 + (2 - t) + 3 + t = 7$.

- b) $y = w \iff 2 - t = t \iff t = 1$, que da $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 1)$. Comprobación: $4, 0$ y $2 + 1 + 3 + 1 = 7$.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Un nutricionista prepara un menú con tres alimentos, A, B y C. Cada ración aporta los gramos de nutrientes de la tabla:

	A	B	C
Proteínas	10	5	20
Hidratos de carbono	20	30	10
Grasas	5	10	5

El menú debe aportar exactamente 60 g de proteínas, 130 g de hidratos y 40 g de grasas. Sean x , y , z las raciones de A, B y C.

- a) Plantea el sistema y resuélvelo por Gauss.
- b) Si las grasas tuvieran que ser 50 g (sin cambiar lo demás), resuelve el nuevo sistema y explica si el menú es posible.

- a) 1. **Planteamiento.** Una ecuación por nutriente:

$$\begin{cases} 10x + 5y + 20z = 60 \\ 20x + 30y + 10z = 130 \\ 5x + 10y + 5z = 40 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 4z = 12 \\ 2x + 3y + z = 13 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

(dividiendo entre 5, 10 y 5, que no cambia las soluciones).

2. **Gauss.** Ponemos arriba la ecuación que empieza por 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow 3F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array} \right)$$

3. **SCD.** $z = 1$; $-3y + 2 = -4$, $y = 2$; $x = 8 - 4 - 1 = 3$. Son **3 raciones de A, 2 de B y 1 de C.**

Comprobación: $30 + 10 + 20 = 60$, $60 + 60 + 10 = 130$, $15 + 20 + 5 = 40$.

- b) Ahora la ecuación de grasas es $5x + 10y + 5z = 50$, o sea $x + 2y + z = 10$. Repitiendo las operaciones con el nuevo término independiente, la última columna pasa de $(10, 12, 13)$ a $(10, 12 - 20, 13 - 20) = (10, -8, -7)$ y después a $(10, -8, -21 + 8) = (10, -8, -13)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \end{array} \right)$$

$$z = \frac{13}{5}; -3y = -8 - \frac{26}{5} = -\frac{66}{5}, y = \frac{22}{5}; x = 10 - \frac{44}{5} - \frac{13}{5} = -\frac{7}{5}.$$

$$(x, y, z) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{22}{5}, \frac{13}{5} \right)$$

El sistema tiene solución única, pero $x < 0$: harían falta raciones negativas de A. **El menú no es posible.** En un problema con contexto no basta con resolver: hay que comprobar que la solución tiene sentido.

EJERCICIO 7 ★★ Medio

Se considera el sistema, que depende del parámetro real k ,

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + 2y + (k - 1)z = 4 \end{cases}$$

- a) Discútelo por Gauss según los valores de k .
- b) Resuélvelo para $k = 2$.
- c) Halla el valor de k para el que la solución cumple $y = 0$.

a) 1. Escalonamos (el parámetro ya está en la última fila y en la columna de z):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & k-1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & k-2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \end{array} \right)$$

2. Última fila: $(k - 1)z = 2$.

- Si $k \neq 1$: tres pivotes, **SCD**, con $z = \frac{2}{k-1}$.
 - Si $k = 1$: la fila es $(0 \ 0 \ 0 \mid 2)$, es decir, $0 = 2$: **SI**.
- b) Con $k = 2$: $z = 2$; fila 2: $y - z = -1$, $y = 1$; fila 1: $x = 3 - 1 - 2 = 0$. Solución $(0, 1, 2)$. Comprobación en la tercera ecuación con $k = 2$: $0 + 2 + 2 = 4$.
- c) Para $k \neq 1$, la fila 2 da $y = z - 1 = \frac{2}{k-1} - 1 = \frac{3-k}{k-1}$. Entonces $y = 0 \iff k = 3$ (que es distinto de 1, así que el sistema es SCD). Con $k = 3$: $z = 1$, $y = 0$, $x = 2$; comprobación: $2 + 0 + 2 \cdot 1 = 4$.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

Se considera el sistema, con parámetros reales a y b ,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + az = b \end{cases}$$

- a) Discútelo por Gauss según los valores de a y b .
 b) Resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado, tomando $z = t$.
 c) Resuélvelo para $a = 6$ y $b = 4$.

- a) 1. **Escalonamos.** Los parámetros están en la última fila, así que basta con operaciones numéricas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & a & b \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 & b-1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-3 \end{array} \right)$$

2. **Última fila:** $(a-5)z = b-3$. Hay que mirar primero el coeficiente (depende de a) y después, si se anula, el término independiente (depende de b):

- Si $a \neq 5$ (cualquier b): tres pivotes, **SCD**.
- Si $a = 5$ y $b = 3$: la fila es $0 = 0$; dos pivotes para tres incógnitas: **SCI**.
- Si $a = 5$ y $b \neq 3$: la fila es $0 = b-3 \neq 0$: **SI**.

- b) Con $a = 5$, $b = 3$: $z = t$; fila 2, $y = 1 - 2t$; fila 1, $x = 1 - y - z = 1 - (1 - 2t) - t = t$.

$$(x, y, z) = (t, 1 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en la tercera ecuación: $t + 3(1 - 2t) + 5t = 3$ para todo t .

- c) Con $a = 6$, $b = 4$: la última fila es $z = 1$; $y = 1 - 2 = -1$; $x = 1 - (-1) - 1 = 1$. Solución $(1, -1, 1)$.
 Comprobación: $1 - 3 + 6 = 4$.

Para el examen: con dos parámetros, la discusión tiene tres casos y hay que escribirlos con las dos condiciones: « $a = 5$ y $b = 3$ » no es lo mismo que « $a = 5$ o $b = 3$ ». Un error frecuente es decir que con $b = 3$ el sistema es SCI sin exigir $a = 5$: si $a \neq 5$ es SCD, valga lo que valga b .

EJERCICIO 9 ★★★ Difícil

Se consideran los sistemas

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 1 \\ 2x + 4z = 4 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x + ay + 3z = b \\ 2x + y + cz = 5 \end{cases}$$

- a) Resuelve S_1 por Gauss, tomando $z = t$.
 b) Halla a , b y c para que S_1 y S_2 sean equivalentes (que tengan exactamente las mismas soluciones).

a) Escalonamos S_1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

SCI con un parámetro. Con $z = t$: fila 2, $-2y + 2t = -2$, $y = 1 + t$; fila 1, $x = 3 - (1 + t) - t = 2 - 2t$.

$$(x, y, z) = (2 - 2t, 1 + t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Es una recta de soluciones.

b) 1. **Condición necesaria.** Todas las soluciones de S_1 deben cumplir S_2 . Sustituimos el punto genérico en cada ecuación de S_2 y exigimos que se cumpla **para todo** t :

- Primera: $(2 - 2t) + a(1 + t) + 3t = b \iff (2 + a) + (a + 1)t = b$. Para todo t : $a + 1 = 0$ y $2 + a = b$, luego $a = -1$, $b = 1$.
- Segunda: $2(2 - 2t) + (1 + t) + ct = 5 \iff 5 + (c - 3)t = 5$. Para todo t : $c = 3$.

2. **No basta:** S_2 no debe tener soluciones que no sean de S_1 . Con $a = -1$, $b = 1$, $c = 3$:

$$S_2 : \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases} \xrightarrow{F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1} \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Dos pivotes: SCI con un parámetro. Con $z = t$: $y = 1 + t$ y $x = 1 + y - 3t = 2 - 2t$. Es la **misma recta**, así que los sistemas son equivalentes.

$a = -1$, $b = 1$, $c = 3$. Cuadra con lo que sabes de sistemas equivalentes: la primera ecuación de S_2 es la segunda de S_1 , y la segunda es $\frac{3}{2}$ de la primera de S_1 más $\frac{1}{2}$ de su segunda.

Para el examen: para que dos sistemas sean equivalentes no basta con que compartan una solución, ni siquiera con que las de uno cumplan el otro: hay que comprobar que tienen el **mismo** conjunto de soluciones. Aquí, si las dos ecuaciones de S_2 fueran proporcionales, S_2 tendría un plano de soluciones y no serían equivalentes.

Se considera el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y = 3 \\ x + 2y + (m-1)z = m+2 \\ 2x + 2y + 3z = m+2 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m usando el método de Gauss. (1,25 puntos)
 b) Resuélvelo en los casos en que sea compatible. (0,75 puntos)
 c) ¿Existe algún valor de m para el que el sistema sea compatible indeterminado? Justifícalo. (0,5 puntos)

a) 1. Ceros en la primera columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & m-1 & m+2 \\ 2 & 2 & 3 & m+2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_4 \rightarrow F_4 - 2F_1]{F_2 \rightarrow F_2 - F_1, F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & m-2 & m \\ 0 & 0 & 1 & m-2 \end{array} \right)$$

2. Ceros en la segunda columna con el pivote de la fila 2:

$$\xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & 0 & 1 & m-2 \end{array} \right)$$

3. Tercer pivote. Para no usar $m-1$ como pivote (puede valer 0), intercambiamos las filas 3 y 4 y usamos el 1:

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m-2 \\ 0 & 0 & m-1 & m-1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_4 \rightarrow F_4 - (m-1)F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & (m-1)(3-m) \end{array} \right)$$

(término de la fila 4: $(m-1) - (m-1)(m-2) = (m-1)(1-m+2) = (m-1)(3-m)$). La operación $F_4 \rightarrow F_4 - (m-1)F_3$ es válida para todo m , porque no multiplica F_4 por nada.

4. **Discusión.** Las tres primeras filas tienen pivote en las tres columnas para cualquier m . Todo depende de la cuarta, $0 = (m-1)(3-m)$:

- Si $m = 1$ o $m = 3$: la fila es $0 = 0$ y sobra. Tres pivotes para tres incógnitas: **SCD**.
- Si $m \neq 1$ y $m \neq 3$: la fila es $0 = c$ con $c \neq 0$: **SI**.

b) En los dos casos compatibles, de abajo arriba: $z = m-2$, $y = 1 + z = m-1$, $x = 2 - y - z = 5 - 2m$.

- $m = 1$: $(x, y, z) = (3, 0, -1)$. Comprobación: $3 + 0 - 1 = 2$; $3 + 0 = 3$; $3 + 0 + 0 = 3 = m + 2$; $6 + 0 - 3 = 3 = m + 2$.
- $m = 3$: $(x, y, z) = (-1, 2, 1)$. Comprobación: $-1 + 2 + 1 = 2$; $-1 + 4 = 3$; $-1 + 4 + 2 = 5 = m + 2$; $-2 + 4 + 3 = 5 = m + 2$.

c) **No.** Para cualquier m , la matriz escalonada de coeficientes tiene tres pivotes (los 1 de las posiciones $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 3)$), uno por incógnita. Cuando el sistema es compatible, todas las incógnitas se despejan y la solución es única. Nunca queda una incógnita libre, así que nunca es SCl.

Para el examen: en un sistema con más ecuaciones que incógnitas, la discusión se decide en la fila que queda con todos los coeficientes nulos. Fíjate en la elección del pivote en el paso 3: usar $m - 1$ habría obligado a separar $m = 1$ antes de seguir. Y escribe la conclusión de c) con la palabra clave: «tres pivotes para tres incógnitas en todos los casos».

Resumen

- Operaciones elementales (intercambiar filas, multiplicar una fila por $k \neq 0$, sumarle a una fila un múltiplo de otra) transforman el sistema en otro equivalente. En sistemas vale $F_i \rightarrow aF_i + bF_j$ con $a \neq 0$.
- Gauss: con la matriz ampliada A^* , haz ceros debajo de cada pivote, columna a columna, hasta la forma escalonada; después resuelve de abajo arriba y comprueba.
- Lectura: una fila $0 = c$ con $c \neq 0$ da SI; si no la hay, tantos pivotes como incógnitas da SCD y menos pivotes da SCl.
- En un SCl, las incógnitas sin pivote son los parámetros; su número es incógnitas menos pivotes. Una fila $0 = 0$ no dice que una incógnita valga 0: sobra.
- Más incógnitas que ecuaciones: nunca SCD. Más ecuaciones que incógnitas: las filas que sobran dan $0 = 0$ o $0 = c$.
- Con parámetro: deja el parámetro en la última fila, no dividas por expresiones que puedan anularse y estudia cada valor crítico por separado, también en el término independiente.

Teorema de Rouché-Frobenius

IDEA CLAVE

El teorema de Rouché-Frobenius dice qué tipo de sistema tienes comparando dos números: el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada. Es la herramienta con la que se responde a «discute el sistema según los valores de m », la pregunta de sistemas más habitual de la PAU.

El sistema visto por columnas

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se escribe en forma matricial como $AX = B$, donde A es la **matriz de coeficientes** ($m \times n$), X la columna de incógnitas y B la columna de términos independientes. Si a A le añades la columna B obtienes la **matriz ampliada** $A^* = (A \mid B)$, de dimensión $m \times (n + 1)$.

Recuerda la clasificación: un sistema es **compatible determinado (SCD)** si tiene una única solución, **compatible indeterminado (SCI)** si tiene infinitas e **incompatible (SI)** si no tiene ninguna.

Mira el sistema por columnas. Por ejemplo,

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \iff x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolver el sistema es buscar números x, y que combinen las columnas de A para obtener B . Por tanto, **el sistema tiene solución si y solo si B es combinación lineal de las columnas de A** . Y eso ocurre justo cuando añadir la columna B no aumenta el rango: si B «ya estaba» en las columnas de A , no aporta nada nuevo.

El teorema

TEOREMA • TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Sea un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas, matriz de coeficientes A y matriz ampliada A^* .

- El sistema es **compatible** si y solo si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$.
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$ (el número de incógnitas), es **compatible determinado**.
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = r < n$, es **compatible indeterminado**, y sus soluciones dependen de $n - r$ parámetros.
- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$, es **incompatible**.

La intuición del número de parámetros: el rango r cuenta cuántas ecuaciones son de verdad independientes. Con r ecuaciones útiles se pueden despejar r incógnitas; las otras $n - r$ quedan libres y hacen de parámetros. Por eso un

SCI con 3 incógnitas y rango 2 tiene soluciones con un parámetro (una recta de soluciones), y con rango 1, con dos parámetros (un plano).

Rangos	Tipo	Soluciones
$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$	SCD	una
$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = r < n$	SCI	infinitas, con $n - r$ parámetros
$\text{rg}(A) < \text{rg}(A^*)$	SI	ninguna

Fíjate en que se compara el rango con el número de **incógnitas**, no con el de ecuaciones. Un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas puede ser SCD.

Relaciones entre los rangos

A está dentro de A^* (es A^* sin su última columna), y añadir una columna solo puede mantener el rango o subirlo en uno. Además, el rango nunca supera el número de filas ni el de columnas (lo viste en el rango de una matriz):

$$\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A^*) \leq \text{rg}(A) + 1, \quad \text{rg}(A) \leq \min(m, n)$$

De aquí salen conclusiones que se usan sin hacer cuentas:

- **Más incógnitas que ecuaciones** ($m < n$): $\text{rg}(A) \leq m < n$, así que **nunca es SCD**. Es SCI o SI.
- **Sistema cuadrado con $|A| \neq 0$** : $\text{rg}(A) = n$, y como A^* tiene n filas, $\text{rg}(A^*) = n$ también. Es SCD, sean cuales sean los términos independientes.
- **Una ecuación más que incógnitas** ($m = n + 1$): A^* es cuadrada. Si $|A^*| \neq 0$, entonces $\text{rg}(A^*) = n + 1 > n \geq \text{rg}(A)$ y es SI.
- **Sistema homogéneo** ($B = O$): la columna de ceros no aumenta el rango, así que siempre es compatible (tiene al menos la solución $x = y = z = 0$).
- **SI**: siempre es $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) + 1$.

Cómo se calculan los rangos

Los rangos se calculan como en el tema de determinantes, por menores (orlando) o por Gauss. Hay un ahorro importante: **calcula primero $\text{rg}(A)$ y aprovecha el menor que encuentres para A^*** . Si en A tienes un menor de orden r distinto de cero, ese menor también está en A^* , así que $\text{rg}(A^*) \geq r$, y solo falta orlarlo con la columna B .

MÉTODO · DISCUTIR UN SISTEMA CON UN PARÁMETRO POR ROUCHÉ

1. Escribe A y A^* .
2. Si A es cuadrada, calcula $|A|$ en función del parámetro y halla los valores que lo anulan (**valores críticos**). Si no es cuadrada, busca un menor del mayor orden posible y halla cuándo se anula.
3. Para los valores no críticos, $\text{rg}(A)$ es máximo; deduce $\text{rg}(A^*)$ y el tipo.
4. Para **cada** valor crítico, sustituye el parámetro y calcula $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$ con números. Clasifica.
5. Resume la discusión en una lista: un caso por línea.

Sistemas 2x2 y su interpretación

Con dos ecuaciones y dos incógnitas, cada ecuación es una recta del plano y el teorema dice cómo se cortan:

- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$: las rectas se cortan en un punto (SCD).
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1$: las dos ecuaciones son proporcionales, es la misma recta (SCI, un parámetro).
- $\text{rg}(A) = 1, \text{rg}(A^*) = 2$: coeficientes proporcionales pero términos independientes no; rectas paralelas (SI).

Por ejemplo, en $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = 1 \end{cases}$ la segunda fila de A es -2 veces la primera, así que $\text{rg}(A) = 1$; pero $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ y $\text{rg}(A^*) = 2$. Son rectas paralelas: SI.

Sistemas con más incógnitas que ecuaciones

En un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, A es 3×4 y $\text{rg}(A) \leq 3 < 4$: no puede ser SCD. Para estudiarlo, busca un menor de orden 3 no nulo en A . Si lo hay, $\text{rg}(A) = 3$, y como A^* solo tiene 3 filas, $\text{rg}(A^*) = 3$: SCI con $4 - 3 = 1$ parámetro. Si todos los menores de orden 3 de A se anulan, $\text{rg}(A) \leq 2$ y hay que mirar la columna B para saber si es SCI con 2 parámetros o SI.

NOTA • DECIDIR SIN RESOLVER

Rouché clasifica el sistema **sin resolverlo**. En el examen, la discusión se puntúa por separado de la resolución, y si un enunciado dice «discute» basta con los rangos. Para resolver después cada caso usarás el método de Gauss o la regla de Cramer.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Clasificar un sistema con los rangos

Sin resolverlo, clasifica el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{cases}$$

- a) Calcula $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$.
- b) Clasifica el sistema.

1. Las matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

2. **Rango de A .** La tercera fila de A es la suma de las dos primeras: $(1, 2, -1) + (2, -1, 3) = (3, 1, 2)$. Por tanto $|A| = 0$ y $\text{rg}(A) < 3$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$.

3. **Rango de A^* .** Orlamos ese menor con la tercera fila y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(-5 - 1) - 2(10 - 3) + 3(2 + 3) = -6 - 14 + 15 = -5 \neq 0$$

Luego $\text{rg}(A^*) = 3$.

- a) $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$.
- b) Como $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$, el sistema es **incompatible** (SI). Se ve también sin determinantes: la tercera ecuación tiene el primer miembro igual a la suma de los de las otras dos, pero $3 + 1 = 4 \neq 5$. Si existiera una solución, daría $4 = 5$.

Discusión de un sistema 3×3 con un parámetro

Discute, según los valores del parámetro real a , el sistema

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

1. **Determinante de A .** Sumando las tres columnas a la primera, todos los elementos de la primera columna pasan a valer $a + 2$:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

(el último determinante se calcula restando la primera fila a las otras dos, que da una triangular con diagonal $1, a-1, a-1$).

2. **Valores críticos.** $|A| = 0 \iff a = 1$ o $a = -2$.

3. Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$: $|A| \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*) = n$. **SCD.**

4. Si $a = 1$: las tres ecuaciones son $x + y + z = 1$. Todas las filas de A^* son iguales: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 3$. **SCI** con $3 - 1 = 2$ parámetros.

5. Si $a = -2$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

El menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ y $|A| = 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$. Orlando con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

luego $\text{rg}(A^*) = 3$. **SI.** (Se ve también sumando las tres ecuaciones: el primer miembro da 0 y el segundo 3.)

Resumen de la discusión: $a = 1$, SCI; $a = -2$, SI; cualquier otro valor, SCD.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas

Se considera el sistema, con incógnitas x, y, z, w y parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ 2x + y + 3z + w = 3 \\ 3x + 2y + m^2z + 2w = m + 2 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m .
- Indica cuántos parámetros tienen las soluciones cuando $m = 2$ y cuántos cuando $m \neq \pm 2$.
- Resuélvelo para $m = 2$, tomando $z = s$ y $w = t$ como parámetros.

a) 1. **Lo que se sabe sin cuentas.** A es 3×4 , así que $\text{rg}(A) \leq 3 < 4$: el sistema **nunca** es SCD. Solo puede ser SCI o SI.

2. **Un menor de orden 2.** Con las dos primeras filas y columnas, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Luego $\text{rg}(A) \geq 2$ para todo m .

3. **Orlamos con la tercera fila.** Hay dos maneras de hacerlo dentro de A : con la columna 3 o con la columna 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & m^2 \end{vmatrix} = 4 - m^2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(el segundo tiene dos columnas iguales). El primero se anula si y solo si $m = 2$ o $m = -2$.

4. **Si $m \neq \pm 2$:** hay un menor de orden 3 no nulo en A , luego $\text{rg}(A) = 3$. A^* tiene 3 filas, así que $\text{rg}(A^*) = 3$. Como $3 < 4$: **SCI**.

5. **Si $m = \pm 2$:** los dos orlados de A se anulan, así que $\text{rg}(A) = 2$. Para A^* falta orlar con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & m+2 \end{vmatrix} = 2 - m$$

- Para $m = 2$ vale 0: $\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A)$. **SCI**.
- Para $m = -2$ vale 4 $\neq 0$: $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$. **SI**.

Discusión: $m = -2$, SI; $m = 2$, SCI; $m \neq \pm 2$, SCI.

b) El número de parámetros es $n - r$, con $n = 4$ incógnitas:

- $m = 2$: $4 - 2 = 2$ parámetros.
- $m \neq \pm 2$: $4 - 3 = 1$ parámetro.

Los dos casos son SCI, pero no «igual de indeterminados»: por eso conviene decir siempre cuántos parámetros hay.

c) Para $m = 2$ la tercera ecuación es $3x + 2y + 4z + 2w = 4$, que es la suma de las dos primeras (sobra). Quedan

$$\begin{cases} x + y = 1 - z - w \\ 2x + y = 3 - 3z - w \end{cases}$$

Restando la primera de la segunda: $x = 2 - 2z$. Sustituyendo: $y = 1 - z - w - (2 - 2z) = -1 + z - w$. Con $z = s, w = t$:

$$(x, y, z, w) = (2 - 2s, -1 + s - t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Comprobación con $s = t = 0$: $(2, -1, 0, 0)$ cumple $2 - 1 = 1$, $4 - 1 = 3$ y $6 - 2 = 4$.

Para el examen: en un sistema con más incógnitas que ecuaciones, escribe al principio « $\text{rg}(A) \leq 3 < 4$, nunca es SCD»: ahorra trabajo y suele puntuar. Al orlar, prueba **todas** las columnas posibles antes de decir que el rango baja: aquí el menor con la columna 4 es cero siempre, y si solo se mira ese se concluye mal que $\text{rg}(A) = 2$ para todo m .

Errores típicos

ERROR TÍPICO • COMPARAR EL RANGO CON EL NÚMERO DE ECUACIONES

El rango se compara con el número de **incógnitas**. Un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ **no** es SCD: le sobra una incógnita y es SCI con un parámetro. Y uno de 4 ecuaciones con 3 incógnitas y rangos iguales a 3 sí es SCD, aunque tenga «más ecuaciones de la cuenta».

ERROR TÍPICO • DAR EL RANGO DE A^* POR EL DETERMINANTE DE A

Si $|A| = 0$ para un valor del parámetro, eso solo dice que $\text{rg}(A) < 3$. No dice nada de A^* : hay que orlar con la columna de términos independientes, **con el valor del parámetro sustituido**. Escribir « $|A| = 0$, luego es SCI» sin calcular $\text{rg}(A^*)$ es el error más repetido en esta pregunta, y la mitad de las veces el sistema resulta ser SI.

ERROR TÍPICO • OLVIDAR ALGÚN ORLADO

Para afirmar que el rango de una matriz 3×4 es 2 hay que comprobar que se anulan **todos** los orlados del menor de orden 2 (con cada columna que quede). Basta uno no nulo para que el rango sea 3.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Clasifica cada sistema con los datos que se dan. En los compatibles indeterminados, indica además el número de parámetros de la solución.

