



Ecuación Ganadora
ACADEMIA

MATEMÁTICAS II • 2.º DE BACHILLERATO

Modelos de examen de Álgebra

Tres modelos de examen de Álgebra de Matemáticas II con el formato de la PAU: 4 problemas de 2,5 puntos cada uno y solución completa para practicar.

ecucionganadora.com/recursos/matematicas-2-bachillerato/modelos-de-examen-algebra.html

Álvaro López • Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia • 626 09 20 80

Tres modelos con **cuatro problemas de 2,5 puntos** cada uno, del estilo del bloque de Álgebra de la PAU de Matemáticas II. Los problemas 1 y 2 forman la **opción A** y los problemas 3 y 4 la **opción B**: en el examen real se resuelve uno de cada bloque, así que aquí puedes entrenar eligiendo.

Cómo usarlos

Haz cada problema con cronómetro (unos 25 minutos), sin apuntes y **justificando cada paso**; después abre la solución y compara el razonamiento, no solo el resultado. Anota los fallos en tu cuaderno de errores.

MODELO 1

Modelo de examen I de Álgebra

IDEA CLAVE

Cuatro problemas de 2,5 puntos con el formato de la PAU: los problemas 1 y 2 forman la opción A y los problemas 3 y 4 la opción B, así que elige una opción y resuelve sus dos problemas con unos 25 minutos para cada uno. Escribe cada paso con su justificación antes de abrir la solución, porque en el examen se puntúa el razonamiento tanto como el resultado.

Problemas

Intenta cada problema en 25 minutos, como en la prueba, antes de mirar la solución.

PROBLEMA 1

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción A

Opción A. Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Determina los valores de m para los que A tiene inversa. (0,5 puntos)
- b) Para $m = 0$, calcula A^{-1} . (0,75 puntos)
- c) Comprueba que $|A - I|$ no depende de m y calcula su valor. (0,5 puntos)
- d) Para $m = 0$, halla la matriz X que cumple $XA = X + B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. (0,75 puntos)

- a) A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$. Desarrollando por la primera columna:

$$|A| = m \begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = m \cdot m - (2 - 1) = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$$

$|A| = 0 \iff m = 1$ o $m = -1$. Por tanto, A tiene inversa para todo $m \neq 1$ y $m \neq -1$, y **no** la tiene para $m = \pm 1$.

- b) Para $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0^2 - 1 = -1 \neq 0$$

1. **Adjuntos** $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2. \end{aligned}$$

2. **Inversa.** $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación.** $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 0+2-1 & 0 & 0-2+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0+1-1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = I$.

- c) Restando 1 a cada elemento de la diagonal:

$$A - I = \begin{pmatrix} m-1 & 2 & 1 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La tercera fila tiene un único elemento no nulo, 1 en la posición (3, 2). Desarrollando por esa fila:

$$|A - I| = 1 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1$$

El valor es 1 para **cualquier** m