- a) Un sistema con 3 incógnitas, $\text{rg}(A) = 3$ y $\text{rg}(A^*) = 3$.
 - b) Un sistema con 3 incógnitas, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$.
 - c) Un sistema con 4 incógnitas, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 2$.
-
- a) Los rangos coinciden y valen 3, el número de incógnitas: **SCD**.
 - b) Los rangos son distintos: **SI**. (Observa que $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) + 1$, como ocurre siempre en un SI.)
 - c) Los rangos coinciden (2) pero son menores que el número de incógnitas (4): **SCI**, con $4 - 2 = 2$ parámetros.

EJERCICIO 2

★ Básico

Clasifica cada sistema calculando los rangos de A y de A^* , e interpreta el resultado con las dos rectas del plano.

- a)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = -2 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$, y $A \neq O$: $\text{rg}(A) = 1$. En A^* , el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$: $\text{rg}(A^*) = 2$. **SI**: rectas paralelas.

b) A es la misma: $\text{rg}(A) = 1$. Ahora la segunda fila de A^* , $(-4, 6, -2)$, es -2 veces la primera, $(2, -3, 1)$: $\text{rg}(A^*) = 1$. Rangos iguales y menores que 2: **SCI**. Es la misma recta escrita dos veces.

c) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$. **SCD**: rectas que se cortan en un punto.

EJERCICIO 3

★ Básico

Sin resolverlo, estudia el sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

- a) Calcula $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$.
b) Clasifícalo e indica, si procede, cuántos parámetros tiene la solución.

- a) 1. $|A|$. La tercera fila de A es la segunda menos la primera: $(2, 1, -1) - (1, -1, 2) = (1, 2, -3)$. Luego $|A| = 0$ y $\text{rg}(A) < 3$.

2. El menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$: $\text{rg}(A) = 2$.

3. A^* . El único orlado de ese menor que no está en A es el que usa la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2 - 6) + 1(4 - 3) + 1(4 - 1) = -4 + 1 + 3 = 0$$

Así que $\text{rg}(A^*) = 2$. (Cuadra: el término independiente de la tercera ecuación también es el de la segunda menos el de la primera, $3 - 1 = 2$.)

- b) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: **SCI** con $3 - 2 = 1$ parámetro.

EJERCICIO 4

★★ Medio

Se considera el sistema

$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

- a) Discútelos según los valores del parámetro real m .
- b) Resuélvelo para $m = 1$, tomando $y = t$ como parámetro.
- c) Resuélvelo para $m = 2$.

a) 1. $|A| = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$, que se anula para $m = 1$ y $m = -1$.

2. Si $m \neq \pm 1$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$. **SCD**.

3. Si $m = 1$: las dos ecuaciones son $x + y = 2$. $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 2$. **SCI**.

4. Si $m = -1$: $A^* = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$. $\text{rg}(A) = 1$ (filas opuestas), pero $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, luego $\text{rg}(A^*) = 2$. **SI**. Son las rectas paralelas $-x + y = 2$ y $-x + y = 0$.

Discusión: $m = 1$, SCI; $m = -1$, SI; $m \neq \pm 1$, SCD.

b) Con $m = 1$ queda una sola ecuación, $x + y = 2$. Con $y = t$: $x = 2 - t$. Soluciones $(2 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

c) Con $m = 2$: $2x + y = 2$ y $x + 2y = 3$. Multiplicando la segunda por 2 y restándole la primera: $3y = 4$, $y = \frac{4}{3}$. Entonces $x = 3 - 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$. Comprobación: $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$.

EJERCICIO 5

★★ Medio

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + kz = 3 \\ x + ky + 2z = -1 \end{cases}$$

- a) Discútelos según los valores del parámetro real k .
 b) Resuélvelo en el caso en que sea compatible indeterminado, tomando $z = t$.

- a) 1. **Determinante.** Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = 1(4 - k^2) - 1(2 - k) + 1(k - 2) = 2k - k^2 = k(2 - k)$$

Se anula para $k = 0$ y $k = 2$.

2. Si $k \neq 0$ y $k \neq 2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD.**

3. Si $k = 0$: las filas de A son $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 2)$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$.

Orlando con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\text{rg}(A^*) = 2$. **SCI** (un parámetro).

4. Si $k = 2$: las ecuaciones segunda y tercera son $x + 2y + 2z = 3$ y $x + 2y + 2z = -1$: mismo primer miembro, distinto segundo. Con rangos: el mismo menor da $\text{rg}(A) = 2$ y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

luego $\text{rg}(A^*) = 3$. **SI.**

Discusión: $k = 0$, SCI; $k = 2$, SI; resto, SCD.

- b) Para $k = 0$ basta con las dos primeras ecuaciones (las del menor no nulo): $x + y + z = 1$ y $x + 2y = 3$.
 Con $z = t$: restando la primera de la segunda, $y - t = 2$, luego $y = 2 + t$, y $x = 1 - y - t = -1 - 2t$.

$$(x, y, z) = (-1 - 2t, 2 + t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en la tercera ($x + 2z = -1$): $-1 - 2t + 2t = -1$.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Se considera el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 2 \\ 3x + ky + z = 2k \end{cases}$$

- Calcula el determinante de la matriz ampliada A^* en función de k .
- Discute el sistema según los valores de k .
- Resuélvelo cuando sea compatible.

- Hacemos ceros en la primera columna de A^* con $F_2 - 2F_1$, $F_3 - F_1$ y $F_4 - 3F_1$ (no cambian el determinante) y desarrollamos por esa columna:

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & k-3 & -2 & 2k-9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ k-3 & -2 & 2k-9 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna:

$$-3(16 - 4k) - (1 - 2k) + (k - 3)(-7) = -48 + 12k - 1 + 2k - 7k + 21 = 7k - 28 = 7(k - 4)$$

1. **Rango de A .** El menor de las tres primeras filas es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 3$ para todo k .

2. Si $k \neq 4$: $|A^*| \neq 0$, luego $\text{rg}(A^*) = 4 \neq 3$. **SI.**

3. Si $k = 4$: $|A^*| = 0$ y $\text{rg}(A^*) = 3 = \text{rg}(A) = n$. **SCD.**

- Para $k = 4$, las tres primeras ecuaciones forman un sistema con $|A| = 7 \neq 0$ y la cuarta sobra. De la primera y la tercera: sumándolas, $2x + 3y = 5$; de la primera y la segunda, restándolas, $-x + 2y = 1$, es decir, $x = 2y - 1$. Entonces $2(2y - 1) + 3y = 5$, $7y = 7$, $y = 1$, $x = 1$ y $z = 3 - 1 - 1 = 1$. Comprobación en la cuarta: $3 + 4 + 1 = 8 = 2 \cdot 4$.

EJERCICIO 7

★★ Medio

En una frutería, x , y y z son los precios en euros del kilo de manzanas, de naranjas y de plátanos. Se conservan tres tiques de compras de distintos clientes:

- 1 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos: 10 euros.
- 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 3 kg de plátanos: 22 euros.
- 3 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y k kg de plátanos: 37 euros (el número k está borroso).

- a) Discute el sistema que forman los tres tiques según los valores de k .
- b) Se sabe que los tiques son correctos. ¿Qué valor de k es imposible?
- c) Si $k = 5$, calcula los precios.

a) 1. El sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 3z = 22 \\ 3x + 2y + kz = 37 \end{cases}$$

2. **Determinante.** $|A| = 1(k - 6) - 1(2k - 9) + 1(4 - 3) = 4 - k$, que se anula solo para $k = 4$.

3. Si $k \neq 4$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD.**

4. Si $k = 4$: el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$, y

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 22 \\ 3 & 2 & 37 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

da $\text{rg}(A^*) = 3$. **SI.** Se ve también así: con $k = 4$, el tercer tique tendría las cantidades de los dos primeros juntos, y debería costar $10 + 22 = 32$ euros, no 37.

- b) Si los tiques son correctos, los precios reales cumplen las tres ecuaciones y el sistema tiene solución. Para $k = 4$ es incompatible, así que $k = 4$ es imposible.
- c) Con $k = 5$: restando a la segunda ecuación el doble de la primera, $-y + z = 2$; restando a la tercera el triple de la primera, $-y + 2z = 7$. Restando estas dos, $z = 5$; entonces $y = z - 2 = 3$ y $x = 10 - 3 - 5 = 2$. Las manzanas cuestan 2 euros/kg, las naranjas 3 euros/kg y los plátanos 5 euros/kg. Comprobación: $6 + 6 + 25 = 37$.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

Clasifica cada sistema (SCD, SCI o SI) usando solo el teorema de Rouché-Frobenius y las relaciones entre rangos, sin datos adicionales. En el apartado b), da también el número de parámetros.

- a) Un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas cuya matriz ampliada A^* (de orden 4) tiene determinante distinto de cero.
- b) Un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas en el que $\text{rg}(A) = 2$.
- c) Un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas en el que $\text{rg}(A) = 2$ y la columna de términos independientes es la suma de las dos primeras columnas de A .
- d) Un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas en el que $|A| \neq 0$.

- a) $|A^*| \neq 0$ significa $\text{rg}(A^*) = 4$. Pero A es 4×3 , así que $\text{rg}(A) \leq 3$. Los rangos no pueden coincidir: **SI**, sean cuales sean los coeficientes.
- b) A^* tiene 2 filas, luego $\text{rg}(A^*) \leq 2$; y $\text{rg}(A^*) \geq \text{rg}(A) = 2$. Así que $\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A) < 3$: **SCI**, con $3 - 2 = 1$ parámetro. Un sistema con más incógnitas que ecuaciones y rango máximo siempre es compatible (dos planos no paralelos se cortan en una recta).
- c) Si $B = C_1 + C_2$ (con C_j las columnas de A), la columna B es combinación lineal de las de A y añadirla no aumenta el rango: $\text{rg}(A^*) = \text{rg}(A) = 2 < 3$. **SCI**. Además, se lee directamente una solución: $1 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 = B$, es decir, $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ cumple el sistema.
- d) $|A| \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 3$; A^* es 3×4 , así que $\text{rg}(A^*) \leq 3$ y, por tanto, $\text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**, para cualquier columna de términos independientes.

Para el examen: las relaciones $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A^*) \leq \text{rg}(A) + 1$ y «el rango no supera el número de filas ni el de columnas» deciden muchas preguntas teóricas sin hacer una sola cuenta. Justifica siempre con ellas: «SI porque sí» no puntúa.

EJERCICIO 9 ★★★ Difícil

Se considera el sistema, con parámetros reales a y b ,

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$$

- a) Halla los valores de a y b para los que el sistema es compatible indeterminado.
- b) Clasifica el sistema para $a = 4$ y $b = 0$.
- c) Clasifica el sistema para $a = 0$ y $b = 0$, sin resolverlo.
- d) Resuelve el sistema en el caso del apartado a), tomando $z = t$.

- a) 1. **Rango de A .** $|A| = 1(-a-2) - 1(a-6) + 1(1+3) = 8 - 2a = -2(a-4)$. Si $a \neq 4$, $\text{rg}(A) = 3 = n$ y el sistema es SCD: no puede ser SCI.

2. Si $a = 4$: el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$. Para que sea SCI hace falta $\text{rg}(A^*) = 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = -2(b-5) = 0 \iff b = 5$$

El sistema es SCI si y solo si $a = 4$ y $b = 5$. Tiene sentido: con $a = 4$ el primer miembro de la tercera ecuación es el doble de la primera más la segunda ($2(1, 1, 1) + (1, -1, 2) = (3, 1, 4)$), y el término independiente debe ser $2 \cdot 2 + 1 = 5$.

- b) Con $a = 4$ y $b = 0$: $\text{rg}(A) = 2$ y el orlado anterior vale $-2(0-5) = 10 \neq 0$, luego $\text{rg}(A^*) = 3$. **SI**.
- c) Con $a = 0$: $|A| = 8 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**, sea cual sea b .
- d) Con $a = 4$, $b = 5$ basta con las dos primeras ecuaciones. Con $z = t$: $x + y = 2 - t$ y $x - y = 1 - 2t$. Sumando, $2x = 3 - 3t$; restando, $2y = 1 + t$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3-3t}{2}, \frac{1+t}{2}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en la tercera: $3 \cdot \frac{3-3t}{2} + \frac{1+t}{2} + 4t = \frac{9-9t+1+t+8t}{2} = 5$.

Para el examen: con dos parámetros, discute primero el que está en A (decide el rango de A) y solo después el de los términos independientes (decide el de A^*). Explicar la relación entre filas, como aquí, es una forma rápida de comprobar el resultado.

EJERCICIO 10

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ 2x + y + mz = 2m - 1 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . (1,25 puntos)
 b) Resuélvelo para $m = 1$, tomando $z = t$. (0,75 puntos)
 c) Resuélvelo para $m = 3$. (0,5 puntos)

- a) 1. **Determinante de A .** Restando la primera fila a la segunda ($F_2 - F_1$) queda $(0, m - 1, 0)$, y desarrollando por esa fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = (m-1)(m-2)$$

Valores críticos: $m = 1$ y $m = 2$.

2. Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**.

3. Si $m = 1$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Las dos primeras filas de A^* son iguales, así que $\text{rg}(A^*) \leq 2$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ (filas 1 y 3, columnas 1 y 2) da $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. **SCI** con un parámetro.

4. Si $m = 2$: el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$. Orlando con la columna de términos independientes $(1, 2, 3)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\text{rg}(A^*) = 3$. **SI**.

Discusión: $m = 1$, SCI; $m = 2$, SI; $m \neq 1, 2$, SCD.

- b) Para $m = 1$ nos quedamos con las ecuaciones 1 y 3 (las del menor no nulo): $x + y + z = 1$ y $2x + y + z = 1$. Restándolas, $x = 0$. Con $z = t$, $y = 1 - t$:

$$(x, y, z) = (0, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

- c) Para $m = 3$: $x + y + z = 1$, $x + 3y + z = 3$, $2x + y + 3z = 5$. Restando las dos primeras, $2y = 2$ e $y = 1$. Entonces $x + z = 0$ y $2x + 3z = 4$; con $x = -z$: $z = 4$, $x = -4$. Comprobación: $-4 + 1 + 4 = 1$, $-4 + 3 + 4 = 3$, $-8 + 1 + 12 = 5$.

$$(x, y, z) = (-4, 1, 4)$$

Para el examen: la discusión vale la mitad del ejercicio y se puntúa por casos: cada valor crítico con sus dos rangos justificados. En el caso SCI hay que escribir la solución con el parámetro y decir que $t \in \mathbb{R}$; quedarse en «infinitas soluciones» no basta cuando se pide resolver.

Resumen

- Un sistema $AX = B$ tiene solución si y solo si B es combinación lineal de las columnas de A , es decir, si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$.
- Rouché-Frobenius: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$ (incógnitas), SCD; $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = r < n$, SCI con $n - r$ parámetros; $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$, SI.
- Siempre $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A^*) \leq \text{rg}(A) + 1$ y el rango no supera ni el número de filas ni el de columnas.
- Consecuencias: con más incógnitas que ecuaciones nunca es SCD; si A es cuadrada y $|A| \neq 0$, es SCD; si hay una ecuación más que incógnitas y $|A^*| \neq 0$, es SI; un homogéneo siempre es compatible.
- Para discutir con un parámetro: valores críticos con $|A| = 0$ (o con los menores de mayor orden), y en cada valor crítico, rangos de A y de A^* con el valor sustituido.
- Aprovecha el menor no nulo de A para calcular $\text{rg}(A^*)$: solo falta orlarlo con la columna de términos independientes.

Regla de Cramer

IDEA CLAVE

La regla de Cramer da cada incógnita de un sistema como un cociente de dos determinantes. Solo vale cuando hay tantas ecuaciones como incógnitas y el determinante de la matriz de coeficientes no es cero, pero entonces es la forma más directa de resolver un sistema con parámetro o de calcular una sola incógnita, y con un pequeño truco también resuelve los sistemas indeterminados.

Sistemas de Cramer

Recuerda que un sistema es **compatible determinado (SCD)** si tiene una única solución, **compatible indeterminado (SCI)** si tiene infinitas e **incompatible (SI)** si no tiene ninguna. Lo escribimos en forma matricial como $AX = B$, con A la matriz de coeficientes y A^* la matriz ampliada.

DEFINICIÓN · SISTEMA DE CRAMER

Un **sistema de Cramer** es un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (A cuadrada de orden n) y con $|A| \neq 0$.

Por el teorema de Rouché-Frobenius, un sistema de Cramer **siempre es SCD**: $|A| \neq 0$ da $\text{rg}(A) = n$, y como A^* solo tiene n filas, $\text{rg}(A^*) = n$ también. Además, A tiene inversa y la solución es $X = A^{-1}B$. Por ejemplo, $3x - 2y = 4$,

$x + y = 3$ es de Cramer, porque $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

La regla

TEOREMA · REGLA DE CRAMER

En un sistema de Cramer de orden n , la incógnita x_i vale

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

donde A_i es la matriz que se obtiene al **sustituir la columna i de A por la columna B** de términos independientes.

Para un sistema 3×3 en x, y, z :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

El denominador es siempre el mismo, $|A|$; solo cambia qué columna se sustituye. En el ejemplo $3x - 2y = 4$, $x + y = 3$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4+6}{5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{9-4}{5} = 1$$

Por qué funciona

Llama C_1, C_2, C_3 a las columnas de A . El sistema dice que $B = xC_1 + yC_2 + zC_3$. Sustituyendo esto en la primera columna de $|A_1|$ y usando las [propiedades de los determinantes](#) (separar una suma y sacar factores de una columna):

$$|A_1| = |xC_1 + yC_2 + zC_3, C_2, C_3| = x|C_1, C_2, C_3| + y|C_2, C_2, C_3| + z|C_3, C_2, C_3| = x|A|$$

porque los dos últimos determinantes tienen dos columnas iguales. Así que $|A_1| = x|A|$ y, si $|A| \neq 0$, se despeja x . Igual con y y con z .

Fíjate en que la igualdad $|A_i| = x_i|A|$ se cumple para **cualquier** solución, aunque $|A| = 0$. Esto tiene una consecuencia que verás en los ejercicios: si $|A| = 0$ y algún $|A_i| \neq 0$, ninguna solución puede existir.

Cuándo se puede usar

- El sistema tiene que ser **cuadrado** y con $|A| \neq 0$. Calcula siempre $|A|$ primero: si sale 0, la regla no se puede aplicar.
- Si $|A| = 0$, el sistema **no es SCD**, pero puede ser SCI o SI. Cramer no lo decide: hay que estudiar los rangos con Rouché.
- Si el sistema no es cuadrado, o es cuadrado con $|A| = 0$ pero compatible, se puede usar Cramer **después de reducirlo** a un sistema de Cramer, como se explica a continuación.

Cramer en un sistema compatible indeterminado

MÉTODO · RESOLVER UN SCI CON CRAMER

- Con Rouché, comprueba que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = r$ es menor que el número de incógnitas n .
- Elige en A un **menor de orden r distinto de cero**.
- Quédate solo con las r ecuaciones que usan las filas de ese menor: las demás son combinación de ellas y sobran.
- Las incógnitas cuyas columnas **no** están en el menor son los **parámetros** ($z = t$, por ejemplo). Pásalas al segundo miembro.
- Queda un sistema de Cramer de orden r cuyos términos independientes dependen del parámetro. Aplica la regla.

Por ejemplo, en el sistema $x + y - z = 1$, $x - y + z = 3$ (dos ecuaciones, tres incógnitas), el menor de x e y es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0. \text{ Con } z = t \text{ queda } x + y = 1 + t, x - y = 3 - t, y$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+t & 1 \\ 3-t & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1-t-3+t}{-2} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & 3-t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3-t-1-t}{-2} = -1+t$$

Las soluciones son $(x, y, z) = (2, -1 + t, t), t \in \mathbb{R}$. El parámetro tiene que ser una incógnita cuya columna **no** esté en el menor elegido: si el menor de x e y fuera cero, habría que elegir otro (por ejemplo, el de x y z) y tomar y como parámetro.

Cramer con un parámetro

Si A depende de un parámetro m , se calcula $|A(m)|$ y se hallan los valores que lo anulan. Para **todos los demás** valores el sistema es de Cramer y la regla da la solución en función de m . En los valores críticos la regla no sirve: hay que estudiarlos uno a uno con Rouché y, si alguno es SCI, resolverlo con el método anterior.

NOTA • NO USES LA FÓRMULA SIMPLIFICADA EN LOS VALORES CRÍTICOS

Al dividir $|A_i|$ entre $|A|$ es normal que se simplifique un factor común, como $\frac{-(m-1)^2}{-2m(m-1)} = \frac{m-1}{2m}$. La fórmula simplificada ya no tiene el factor $m - 1$ en el denominador, pero **sigue sin valer para $m = 1$** : la regla de Cramer solo se ha aplicado donde $|A| \neq 0$.

¿Cramer o Gauss?

	Cramer	Gauss
Sistemas	Cuadrados con $ A \neq 0$ (o reducidos a ellos)	Cualquiera
Clasifica el sistema	No: hay que saber antes que es de Cramer	Sí, a la vez que resuelve
Trabajo en 3×3	Cuatro determinantes de orden 3	Menos operaciones
Mejor para	Parámetros (solución en función de m), una sola incógnita, sistemas 2×2	Sistemas numéricos, 4×4 , sistemas no cuadrados

En la práctica de la PAU, lo habitual es **discutir con Rouché** (determinante y rangos) y **resolver con Cramer** en el caso SCD general, porque el determinante $|A|$ ya está calculado. Para un sistema numérico concreto, el **método de Gauss** suele ser más rápido.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un sistema 3×3 por Cramer

Resuelve por la regla de Cramer el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

1. **¿Es de Cramer?** Tres ecuaciones, tres incógnitas. Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 - 2) - 1(-2 - 1) + 1(4 + 1) = -1 + 3 + 5 = 7 \neq 0$$

Es un sistema de Cramer: tiene solución única.

2. **Los tres determinantes**, sustituyendo cada vez una columna por $B = (2, 6, -1)$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(1 - 2) - 1(-6 + 1) + 1(12 - 1) = -2 + 5 + 11 = 14$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-6 + 1) - 2(-2 - 1) + 1(-2 - 6) = -5 + 6 - 8 = -7$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 - 12) - 1(-2 - 6) + 2(4 + 1) = -11 + 8 + 10 = 7$$

3. **La regla:** $x = \frac{14}{7} = 2$, $y = \frac{-7}{7} = -1$, $z = \frac{7}{7} = 1$.

4. **Comprobación:** $2 - 1 + 1 = 2$; $4 + 1 + 1 = 6$; $2 - 2 - 1 = -1$.

$$(x, y, z) = (2, -1, 1)$$

EJEMPLO 2

★★ Medio

Un sistema compatible indeterminado resuelto con Cramer

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$$

- a) Comprueba que no es un sistema de Cramer y clasifícalo.
 b) Resuélvelo usando la regla de Cramer, tomando $z = t$ como parámetro.

a) 1. **Determinante.** La tercera fila de A es la suma de las dos primeras: $(1, 2, -1) + (2, 1, 1) = (3, 3, 0)$. Por tanto $|A| = 0$ y **no es de Cramer**.

2. **Rangos.** El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$. En A^* , la tercera fila también es la suma de las dos primeras (en el término independiente, $2 + 4 = 6$), así que todos los menores de orden 3 de A^* se anulan y $\text{rg}(A^*) = 2$.

3. $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: **SCI** con un parámetro.

b) 1. **Reducimos.** El menor no nulo usa las filas 1 y 2 y las columnas de x e y . Nos quedamos con las ecuaciones 1 y 2 (la tercera sobra) y pasamos $z = t$ a la derecha:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 + t \\ 2x + y = 4 - t \end{cases}$$

Es un sistema de Cramer de orden 2 con determinante -3 .

2. **Cramer:**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+t & 2 \\ 4-t & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2+t-8+2t}{-3} = \frac{3t-6}{-3} = 2-t, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+t \\ 2 & 4-t \end{vmatrix}}{-3} = \frac{4-t-4-2t}{-3} = t$$

$$(x, y, z) = (2-t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

3. **Comprobación** en las tres ecuaciones: $(2-t) + 2t - t = 2$; $2(2-t) + t + t = 4$; $3(2-t) + 3t = 6$. Se cumplen para todo t .

El parámetro es z porque su columna es la que **no** está en el menor elegido. Si hubieras elegido el menor de las columnas de x y z , el parámetro sería y , y la solución se escribiría de otra forma, aunque sería la misma recta.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Cramer con un parámetro y sus valores críticos

Se considera el sistema, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

- Halla los valores de m para los que **no** es un sistema de Cramer.
- Para los demás valores, resuélvelo por Cramer en función de m .
- Halla el valor de m para el que la solución cumple $x = y$.
- Clasifica el sistema para cada valor del apartado a) y resuélvelo si es compatible (toma $z = t$).

a) **Determinante.** Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(m-1) - 1(1-2) + m(1-2m) = 2m - 2m^2 = -2m(m-1)$$

Se anula para $m = 0$ y $m = 1$. Para esos dos valores **no** es de Cramer; para cualquier otro, sí.

b) **Determinantes con la columna $B = (1, 1, 1)$:**

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(m-1) - 1(1-1) + m(1-m) = (m-1)(1-m) = -(m-1)^2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-1) - 1(1-2) + m(1-2) = 1-m$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(m-1) - 1(1-2) + 1(1-2m) = 1-m$$

Dividiendo entre $|A| = -2m(m-1)$ y simplificando (válido porque $m \neq 0$ y $m \neq 1$):

$$x = \frac{-(m-1)^2}{-2m(m-1)} = \frac{m-1}{2m}, \quad y = \frac{1-m}{-2m(m-1)} = \frac{1}{2m}, \quad z = \frac{1}{2m}$$

c) $x = y \iff \frac{m-1}{2m} = \frac{1}{2m} \iff m-1 = 1 \iff m = 2$, que no es valor crítico. Con $m = 2$, $(x, y, z) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Comprobación: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$; $\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$; $2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

d) **Caso $m = 0$.** El sistema es $x + y = 1$, $x + z = 1$, $2x + y + z = 1$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$.

Orlándolo con la tercera fila y la columna B :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 1(1-2) + 1(1-0) = 1 \neq 0$$

$\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$: **SI**. (Sumando las dos primeras ecuaciones sale $2x + y + z = 2$, que contradice la tercera.)

Caso $m = 1$. Las dos primeras ecuaciones son iguales, $x + y + z = 1$, y la tercera es $2x + y + z = 1$. El menor de las filas 1 y 3 y las columnas de x e y es $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$; como las filas 1 y 2 de A^* son iguales, $\text{rg}(A^*) = 2$. **SCI**. Con Cramer, usando las ecuaciones 1 y 3 y $z = t$:

$$\begin{cases} x + y = 1 - t \\ 2x + y = 1 - t \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1-t & 1 \end{vmatrix}}{-1} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 2 & 1-t \end{vmatrix}}{-1} = \frac{(1-t) - 2(1-t)}{-1} = 1 - t$$

$$(x, y, z) = (0, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Observa la trampa: la fórmula simplificada de b) con $m = 1$ da $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que es **una** de las soluciones (la de $t = \frac{1}{2}$), no todas. Y con $m = 0$ ni siquiera se puede evaluar. Por eso los valores críticos se estudian aparte.

Para el examen: la estructura que se puntúa es « $|A|$ y valores críticos, Cramer para el resto, cada valor crítico por separado con Rouché». Escribe que simplificas porque $m \neq 0, 1$; sin esa frase, la respuesta parece aplicar la fórmula donde no vale.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • SUSTITUIR UNA FILA EN VEZ DE UNA COLUMNA

A_i se forma cambiando la **columna** de la incógnita x_i por la columna de términos independientes. Cambiar una fila (por ejemplo, poner B como primera fila para calcular x) da un número sin relación con la solución. Truco: la columna que cambias es la de la incógnita que calculas; en y , la segunda.

ERROR TÍPICO • APLICAR CRAMER SIN MIRAR ANTES EL DETERMINANTE

Si $|A| = 0$, las fórmulas dan « $\frac{\text{algo}}{0}$ » o « $\frac{0}{0}$ » y no significan nada. Tampoco se puede concluir « $|A| = 0$, luego no tiene solución»: el sistema puede ser SCI. Calcula $|A|$ lo primero; si se anula, estudia los rangos con Rouché y, si es SCI, reduce el sistema antes de usar Cramer.

ERROR TÍPICO · USAR LA FÓRMULA SIMPLIFICADA EN UN VALOR CRÍTICO

En un sistema con parámetro, después de simplificar, la solución puede no tener el valor crítico en el denominador, como $x = \frac{m-1}{2m}$ en el ejemplo, que «funciona» con $m = 1$. Pero con $m = 1$ el sistema no es de Cramer, y lo que sale es solo una de sus infinitas soluciones. Los valores que anulan $|A|$ se estudian siempre aparte.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Resuelve por la regla de Cramer los sistemas

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 4y = 3 \end{cases}$$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \neq 0$: es de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-7 - 3}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{2 - 7}{-5} = 1$$

Solución (2, 1). Comprobación: $4 + 3 = 7$, $2 - 1 = 1$.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2 \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4 - 6}{2} = -1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{9 - 5}{2} = 2$$

Solución (-1, 2). Comprobación: $-3 + 4 = 1$, $-5 + 8 = 3$.

EJERCICIO 2 ★ Básico

Se considera el sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula $|A|$ y justifica que es un sistema de Cramer.
b) Resuélvelo por la regla de Cramer.

- a) Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = 2(0 + 2) - 1(1 - 6) + (-1)(-1 - 0) = 4 + 5 + 1 = 10$$

Es cuadrado (3 ecuaciones, 3 incógnitas) y $|A| \neq 0$: es de Cramer.

- b) Sustituyendo cada columna por B :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(0 + 2) - 1(3 - 4) + (-1)(-3 - 0) = 6 + 1 + 3 = 10$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(3 - 4) - 3(1 - 6) + (-1)(2 - 9) = -2 + 15 + 7 = 20$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(0 + 3) - 1(2 - 9) + 3(-1 - 0) = 6 + 7 - 3 = 10$$

$$x = \frac{10}{10} = 1, y = \frac{20}{10} = 2, z = \frac{10}{10} = 1. \text{ Comprobación: } 2 + 2 - 1 = 3; 1 + 0 + 2 = 3; 3 - 2 + 1 = 2.$$

EJERCICIO 3 ★ Básico

Calcula, usando la regla de Cramer, **solo** el valor de z en la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

1. Determinante de A :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 - 6) - 1(-2 - 3) + 1(4 + 1) = -5 + 5 + 5 = 5 \neq 0$$

Es un sistema de Cramer.

2. Para z se sustituye la tercera columna por $B = (6, 9, 2)$:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2 - 18) - 1(4 - 9) + 6(4 + 1) = -20 + 5 + 30 = 15$$

$$3. z = \frac{15}{5} = 3.$$

Esta es una ventaja de Cramer: si solo te piden una incógnita, bastan dos determinantes. (La solución completa es $(1, 2, 3)$.)

EJERCICIO 4

★★ Medio

Se considera el sistema, que depende del parámetro real a ,

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ax + y + z = 6 \\ x + y + az = 7 \end{cases}$$

- a) Halla los valores de a para los que **no** es un sistema de Cramer.
b) Resuélvelo por Cramer para $a = 2$.

- a) Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 1(a-1) - 2(a^2-1) + 1(a-1) = 2(a-1) - 2(a-1)(a+1) = -2a(a-1)$$

Se anula para $a = 0$ y $a = 1$: para esos valores no es de Cramer.

- b) Con $a = 2$, $|A| = -2 \cdot 2 \cdot 1 = -4 \neq 0$ y

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2-1) - 2(12-7) + 1(6-7) = -8$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 1(12-7) - 3(4-1) + 1(14-6) = 4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 1(7-6) - 2(14-6) + 3(2-1) = -12$$

$$x = \frac{-8}{-4} = 2, y = \frac{4}{-4} = -1, z = \frac{-12}{-4} = 3. \text{ Comprobación: } 2 - 2 + 3 = 3; 4 - 1 + 3 = 6; 2 - 1 + 6 = 7.$$

EJERCICIO 5

★★ Medio

Se considera el sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} x + y + w = 2 \\ y + z + 2w = 2 \\ x + 2z - w = 3 \end{cases}$$

- a) Comprueba que el menor formado por las columnas de x, y, z no es nulo y resuelve el sistema por Cramer, tomando $w = t$.
- b) Halla la solución en la que $x = y$.

a) 1. El menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2 - 0) - 1(0 - 1) + 0 = 3 \neq 0$$

Así que $\text{rg}(A) = 3$; como A^* tiene 3 filas, $\text{rg}(A^*) = 3 < 4$: SCl con un parámetro. La columna de w no está en el menor, así que $w = t$ es el parámetro.

2. Sistema de Cramer con $w = t$ en el segundo miembro:

$$\begin{cases} x + y = 2 - t \\ y + z = 2 - 2t \\ x + 2z = 3 + t \end{cases}$$

3. Los determinantes:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 2-2t & 1 & 1 \\ 3+t & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2-t) \cdot 2 - 1 \cdot (2(2-2t) - (3+t)) = 4 - 2t - (1 - 5t) = 3 + 3t$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2-t & 0 \\ 0 & 2-2t & 1 \\ 1 & 3+t & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2(2-2t) - (3+t)) - (2-t)(0-1) = (1-5t) + (2-t) = 3 - 6t$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2-t \\ 0 & 1 & 2-2t \\ 1 & 0 & 3+t \end{vmatrix} = 1 \cdot (3+t) - 1 \cdot (0 - (2-2t)) + (2-t)(0-1) = 3+t+2-2t-2+t = 3$$

4. Dividiendo entre 3: $x = 1 + t, y = 1 - 2t, z = 1$.

$$(x, y, z, w) = (1 + t, 1 - 2t, 1, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación: $(1+t) + (1-2t) + t = 2$; $(1-2t) + 1 + 2t = 2$; $(1+t) + 2 - t = 3$.

b) $x = y \iff 1 + t = 1 - 2t \iff t = 0$, que da $(1, 1, 1, 0)$.

EJERCICIO 6 ★★ Medio

Un hotel rural tiene 50 habitaciones, entre individuales, dobles y triples, con 105 plazas en total (una, dos y tres personas, respectivamente). El número de habitaciones dobles supera en 7 al doble del número de triples. Sean x, y, z el número de habitaciones individuales, dobles y triples.

- a) Plantea el sistema y justifica que es un sistema de Cramer.
- b) Resuélvelo por la regla de Cramer.

a) Planteamiento:

$$\begin{cases} x + y + z = 50 & (\text{habitaciones}) \\ x + 2y + 3z = 105 & (\text{plazas}) \\ y - 2z = 7 & (\text{dobles} = 2 \cdot \text{triples} + 7) \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-4 - 3) - 1(-2 - 0) + 1(1 - 0) = -7 + 2 + 1 = -4 \neq 0$$

Tres ecuaciones, tres incógnitas y $|A| \neq 0$: es de Cramer.

b) **Determinantes** con $B = (50, 105, 7)$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 50 & 1 & 1 \\ 105 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 50(-4 - 3) - 1(-210 - 21) + 1(105 - 14) = -350 + 231 + 91 = -28$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 50 & 1 \\ 1 & 105 & 3 \\ 0 & 7 & -2 \end{vmatrix} = 1(-210 - 21) - 50(-2 - 0) + 1(7 - 0) = -231 + 100 + 7 = -124$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 50 \\ 1 & 2 & 105 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 1(14 - 105) - 1(7 - 0) + 50(1 - 0) = -91 - 7 + 50 = -48$$

$x = \frac{-28}{-4} = 7$, $y = \frac{-124}{-4} = 31$, $z = \frac{-48}{-4} = 12$. El hotel tiene **7 individuales, 31 dobles y 12 triples**. Comprobación:
 $7 + 31 + 12 = 50$; $7 + 62 + 36 = 105$; $31 = 2 \cdot 12 + 7$.

EJERCICIO 7

★★ Medio

Se considera el sistema, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} mx + y = 2 \\ 4x + my = m + 2 \end{cases}$$

- Halla los valores de m para los que **no** es un sistema de Cramer.
- Para los demás valores, resuélvelo por Cramer en función de m .
- Halla el valor de m para el que la solución cumple $y = 3x$.
- Clasifica el sistema para cada valor del apartado a).

a) $|A| = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$, que se anula para $m = 2$ y $m = -2$.

b) Para $m \neq \pm 2$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m+2 & m \end{vmatrix} = 2m - m - 2 = m - 2, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 4 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 + 2m - 8 = (m - 2)(m + 4)$$

Como $m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2)$ y $m \neq 2$, se puede simplificar:

$$x = \frac{m - 2}{(m - 2)(m + 2)} = \frac{1}{m + 2}, \quad y = \frac{(m - 2)(m + 4)}{(m - 2)(m + 2)} = \frac{m + 4}{m + 2}$$

c) $y = 3x \iff \frac{m+4}{m+2} = \frac{3}{m+2} \iff m + 4 = 3 \iff m = -1$, que es válido ($m \neq \pm 2$). Con $m = -1$: $(x, y) = (1, 3)$; comprobación: $-1 + 3 = 2$ y $4 - 3 = 1 = m + 2$.

d) $m = 2$: las ecuaciones son $2x + y = 2$ y $4x + 2y = 4$; la segunda es el doble de la primera. $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 2$: **SCI** (rectas coincidentes).

$m = -2$: las ecuaciones son $-2x + y = 2$ y $4x - 2y = 0$, es decir, $-2x + y = 0$. Mismo primer miembro con distinto término independiente: $\text{rg}(A) = 1$, $\text{rg}(A^*) = 2$, **SI** (rectas paralelas).

Fíjate en que la fórmula de b) con $m = 2$ da $(\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$, que es solo una de las infinitas soluciones: no vale para describir el caso $m = 2$.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

Demostración

Sea $AX = B$ un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas x, y, z , y sean A_1, A_2, A_3 las matrices que se obtienen al sustituir la primera, segunda o tercera columna de A por B .

- a) Demuestra que, si (x, y, z) es una solución del sistema, entonces $|A_1| = x|A|$ (y, del mismo modo, $|A_2| = y|A|$ y $|A_3| = z|A|$), aunque $|A|$ sea cero.
- b) Deduce que, si $|A| = 0$ y alguno de los determinantes $|A_1|, |A_2|, |A_3|$ es distinto de cero, el sistema es incompatible.
- c) Demuestra con un ejemplo que el recíproco de b) es falso: un sistema con $|A| = |A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$ puede ser incompatible.

- a) 1. Sean C_1, C_2, C_3 las columnas de A . Que (x, y, z) sea solución significa que $xC_1 + yC_2 + zC_3 = B$ (es el sistema leído por columnas).

- 2. Sustituimos B en la primera columna de A_1 y aplicamos dos propiedades de los determinantes: un determinante con una columna que es suma se separa en suma de determinantes, y un factor de una columna sale fuera:

$$|A_1| = |xC_1 + yC_2 + zC_3, C_2, C_3| = x|C_1, C_2, C_3| + y|C_2, C_2, C_3| + z|C_3, C_2, C_3|$$

- 3. Los dos últimos determinantes tienen dos columnas iguales, así que valen 0. Queda $|A_1| = x|C_1, C_2, C_3| = x|A|$.

- 4. En ningún paso se ha dividido entre $|A|$, así que la igualdad vale también si $|A| = 0$. Para A_2 y A_3 el razonamiento es el mismo, sustituyendo B en la segunda o la tercera columna.

- b) Supongamos que el sistema tuviera una solución (x, y, z) . Por a), $|A_i| = x_i|A| = x_i \cdot 0 = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Eso contradice que algún $|A_i|$ sea distinto de cero. Luego no hay solución: el sistema es incompatible.
- c) Basta un contraejemplo. El sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

es claramente incompatible ($x + y + z$ no puede valer 1 y 2 a la vez). Sin embargo, A tiene las tres columnas iguales a $(1, 1, 1)$, así que $|A| = 0$; y cada A_i conserva dos columnas iguales a $(1, 1, 1)$, así que $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 0$. Que todos los determinantes se anulen no garantiza que el sistema sea compatible: en ese caso hay que estudiar los rangos con Rouché.

Para el examen: este resultado da un atajo para descartar soluciones, pero solo en un sentido. Si $|A| = 0$ y un $|A_i| \neq 0$, puedes afirmar SI; si todos son cero, no puedes afirmar nada sin calcular rangos.

EJERCICIO 9

★★★ Difícil

Sea $AX = B$ un sistema de tres ecuaciones con incógnitas x, y, z , y sean C_1, C_2, C_3 las columnas de A . Se sabe que $|A| = 4$ y que, con la notación de la regla de Cramer, $|A_1| = 8$, $|A_2| = -4$ y $|A_3| = 12$. Sin conocer los coeficientes:

- Resuelve el sistema $AX = B$.
- Resuelve el sistema $AX = 3B$.
- Resuelve el sistema cuya matriz de coeficientes tiene las columnas C_2, C_1, C_3 (en este orden) y cuyos términos independientes son B ; sus incógnitas son x, y, z , en este orden.
- Resuelve el sistema cuya matriz de coeficientes tiene las columnas $2C_1, C_2, C_3$ y cuyos términos independientes son B ; sus incógnitas son x, y, z , en este orden.

a) $|A| = 4 \neq 0$: es de Cramer. $x = \frac{8}{4} = 2$, $y = \frac{-4}{4} = -1$, $z = \frac{12}{4} = 3$. Solución $(2, -1, 3)$.

b) La matriz de coeficientes es la misma ($|A| = 4$). Al sustituir una columna por $3B$, el determinante se multiplica por 3 (sale el factor 3 de esa columna): los nuevos determinantes son 24, -12 y 36. Solución $(6, -3, 9)$, el triple de la de a), como era de esperar: si $AX = B$, entonces $A(3X) = 3B$.

c) La nueva matriz es $A' = (C_2, C_1, C_3)$. Intercambiar dos columnas cambia el signo del determinante: $|A'| = -4$. Para los numeradores:

- $x: |B, C_1, C_3| = -|C_1, B, C_3| = -|A_2| = 4$, luego $x = \frac{4}{-4} = -1$.
- $y: |C_2, B, C_3| = -|B, C_2, C_3| = -|A_1| = -8$, luego $y = \frac{-8}{-4} = 2$.
- $z: |C_2, C_1, B| = -|C_1, C_2, B| = -|A_3| = -12$, luego $z = \frac{-12}{-4} = 3$.

Solución $(-1, 2, 3)$. Tiene sentido: el sistema es $xC_2 + yC_1 + zC_3 = B$, y por a) $B = 2C_1 - C_2 + 3C_3$, así que $y = 2$, $x = -1$, $z = 3$.

d) La nueva matriz es $A'' = (2C_1, C_2, C_3)$, con $|A''| = 2|A| = 8$.

- $x: |B, C_2, C_3| = |A_1| = 8$, luego $x = \frac{8}{8} = 1$.
- $y: |2C_1, B, C_3| = 2|A_2| = -8$, luego $y = -1$.
- $z: |2C_1, C_2, B| = 2|A_3| = 24$, luego $z = 3$.

Solución $(1, -1, 3)$. Comprobación: $1 \cdot 2C_1 - C_2 + 3C_3 = 2C_1 - C_2 + 3C_3 = B$.

Para el examen: las propiedades de los determinantes (intercambiar columnas cambia el signo, un factor de una columna sale fuera) junto con Cramer permiten resolver sistemas sin conocer los números. Escribe siempre qué determinante usas en cada numerador y de qué propiedad sale.

EJERCICIO 10

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + mz = m + 2 \\ x + my + 2z = 4 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . (0,75 puntos)
- b) Resuélvelo por la regla de Cramer en los casos en que sea compatible determinado, en función de m . (0,75 puntos)
- c) Resuélvelo para $m = 2$ usando la regla de Cramer, tomando $z = t$ como parámetro. (0,5 puntos)
- d) Halla el valor de m para el que el sistema tiene una única solución y esta cumple $z = 2y$. (0,5 puntos)

a) 1. Determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = 1(4 - m^2) - 1(2 - m) + 1(m - 2) = 2m - m^2 = -m(m - 2)$$

Valores críticos: $m = 0$ y $m = 2$.

2. Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**.

3. Si $m = 0$: el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$. Orlando con la tercera fila y la columna $B = (2, 2, 4)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1(8 - 0) - 1(4 - 2) + 2(0 - 2) = 2 \neq 0$$

$\text{rg}(A^*) = 3$: **SI**.

4. Si $m = 2$: las ecuaciones segunda y tercera son iguales, $x + 2y + 2z = 4$, así que las filas 2 y 3 de A^* coinciden. El mismo menor de orden 2 da $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: **SCI**.

Discusión: $m = 0$, SI; $m = 2$, SCI; $m \neq 0, 2$, SCD.

b) Para $m \neq 0, 2$, con $B = (2, m + 2, 4)$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m + 2 & 2 & m \\ 4 & m & 2 \end{vmatrix} = 2(4 - m^2) - 1(2(m + 2) - 4m) + 1(m(m + 2) - 8) = -m^2 + 4m - 4 = -(m - 2)^2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m + 2 & m \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (2(m + 2) - 4m) - 2(2 - m) + (4 - (m + 2)) = 2 - m$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & m + 2 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} = (8 - m(m + 2)) - (4 - (m + 2)) + 2(m - 2) = -m^2 + m + 2 = -(m - 2)(m + 1)$$

Dividiendo entre $|A| = -m(m - 2)$ y simplificando $m - 2$ (válido porque $m \neq 2$):

$$x = \frac{m-2}{m}, \quad y = \frac{1}{m}, \quad z = \frac{m+1}{m}$$

c) **Caso** $m = 2$. Por a), basta con las ecuaciones 1 y 2, las del menor no nulo (la tercera es igual a la segunda). Con $z = t$:

$$\begin{cases} x + y = 2 - t \\ x + 2y = 4 - 2t \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 4-2t & 2 \end{vmatrix}}{1} = 2(2-t) - (4-2t) = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-t \\ 1 & 4-2t \end{vmatrix}}{1} = (4-2t) - (2-t) = 2-t$$

$$(x, y, z) = (0, 2-t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación: $0 + (2-t) + t = 2$; $0 + 2(2-t) + 2t = 4$. Observa que la fórmula de b) con $m = 2$ daría $(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$: es la solución de $t = \frac{3}{2}$, solo una de las infinitas.

d) La solución es única para $m \neq 0, 2$ y entonces $z = 2y \iff \frac{m+1}{m} = \frac{2}{m} \iff m+1 = 2 \iff m = 1$. Con $m = 1$, $(x, y, z) = (-1, 1, 2)$; comprobación: $-1 + 1 + 2 = 2$; $-1 + 2 + 2 = 3 = m + 2$; $-1 + 1 + 4 = 4$.

Para el examen: discutir con el determinante y resolver con Cramer aprovecha el mismo cálculo de $|A|$. En c), di qué ecuación eliminas y por qué, y qué incógnita es el parámetro; en d), comprueba que el valor hallado no es crítico.

Resumen

- Sistema de Cramer: tantas ecuaciones como incógnitas y $|A| \neq 0$. Siempre es SCD.
- Regla de Cramer: $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$, donde A_i es A con la **columna** i sustituida por la columna de términos independientes.
- Funciona porque $|A_i| = x_i|A|$ para cualquier solución; por eso, si $|A| = 0$ y algún $|A_i| \neq 0$, el sistema es SI.
- Si $|A| = 0$ la regla no se aplica: el sistema es SCI o SI y se decide con Rouché.
- SCI con Cramer: elige un menor no nulo de orden $r = \text{rg}(A)$, quédate con sus ecuaciones, pasa las demás incógnitas (parámetros) a la derecha y aplica Cramer.
- Con parámetro: Cramer da la solución en función de m fuera de los valores críticos; estos se estudian aparte, aunque la fórmula simplificada parezca valer en ellos.

- Discute con Rouché y resuelve con Cramer cuando hay parámetros; para sistemas numéricos grandes o no cuadrados, Gauss es más rápido.

Sistemas homogéneos

IDEA CLAVE

Un sistema homogéneo tiene todos los términos independientes iguales a cero, así que nunca es incompatible: la solución nula siempre vale. La única pregunta es si hay más soluciones, y en un sistema cuadrado la respuesta la da el determinante: $|A| = 0$ si y solo si hay soluciones distintas de la nula. En el examen aparece sobre todo como «halla los valores de m para los que el sistema tiene soluciones no triviales y resuélvelo en esos casos».

Qué es un sistema homogéneo

Recuerda que un sistema es **compatible determinado (SCD)** si tiene una única solución, **compatible indeterminado (SCI)** si tiene infinitas e **incompatible (SI)** si no tiene ninguna. En forma matricial se escribe $AX = B$, con A la matriz de coeficientes y A^* la ampliada.

DEFINICIÓN • SISTEMA HOMOGÉNEO

Un **sistema homogéneo** es un sistema $AX = O$ cuyos términos independientes son todos cero. La **solución trivial** es $X = O$, es decir, todas las incógnitas valen 0. Cualquier otra solución se llama **no trivial**.

Por ejemplo, $x + 2y - z = 0$, $2x + y + z = 0$ es un sistema homogéneo con dos ecuaciones y tres incógnitas. La solución trivial es $(0, 0, 0)$.

Siempre son compatibles

Si sustituyes $x = y = z = 0$ en un sistema homogéneo, todas las ecuaciones dan $0 = 0$. Por tanto la solución trivial **siempre existe** y un sistema homogéneo nunca es incompatible. En términos de Rouché-Frobenius: la última columna de A^* es toda de ceros, así que no aumenta el rango y $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$ siempre.

Solo quedan dos casos, con n incógnitas:

- $\text{rg}(A) = n$: **SCD**. La única solución es la trivial.
- $\text{rg}(A) < n$: **SCI**. Hay infinitas soluciones, y por tanto soluciones no triviales.

PROPIEDAD · SOLUCIONES NO TRIVIALES

Un sistema homogéneo con n incógnitas tiene soluciones no triviales si y solo si $\text{rg}(A) < n$. En particular:

- Si es **cuadrado** (n ecuaciones y n incógnitas): tiene soluciones no triviales $\iff |A| = 0$.
- Si tiene **menos ecuaciones que incógnitas**, siempre las tiene, porque $\text{rg}(A) \leq \text{número de ecuaciones} < n$.

La intuición del caso cuadrado: $|A| \neq 0$ significa $\text{rg}(A) = n$, y entonces es un sistema de Cramer, que tiene una única solución, la trivial. Si $|A| = 0$, el rango baja de n y el teorema de Rouché-Frobenius asegura que, siendo compatible, hay infinitas soluciones.

Cómo es el conjunto de soluciones

Con $\text{rg}(A) = r < n$, el sistema es SCI y su solución general depende de $n - r$ parámetros.

$n - \text{rg}(A)$ **Parámetros** Las soluciones forman (con $n = 3$)

0	ninguno	solo el punto $(0, 0, 0)$
1	uno	una recta que pasa por el origen
2	dos	un plano que pasa por el origen

Para $n = 3$, el caso $\text{rg}(A) = 2$ da una recta y el caso $\text{rg}(A) = 1$ (todas las ecuaciones son proporcionales a una sola) da un plano. El caso $\text{rg}(A) = 3$ es el trivial. Para resolverlo se siguen los pasos de siempre: se eliminan las ecuaciones que sobran (las que son combinación de otras) y las incógnitas cuya columna no entra en el menor no nulo hacen de parámetros.

MÉTODO · RESOLVER UN SISTEMA HOMOGÉNEO

1. Calcula $\text{rg}(A)$ (con el determinante si es cuadrado, o por Gauss). Si $\text{rg}(A) = n$, la única solución es la trivial.
2. Si $\text{rg}(A) = r < n$, hay $n - r$ parámetros. Elige un menor de orden r distinto de cero y quédate con sus r ecuaciones.
3. Pasa al segundo miembro las incógnitas que no están en el menor y llámalas t (o s y t).
4. Resuelve el sistema de Cramer o por Gauss que queda, con el parámetro dentro.
5. Comprueba la solución en **todas** las ecuaciones originales, incluidas las que habías eliminado.

Relación con la dependencia lineal

Sean $C_1, \dots, C_n$ las columnas de A . Entonces $AX = O$ con $X = (x_1, \dots, x_n)$ se lee como

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = O$$

Decimos que $C_1, \dots, C_n$ son **linealmente independientes** si la única forma de que esta combinación valga cero es con todos los coeficientes cero, y **linealmente dependientes** si existe una combinación con coeficientes no todos nulos que da el vector nulo. Es justo la pregunta del sistema homogéneo:

- Solo solución trivial $\iff$ las columnas son independientes $\iff \text{rg}(A) = n$.
- Soluciones no triviales $\iff$ las columnas son dependientes $\iff \text{rg}(A) < n$.

Por ejemplo, $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 1, 0)$ y $w = (4, 5, 6)$ son tres vectores de $\mathbb{R}^3$. Formamos la matriz con ellos como columnas y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1(6 - 0) - 2(12 - 15) + 4(0 - 3) = 6 + 6 - 12 = 0$$

Es cero, luego son linealmente dependientes (de hecho $2u + v = (4, 5, 6) = w$, es decir, $2u + v - w = 0$). Esa relación es una solución no trivial del sistema, $(x, y, z) = (2, 1, -1)$. Con tres vectores de $\mathbb{R}^3$, dependientes significa que están en un mismo plano.

Combinaciones de soluciones

PROPIEDAD • LAS COMBINACIONES DE SOLUCIONES SON SOLUCIONES

Si X_1 y X_2 son soluciones de $AX = O$ y α, β son números reales, entonces $\alpha X_1 + \beta X_2$ también es solución.

La razón es la linealidad del producto de matrices: $A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = \alpha O + \beta O = O$. Consecuencia práctica: si un sistema homogéneo tiene una solución no trivial X_1 , tiene infinitas, porque todos los múltiplos αX_1 lo son. Esto **no** pasa en un sistema con $B \neq O$: la suma de dos soluciones de $AX = B$ da $A(X_1 + X_2) = 2B$.

NOTA • POR QUÉ LAS SOLUCIONES SALEN CON PARÁMETROS

La solución general de un homogéneo con un parámetro es $t X_1$, donde X_1 es una solución concreta. Con dos parámetros es $s X_1 + t X_2$. Por eso las soluciones se ven como $(-t, t, t) = t(-1, 1, 1)$: cada parámetro multiplica un vector fijo.

Sistemas homogéneos con parámetro

Si A depende de un parámetro m y es cuadrada, se hace así: se calcula $|A(m)|$ y se igualan a cero. Para los valores de m que **no** lo anulan, solo está la solución trivial. Para los que sí lo anulan, se sustituye m y se resuelve cada caso por separado, **calculando el rango** de cada uno, porque puede ser 2 (un parámetro) o 1 (dos parámetros).

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Cuando solo existe la solución trivial

Resuelve el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

1. Es un sistema homogéneo cuadrado, así que es compatible. Para saber si tiene más soluciones que la trivial calculamos el determinante, desarrollando por la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3 + 1) - 2(6 - 1) + (-1)(-2 - 1) = 4 - 10 + 3 = -3 \neq 0$$

2. Como $|A| \neq 0$, $\text{rg}(A) = 3$ es igual al número de incógnitas: el sistema es SCD y su única solución es la trivial.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

EJEMPLO 2

★★ Medio

Un sistema con determinante cero

Resuelve el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

tomando $z = t$ como parámetro.

1. **Determinante.** Observa que la tercera fila es la suma de las dos primeras, $(1, 2, -1) + (2, 1, 1) = (3, 3, 0)$. Por tanto

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y hay soluciones no triviales.

2. **Rango.** El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 2$. El sistema es SCl y hay $3 - 2 = 1$ parámetro. La tercera ecuación es combinación de las otras dos y sobra.

3. **Resolvemos** con las dos primeras ecuaciones y $z = t$ (la columna de z no está en el menor):

$$\begin{cases} x + 2y = t \\ 2x + y = -t \end{cases}$$

Restando el doble de la primera a la segunda: $-3y = -3t$, luego $y = t$. Entonces $x = t - 2t = -t$.

4. **Comprobación** en la tercera ecuación (la que habíamos quitado): $3(-t) + 3t = 0$. Correcto.

$$(x, y, z) = (-t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Es una recta que pasa por el origen, con vector director $(-1, 1, 1)$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un parámetro y dos casos de soluciones no triviales

Se considera el sistema homogéneo, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Halla los valores de m para los que tiene soluciones no triviales.
- b) Resuélvelo en cada uno de esos valores. Para $m = 1$ toma $y = s$, $z = t$ como parámetros; para el otro valor, toma $z = t$.

- a) 1. El sistema es cuadrado y homogéneo, así que tiene soluciones no triviales si y solo si $|A| = 0$. Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(m-1) - 1(1-m) + m(1-m^2)$$

2. Como $1 - m^2 = -(m-1)(m+1)$, sacamos factor común $m-1$:

$$|A| = 2(m-1) - m(m-1)(m+1) = (m-1)(2 - m^2 - m) = -(m-1)^2(m+2)$$

3. Se anula para $m = 1$ y para $m = -2$. Para cualquier otro valor solo está la solución trivial.

- b) **Caso $m = 1$.** Las tres ecuaciones son la misma, $x + y + z = 0$. Entonces $\text{rg}(A) = 1$ y hay $3 - 1 = 2$ parámetros (un plano). Con $y = s$, $z = t$: $x = -s - t$.

$$(x, y, z) = (-s - t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Caso $m = -2$. El sistema es $x + y - 2z = 0$, $x - 2y + z = 0$, $-2x + y + z = 0$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$, así que hay un solo parámetro (una recta). Con $z = t$, restamos las dos primeras ecuaciones: $3y - 3z = 0$, luego $y = t$, y de la primera $x = 2t - t = t$. Comprobación en la tercera: $-2t + t + t = 0$.

$$(x, y, z) = (t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Para el examen: el mismo determinante da los dos valores críticos, pero el número de parámetros se decide calculando el rango en cada uno. Con $m = 1$ la raíz es doble y el rango baja a 1; con $m = -2$ solo baja a 2.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · DECIR QUE UN SISTEMA HOMOGÉNEO PUEDE NO TENER SOLUCIÓN

Si en un homogéneo con $|A| = 0$ escribes «es incompatible porque no se puede aplicar Cramer», has confundido los casos. Un sistema homogéneo **nunca** es incompatible: $(0, \dots, 0)$ siempre es solución. Si $|A| = 0$, es SCI, y lo que hay que hacer es hallar el rango y el parámetro. Tampoco escribas « $|A| \neq 0$, luego no hay solución»: en ese caso la solución es la trivial.

ERROR TÍPICO · PONER SIEMPRE UN SOLO PARÁMETRO

Con $|A| = 0$ en un sistema 3×3 no basta con « $z = t$ ». Si $\text{rg}(A) = 1$, todas las ecuaciones son proporcionales a una sola y hay **dos** parámetros: la solución es un plano, no una recta. Calcula siempre el rango: el número de parámetros es $n - \text{rg}(A)$.

ERROR TÍPICO · APLICAR LA SUMA DE SOLUCIONES A UN SISTEMA QUE NO ES HOMOGÉNEO

La propiedad « X_1, X_2 soluciones $\Rightarrow \alpha X_1 + \beta X_2$ solución» es solo de los homogéneos. En $x + y = 1$, los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son soluciones, pero su suma $(1, 1)$ no lo es, porque $1 + 1 = 2 \neq 1$.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Calcula el determinante de la matriz de coeficientes.
- b) Resuelve el sistema.

- a) Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(1 + 3) - (-1)(3 + 2) + 2(9 - 2) = 4 + 5 + 14 = 23$$

- b) Es homogéneo y $|A| = 23 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 3$ y el sistema es SCD. La única solución es la trivial, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

EJERCICIO 2 ★ Básico

Se considera el sistema

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -3x + 6y = 0 \end{cases}$$

- a) Calcula el determinante de la matriz de coeficientes.
- b) Resuelve el sistema tomando $y = t$ como parámetro.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$

- b) Al ser $|A| = 0$ hay soluciones no triviales. Como $A \neq O$, $\text{rg}(A) = 1$ y hay $2 - 1 = 1$ parámetro. La segunda ecuación es la primera multiplicada por $-\frac{3}{2}$, así que basta con $2x - 4y = 0$. Con $y = t$: $x = 2t$.

$$(x, y) = (2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 3 ★ Básico

Se considera el sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x - z - 2w = 0 \end{cases}$$

con cuatro incógnitas x, y, z, w .

- a) Sin resolverlo, clasifícalo (SCD, SCI o SI) y justifica la respuesta.
- b) Resuélvelo tomando $w = t$ como parámetro.

- a) Es homogéneo, luego compatible. Tiene tres ecuaciones y cuatro incógnitas, así que $\text{rg}(A) \leq 3 < 4$: no puede ser determinado. Es **SCI**.
- b) Despejamos todo en función de $w = t$. De la tercera ecuación, $x = z + 2t$. De la segunda, $y = -2z$. La primera da $2x = y$, es decir $2(z + 2t) = -2z$, luego $4z = -4t$ y $z = -t$. Entonces $y = 2t$ y $x = -t + 2t = t$.

Comprobación: $2t - 2t = 0$; $2t + 2(-t) = 0$; $t - (-t) - 2t = 0$.

$$(x, y, z, w) = (t, 2t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 4

★★ Medio

Se considera el sistema

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

- a) Calcula el determinante de la matriz de coeficientes.
- b) Calcula el rango de la matriz de coeficientes y di cuántos parámetros tiene la solución.
- c) Resuelve el sistema tomando $x = t$ como parámetro.

- a) Observa que la tercera fila es la suma de las dos primeras: $(2, -1, 1) + (1, 1, -2) = (3, 0, -1)$. Por tanto

$|A| = 0$. Con el determinante: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) + 1(-1 + 6) + 1(-3) = -2 + 5 - 3 = 0$.

- b) El menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$. Hay $3 - 2 = 1$ parámetro.

- c) La tercera ecuación sobra. De ella, $z = 3x = 3t$. La primera da $y = 2x + z = 2t + 3t = 5t$. Comprobación en la segunda: $t + 5t - 6t = 0$.

$$(x, y, z) = (t, 5t, 3t), \quad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 5

★★ Medio

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

- a) Calcula el rango de la matriz de coeficientes.
- b) Resuelve el sistema tomando $y = s$, $z = t$ como parámetros.
- c) De todas las soluciones, halla la que cumple $x = 0$ e $y = 3$.

- a) La segunda fila es el doble de la primera y la tercera es la primera cambiada de signo. Todas las filas son proporcionales y la matriz no es nula, luego $\text{rg}(A) = 1$.
- b) Hay $3 - 1 = 2$ parámetros y una sola ecuación independiente, $x - 2y + 3z = 0$. Con $y = s$, $z = t$ se despeja $x = 2s - 3t$. Las soluciones forman el plano $x - 2y + 3z = 0$.

$$(x, y, z) = (2s - 3t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

- c) Con $y = 3$: $s = 3$. Con $x = 0$: $0 = 6 - 3t$, luego $t = 2$. La solución es $(0, 3, 2)$. Comprobación: $0 - 6 + 6 = 0$.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Se considera el sistema homogéneo, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ 2x + my + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

- a) Halla los valores de m para los que tiene soluciones distintas de la trivial.
b) Para cada uno de esos valores, resuelve el sistema tomando $z = t$ como parámetro.

- a) Es cuadrado y homogéneo, luego hay soluciones no triviales si y solo si $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & m & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(m-4) - 2(2-4) + m(2-m) = 3m - m^2 = -m(m-3)$$

Se anula para $m = 0$ y $m = 3$.

- b) $m = 0$. El sistema es $x + 2y = 0$, $2x + 4z = 0$, $x + y + z = 0$. Con $z = t$, la segunda da $x = -2t$, la primera $y = t$. Comprobación en la tercera: $-2t + t + t = 0$. Solución: $(-2t, t, t)$.

$m = 3$. El sistema es $x + 2y + 3z = 0$, $2x + 3y + 4z = 0$, $x + y + z = 0$. Restando la tercera a la primera: $y + 2z = 0$, luego $y = -2t$. De la tercera, $x = -y - z = 2t - t = t$. Comprobación en la segunda: $2t - 6t + 4t = 0$. Solución: $(t, -2t, t)$.

En los dos casos $\text{rg}(A) = 2$ (hay un menor de orden 2 no nulo), por eso un solo parámetro.

EJERCICIO 7

★★ Medio

En una zona de la ciudad hay tres cruces A, B, C y cuatro calles de un solo sentido: x coches por minuto circulan de A a B , y de A a C , z de B a C y w de C a A . Es una red cerrada: no entra ni sale ningún coche de la zona, así que en cada cruce entran tantos coches como salen.

- a) Plantea el sistema de tres ecuaciones y calcula su rango.
- b) Resuélvelo tomando $x = s, y = t$ como parámetros.
- c) Si por la calle de A a B pasan 25 coches por minuto y por la de A a C pasan 10, ¿cuántos pasan por las otras dos calles?

- a) **Planteamiento.** En A entran los w de C y salen x e y : $w = x + y$. En B entran x y salen z : $x = z$. En C entran y y z y salen w : $y + z = w$. El sistema homogéneo es

$$\begin{cases} -x - y + w = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases}$$

Sumando la primera y la tercera ecuación se obtiene $x - z = 0$, que es la segunda. Una ecuación sobra, y las otras dos no son proporcionales, luego $\text{rg}(A) = 2$.

- b) Hay $4 - 2 = 2$ parámetros. Con $x = s, y = t$: $z = x = s$ y $w = x + y = s + t$.

$$(x, y, z, w) = (s, t, s, s + t), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

(con $s, t \geq 0$ para que tenga sentido como flujo de coches).

- c) Con $s = 25, t = 10$: $z = 25$ y $w = 35$. Pasan 25 coches por minuto de B a C y 35 de C a A .

EJERCICIO 8 ★★★ Difícil

Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^3$ que dependen del parámetro real m :

$$u = (2, 1, 1), \quad v = (m, -1, 1), \quad w = (1, m, 1)$$

- a) Halla los valores de m para los que u, v y w son linealmente dependientes.
- b) Para $m = 3$, halla todos los (x, y, z) que cumplen $xu + yv + zw = (0, 0, 0)$, tomando $z = t$ como parámetro.
- c) Para $m = 3$, escribe w como combinación lineal de u y v : $w = au + bv$.

- a) 1. La ecuación $xu + yv + zw = O$ es un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes tiene los vectores como **columnas**:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & m & 1 \\ 1 & -1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Los vectores son linealmente dependientes si el sistema tiene soluciones no triviales, es decir, si $|A| = 0$:

$$|A| = 2(-1 - m) - m(1 - m) + 1(1 + 1) = m^2 - 3m = m(m - 3)$$

Son dependientes para $m = 0$ y $m = 3$.

- b) 1. Con $m = 3$ el sistema es $2x + 3y + z = 0$, $x - y + 3z = 0$, $x + y + z = 0$. El menor de las filas 1 y 3 en las columnas de x e y es $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 2$ y hay un parámetro.
- 2. Con $z = t$, usando las ecuaciones 1 y 3: $2x + 3y = -t$ y $x + y = -t$. Restando el doble de la segunda a la primera, $y = t$; entonces $x = -2t$.
- 3. Comprobación en la ecuación 2: $-2t - t + 3t = 0$.

$$(x, y, z) = (-2t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

- c) Con $t = 1$ se obtiene $-2u + v + w = O$, es decir, $w = 2u - v$. Comprobación: $2(2, 1, 1) - (3, -1, 1) = (1, 3, 1) = w$ para $m = 3$. Luego $(a, b) = (2, -1)$.

Para el examen: escribe la matriz con los vectores en columnas y justifica «dependientes $\iff |A| = 0$ ». Para despejar un vector necesitas una solución con el coeficiente de ese vector distinto de cero.

EJERCICIO 9

★★★ Difícil

Demostración

Sea $AX = O$ un sistema homogéneo con A de orden $m \times n$.

- a) Demuestra que, si X_1 y X_2 son soluciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha X_1 + \beta X_2$ también es solución.
- b) Deduce que, si el sistema tiene una solución no trivial, tiene infinitas.
- c) Demuestra con un ejemplo que la propiedad de a) es falsa para un sistema $AX = B$ con $B \neq O$.

- a) Que X_1 y X_2 sean soluciones significa $AX_1 = O$ y $AX_2 = O$. El producto de matrices distribuye sobre la suma y los escalares salen fuera:

$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = \alpha O + \beta O = O$$

Luego $\alpha X_1 + \beta X_2$ es solución.

- b) Sea $X_1 \neq O$ una solución. Tomando $\beta = 0$ en a), cada αX_1 es solución. Dos valores distintos de α dan soluciones distintas, porque $\alpha X_1 = \alpha' X_1$ con $X_1 \neq O$ obliga a $\alpha = \alpha'$. Hay tantas soluciones como números reales: infinitas.
- c) Basta un contraejemplo. El sistema $x + y = 1$ tiene como soluciones $X_1 = (1, 0)$ y $X_2 = (0, 1)$. Pero $X_1 + X_2 = (1, 1)$ no es solución, porque $1 + 1 = 2 \neq 1$. En general, $A(X_1 + X_2) = B + B = 2B \neq B$. Tampoco vale $2X_1$, que da $2B$. La propiedad depende de que el segundo miembro sea O .

Para el examen: en a), la clave es la linealidad, $A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha AX_1 + \beta AX_2$, y el uso explícito de que $AX_1 = AX_2 = O$.

EJERCICIO 10

★★★ Dificil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera el sistema homogéneo, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + my - z = 0 \\ mx + y + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

- a) Halla los valores de m para los que el sistema tiene soluciones distintas de la trivial. (0,75 puntos)
- b) Resuelve el sistema en cada uno de esos valores, tomando $x = t$ como parámetro. (1 punto)
- c) Para $m = 0$, halla la solución que cumple $x - y + z = 6$. (0,75 puntos)

- a) 1. El sistema es cuadrado y homogéneo: hay soluciones no triviales si y solo si $|A| = 0$. Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 1(m-1) - m(m^2-1) + (-1)(m-1) = -m(m^2-1) = -m(m-1)(m+1)$$

2. Se anula para $m = -1$, $m = 0$ y $m = 1$.

- b) En los tres casos hay un menor de orden 2 no nulo y $|A| = 0$, luego $\text{rg}(A) = 2$ y hay un parámetro. Tomamos $x = t$.

$m = -1$. El sistema es $x - y - z = 0$, $-x + y + z = 0$, $x + y - z = 0$. La primera y la segunda son la misma ecuación cambiada de signo. Sumando la primera y la tercera, $2x - 2z = 0$, luego $z = t$; y la primera da $y = x - z = 0$. Solución: $(t, 0, t)$.

$m = 0$. El sistema es $x - z = 0$, $y + z = 0$, $x + y = 0$. Con $x = t$: $z = t$, $y = -t$. Comprobación en la tercera: $t - t = 0$. Solución: $(t, -t, t)$.

$m = 1$. El sistema es $x + y - z = 0$, $x + y + z = 0$, $x + y + z = 0$. Restando las dos primeras, $2z = 0$, luego $z = 0$; entonces $y = -x = -t$. Solución: $(t, -t, 0)$.

- c) Para $m = 0$ la solución general es $(t, -t, t)$. La condición da $t - (-t) + t = 3t = 6$, luego $t = 2$ y la solución es $(2, -2, 2)$.

Para el examen: en a) escribe el determinante factorizado, porque de él salen los valores críticos. En b) sustituye cada valor y resuelve por separado, comprobando en la ecuación que no has usado. En c) usa la solución general del caso $m = 0$, no la de otro valor.

Resumen

- Un sistema homogéneo $AX = O$ **siempre es compatible**: la solución trivial $X = O$ vale siempre. Nunca es incompatible.
- Si $\text{rg}(A) = n$ (número de incógnitas) es SCD y solo existe la solución trivial; si $\text{rg}(A) < n$ es SCI y tiene soluciones no triviales, con $n - \text{rg}(A)$ parámetros.
- En un sistema **cuadrado**: soluciones no triviales $\iff |A| = 0$. Si hay menos ecuaciones que incógnitas, siempre las hay.
- Con $\text{rg}(A) = 2$ y $n = 3$ las soluciones forman una recta por el origen (un parámetro); con $\text{rg}(A) = 1$, un plano por el origen (dos parámetros).
- Las columnas de A son linealmente dependientes $\iff$ el sistema $AX = O$ tiene soluciones no triviales $\iff |A| = 0$ (si A es cuadrada).
- Si X_1 y X_2 son soluciones, $\alpha X_1 + \beta X_2$ también lo es, porque $A(\alpha X_1 + \beta X_2) = O$. Esto solo vale en los homogéneos.
- Con parámetro: iguala $|A(m)|$ a cero, y en cada valor crítico calcula el rango y resuelve aparte.

Discusión de sistemas con parámetros

IDEA CLAVE

«Discute y resuelve el sistema según los valores de m » es la pregunta de sistemas que más se repite en la PAU. Se responde siempre con el mismo método: hallar los valores críticos del parámetro, estudiar los rangos de A y de A^* en cada caso y resolver cada caso compatible por separado.

Qué piden exactamente

Un sistema con parámetro es en realidad una familia de sistemas: uno para cada valor de m . **Discutir** es clasificar todos ellos: decir para qué valores es compatible determinado (SCD, una única solución), compatible indeterminado (SCI, infinitas soluciones) o incompatible (SI, sin solución). **Resolver** es dar las soluciones en cada caso compatible: la del SCD, normalmente en función de m , y la del SCI, en función de uno o varios parámetros nuevos (t , s ,...).

La herramienta es el teorema de Rouché-Frobenius: con n incógnitas, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$ da SCD, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n$ da SCI y $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ da SI.

La idea clave es que **los rangos solo pueden cambiar en unos pocos valores de m** . Un determinante que depende de m es un polinomio, y un polinomio no nulo se anula en un número finito de puntos. Fuera de esos puntos, los menores son distintos de cero y los rangos son los máximos posibles. Esos puntos se llaman **valores críticos** y son los únicos que hay que estudiar uno a uno.

El método completo

MÉTODO • DISCUTIR Y RESOLVER UN SISTEMA CUADRADO CON UN PARÁMETRO

1. Escribe A y A^* y calcula $|A|$ en función de m . Factorízalo (saca factor común, haz ceros antes de desarrollar, busca raíces con Ruffini).
2. Resuelve $|A| = 0$: sus soluciones son los **valores críticos**.
3. **Caso general** (todo m que no sea crítico): $|A| \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$. Es SCD. Si piden resolverlo, usa la regla de Cramer con m como letra y simplifica los factores comunes.
4. **Cada valor crítico, por separado**: sustituye el número en A^* , calcula $\text{rg}(A)$ con un menor no nulo y orla ese menor con la columna de términos independientes para obtener $\text{rg}(A^*)$. Clasifica.
5. Resuelve cada caso SCI: quédate con las ecuaciones del menor no nulo, pasa al segundo miembro las incógnitas que no están en él y llámalas t (o s , t).
6. Escribe la discusión final como una lista: un caso por línea.

Por qué funciona cada paso:

- En el paso 3 no hace falta mirar A^* : si $\text{rg}(A) = n$ y A^* solo tiene n filas, su rango no puede pasar de n .

- En el paso 4 el valor crítico **se sustituye antes** de calcular rangos. Con la letra m dentro no se puede decidir si un menor es cero.
- En el paso 5 se eliminan las ecuaciones que no están en el menor porque son combinación lineal de las otras: no añaden condiciones.

La solución del caso general vale **solo para los valores no críticos**. Si al simplificar con Cramer desaparece un factor como $(m - 1)$, la fórmula que queda no sirve para $m = 1$: ese caso se estudia aparte.

Un ejemplo para ver las rectas

Con dos incógnitas cada ecuación es una recta y la discusión se ve. Toma

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}$$

1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2 = (1 - m)(1 + m)$. Valores críticos: $m = 1$ y $m = -1$.

2. Si $m \neq \pm 1$: SCD. Por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1 - m^2} = \frac{1 - m}{(1 - m)(1 + m)} = \frac{1}{1 + m}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix}}{1 - m^2} = \frac{1 - m}{(1 - m)(1 + m)} = \frac{1}{1 + m}$$

3. Si $m = 1$: las dos ecuaciones son $x + y = 1$. $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 2$: SCI. Es la misma recta dos veces.

4. Si $m = -1$: quedan $x - y = 1$ y $-x + y = 1$. $\text{rg}(A) = 1$, pero $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ da $\text{rg}(A^*) = 2$: SI. Son rectas paralelas.

Fíjate en que la fórmula $x = y = \frac{1}{1+m}$ se simplificó dividiendo entre $1 - m$: para $m = 1$ daría $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que es una de las infinitas soluciones, no la solución. Por eso el caso crítico va siempre aparte.

Animación interactiva disponible en la versión web de este apartado.

Mueve el deslizador para cambiar m en este mismo sistema: las rectas giran, la clasificación cambia en directo y en $m = 1$ se superponen, mientras que en $m = -1$ se vuelven paralelas. Prueba también los otros sistemas de la animación, entre ellos uno de tres incógnitas en el que solo puedes seguir los rangos.

Atajos en los valores críticos de un 3×3

Con el valor crítico sustituido, antes de calcular determinantes mira las filas de A^* :

- Dos filas de A^* iguales o proporcionales: una sobra, $\text{rg}(A^*) \leq 2$.
- Dos filas con el **mismo primer miembro** y distinto término independiente (por ejemplo $x + y + z = 2$ y $x + y + z = 1$): SI directamente, porque piden a la misma expresión dos valores distintos.
- Todas las filas de A proporcionales: $\text{rg}(A) = 1$. Si A^* también, es SCI con **dos** parámetros.

Si el determinante es difícil de factorizar, haz primero operaciones de fila que no lo cambien (restar filas, sumar columnas) hasta que aparezca un factor común. El **método de Gauss** también sirve para discutir, con una condición: **no dividas nunca entre una expresión con m** sin haber separado antes el caso en que vale cero.

Sistemas que no son cuadrados

Si A no es cuadrada, no hay $|A|$, pero la idea es la misma: los valores críticos salen de los menores del mayor orden posible.

- **Más incógnitas que ecuaciones (3×4 , tres ecuaciones y cuatro incógnitas).** $\text{rg}(A) \leq 3 < 4$: **nunca es SCD**. Toma un menor de orden 2 no nulo y calcula todos sus orlados de orden 3 dentro de A . Los valores críticos

son los que anulan **todos** a la vez. Fuera de ellos, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ y es SCD con un parámetro. En los críticos, $\text{rg}(A) = 2$ y se orla con la columna de términos independientes: SCI con dos parámetros o SI.

- **Más ecuaciones que incógnitas (4×3).** Aquí A^* es cuadrada de orden 4. Si $|A^*| \neq 0$, $\text{rg}(A^*) = 4 > 3 \geq \text{rg}(A)$: SI. Así que los únicos valores en los que puede ser compatible son los que anulan $|A^*|$. En cada uno hay que calcular $\text{rg}(A)$: si vale 3, es SCD; si es menor, hay que comparar con $\text{rg}(A^*)$.

En un 4×3 el razonamiento va «al revés» que en un 3×3: lo normal es que sea incompatible, y los valores críticos son los que lo salvan.

Sistemas con dos parámetros

Cuando hay dos letras, por ejemplo a y b , se discute por capas:

1. Calcula $|A|$, que dependerá de una o de las dos letras. Fuera de sus ceros, SCD.
2. Si un parámetro solo aparece en los términos independientes, no influye en $\text{rg}(A)$: decide $\text{rg}(A)$ con el otro y después busca para qué valores del segundo se anula el orlado de A^* .
3. Si $|A|$ se factoriza como $(a-1)(b-1)$, hay que estudiar $a=1$, $b=1$ **y el cruce** $a=b=1$, que puede comportarse distinto.
4. Comprueba que los casos de tu lista no se solapan y que entre todos cubren todas las parejas (a, b) .

Cómo se escribe en el examen

La discusión se puntúa caso por caso, con los dos rangos justificados. Un formato que nunca falla:

Caso	$\text{rg}(A)$	$\text{rg}(A^*)$	Tipo
$m \neq 1$ y $m \neq -2$	3	3	SCD
$m = 1$	2	2	SCI (1 parámetro)
$m = -2$	2	3	SI

Después, cada resolución con su caso escrito delante: «Para $m \neq 1, -2$: ...», «Para $m = 1$: ...».

NOTA • RESOLVER EN FUNCIÓN DE M

En el caso SCD la PAU suele pedir la solución «en función de m ». Cramer es lo más directo: los tres determinantes $|A_x|$, $|A_y|$, $|A_z|$ casi siempre llevan algún factor de $|A|$ y la fracción se simplifica. Comprueba el resultado sustituyendo un valor fácil (por ejemplo $m = 0$) en el sistema original.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un valor crítico y un caso indeterminado

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ 2x + 3y + 4z = m + 4 \end{cases}$$

- a) Discútelos según los valores del parámetro real m .
- b) Resuélvelo en el caso compatible indeterminado, tomando $z = t$.

a) 1. **Determinante de A (Sarrus):**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (8 + 2m + 3) - (4 + 3m + 4) = 3 - m$$

2. **Valor crítico:** $|A| = 0 \iff m = 3$.

3. Si $m \neq 3$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, el número de incógnitas. **SCD**.

4. Si $m = 3$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \end{array} \right)$$

La tercera fila de A^* es la suma de las dos primeras: $(1, 1, 1, 3) + (1, 2, 3, 4) = (2, 3, 4, 7)$. Así que $\text{rg}(A^*) \leq 2$.

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$, y por tanto $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. **SCI** con un parámetro.

Discusión: $m = 3$, SCI; $m \neq 3$, SCD.

b) Con $m = 3$ basta con las dos primeras ecuaciones. Con $z = t$:

$$\begin{cases} x + y = 3 - t \\ x + 2y = 4 - 3t \end{cases}$$

Restando, $y = 1 - 2t$; entonces $x = 3 - t - (1 - 2t) = 2 + t$.

$$(x, y, z) = (2 + t, 1 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en la tercera ecuación: $2(2 + t) + 3(1 - 2t) + 4t = 7 = 3 + 4$.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas

Se considera el sistema

$$\begin{cases} mx + z = 1 \\ x - z = 1 \\ -y + z = 1 \\ x + y + (m-1)z = 1 \end{cases}$$

- Calcula el determinante de la matriz ampliada A^* en función de m .
- Discute el sistema según los valores de m .
- Resuélvelo cuando sea compatible.

1. Sumamos la tercera fila a la cuarta ($F_4 + F_3$, no cambia el determinante): la cuarta fila pasa a ser $(1, 0, m, 2)$.

$$|A^*| = \begin{vmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m & 2 \end{vmatrix}$$

- La segunda columna solo tiene un elemento no nulo, el -1 de la posición $(3, 2)$, cuyo signo es $(-1)^{3+2} = -1$. Desarrollando por esa columna:

$$|A^*| = (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = m(-2 - m) - (2 - 1) + (m + 1) = -m^2 - m = -m(m + 1)$$

1. **Lo que se sabe sin cuentas.** A es 4×3 : $\text{rg}(A) \leq 3$. Si $|A^*| \neq 0$, $\text{rg}(A^*) = 4$ y el sistema es **SI**. Eso ocurre para $m \neq 0$ y $m \neq -1$.

2. **Rango de A .** El menor de las tres primeras filas es

$$\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(m + 1)$$

(desarrollando por la segunda columna). Para $m \neq -1$ es distinto de cero y $\text{rg}(A) = 3$.

3. Si $m = 0$: $|A^*| = 0$, así que $\text{rg}(A^*) \leq 3$, y $\text{rg}(A) = 3$. Luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = n$. **SCD**.

4. Si $m = -1$: las dos primeras ecuaciones son $-x + z = 1$ y $x - z = 1$. La primera dice $x - z = -1$ y la segunda $x - z = 1$: imposible. **SI**. Con rangos: los cuatro menores de orden 3 de A se anulan y

$\text{rg}(A) = 2$ (por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$), mientras que el menor de A^* formado por las filas 1, 2, 3 y

las columnas 2, 3 y la de términos independientes vale $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, así que $\text{rg}(A^*) = 3$.

Discusión: $m = 0$, SCD; $m = -1$, SI; cualquier otro valor, SI.

c) Solo es compatible para $m = 0$. Las ecuaciones son $z = 1$, $x - z = 1$, $-y + z = 1$ y $x + y - z = 1$. De las tres primeras: $z = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Comprobación en la cuarta: $2 + 0 - 1 = 1$.

$$(x, y, z) = (2, 0, 1)$$

Observa que en $m = -1$ también se anula $|A^*|$ y, aun así, el sistema es incompatible: $|A^*| = 0$ solo dice que $\text{rg}(A^*) \leq 3$, no que coincida con $\text{rg}(A)$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Discute y resuelve según los valores de m

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} -x + z = 1 \\ x + my + z = m + 1 \\ mx + y + z = m + 1 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m .
- Resuélvelo cuando sea compatible determinado, en función de m .
- Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado, tomando $z = t$.

a) 1. **Determinante de A (Sarrus):**

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-m + 0 + 1) - (m^2 - 1 + 0) = -m^2 - m + 2 = -(m - 1)(m + 2)$$

2. **Valores críticos:** $m = 1$ y $m = -2$.

3. Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**.

4. Si $m = 1$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Las filas 2 y 3 son iguales: $\text{rg}(A^*) \leq 2$. El menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$. Luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. **SCI** con un parámetro.

5. Si $m = -2$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

El menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ y $|A| = 0$: $\text{rg}(A) = 2$. Orlamos ese menor con la tercera fila y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(2 + 1) - 0 + 1(1 - 4) = -6 \neq 0$$

$\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$. **SI**.

Discusión:

Caso	$\text{rg}(A)$	$\text{rg}(A^*)$	Tipo
$m \neq 1$ y $m \neq -2$	3	3	SCD
$m = 1$	2	2	SCI
$m = -2$	2	3	SI

b) **Cramer con m como letra** ($m \neq 1, -2$). Los tres determinantes, por Sarrus:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m+1 & m & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (m-1) + (m+1)(1-m) = -m(m-1)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \\ m & m+1 & 1 \end{vmatrix} = -m(m-1), \quad |A_z| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & m & m+1 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -2(m-1)(m+1)$$

Dividiendo entre $|A| = -(m-1)(m+2)$ y simplificando el factor $(m-1)$, que no es cero porque $m \neq 1$:

$$x = \frac{m}{m+2}, \quad y = \frac{m}{m+2}, \quad z = \frac{2(m+1)}{m+2}$$

Comprobación con $m = 0$: el sistema queda $-x + z = 1$, $x + z = 1$, $y + z = 1$, cuya solución es $(0, 0, 1)$; la fórmula da $(0, 0, \frac{2}{2}) = (0, 0, 1)$.

c) **Para $m = 1$** nos quedamos con las ecuaciones del menor no nulo, la 1 y la 2: $-x + z = 1$ y $x + y + z = 2$.
Con $z = t$: $x = t - 1$ e $y = 2 - x - z = 2 - (t - 1) - t = 3 - 2t$.

$$(x, y, z) = (t - 1, 3 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación con $t = 1$: $(0, 1, 1)$ cumple $-0 + 1 = 1$, $0 + 1 + 1 = 2$ y $0 + 1 + 1 = 2$.

Para el examen: la discusión (determinante, valores críticos y los dos rangos de cada caso) suele valer la mitad de la nota; cada caso crítico sin el rango de A^* justificado pierde su parte. En el SCD, escribe la condición « $m \neq 1, -2$ » junto a la fórmula, y no la uses para $m = 1$: allí daría un punto concreto, cuando en realidad hay infinitas soluciones.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · DIVIDIR ENTRE ALGO QUE PUEDE SER CERO

Al resolver por Gauss o al despejar aparece, por ejemplo, $(m-1)z = 2(m-1)$, y se escribe « $z = 2$ » sin más. Eso solo vale para $m \neq 1$. Para $m = 1$ la ecuación es $0 = 0$ y el sistema puede ser SCl; con otro término independiente sería $0 = k$ y saldría SI. Cada vez que vayas a dividir entre una expresión con el parámetro, separa antes el caso en que vale cero.

ERROR TÍPICO · USAR LA SOLUCIÓN GENERAL EN UN VALOR CRÍTICO

La fórmula del caso SCD, una vez simplificada, a veces «funciona» al sustituir un valor crítico (en el ejemplo 3, $m = 1$ da $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$). Ese punto es una solución, pero no la solución: en $m = 1$ hay infinitas. Los valores críticos se discuten y se resuelven siempre aparte, con el número sustituido desde el principio.

ERROR TÍPICO · DEJAR CASOS SIN ESTUDIAR CON DOS PARÁMETROS

Con $|A| = (a-1)(b-1)$ hay que estudiar $a = 1$, $b = 1$ y lo que pasa cuando ocurren las dos cosas a la vez. Y al final, la lista de casos debe cubrir todas las parejas (a, b) sin repetir ninguna: escribe « $a = 1$ (cualquier b)», « $a \neq 1$ y $b = 1$ », « $a \neq 1$ y $b \neq 1$ ».

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + my = m + 2 \end{cases}$$

- a) Discútelos según los valores de m e interpreta cada caso con las dos rectas.
- b) Resuélvelo cuando sea compatible determinado.
- c) Resuélvelo en el caso compatible indeterminado, tomando $y = t$.

a) 1. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 4$. Valor crítico: $m = 4$.

2. Si $m \neq 4$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$. **SCD**: las rectas se cortan en un punto.

3. Si $m = 4$: la segunda ecuación es $2x + 4y = 6$, el doble de la primera. Las dos filas de A^* son proporcionales: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 2$. **SCI**: es la misma recta escrita dos veces.

b) Por Cramer, para $m \neq 4$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ m+2 & m \end{vmatrix}}{m-4} = \frac{3m - 2m - 4}{m-4} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m+2 \end{vmatrix}}{m-4} = \frac{m+2-6}{m-4} = 1$$

La solución es $(1, 1)$ para todo $m \neq 4$: todas las rectas $2x + my = m + 2$ pasan por el punto $(1, 1)$, que también está en $x + 2y = 3$.

c) Con $m = 4$ queda $x + 2y = 3$. Con $y = t$: $x = 3 - 2t$. Soluciones $(3 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 2

★ Básico

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + (m - 1)y + z = 1 \\ (m - 1)x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discútelos según los valores del parámetro real m .
 b) En el caso compatible indeterminado, ¿de cuántos parámetros dependen las soluciones?

- a) 1. **Determinante.** Restando la primera fila a la segunda ($F_2 - F_1$), la segunda fila de A pasa a ser $(0, m, 0)$. Desarrollando por ella:

$$|A| = m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m-1 & 1 \end{vmatrix} = m(1 - m + 1) = m(2 - m)$$

Valores críticos: $m = 0$ y $m = 2$.

2. Si $m \neq 0$ y $m \neq 2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD.**

3. Si $m = 0$: las dos primeras ecuaciones son $x - y + z = 2$ y $x - y + z = 1$: mismo primer miembro y distinto segundo miembro. **SI.** Con rangos: el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ (filas 1 y 3, columnas 2 y 3) da $\text{rg}(A) = 2$, y su orlado con la segunda fila y los términos independientes es $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, así que $\text{rg}(A^*) = 3$.

4. Si $m = 2$: las ecuaciones segunda y tercera son las dos $x + y + z = 1$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$ y, como dos filas de A^* son iguales, $\text{rg}(A^*) = 2$. **SCI.**

Discusión: $m = 0$, SI; $m = 2$, SCI; cualquier otro valor, SCD.

- b) Para $m = 2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$ con 3 incógnitas, así que las soluciones dependen de $3 - 2 = 1$ parámetro.

EJERCICIO 3

★ Básico

En el sistema siguiente el parámetro m solo aparece en los términos independientes:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + 2z = m \end{cases}$$

- a) Calcula el rango de la matriz de coeficientes A .
- b) Discute el sistema según los valores de m .
- c) Resuélvelo cuando sea compatible, tomando $z = t$.

a) La tercera fila de A es la suma de las dos primeras: $(1, 1, 1) + (1, -1, 1) = (2, 0, 2)$. Así que $|A| = 0$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$, para cualquier m (la matriz A no depende de m).

b) Orlamos ese menor con la tercera fila y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} = 1(-m - 0) - 1(m - 6) + 1(0 + 2) = 8 - 2m$$

- Si $m = 4$: vale 0, $\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A) < 3$. **SCI**.
- Si $m \neq 4$: $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$. **SI**.

Tiene sentido: como el primer miembro de la tercera ecuación es la suma de los otros dos, su término independiente debe ser $1 + 3 = 4$.

c) Para $m = 4$ basta con las dos primeras ecuaciones. Con $z = t$: $x + y = 1 - t$ y $x - y = 3 - t$. Sumando, $2x = 4 - 2t$, $x = 2 - t$; restando, $2y = -2$, $y = -1$.

$$(x, y, z) = (2 - t, -1, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 4 ★★ Medio

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

- a) Discútelos según los valores de m .
 b) Resuélvelo cuando sea compatible determinado, en función de m .
 c) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado, tomando $y = s$ y $z = t$.

- a) 1. **Determinante.** Restando la primera fila a las otras dos ($F_2 - F_1, F_3 - F_1$) queda una matriz triangular:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2$$

Único valor crítico: $m = 1$ (raíz doble).

2. Si $m \neq 1$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**.

3. Si $m = 1$: las tres ecuaciones son $x + y + z = 1$. Todas las filas de A^* son iguales: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 3$. **SCI** con $3 - 1 = 2$ parámetros.

Discusión: $m = 1$, SCI; $m \neq 1$, SCD.

- b) Las mismas operaciones de fila sobre el sistema dan

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (m-1)y = m-1 \\ (m-1)z = m^2 - 1 \end{cases}$$

Como $m \neq 1$, se puede dividir entre $m-1$: $y = 1$ y $z = \frac{(m-1)(m+1)}{m-1} = m+1$. Entonces $x = 1 - 1 - (m+1) = -m-1$.

$$(x, y, z) = (-m-1, 1, m+1)$$

Comprobación con $m = 0$: $(-1, 1, 1)$ cumple $-1 + 1 + 1 = 1$, $-1 + 0 + 1 = 0$ y $-1 + 1 + 0 = 0$.

- c) Para $m = 1$ queda una sola ecuación, $x + y + z = 1$. Con $y = s$, $z = t$: $x = 1 - s - t$.

$$(x, y, z) = (1 - s - t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 5

★★ Medio

Se considera el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y = 0 \\ x + y + mz = 3m \\ x + 2z = m + 2 \end{cases}$$

- Calcula $|A^*|$ en función de m .
- Discute el sistema según los valores de m .
- Resuélvelo en cada caso en que sea compatible.

- a) Restando la primera fila a la tercera ($F_3 - F_1$), la tercera fila de A^* queda $(0, 0, m - 1, 3m - 3) = (m - 1)(0, 0, 1, 3)$. Sacamos el factor $m - 1$:

$$|A^*| = (m - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & m + 2 \end{vmatrix}$$

En el determinante que queda, restamos a la cuarta columna el triple de la tercera ($C_4 - 3C_3$): la tercera fila pasa a ser $(0, 0, 1, 0)$ y la cuarta $(1, 0, 2, m - 4)$. Desarrollando por la tercera fila y después por la última columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & m - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m - 4 \end{vmatrix} = (m - 4)(-1 - 1) = -2(m - 4)$$

Así que $|A^*| = -2(m - 1)(m - 4)$.

- b) 1. **Rango de A .** El menor de las filas 1, 2 y 4 es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ y no depende de m : $\text{rg}(A) = 3$ siempre.
2. Si $m \neq 1$ y $m \neq 4$: $\text{rg}(A^*) = 4 \neq 3$. **SI.**
3. Si $m = 1$ o $m = 4$: $|A^*| = 0$, luego $\text{rg}(A^*) = 3 = \text{rg}(A) = n$. **SCD** en los dos casos.

Discusión: $m = 1$, SCD; $m = 4$, SCD; cualquier otro valor, SI.

- c) En los dos casos, las ecuaciones 1, 2 y 4 (las del menor no nulo) tienen solución única y la tercera sobra.
- $m = 1$: $x = y$, $2x + z = 3$, $x + 2z = 3$. Restando las dos últimas, $x - z = 0$, así que $x = z$, y entonces $3x = 3$: $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.
 - $m = 4$: $x = y$, $2x + z = 3$, $x + 2z = 6$. Del doble de la tercera menos la segunda: $3z = 9$, $z = 3$, y $x = 0$: $(x, y, z) = (0, 0, 3)$. Comprobación en la tercera: $0 + 0 + 4 \cdot 3 = 12 = 3 \cdot 4$.

Este sistema enseña que en un 4×3 un valor crítico no tiene por qué ser «el caso raro»: aquí los dos valores críticos son justo los únicos en los que hay solución.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Se considera el sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ x - y + z - w = 0 \\ 2x + (m^2 + 1)z + (m^2 - 1)w = m + 1 \end{cases}$$

- a) Discútelos según los valores de m .
 b) Resuélvelo para $m = 1$, tomando $z = s$ y $w = t$.
 c) Resuélvelo para $m = 0$, tomando $w = t$.

a) 1. Sin cuentas. A es 3×4 : $\text{rg}(A) \leq 3 < 4$. Nunca es SCD.

2. Menor de orden 2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ (filas 1 y 2, columnas 1 y 2). $\text{rg}(A) \geq 2$.

3. Orlados dentro de A , con la tercera fila y la columna 3 o la columna 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & m^2 + 1 \end{vmatrix} = 2 - 2m^2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & m^2 - 1 \end{vmatrix} = 2 - 2m^2$$

Los dos se anulan si y solo si $m = 1$ o $m = -1$.

4. Si $m \neq \pm 1$: $\text{rg}(A) = 3$ y, como A^* tiene 3 filas, $\text{rg}(A^*) = 3 < 4$. **SCI** con un parámetro.

5. Si $m = \pm 1$: $\text{rg}(A) = 2$. Orlamos con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & m + 1 \end{vmatrix} = 2 - 2m$$

- $m = 1$: vale 0, $\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A)$. **SCI** con $4 - 2 = 2$ parámetros.
- $m = -1$: vale $4 \neq 0$, $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$. **SI**.

Discusión: $m = 1$, **SCI** (2 parámetros); $m = -1$, **SI**; cualquier otro valor, **SCI** (1 parámetro).

b) Para $m = 1$ la tercera ecuación es $2x + 2z = 2$, la suma de las dos primeras, y sobra. Con $z = s$, $w = t$:
 $x + y = 2 - s - t$ y $x - y = -s + t$. Sumando, $2x = 2 - 2s$; restando, $2y = 2 - 2t$:

$$(x, y, z, w) = (1 - s, 1 - t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

c) Para $m = 0$ el sistema es $x + y + z + w = 2$, $x - y + z - w = 0$, $2x + z - w = 1$. Con $w = t$: sumando las dos primeras, $x + z = 1$; restándolas, $y + w = 1$, así que $y = 1 - t$. Sustituyendo $z = 1 - x$ en la tercera: $2x + 1 - x - t = 1$, luego $x = t$ y $z = 1 - t$.

$$(x, y, z, w) = (t, 1 - t, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 7

★★ Medio

Un taller fabrica mesas, sillas y estanterías. Cada mesa necesita 2 horas de carpintería, 1 de barnizado y 1 de montaje; cada silla, 1 hora de carpintería, 1 de barnizado y 2 de montaje; cada estantería, 2 horas de carpintería, 1 de barnizado y k de montaje. Esta semana hay exactamente 14 horas de carpintería, 9 de barnizado y 13 de montaje, y se quieren usar todas. Llama x , y , z al número de mesas, sillas y estanterías.

- Plantea el sistema y discútelo según los valores de k .
- Para $k = 1$, resuélvelo tomando $z = t$.
- Para $k = 1$, ¿cuántos planes de producción posibles hay (números enteros no negativos de mesas, sillas y estanterías)?
- Si cada estantería necesita 3 horas de montaje, ¿cuántos muebles de cada tipo se fabrican?

a) 1. El sistema.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 14 \\ x + y + z = 9 \\ x + 2y + kz = 13 \end{cases}$$

2. **Determinante.** $|A| = 2(k - 2) - 1(k - 1) + 2(2 - 1) = k - 1$. Valor crítico: $k = 1$.

3. Si $k \neq 1$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**.

4. Si $k = 1$: el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$. Orlando con la tercera fila y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 2(13 - 18) - 1(13 - 9) + 14(2 - 1) = -10 - 4 + 14 = 0$$

$\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A) < 3$. **SCI**. (La tercera ecuación es el triple de la segunda menos la primera.)

Discusión: $k = 1$, SCI; $k \neq 1$, SCD.

- Con $k = 1$ basta con las dos primeras ecuaciones. Restándolas, $x + z = 5$, así que $x = 5 - t$; y de la segunda, $y = 9 - x - z = 4$.

$$(x, y, z) = (5 - t, 4, t)$$

- Hacen falta $t \geq 0$ entero y $5 - t \geq 0$, es decir, $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Hay **6** planes posibles, todos con 4 sillas.

d) Con $k = 3$ el sistema es SCD. Como antes, de las dos primeras ecuaciones $x = 5 - z$ e $y = 4$. En la tercera: $5 - z + 8 + 3z = 13$, luego $2z = 0$ y $z = 0$. Se fabrican **5 mesas, 4 sillas y ninguna estantería**.
Comprobación: $10 + 4 = 14$, $5 + 4 = 9$, $5 + 8 = 13$.

EJERCICIO 8 ★★★ Difícil

Se considera el sistema, con parámetros reales a y b ,

$$\begin{cases} ax + y + z = 2 \\ x + by + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de a y b .
 b) Resuélvelo cuando sea compatible determinado, en función de a y b .
 c) Resuélvelo para $b = 1$ y $a \neq 1$, tomando $z = t$.

- a) 1. **Determinante.** Restando la tercera fila a las dos primeras ($F_1 - F_3, F_2 - F_3$):

$$|A| = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(b-1)$$

Se anula si $a = 1$ o si $b = 1$.

2. Si $a \neq 1$ y $b \neq 1$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD.**

3. Si $a = 1$ (cualquier b): la primera ecuación es $x + y + z = 2$ y la tercera $x + y + z = 1$. Mismo primer miembro, distinto término independiente: **SI**. Con rangos: las filas 1 y 3 de A son iguales, así que $\text{rg}(A) \leq 2$, mientras que el menor de A^* formado por esas dos filas, la columna 1 y la de términos independientes es $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Con la segunda fila: si $b \neq 1$, $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$; si $b = 1$, las tres filas de A son iguales, $\text{rg}(A) = 1$ y $\text{rg}(A^*) = 2$. En los dos casos los rangos son distintos.

4. Si $b = 1$ y $a \neq 1$: las filas 2 y 3 de A^* son iguales, $(1, 1, 1, 1)$, así que una sobra y $\text{rg}(A^*) \leq 2$. El menor $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$. Rangos iguales a $2 < 3$: **SCI**.

Discusión:

- $a = 1$ (cualquier b): **SI**.
- $a \neq 1$ y $b = 1$: **SCI** con un parámetro.
- $a \neq 1$ y $b \neq 1$: **SCD**.

- b) Con las mismas operaciones de fila, el sistema queda

$$\begin{cases} (a-1)x = 1 \\ (b-1)y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Como $a \neq 1$ y $b \neq 1$: $x = \frac{1}{a-1}$, $y = 0$ y $z = 1 - \frac{1}{a-1} = \frac{a-2}{a-1}$.

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a-1}, 0, \frac{a-2}{a-1} \right)$$

La solución no depende de b : el parámetro b solo decide si el sistema es determinado o no.

c) Para $b = 1$ y $a \neq 1$ nos quedamos con las ecuaciones 1 y 3: $ax + y + z = 2$ y $x + y + z = 1$. Restándolas, $(a - 1)x = 1$, $x = \frac{1}{a-1}$. Con $z = t$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a-1}, \frac{a-2}{a-1} - t, t \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Para el examen: con $|A| = (a - 1)(b - 1)$ hay tres situaciones, no dos: $a = 1$, $b = 1$ y las dos a la vez. Aquí el cruce $a = b = 1$ queda dentro de « $a = 1$ » porque también es SI, pero hay que comprobarlo ($\text{rg}(A) = 1$, $\text{rg}(A^*) = 2$) antes de agruparlo.

EJERCICIO 9 ★★★ Difícil

Se considera el sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

- a) Resuélvelo tomando $z = t$.
- b) Se le añade la ecuación $x + ay + 3z = b$. Halla los valores de a y b para que el nuevo sistema de tres ecuaciones sea compatible indeterminado.
- c) Clasifica el nuevo sistema para $a = -3$ y $b = 0$.
- d) Resuelve el nuevo sistema para $a = 1$ y $b = 2$.

- a) Sumando las dos ecuaciones, $3x = 6$ y $x = 2$. Entonces $y - z = -1$; con $z = t$, $y = t - 1$.

$$(x, y, z) = (2, t - 1, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Es una recta de soluciones (la recta en la que se cortan los dos planos).

- b) **Idea:** el nuevo sistema tiene infinitas soluciones si y solo si la nueva ecuación la cumplen **todos** los puntos de la recta del apartado a). Si solo la cumplen algunos, habrá uno o ninguno.

1. Sustituimos la solución general en $x + ay + 3z = b$:

$$2 + a(t - 1) + 3t = b \iff (a + 3)t = b + a - 2$$

2. Esta igualdad se cumple para **todo** t si y solo si el coeficiente de t y el término independiente son cero: $a + 3 = 0$ y $b + a - 2 = 0$, es decir, $a = -3$ y $b = 5$.

3. **Comprobación con rangos.** $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = -3(a + 3)$, que se anula solo para $a = -3$; con $a =$

-3 , el orlado $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & b \end{vmatrix} = 15 - 3b$ se anula solo para $b = 5$. Mismo resultado.

- c) Con $a = -3$ y $b = 0$, la ecuación del paso 1 queda $0 \cdot t = -5$, que no se cumple para ningún t . **Sl.** (Con rangos: $\text{rg}(A) = 2$ y el orlado vale $15 \neq 0$, así que $\text{rg}(A^*) = 3$.) El tercer plano es paralelo a la recta y no la toca.
- d) Con $a = 1$ y $b = 2$ la ecuación del paso 1 es $4t = 1$, así que $t = \frac{1}{4}$ y hay una sola solución:

$$(x, y, z) = \left(2, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Comprobación: $2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 1$, $4 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 5$ y $2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 2$.

Para el examen: sustituir la solución general en la ecuación nueva convierte la pregunta en «¿para cuántos t se cumple?»: para todos (SCI), para uno (SCD) o para ninguno (SI). Es más rápido que repetir la discusión, pero conviene confirmarlo con los rangos.

EJERCICIO 10

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + my = m \\ x + y + mz = m \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m . (1 punto)
- Resuélvelo para $m = 1$, tomando $y = t$. (0,5 puntos)
- Resuélvelo cuando sea compatible determinado, en función de m . (0,5 puntos)
- Halla el valor de m para el que el sistema es compatible determinado y su solución cumple $x = 2z$. (0,5 puntos)

- a) 1. **Determinante de A** (desarrollando por la primera fila):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 1 \cdot m^2 - 1 \cdot m + (-1)(1 - m) = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$$

Valores críticos: $m = 1$ y $m = -1$.

2. Si $m \neq \pm 1$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**.

3. Si $m = 1$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (filas 1 y 2, columnas 2 y 3) da $\text{rg}(A) = 2$. La columna de términos independientes, $(1, 1, 1)$, es igual a la primera columna de A , así que añadirla no aumenta el rango: por ejemplo, el orlado

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ tiene dos columnas iguales. } \text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A) < 3. \text{ **SCI**.}$$

4. Si $m = -1$: la primera ecuación es $x + y - z = 1$ y la tercera $x + y - z = -1$. Mismo primer miembro,

distinto segundo: **SI**. Con rangos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ da $\text{rg}(A) = 2$, y el orlado $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

(filas 1, 2, 3; columnas 1, 2 y términos independientes) da $\text{rg}(A^*) = 3$.

Discusión: $m = 1$, SCI; $m = -1$, SI; $m \neq \pm 1$, SCD.

- b) Para $m = 1$, restando la primera ecuación a la segunda: $z = 0$. Queda $x + y = 1$; con $y = t$, $x = 1 - t$.

$$(x, y, z) = (1 - t, t, 0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Ojo: aquí z no puede hacer de parámetro, porque vale 0 en todas las soluciones. Por eso el enunciado pide $y = t$.

c) Por Cramer, para $m \neq \pm 1$:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ m & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m(m-1), \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = m(m-1), \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2$$

Dividiendo entre $(m-1)(m+1)$ y simplificando $m-1 \neq 0$:

$$x = \frac{m}{m+1}, \quad y = \frac{m}{m+1}, \quad z = \frac{m-1}{m+1}$$

Comprobación con $m=0$: $(0, 0, -1)$ cumple $0+0+1=1$, $0=0$ y $0=0$.

d) Con $m \neq \pm 1$, la condición $x=2z$ es

$$\frac{m}{m+1} = \frac{2(m-1)}{m+1} \iff m = 2m-2 \iff m = 2$$

que no es crítico. Para $m=2$ la solución es $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ y, en efecto, $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$.

Para el examen: en a) se puntúa cada caso (general y cada valor crítico) con sus dos rangos justificados. En d) hay que decir que $m=2$ no es un valor crítico; si la ecuación hubiera dado $m=1$ o $m=-1$, la respuesta sería que no existe tal m , porque ahí el sistema no es compatible determinado.

Resumen

- Discutir es clasificar el sistema (SCD, SCI o SI) para todos los valores del parámetro; resolver es dar las soluciones de cada caso compatible.
- Sistema cuadrado: los valores críticos son las raíces de $|A|=0$. Fuera de ellos, SCD; la solución en función de m sale por Cramer y vale solo para valores no críticos.
- En cada valor crítico, sustituye el número y calcula $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$ orlando un menor no nulo con la columna de términos independientes.
- 3×4 : nunca SCD; los valores críticos anulan todos los menores de orden 3 de A . 4×3 : si $|A^*| \neq 0$ es SI, y solo puede ser compatible donde $|A^*|=0$.
- Dos parámetros: estudia cada factor de $|A|$, el cruce de los dos y escribe una lista de casos que no se solapan y lo cubra todo.
- No divides entre una expresión con el parámetro sin separar antes el caso en que vale cero.

- En el SCI, elige como parámetro una incógnita que de verdad quede libre y escribe la solución con $t \in \mathbb{R}$.

Problemas de planteamiento con sistemas

IDEA CLAVE

Casi todo el trabajo de un problema con enunciado está en **traducir** el texto a ecuaciones; resolver el sistema es lo que ya sabes hacer. En la PAU suele haber un problema así en el bloque de Álgebra, y la mitad de la nota está en el planteamiento y en interpretar la solución en el contexto.

Del enunciado al sistema

Un problema de planteamiento se corrige en tres partes: el **sistema** (bien escrito y con las incógnitas explicadas), la **resolución** y la **respuesta a la pregunta** con sus unidades. Si el planteamiento está bien y te equivocas en una cuenta, sigues teniendo buena parte de la puntuación; si no dices qué es cada incógnita, el corrector no puede saber qué has hecho.

MÉTODO · PLANTEAR Y RESOLVER UN PROBLEMA CON UN SISTEMA

1. **Define las incógnitas** con una frase y sus unidades: « x = kilos de café del tipo A». Elige tantas como cantidades desconocidas haya.
2. **Traduce cada dato a una ecuación**, frase a frase. Cada condición independiente del enunciado da una ecuación.
3. **Ordena el sistema** (incógnitas a la izquierda, en el mismo orden en todas las ecuaciones) y clasifícalo si hace falta: SCD (sistema compatible determinado, una solución), SCI (compatible indeterminado, infinitas) o SI (incompatible, ninguna).
4. **Resuelve** con el método más cómodo: Gauss, Cramer o la matriz inversa.
5. **Interpreta**: ¿la solución tiene sentido? Cantidades no negativas, personas y unidades enteras, porcentajes entre 0 y 100.
6. **Comprueba** la solución en el enunciado (no en tu sistema: si el sistema está mal planteado, comprobarlo ahí no detecta nada) y responde con una frase.

Mezclas, precios y edades

La mayoría de los enunciados se construyen con unas pocas frases tipo. Conviene tenerlas automatizadas:

Frase del enunciado	Ecuación
«hay el doble de B que de C»	$y = 2z$ (el doble va con la cantidad pequeña)
«A supera en 5 a B»	$x = y + 5$
«20 kg de mezcla a 11 €/kg»	$x + y + z = 20$ y coste total $= 20 \cdot 11 = 220$
«una disolución al 20 %»	cantidad de soluto $= \frac{20}{100}x$

Frase del enunciado

Ecuación

«con un 15 % de descuento» se paga $\frac{85}{100}$ del precio

«hace 2 años tenía el triple que B» $x - 2 = 3(y - 2)$ (a los dos se les resta)

En las **mezclas** se plantean siempre dos balances: el de cantidad total (kilos, litros) y el del valor o la sustancia que interesa (euros, soluto). El precio de la mezcla **no** es la media de los precios, sino el coste total entre la cantidad total: $8x + 10y + 14z = 11(x + y + z)$.

En las **edades**, cada condición se refiere a un momento (hoy, hace n años, dentro de n años) y en ese momento **todas** las edades cambian lo mismo.

Producción y recursos

Cuando una empresa fabrica varios productos que consumen los mismos recursos, los datos forman una tabla: una fila por recurso y una columna por producto. Si x, y, z son las unidades fabricadas, cada recurso da una ecuación «consumo total = disponible». Por ejemplo, si una mesa usa 3 horas de carpintería, una silla 1 hora y una estantería 2 horas, y hay 80 horas, la ecuación es $3x + y + 2z = 80$.

El sistema queda $AX = B$, donde A es la tabla de consumos, X las unidades y B lo disponible. Si $|A| \neq 0$, la producción que agota todos los recursos es única: $X = A^{-1}B$. Si la empresa hace muchos planes con los mismos productos y distintos recursos, calcular A^{-1} una vez ahorra trabajo.

Redes de circulación

En una red de calles (o de tuberías, o de cables), cada cruce es un **nudo** y en cada nudo se cumple:

$$\text{lo que entra} = \text{lo que sale}$$

Si a un cruce llegan 300 coches por hora por la calle norte y x por la oeste, y salen y por la sur y 200 por la este, la ecuación del nudo es $300 + x = y + 200$. Hay una ecuación por nudo y una incógnita por cada tramo de calle sin dato.

PROPIEDAD • LAS REDES SUELEN DAR UN SCI

Si en la red entra en total lo mismo que sale, la suma de todas las ecuaciones de los nudos es $0 = 0$: **una ecuación es combinación de las demás** y sobra. Por eso, con tantas incógnitas como nudos, el rango es como mucho el número de nudos menos uno y el sistema es compatible indeterminado.

La intuición: si el tráfico se conserva en todos los cruces menos uno, también se conserva en ese último, porque los coches no desaparecen. Las infinitas soluciones tienen sentido físico (los conductores pueden repartirse de muchas maneras), pero solo valen las que cumplen las **restricciones**: flujos no negativos, si las calles son de sentido único, y por debajo de la capacidad de cada calle.

Ajuste de reacciones químicas

Ajustar una reacción es encontrar coeficientes naturales que igualen el número de átomos de cada elemento a los dos lados. Para $a\text{C}_3\text{H}_8 + b\text{O}_2 \rightarrow c\text{CO}_2 + d\text{H}_2\text{O}$, cada elemento da una ecuación:

$$\text{C: } 3a = c, \quad \text{H: } 8a = 2d, \quad \text{O: } 2b = 2c + d$$

El sistema es **homogéneo** (todos los términos independientes son 0) y tiene más incógnitas que ecuaciones independientes, así que es SCI. Tiene sentido: si una reacción está ajustada, al multiplicar todos los coeficientes por 2 sigue ajustada. Se resuelve dejando una incógnita como parámetro y se elige el valor que da los **naturales más pequeños** (recuerda los sistemas homogéneos).

Interpolación: una parábola o una cúbica por varios puntos

Si la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (x_1, y_1) , entonces $ax_1^2 + bx_1 + c = y_1$: **cada punto es una ecuación lineal en los coeficientes**. Tres puntos dan un sistema 3×3 en a, b, c ; cuatro puntos y $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dan un sistema 4×4 .

PROPIEDAD · EXISTE UN ÚNICO POLINOMIO INTERPOLADOR

Por $n + 1$ puntos con abscisas **distintas** pasa exactamente un polinomio de grado menor o igual que n . Para la parábola, el determinante de la matriz de coeficientes vale, salvo el signo, $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$, que no es nulo si las tres abscisas son distintas: el sistema es SCD.

Por ejemplo, la parábola que pasa por $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 5)$ cumple $c = 1$, $a + b + c = 2$ y $4a + 2b + c = 5$; de ahí $a = 1$, $b = 0$ y $f(x) = x^2 + 1$. Si al resolver sale $a = 0$, el polinomio tiene grado menor: los puntos están alineados.

Interpretar la solución en el contexto

NOTA · QUÉ HACER SEGÚN EL TIPO DE SISTEMA

- **SCD**: comprueba que la solución tiene sentido. Una cantidad negativa o un número de personas fraccionario significa que el problema, tal como está planteado, **no tiene solución real**, aunque el sistema sí la tenga.
- **SCI**: escribe la solución general con un parámetro y después **impón las restricciones** del contexto ($x \geq 0$, enteros, capacidades). Suelen quedar un intervalo de valores o un número finito de soluciones; preguntas como «¿cuántas unidades como máximo de...?» se responden con los extremos de ese intervalo.
- **SI**: los datos son contradictorios; la respuesta es que la situación descrita es imposible, y hay que decirlo con una frase.

Por ejemplo, si la solución general es $x = t$, $y = 30 - 2t$, $z = t$ y las cantidades son unidades, hace falta $t \geq 0$ y $30 - 2t \geq 0$, es decir, $t \in \{0, 1, \dots, 15\}$: hay **16** soluciones, no infinitas.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Una mezcla de tres cafés

Una tostadora mezcla tres variedades de café: A, a 8 €/kg; B, a 10 €/kg, y C, a 14 €/kg. Quiere obtener 20 kg de mezcla que le salgan a 11 €/kg, usando de la variedad B el doble de kilos que de la C. ¿Cuántos kilos de cada variedad debe usar?

1. **Incógnitas.** x, y, z = kilos de café A, B y C, respectivamente.

2. **Traducción.**

- La mezcla pesa 20 kg: $x + y + z = 20$.
- Cuesta $20 \cdot 11 = 220$ euros, y el coste es la suma de lo que cuesta cada variedad: $8x + 10y + 14z = 220$.
- De B, el doble que de C: $y = 2z$.

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 8x + 10y + 14z = 220 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

3. **Resolución por sustitución.** Con $y = 2z$, las dos primeras ecuaciones quedan $x + 3z = 20$ y $8x + 34z = 220$. De la primera, $x = 20 - 3z$; sustituyendo, $160 - 24z + 34z = 220$, luego $10z = 60$ y $z = 6$. Entonces $y = 12$ y $x = 20 - 18 = 2$.

4. **Interpretación y comprobación.** Las tres cantidades son positivas. Pesan $2 + 12 + 6 = 20$ kg y cuestan $16 + 120 + 84 = 220$ euros, es decir, 11 €/kg; y 12 es el doble de 6.

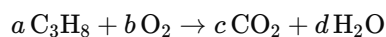
Debe usar **2 kg de A, 12 kg de B y 6 kg de C.**

EJEMPLO 2

★★ Medio

Ajustar la combustión del propano

Ajusta la reacción de combustión del propano



planteando un sistema de ecuaciones lineales. Da los coeficientes naturales más pequeños posibles.

1. **Una ecuación por elemento.** Igualamos los átomos a cada lado:

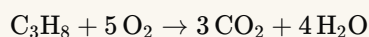
- Carbono: $3a = c$.
- Hidrógeno: $8a = 2d$.
- Oxígeno: $2b = 2c + d$.

$$\begin{cases} 3a - c = 0 \\ 8a - 2d = 0 \\ 2b - 2c - d = 0 \end{cases}$$

2. **Clasificación.** Es homogéneo, con 3 ecuaciones y 4 incógnitas. Las tres ecuaciones son independientes (cada una contiene una incógnita que no está en las anteriores: c , d y b), así que el rango es $3 < 4$: **SCI** con un parámetro.

3. **Solución general.** Tomamos $a = t$: $c = 3t$, $d = 4t$ y $b = \frac{2c+d}{2} = \frac{6t+4t}{2} = 5t$. Las soluciones son $(t, 5t, 3t, 4t)$.

4. **Coeficientes naturales mínimos.** Todos son múltiplos de t ; con $t = 1$ ya son naturales y no tienen ningún divisor común. La reacción ajustada es



5. **Comprobación.** C: $3 = 3$. H: $8 = 4 \cdot 2$. O: $5 \cdot 2 = 10 = 3 \cdot 2 + 4$.

Cajas de regalo: un SCI con restricciones

Una papelería prepara tres tipos de cajas de regalo con libretas y bolígrafos. La caja A lleva 1 libreta y 3 bolígrafos; la B, 2 libretas y 2 bolígrafos, y la C, 3 libretas y 1 bolígrafo. Tiene 60 libretas y 60 bolígrafos y quiere usarlos todos. Llama x, y, z al número de cajas A, B y C, respectivamente.

- Plantea el sistema y clasifícalo.
- Halla la solución general tomando $z = t$.
- ¿Cuántas formas distintas hay de preparar las cajas (con un número entero y no negativo de cajas de cada tipo; puede no prepararse alguno de los tipos)?
- ¿Cuántas cajas C puede preparar como máximo?
- ¿Cuántas cajas prepara en total? Justifica que no depende del reparto.

- a) **Planteamiento.** Cada material da una ecuación «lo que se usa = lo que hay»:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 60 & (\text{libretas}) \\ 3x + 2y + z = 60 & (\text{bolígrafos}) \end{cases}$$

Son 2 ecuaciones con 3 incógnitas. Las filas de la matriz de coeficientes, $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$, no son proporcionales, así que $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A^*) < 3$: es un **SCI** con un parámetro (teorema de Rouché-Frobenius).

- b) **Solución general.** Restando la primera ecuación a la segunda: $2x - 2z = 0$, luego $x = z$. Con $z = t$: $x = t$ y, de la primera, $t + 2y + 3t = 60$, es decir, $y = 30 - 2t$.

$$(x, y, z) = (t, 30 - 2t, t)$$

- c) **Restricciones.** Son números de cajas: enteros y no negativos.

- $x = z = t \geq 0$.
- $y = 30 - 2t \geq 0 \iff t \leq 15$.

Si t es entero, y también lo es. Los valores posibles son $t = 0, 1, 2, \dots, 15$: hay **16** formas. El sistema tiene infinitas soluciones, pero el problema solo tiene 16.

- d) **Máximo de cajas C.** $z = t$ es como mucho 15. Con $t = 15$ se preparan 15 cajas A, ninguna B y 15 cajas C (comprobación: $15 + 0 + 45 = 60$ libretas y $45 + 0 + 15 = 60$ bolígrafos).
- e) **Total de cajas.** $x + y + z = t + (30 - 2t) + t = 30$, sea cual sea t . La razón se ve sumando las dos ecuaciones: $4x + 4y + 4z = 120$, es decir, $x + y + z = 30$. Cada caja lleva exactamente 4 objetos y hay 120 objetos en total, así que siempre salen 30 cajas.

Para el examen: en un SCI con contexto, escribir solo «infinitas soluciones» se puntúa como mal. Hay que dar la solución general, escribir las desigualdades que impone el enunciado y contar o acotar las soluciones válidas.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • TRADUCIR «EL DOBLE» AL REVÉS

«Hay el doble de B que de C» se escribe $y = 2z$, no $2y = z$. Para no equivocarte, prueba con números: si hay 6 kg de C, de B hay 12, y $12 = 2 \cdot 6$. El mismo error aparece con «el triple», «la mitad» o «5 más que»: comprueba la ecuación con un ejemplo antes de seguir.

ERROR TÍPICO • MEZCLAR UNIDADES O PORCENTAJES

Si un dato está en euros y otro en miles de euros, o un porcentaje se escribe como 20 en una ecuación y como 0,2 en otra, el sistema sale coherente pero la solución es falsa. Antes de escribir el sistema, decide las unidades de cada incógnita (y escríbelas en la definición) y pasa todos los porcentajes a fracción: 20 % de x es $\frac{20}{100}x$.

ERROR TÍPICO • DAR LA SOLUCIÓN GENERAL SIN MIRAR EL CONTEXTO

En un SCI de un problema real, la respuesta $(t, 30 - 2t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$ está incompleta: con $t = 20$ saldrían -10 cajas. Del mismo modo, en un SCD con solución $x = -3$ o $x = 2,5$ personas hay que decir que el problema no tiene solución con sentido. Interpretar es parte del ejercicio, y en la PAU se puntúa aparte.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

La suma de las edades de una madre y sus dos hijos es 60 años. Hace 2 años, la edad de la madre era el triple de la del hijo mayor, y dentro de 2 años será el cuádruple de la de la hija pequeña. Halla la edad actual de cada uno.

1. **Incógnitas.** x, y, z = edades actuales (en años) de la madre, el hijo mayor y la hija pequeña.

2. **Traducción.**

- Suma: $x + y + z = 60$.
- Hace 2 años **los dos** tenían 2 años menos: $x - 2 = 3(y - 2)$, es decir, $x - 3y = -4$.
- Dentro de 2 años los dos tendrán 2 más: $x + 2 = 4(z + 2)$, es decir, $x - 4z = 6$.

3. **Resolución.** De las dos últimas, $y = \frac{x+4}{3}$ y $z = \frac{x-6}{4}$. Sustituyendo en la primera y multiplicando por 12:

$$12x + 4(x + 4) + 3(x - 6) = 720 \iff 19x - 2 = 720 \iff x = 38$$

Entonces $y = \frac{42}{3} = 14$ y $z = \frac{32}{4} = 8$.

4. **Comprobación.** $38 + 14 + 8 = 60$. Hace 2 años: $36 = 3 \cdot 12$. Dentro de 2 años: $40 = 4 \cdot 10$.

La madre tiene **38 años**, el hijo mayor **14** y la hija pequeña **8**.

EJERCICIO 2 ★ Básico

Halla los coeficientes a , b y c de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 2)$, $(2, 7)$ y $(-1, 4)$.

1. **Una ecuación por punto.** Sustituimos cada punto en $f(x) = ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 & f(1) = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 & f(2) = 7 \\ a - b + c = 4 & f(-1) = 4 \end{cases}$$

2. **Resolución.** Restando la tercera a la primera: $2b = -2$, luego $b = -1$. Restando la primera a la segunda: $3a + b = 5$, luego $3a = 6$ y $a = 2$. De la primera, $c = 2 - a - b = 2 - 2 + 1 = 1$.

3. **Comprobación.** $f(x) = 2x^2 - x + 1$: $f(1) = 2$, $f(2) = 8 - 2 + 1 = 7$, $f(-1) = 2 + 1 + 1 = 4$.

Las abscisas 1, 2 y -1 son distintas, así que esta parábola es la única que pasa por los tres puntos.

EJERCICIO 3

★ Básico

Un taller fabrica mesas, sillas y estanterías. Cada mesa necesita 3 horas de carpintería, 2 de montaje y 1 de barnizado; cada silla, 1 hora de carpintería, 1 de montaje y 1 de barnizado, y cada estantería, 2 horas de carpintería, 1 de montaje y 2 de barnizado. Esta semana dispone de 80 horas de carpintería, 55 de montaje y 60 de barnizado. ¿Cuántas mesas, sillas y estanterías debe fabricar para usar todas las horas disponibles?

1. **Incógnitas.** x, y, z = número de mesas, sillas y estanterías.

2. **Una ecuación por recurso** (horas usadas = horas disponibles):

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 80 & (\text{carpintería}) \\ 2x + y + z = 55 & (\text{montaje}) \\ x + y + 2z = 60 & (\text{barnizado}) \end{cases}$$

3. **Clasificación.** $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2 - 1) - 1(4 - 1) + 2(2 - 1) = 2 \neq 0$: SCD.

4. **Resolución.** Restando la tercera a la primera: $2x = 20$, luego $x = 10$. Las otras dos quedan $y + z = 35$ y $y + 2z = 50$; restando, $z = 15$ e $y = 20$.

5. **Comprobación.** Carpintería: $30 + 20 + 30 = 80$. Montaje: $20 + 20 + 15 = 55$. Barnizado: $10 + 20 + 30 = 60$.

Debe fabricar **10 mesas, 20 sillas y 15 estanterías**.

EJERCICIO 4

★★ Medio

Un laboratorio tiene tres disoluciones de alcohol en agua: la primera al 20 %, la segunda al 50 % y la tercera al 80 % (en volumen). Quiere preparar 100 litros de una disolución al 56 % mezclando las tres. Llama x , y , z a los litros que usa de la disolución al 20 %, al 50 % y al 80 %, respectivamente.

- a) Halla x , y y z si de la disolución al 80 % usa el doble de litros que de la del 20 %.
- b) Halla x , y y z si, en lugar de la condición de a), decide no usar la disolución al 50 %.
- c) Sin ninguna condición adicional, el problema tiene infinitas soluciones. Teniendo en cuenta que las cantidades de cada disolución no pueden ser negativas, halla el valor mínimo y el máximo que puede tomar z .

Las dos condiciones comunes son el volumen total y el alcohol puro: $x + y + z = 100$ y $\frac{20}{100}x + \frac{50}{100}y + \frac{80}{100}z = \frac{56}{100} \cdot 100$, que multiplicando por 10 queda $2x + 5y + 8z = 560$.

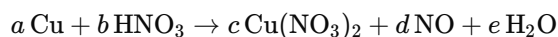
- a) Añadimos $z = 2x$. Sustituyendo: $3x + y = 100$ y $2x + 5y + 16x = 560$, es decir, $18x + 5y = 560$. Con $y = 100 - 3x$: $18x + 500 - 15x = 560$, luego $x = 20$, $y = 40$, $z = 40$. Comprobación: $4 + 20 + 32 = 56$ litros de alcohol en 100 litros.
- b) Ahora $y = 0$: $x + z = 100$ y $2x + 8z = 560$. Restando el doble de la primera: $6z = 360$, luego $z = 60$ y $x = 40$. Comprobación: $8 + 48 = 56$ litros de alcohol.
- c) Con solo las dos ecuaciones comunes (SCI, rango 2 y 3 incógnitas) tomamos z como parámetro. Restando el doble de la primera a la segunda: $3y + 6z = 360$, luego $y = 120 - 2z$, y $x = 100 - y - z = z - 20$. Las cantidades no pueden ser negativas:
 - $x = z - 20 \geq 0 \iff z \geq 20$.
 - $y = 120 - 2z \geq 0 \iff z \leq 60$.

Por tanto $20 \leq z \leq 60$: como mínimo 20 litros (y entonces no se usa la del 20 %) y como máximo 60 (y no se usa la del 50 %, que es el caso b).

EJERCICIO 5

★★ Medio

Se quiere ajustar la reacción del cobre con el ácido nítrico:



- Plantea el sistema que imponen los átomos de Cu, H, N y O, y halla el rango de su matriz de coeficientes.
- Halla la solución general tomando $a = t$.
- Escribe los coeficientes naturales más pequeños que ajustan la reacción.

- Una ecuación por elemento** (átomos a la izquierda = átomos a la derecha). En $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$ hay 1 Cu, 2 N y 6 O.

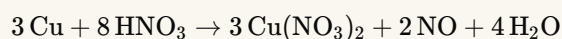
$$\begin{cases} a - c = 0 & (\text{Cu}) \\ b - 2e = 0 & (\text{H}) \\ b - 2c - d = 0 & (\text{N}) \\ 3b - 6c - d - e = 0 & (\text{O}) \end{cases}$$

Restando a la ecuación del O la del N multiplicada por 3: $2d - e = 0$. Con las incógnitas en el orden a, b, c, d, e , la matriz escalonada tiene cuatro filas no nulas (pivotes en a, b, c y d), así que el rango es 4. Con 5 incógnitas, es un SCI con un parámetro.

- Con $a = t$: $c = t$. De la ecuación del N y de $e = 2d$: $b = 2c + d$ y $b = 2e = 4d$, luego $4d = 2t + d$, $d = \frac{2t}{3}$, $e = \frac{4t}{3}$ y $b = \frac{8t}{3}$.

$$(a, b, c, d, e) = \left(t, \frac{8t}{3}, t, \frac{2t}{3}, \frac{4t}{3}\right)$$

- Para que todos sean naturales, t debe ser múltiplo de 3; el menor es $t = 3$:



Comprobación: Cu $3 = 3$; H $8 = 8$; N $8 = 6 + 2$; O $24 = 18 + 2 + 4$.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Una familia compra un frigorífico, una lavadora y un lavavajillas. Sin descuentos, los tres juntos costaban 1500 €, y el frigorífico costaba lo mismo que la lavadora y el lavavajillas juntos. En la tienda le hacen un 10 % de descuento en el frigorífico, un 15 % en la lavadora y un 20 % en el lavavajillas, y paga en total 1290 €.

- a) Plantea un sistema para hallar el precio sin descuento de cada aparato.
- b) Resuélvelo.
- c) ¿Qué porcentaje de descuento ha obtenido sobre el total?

- a) **Incógnitas.** x, y, z = precios sin descuento (en euros) del frigorífico, la lavadora y el lavavajillas. Con un 10 % de descuento se paga el 90 % del precio, y así con los demás:

$$\begin{cases} x + y + z = 1500 \\ x - y - z = 0 \\ \frac{90}{100}x + \frac{85}{100}y + \frac{80}{100}z = 1290 \end{cases}$$

Multiplicando la tercera por 20: $18x + 17y + 16z = 25800$.

- b) Sumando las dos primeras: $2x = 1500$, luego $x = 750$ e $y + z = 750$. En la tercera: $13500 + 17y + 16z = 25800$, es decir, $17y + 16z = 12300$. Con $z = 750 - y$: $17y + 12000 - 16y = 12300$, luego $y = 300$ y $z = 450$.

Comprobación: $750 + 300 + 450 = 1500$; $300 + 450 = 750$; $675 + 255 + 360 = 1290$.

El frigorífico costaba **750 €**, la lavadora **300 €** y el lavavajillas **450 €**.

- c) Ahorro: $1500 - 1290 = 210$ euros. Porcentaje: $\frac{210}{1500} \cdot 100 = 14$ %. Observa que no es la media de 10, 15 y 20 (que daría 15 %): cada descuento pesa según el precio del aparato.

EJERCICIO 7

★★ Medio

Se lanza un balón y se mide su altura en varios instantes. Se sabe que la altura, en metros, a los t segundos es de la forma $h(t) = at^2 + bt + c$, y que a los 1, 2 y 3 segundos el balón está a 25, 40 y 45 metros de altura, respectivamente.

- a) Halla a , b y c .
- b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón?
- c) ¿En qué instante, posterior al lanzamiento, vuelve a estar a altura 0?

a) Una ecuación por medida:

$$\begin{cases} a + b + c = 25 \\ 4a + 2b + c = 40 \\ 9a + 3b + c = 45 \end{cases}$$

Restando cada ecuación a la siguiente: $3a + b = 15$ y $5a + b = 5$. Restando estas dos, $2a = -10$, luego $a = -5$; entonces $b = 15 + 15 = 30$ y $c = 25 + 5 - 30 = 0$. Así $h(t) = -5t^2 + 30t$.

Comprobación: $h(1) = 25$, $h(2) = -20 + 60 = 40$, $h(3) = -45 + 90 = 45$.

- b) Es una parábola con $a < 0$: el máximo está en el vértice, $t = -\frac{b}{2a} = \frac{30}{10} = 3$ s, y vale $h(3) = 45$ m. (El dato del tercer instante era justo el máximo.)
- c) $h(t) = 0 \iff -5t(t - 6) = 0 \iff t = 0$ o $t = 6$. $t = 0$ es el lanzamiento ($c = 0$ significa que se lanza desde el suelo); vuelve al suelo a los **6 segundos**.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

Cuatro cruces, A, B, C y D, están unidos por cuatro calles de sentido único que forman un circuito: de A a B, de B a C, de C a D y de D a A. Llamamos x_1 , x_2 , x_3 y x_4 al número de vehículos por hora que circulan por los tramos A→B, B→C, C→D y D→A, respectivamente. Además, cada cruce tiene calles que llevan al exterior del circuito, con estos datos (vehículos por hora):

Cruce Entran desde el exterior Salen al exterior

A	400	250
B	200	300
C	350	200
D	100	300

En cada cruce, el número de vehículos que entran es igual al de los que salen.

- Plantea el sistema y halla su solución general tomando $x_4 = t$.
- Si se corta el tramo D→A por obras ($x_4 = 0$), ¿cuántos vehículos por hora circulan por cada uno de los otros tramos?
- Cada tramo del circuito admite como máximo 400 vehículos por hora y el flujo en cada tramo no puede ser negativo. ¿Entre qué valores puede estar x_4 ?

- Una ecuación por cruce** (lo que entra = lo que sale). A cada cruce llega el tramo anterior del circuito y sale el siguiente:

- A: $400 + x_4 = 250 + x_1$, es decir, $x_1 - x_4 = 150$.
- B: $200 + x_1 = 300 + x_2$, es decir, $x_1 - x_2 = 100$.
- C: $350 + x_2 = 200 + x_3$, es decir, $x_3 - x_2 = 150$.
- D: $100 + x_3 = 300 + x_4$, es decir, $x_3 - x_4 = 200$.

Por qué una ecuación sobra. Entran en total $400 + 200 + 350 + 100 = 1050$ vehículos por hora y salen $250 + 300 + 200 + 300 = 1050$. Escritas como «entra – sale = 0», la suma de las cuatro ecuaciones es $0 = 0$, así que la cuarta es combinación de las otras tres. El rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada es 3, con 4 incógnitas: **SCI** con un parámetro.

Con $x_4 = t$: $x_1 = 150 + t$; $x_2 = x_1 - 100 = 50 + t$; $x_3 = x_2 + 150 = 200 + t$. La ecuación de D se cumple: $(200 + t) - t = 200$.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (150 + t, 50 + t, 200 + t, t)$$

- Con $t = 0$: $x_1 = 150$, $x_2 = 50$, $x_3 = 200$ vehículos por hora.
- Restricciones.** Las calles son de sentido único, así que todos los flujos son ≥ 0 : $t \geq 0$ (las demás, $150 + t$, $50 + t$, $200 + t$, son entonces positivas). La capacidad impone:
 - $150 + t \leq 400 \iff t \leq 250$;
 - $50 + t \leq 400 \iff t \leq 350$;
 - $200 + t \leq 400 \iff t \leq 200$;
 - $t \leq 400$.

La más exigente es $t \leq 200$. Por tanto $0 \leq x_4 \leq 200$. El tramo C→D es el «cuello de botella»: es el que lleva más tráfico para cualquier reparto.

Para el examen: en una red, explica por qué el sistema es indeterminado (la ecuación que sobra) y escribe **todas** las restricciones antes de quedarte con la más fuerte; dar el intervalo sin justificar cada extremo no puntúa completo.

EJERCICIO 9 ★★★ Difícil

Se busca un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica pase por los puntos de abscisas $-1, 0, 1$ y 2 .

- Exigir que $p(-1), p(0), p(1)$ y $p(2)$ tomen valores dados es un sistema lineal en a, b, c, d . Escribe sus ecuaciones en el orden $x = -1, 0, 1, 2$ y con las incógnitas en el orden a, b, c, d , y calcula el determinante de su matriz de coeficientes. ¿Qué te dice sobre el número de polinomios posibles?
- Halla el polinomio que pasa por $(-1, 0), (0, 3), (1, 2)$ y $(2, 3)$. Da (a, b, c, d) .
- Halla k para que el punto $(3, k)$ esté en la gráfica del polinomio de b).
- Halla el valor de m para el que el polinomio que pasa por $(-1, 0), (0, 3), (1, 2)$ y $(2, m)$ tiene grado menor que 3.

- a) **Matriz del sistema.** El punto de abscisa x_0 da la ecuación $x_0^3a + x_0^2b + x_0c + d = p(x_0)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando por la segunda fila (solo tiene un elemento no nulo, en la posición $(2, 4)$, con signo $(-1)^{2+4} = +1$):

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(2 - 4) - 1(2 - 8) + (-1)(4 - 8) = 2 + 6 + 4 = 12$$

Como $|A| \neq 0$, el sistema es SCD para **cualquier** valor de los segundos miembros: por cuatro puntos con esas abscisas pasa **un único** polinomio de grado menor o igual que 3.

- b) **Sistema.** $p(0) = 3$ da $d = 3$. Las otras tres ecuaciones:

$$\begin{cases} -a + b - c + 3 = 0 \\ a + b + c + 3 = 2 \\ 8a + 4b + 2c + 3 = 3 \end{cases}$$

Sumando las dos primeras: $2b + 6 = 2$, luego $b = -2$. Entonces $a + c = 1$ (de la segunda) y $8a + 2c = 8$, es decir, $4a + c = 4$. Restando: $3a = 3$, $a = 1$ y $c = 0$.

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 3$$

Comprobación: $p(-1) = -1 - 2 + 3 = 0$, $p(1) = 2$, $p(2) = 8 - 8 + 3 = 3$.

- c) $k = p(3) = 27 - 18 + 3 = 12$.
- d) **El último dato como parámetro.** Con $p(2) = m$ cambia solo la cuarta ecuación: $8a + 4b + 2c + 3 = m$. Las tres primeras siguen dando $d = 3$, $b = -2$ y $c = 1 - a$. Sustituyendo: $8a - 8 + 2 - 2a + 3 = m$, es decir, $6a - 3 = m$ y

$$a = \frac{m+3}{6}$$

El grado es menor que 3 si y solo si $a = 0$, es decir, $m = -3$. Entonces $p(x) = -2x^2 + x + 3$: los cuatro puntos están sobre una parábola (comprobación: $p(2) = -8 + 2 + 3 = -3$).

Para el examen: la existencia y unicidad se justifica con $|A| \neq 0$, no con «salen números»; y en d), dejar el dato variable como parámetro en el sistema evita resolverlo de nuevo.

EJERCICIO 10

★★★ Dificil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Una fábrica produce tres modelos de un juguete, P, Q y R. Cada unidad de P necesita 2 horas de trabajo y 1 kg de plástico; cada unidad de Q, 3 horas y 2 kg, y cada unidad de R, 4 horas y k kg de plástico, donde $k > 0$ todavía no está decidido. Se quieren fabricar en total 100 unidades usando exactamente 300 horas de trabajo y 210 kg de plástico. Sean x, y, z las unidades de P, Q y R, respectivamente.

- Plantea el sistema y discútelo según los valores de k . (1 punto)
- Resuélvelo para $k = 5$. (0,75 puntos)
- Halla los valores naturales de k para los que el problema tiene solución con sentido (números de unidades enteros y no negativos). (0,75 puntos)

a) Planteamiento.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 & (\text{unidades}) \\ 2x + 3y + 4z = 300 & (\text{horas}) \\ x + 2y + kz = 210 & (\text{plástico}) \end{cases}$$

Determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = 1(3k - 8) - 1(2k - 4) + 1(4 - 3) = k - 3$$

- Si $k \neq 3$: $|A| \neq 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ número de incógnitas: **SCD**.
- Si $k = 3$: $\text{rg}(A) = 2$ (las dos primeras filas no son proporcionales). En la ampliada, la segunda fila menos la primera es $(1, 2, 3 \mid 200)$, que tiene los mismos coeficientes que la tercera, $(1, 2, 3 \mid 210)$, pero distinto término independiente. Por tanto $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$: **SI**. En el contexto: si R gasta 3 kg, con 100 unidades y 300 horas el plástico consumido es siempre 200 kg, y es imposible gastar 210.

- Para $k = 5$ (SCD, por a). Por Gauss: la segunda ecuación menos el doble de la primera da $y + 2z = 100$, y la tercera menos la primera da $y + (k - 1)z = 110$, que para $k = 5$ es $y + 4z = 110$. Restando estas dos: $2z = 10$, luego $z = 5$, $y = 100 - 10 = 90$ y $x = 100 - 90 - 5 = 5$.

Comprobación: $5 + 90 + 5 = 100$ unidades; $10 + 270 + 20 = 300$ horas; $5 + 180 + 25 = 210$ kg.

- Solución general para $k \neq 3$.** Igual que en b): $y + 2z = 100$ e $y + (k - 1)z = 110$. Restando: $(k - 3)z = 10$, luego

$$z = \frac{10}{k - 3}, \quad y = 100 - 2z = 100 - \frac{20}{k - 3}, \quad x = 100 - y - z = z = \frac{10}{k - 3}$$

Condiciones para que tenga sentido:

- $z \geq 0$ exige $k - 3 > 0$, es decir, $k > 3$ (para $k < 3$ saldría $z < 0$).
- z entero: $k - 3$ debe dividir a 10. Con k natural, $k - 3 \in \{1, 2, 5, 10\}$, es decir, $k \in \{4, 5, 8, 13\}$.
- Entonces $x = z$ es entero e $y = 100 - 2z \in \{80, 90, 96, 98\}$ es entero y positivo.

Los valores son $k = 4, 5, 8$ y 13 .

Para el examen: la discusión se puntúa entera solo si se justifican los rangos en cada caso; y en c) hay que imponer las tres condiciones (no negativo, entero, natural) y comprobar que y también cumple. Decir qué

significa el SI en el contexto suele valer una parte del apartado.

Resumen

- Método: define las incógnitas con unidades, traduce cada dato a una ecuación, resuelve (Gauss, Cramer o inversa), interpreta y comprueba en el enunciado.
- Mezclas: un balance de cantidad y otro de valor o de sustancia; el precio de la mezcla es coste total entre cantidad total. Edades: en cada momento, a todos se les suma o resta lo mismo.
- Producción: una ecuación por recurso, $AX = B$; si $|A| \neq 0$, el plan que agota los recursos es único.
- Redes: en cada nudo, lo que entra = lo que sale; si la red está equilibrada, una ecuación sobra y el sistema es SCI.
- Reacciones químicas: una ecuación por elemento; sistema homogéneo SCI; se eligen los coeficientes naturales más pequeños.
- Interpolación: cada punto es una ecuación en los coeficientes; por $n + 1$ puntos de abscisas distintas pasa un único polinomio de grado $\leq n$.
- En contexto, un SCI no significa «infinitas respuestas»: se imponen las restricciones (no negativos, enteros, capacidades) y se cuentan o acotan las soluciones válidas.

Problemas de síntesis: sistemas de ecuaciones lineales

IDEA CLAVE

Estos 12 problemas mezclan todo el tema (clasificación, Gauss, Rouché-Frobenius, Cramer, sistemas homogéneos, parámetros y planteamiento) con la matriz inversa, los determinantes y el rango de los temas anteriores, como en la PAU. Intenta cada uno sin mirar la solución y, si te atascas, vuelve al apartado que trabaja esa idea.

Problemas de síntesis

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

PROBLEMA 1
★★ Medio

En una papelería, tres compras distintas dan estos tickets. Sean c , f y b los precios en euros (números reales no negativos) de un cuaderno, una carpeta y un bolígrafo, en este orden.

- Compra 1: 3 cuadernos, 2 carpetas y 4 bolígrafos, 16 euros.
- Compra 2: 2 cuadernos, 1 carpeta y 5 bolígrafos, 12 euros.
- Compra 3: 1 cuaderno, 3 carpetas y 2 bolígrafos, 13 euros.

- Escribe la matriz ampliada A^* del sistema, con las incógnitas en el orden c, f, b y las ecuaciones en el orden de las compras.
- Clasifica el sistema y halla el precio de cada artículo.
- ¿Cuánto cuesta comprar un cuaderno, una carpeta y un bolígrafo?
- Una cuarta compra (4 cuadernos, 3 carpetas y 5 bolígrafos) se anota en un ticket de 21 euros. Con las cuatro ecuaciones, clasifica el sistema resultante (4 ecuaciones y 3 incógnitas) como SCD, SCI o SI.

- Cada fila es una compra y la última columna, el total:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 16 \\ 2 & 1 & 5 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 13 \end{array} \right)$$

- Calculamos $|A|$ por Sarrus: $|A| = 6 + 10 + 24 - 4 - 45 - 8 = -17 \neq 0$. Entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 =$ número de incógnitas: **SCD** (sistema compatible determinado: una única solución).

Gauss: con $F_1 \leftrightarrow F_3$ la primera fila es $(1, 3, 2 \mid 13)$. Entonces $F_2 - 2F_1$ da $(0, -5, 1 \mid -14)$ y $F_3 - 3F_1$ da $(0, -7, -2 \mid -23)$. De la segunda, $b = 5f - 14$; sustituyendo en la tercera, $-7f - 2(5f - 14) = -23 \Rightarrow -17f = -51 \Rightarrow f = 3$. Entonces $b = 15 - 14 = 1$ y $c = 13 - 9 - 2 = 2$.

Precios: cuaderno 2 euros, carpeta 3 euros, bolígrafo 1 euro. Comprobación en la compra 1: $6 + 6 + 4 = 16$.

- $2 + 3 + 1 = 6$ euros.
- La matriz de coeficientes tiene 4 filas y 3 columnas y $\text{rg}(A) = 3$ (contiene el menor 3×3 anterior, que vale -17). Con los precios hallados, la cuarta compra costaría $8 + 9 + 5 = 22$ euros, no 21. Luego la ecuación nueva contradice las tres primeras: $\text{rg}(A^*) = 4 \neq 3 = \text{rg}(A)$ y el sistema es **SI** (incompatible).

PROBLEMA 2 ★★ Medio

Sea el sistema $AX = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Calcula $|A|$ y justifica que el sistema es compatible determinado.
- Calcula A^{-1} por adjuntos.
- Resuelve el sistema con $X = A^{-1}B$.
- Calcula z con la regla de Cramer y comprueba el resultado resolviendo el sistema por Gauss.

a) Desarrollando por la primera columna: $|A| = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) + 1 \cdot (4 - 1) = 1 + 3 = 4 \neq 0$. Como $|A| \neq 0$, $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*)$ y el sistema es SCD.

b) Adjuntos de A (cofactores):

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es la matriz de cofactores de A (por ejemplo, $A_{11} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1$ y $A_{12} = -(0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 2$). La inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } X = A^{-1}B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + 2 + 3 \\ 6 + 0 - 2 \\ -3 - 2 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

d) Cramer: sustituimos la tercera columna por B :

$$z = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-4}{4} = -1$$

El determinante del numerador vale $1 - 2 - 3 = -4$. Gauss: $F_3 - F_1$ da $(0, -2, 0 \mid -2)$, luego $y = 1$; de F_2 : $1 + 2z = -1 \Rightarrow z = -1$; de F_1 : $x + 2 - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$. Los tres métodos coinciden: $(2, 1, -1)$.

Para la comprobación: sustituye en las tres ecuaciones: $2 + 2 - 1 = 3$, $1 - 2 = -1$, $2 - 1 = 1$.

PROBLEMA 3

★★ Medio

Sea el sistema, con m un número real:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + my + 6z = 3 \\ x + 2y + mz = 1 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m .
- Resuelve el sistema para $m = 3$, tomando $z = t$ como parámetro.
- Resuelve el sistema para $m = 0$ con la regla de Cramer.

- a) La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & m & 6 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & m & 6 & 3 \\ 1 & 2 & m & 1 \end{array} \right)$$

Calculamos $|A| = m^2 - 7m + 12 = (m - 3)(m - 4)$ (restando $F_3 - F_1$ queda $(0, 0, m - 3)$ y se desarrolla por esa fila). Se anula para $m = 3$ y $m = 4$.

- Si $m \neq 3$ y $m \neq 4$: $|A| \neq 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**.
 - Si $m = 3$: las filas 1 y 3 de A^* son iguales, $(1, 2, 3 | 1)$. Queda $\text{rg}(A) = 2$ (el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$) y $\text{rg}(A^*) = 2$. **SCI**.
 - Si $m = 4$: $F_2 = 2F_1$ en A , pero en la ampliada $F_2 = (2, 4, 6 | 3)$ y $2F_1 = (2, 4, 6 | 2)$. $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$ (el menor de las columnas 1, 3 y 4 vale $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$). **SI**.
- b) Con $m = 3$ el sistema equivale a $x + 2y + 3z = 1$ y $2x + 3y + 6z = 3$. Con $z = t$: restando dos veces la primera a la segunda, $-y = 1 \Rightarrow y = -1$, y entonces $x = 1 + 2 - 3t = 3 - 3t$. Soluciones: $(3 - 3t, -1, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- c) Con $m = 0$: $|A| = 12$. Sustituyendo cada columna por los términos independientes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{12} = 0$$

Para el examen: al discutir hay que estudiar por separado cada valor que anula $|A|$ y calcular ambos rangos.

PROBLEMA 4

★★ Medio

Sea el sistema homogéneo, con k un número real:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + ky + 4z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

- Calcula el determinante de la matriz de coeficientes en función de k .
- Halla todos los valores reales de k para los que el sistema tiene soluciones distintas de la trivial.
- Resuelve el sistema para $k = 2$, tomando $z = t$ como parámetro.
- Resuelve el sistema para $k = -2$, tomando $z = t$ como parámetro. ¿Qué rango tiene la matriz de coeficientes en los dos casos?

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & k & 4 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}$. Por Sarrus: $(k^2 - 4 + 4) - (2k + 4 - 2k) = k^2 - 4$. Así, $|A| = k^2 - 4 = (k - 2)(k + 2)$.

b) Un sistema homogéneo siempre es compatible. Tiene solución distinta de la trivial si y solo si es SCI, es decir, si $\text{rg}(A) < 3$, es decir, si $|A| = 0$: $k = 2$ o $k = -2$. Para cualquier otro k solo existe la solución trivial $(0, 0, 0)$.

c) Con $k = 2$: $x - y + 2z = 0$, $2x + 2y + 4z = 0$, $x + y + 2z = 0$. Sumando la primera y la tercera: $2x + 4z = 0 \Rightarrow x = -2z$; restando: $2y = 0 \Rightarrow y = 0$. Con $z = t$: $(-2t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

d) Con $k = -2$: $x - y + 2z = 0$, $2x - 2y + 4z = 0$, $x + y - 2z = 0$. La segunda es el doble de la primera. Sumando la primera y la tercera: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$; entonces $y = 2z$. Con $z = t$: $(0, 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

En ambos casos hay una sola ecuación redundante, luego $\text{rg}(A) = 2$ y hay $3 - 2 = 1$ parámetro libre.

PROBLEMA 5

★★★ Difícil

Sea el sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas, con a un número real:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ y + 2z + w = 2 \\ x + 2y + az + 2w = 3 \end{cases}$$

- Calcula $\text{rg}(A)$ y $\text{rg}(A^*)$ si $a = 3$ y si $a \neq 3$, y clasifica el sistema en cada caso.
- Resuelve el sistema para $a = 3$, tomando $z = s$ y $w = t$ como parámetros.
- Resuelve el sistema para $a \neq 3$, tomando $w = t$ como parámetro.
- Para $a = 3$, halla las soluciones (x, y, z, w) formadas por enteros no negativos.

- Restamos a la tercera ecuación las dos primeras: $F_3 - F_1 - F_2$ da $(0, 0, a - 3, 0 \mid 0)$, es decir, $(a - 3)z = 0$.
 - Si $a \neq 3$: el menor de las columnas 1, 2 y 3 vale $a - 3 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 < 4$ incógnitas. **SCI** con $4 - 3 = 1$ parámetro.
 - Si $a = 3$: la tercera fila es combinación de las dos primeras: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 4$. **SCI** con $4 - 2 = 2$ parámetros.
- Con $a = 3$ quedan dos ecuaciones: $x + y + z + w = 1$ e $y + 2z + w = 2$. Con $z = s$ y $w = t$: $y = 2 - 2s - t$ y $x = 1 - s - t - y = s - 1$. Soluciones: $(s - 1, 2 - 2s - t, s, t)$, con $s, t \in \mathbb{R}$.
- Con $a \neq 3$ la tercera ecuación equivalente es $(a - 3)z = 0$, luego $z = 0$. Con $w = t$: $y = 2 - t$ y $x = 1 - y - w = -1$. Soluciones: $(-1, 2 - t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$, para cualquier $a \neq 3$.
- Para que x, y, z, w sean enteros no negativos, $s = z$ y $t = w$ han de ser enteros no negativos, y además $x = s - 1 \geq 0$ e $y = 2 - 2s - t \geq 0$. De la primera, $s \geq 1$; de la segunda, $2s + t \leq 2$. Con $s \geq 1$ solo queda $s = 1$ y $t = 0$. La única solución es $(0, 0, 1, 0)$.

Para el examen: indica siempre cuántos parámetros quedan (n de incógnitas menos el rango) y cuál has elegido como parámetro.

PROBLEMA 6

★★★ Difícil

Sean m y k números reales y el sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x - z = -2 \\ mx + y + 2z = k \end{cases}$$

- Calcula el rango de la matriz de coeficientes A cuando m es cualquier número real, y deduce el único valor de m para el que el sistema es compatible cuando $k = 7$.
- Discute el sistema para $k = 7$ según los valores de m y resuélvelo cuando sea compatible.
- Para m cualquiera, halla k en función de m de modo que el sistema sea compatible.

- Las tres primeras filas de A forman el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Luego $\text{rg}(A) = 3$ para **todo** m (el rango no puede superar el número de columnas). Entonces el sistema es compatible si y solo si $\text{rg}(A^*) = 3$, es decir, si $|A^*| = 0$ (determinante 4×4).

- Con $k = 7$, desarrollando $|A^*|$ por la última fila se obtiene $|A^*| = 4(7 - m - 8) = -4(m + 1)$.

- Si $m \neq -1$: $|A^*| \neq 0$, $\text{rg}(A^*) = 4 \neq 3 = \text{rg}(A)$. **SI**.
- Si $m = -1$: $\text{rg}(A^*) = 3 = \text{rg}(A) = \text{número de incógnitas}$. **SCD**.

Resolvemos con las tres primeras ecuaciones: sumando las dos primeras, $2x + 2z = 8$, es decir, $x + z = 4$; junto con la tercera, $x - z = -2$, luego $x = 1$, $z = 3$ e $y = 6 - 1 - 3 = 2$. Solución: $(1, 2, 3)$. Comprobamos la cuarta: $-1 + 2 + 6 = 7$.

- La solución de las tres primeras ecuaciones es siempre $(1, 2, 3)$ (no depende de m). La cuarta la cumple si $m + 2 + 6 = k$, es decir, $k = m + 8$. Es la misma condición que daba $|A^*| = 4(k - m - 8) = 0$.

Para el examen: con más ecuaciones que incógnitas, basta un menor 3×3 no nulo para fijar $\text{rg}(A) = 3$ y comprobar el 4×4 de A^* .

PROBLEMA 7
★★★ Difícil
Tipo PAU · 2,5 puntos

Sea a un número real y el sistema

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = a \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de a . (1 punto)
- Resuelve el sistema para el valor de a en que es compatible indeterminado, tomando $y = t$ como parámetro. (0,75 puntos)
- Para $a = 2$, calcula el valor de y con la regla de Cramer. (0,75 puntos)

- Sea A la matriz de coeficientes. Desarrollando por Sarrus,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + a + a - 1 - 1 - 2a^2 = -2a^2 + 2a = -2a(a - 1)$$

Se anula para $a = 0$ y $a = 1$.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**.
- Si $a = 0$: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$. En A , $F_3 = F_1 + F_2$ y $\text{rg}(A) = 2$; pero en la columna de términos independientes $1 + 0 = 1 \neq 2$. Entonces $\text{rg}(A^*) = 3$ (el menor de las columnas 1, 2 y 4 vale $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$). **SI**.
- Si $a = 1$: $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right)$. Las dos primeras filas son iguales: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. **SCI**.

- Con $a = 1$: $x + y + z = 1$ y $x + y + 2z = 2$. Restando, $z = 1$; entonces $x + y = 0$. Con $y = t$: $(-t, t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Con $a = 2$: $|A| = -4$ y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

donde la segunda columna se ha sustituido por $B = (1, 2, 2)^t$.

Para el examen: la discusión puntúa la mitad del problema; indica los rangos de A y de A^* en cada caso, no solo la etiqueta.

PROBLEMA 8

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Sea m un número real y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$$

- a) Calcula $|A|$ y halla los valores reales de m para los que A no tiene inversa. (0,5 puntos)
- b) Para $m = 1$, calcula A^{-1} . (0,5 puntos)
- c) Para $m = 1$, resuelve la ecuación matricial $AX = B$, con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. (0,5 puntos)
- d) Para $m = -1$, clasifica el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (0,5 puntos)
- e) Para $m = -1$, resuelve $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, tomando $x = t$ como parámetro. (0,5 puntos)

- a) Por Sarrus, $|A| = (m \cdot m \cdot m + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0) - (0 + 0 + 0) = m^3 + 1 = (m + 1)(m^2 - m + 1)$. El factor $m^2 - m + 1$ no tiene raíces reales (discriminante $-3 < 0$). Luego A no tiene inversa solo para $m = -1$.

- b) Con $m = 1$, $|A| = 2$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por adjuntos:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(comprobación: la primera fila de A por la primera columna de esta matriz da $1 + 1 + 0 = 2$, y por la segunda, $-1 + 1 + 0 = 0$).

- c) Como A es invertible, $X = A^{-1}B$, de dimensión 3×2 :

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

- d) Con $m = -1$, $|A| = 0$ y $\text{rg}(A) = 2$ (el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$). Las filas de A suman $(0, 0, 0)$, así que un término independiente solo es compatible si sus tres componentes suman 0. Con $(1, 1, 1)$ la suma es $3 \neq 0$: $\text{rg}(A^*) = 3 \neq 2$. **SI**.

- e) Ahora $1 + 1 - 2 = 0$: es compatible, $\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A) < 3$ (**SCI**). Las ecuaciones son $-x + y = 1$, $-y + z = 1$, $x - z = -2$; la tercera es suma de las otras dos cambiada de signo. Con $x = t$: $y = t + 1$ y $z = t + 2$. Soluciones: $(t, t + 1, t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Para el examen: primero el determinante; solo si vale 0 se pasa al estudio de los rangos.

PROBLEMA 9 ★★★ Dificil

Sean a y b números reales y el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = b \\ x + 4y + a^2z = b^2 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de a y b .
- b) Resuelve el sistema para $a = 2$ y $b = 2$, tomando $z = t$ como parámetro.
- c) Resuelve el sistema para $a = 3$ y $b = 0$.

a) Sea A la matriz de coeficientes. Es de tipo Vandermonde: $|A| = (a-1)(a-2)$ (por ejemplo, restando F_1 a las otras dos filas, queda $\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 3 & a^2-1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1) - 3(a-1) = (a-1)(a-2)$).

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$ para cualquier b . **SCD**.
- Si $a = 1$ o $a = 2$: $\text{rg}(A) = 2$ (las columnas 1 y 2 dan siempre el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$). Entre las filas se cumple $F_3 = 3F_2 - 2F_1$ en A , así que el sistema es compatible si y solo si pasa lo mismo con los términos independientes: $b^2 = 3b - 2 \iff b^2 - 3b + 2 = 0 \iff b = 1$ o $b = 2$.
 - Si $b = 1$ o $b = 2$: $\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A) < 3$. **SCI**.
 - Si $b \neq 1$ y $b \neq 2$: $\text{rg}(A^*) = 3$. **SI**.

Resumen: son SCI los casos con $a \in \{1, 2\}$ y $b \in \{1, 2\}$; son SI los casos con $a \in \{1, 2\}$ y $b \notin \{1, 2\}$; y SCD si $a \notin \{1, 2\}$.

- b) Con $a = 2$ y $b = 2$: $x + y + z = 1$ y $x + 2y + 2z = 2$ (la tercera es combinación de ellas). Restando, $y + z = 1$, y entonces $x = 0$. Con $z = t$: $(0, 1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.
- c) Con $a = 3$ y $b = 0$: $|A| = (3-1)(3-2) = 2 \neq 0$, SCD. Por Gauss, $F_2 - F_1$ da $y + 2z = -1$ y $F_3 - F_1$ da $3y + 8z = -1$. De la primera, $y = -1 - 2z$; en la segunda, $-3 - 6z + 8z = -1 \Rightarrow z = 1$, $y = -3$ y $x = 1 - y - z = 3$. Solución: $(3, -3, 1)$.

Para el examen: con dos parámetros, el determinante fija los valores de a y el parámetro b aparece al estudiar el rango de A^* en esos casos.

PROBLEMA 10

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Un taller fabrica sillas (x unidades), mesas (y unidades) y estanterías (z unidades). Cada semana usa exactamente 60 horas de máquina, sabiendo que una silla necesita 2 horas, una mesa 3 y una estantería 4. También usa exactamente 28 horas de montaje, con 1 hora por silla, 1 por mesa y 2 por estantería. Las cantidades x, y, z son enteros no negativos.

- a) Plantea el sistema y resuélvelo tomando $z = t$ como parámetro. (0,75 puntos)
- b) ¿Cuántas producciones semanales (x, y, z) son posibles? Interpreta el valor de y . (0,5 puntos)
- c) El jefe añade la condición « $x + kz = 20$ », con k un número real. Discute el sistema de tres ecuaciones según k . (0,75 puntos)
- d) Para $k = 1$, halla la producción semanal. (0,5 puntos)

- a) El sistema es

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 60 \\ x + y + 2z = 28 \end{cases}$$

Con $z = t$: $F_1 - 2F_2$ da $y = 4$, y entonces $x = 28 - 4 - 2t = 24 - 2t$. Soluciones: $(24 - 2t, 4, t)$. Es un SCI con $\text{rg} = 2$ y $3 - 2 = 1$ parámetro.

- b) Hace falta $24 - 2t \geq 0$, es decir, $t \leq 12$, con t entero y $t \geq 0$: $t = 0, 1, \dots, 12$. Hay **13** producciones posibles. En todas ellas $y = 4$: se fabrican siempre 4 mesas, porque la combinación $F_1 - 2F_2$ elimina x y z a la vez.

- c) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$, con $|A| = 2 - k$.

- Si $k \neq 2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$. **SCD**.
- Si $k = 2$: $\text{rg}(A) = 2$ (contiene el menor $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$). La tercera ecuación $x + 2z = 20$ con los resultados del apartado a): $24 - 2t + 2t = 24 \neq 20$. Es incompatible: $\text{rg}(A^*) = 3$. **SI**.

- d) Con $k = 1$: $x + z = 20$, es decir, $24 - 2t + t = 20 \Rightarrow t = 4$. La producción es $(16, 4, 4)$: 16 sillas, 4 mesas y 4 estanterías (comprobación: $32 + 12 + 16 = 60$ y $16 + 4 + 8 = 28$).

Para el examen: responde en el contexto (aquí, «4 mesas, siempre») y comprueba que la solución cumple las condiciones de enteros no negativos.

PROBLEMA 11

★★★ Difícil

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y una matriz real $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ incógnita.

- Escribe la condición $AX = XA$ como un sistema homogéneo de ecuaciones en x, y, z, w y calcula el rango de su matriz de coeficientes.
- Halla todas las matrices X que cumplen $AX = XA$, tomando $w = s$ e $y = t$ como parámetros.
- Calcula $|X|$ en función de s y t .
- De entre esas matrices, halla la única que cumple $X^2 = A$ y tiene sus dos elementos de la diagonal positivos.

a) Calculamos

$$AX = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2w \\ 3z & 3w \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} x & 2x + 3y \\ z & 2z + 3w \end{pmatrix}$$

Igualando elemento a elemento: $2z = 0, y + 2w = 2x + 3y \Rightarrow 2x + 2y - 2w = 0, 3z = z$ y $3w = 2z + 3w$. Simplificando,

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y - w = 0 \end{cases}$$

El resto de ecuaciones repite $z = 0$. La matriz de coeficientes tiene rango $\text{rg} = 2$: hay $4 - 2 = 2$ parámetros libres.

b) De $z = 0$ y $x = w - y$, con $w = s$ e $y = t$:

$$X = \begin{pmatrix} s - t & t \\ 0 & s \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

c) Es triangular: $|X| = s(s - t)$.

d) Elevando al cuadrado:

$$X^2 = \begin{pmatrix} (s - t)^2 & (s - t)t + ts \\ 0 & s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego $s^2 = 3$ y $(s - t)^2 = 1$. Con los dos elementos de la diagonal positivos, $s = \sqrt{3}$ y $s - t = 1$, es decir, $t = \sqrt{3} - 1$. Comprobamos el elemento $(1, 2)$: $t(2s - t) = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 2$. La matriz es

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} - 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Para el examen: al despejar una matriz incógnita por elementos, reduce el sistema por Gauss y expresa la solución con tantos parámetros como indique el rango.

PROBLEMA 12

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y el sistema homogéneo $(A - \lambda I)X = O$, con $X = (x, y, z)^t$ y λ un número real.

- a) Calcula $|A - \lambda I|$ en función de λ . (0,5 puntos)
- b) Halla los valores de λ para los que el sistema tiene soluciones distintas de la trivial. (0,5 puntos)
- c) Para cada uno de esos valores, resuelve el sistema tomando $z = t$ como parámetro cuando $\lambda = 3$ y $x = t$ cuando $\lambda = -1$. (0,75 puntos)
- d) Para $\lambda = 3$, resuelve $(A - 3I)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, tomando $z = t$ como parámetro. (0,75 puntos)

a) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$. Desarrollando por la tercera columna:

$$|A - \lambda I| = (3 - \lambda) [(1 - \lambda)^2 - 4] = (3 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 1) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$$

b) Un sistema homogéneo tiene soluciones no triviales si y solo si $|A - \lambda I| = 0$: $\lambda = 3$ o $\lambda = -1$.

c) Si $\lambda = 3$: $A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 (menor $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$), así que queda 1 parámetro.

Las ecuaciones $-2x + 2y = 0$ y $x + y = 0$ dan $x = y = 0$. Con $z = t$: $(0, 0, t)$.

Si $\lambda = -1$: $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, rango 2. Las ecuaciones $2x + 2y = 0$ y $x + y + 4z = 0$ dan $y = -x$ y $z = 0$.

Con $x = t$: $(t, -t, 0)$.

- d) El sistema es $-2x + 2y = 0$, $2x - 2y = 0$, $x + y = 2$. Las dos primeras dan $x = y$; la tercera, $x = y = 1$. Con $z = t$: $(1, 1, t)$. Es compatible porque $\text{rg}(A - 3I) = 2 = \text{rg}$ de la ampliada.

Para el examen: anota que el rango es 2 en ambos casos y cuántos parámetros quedan; en el apartado d) no olvides que z queda libre.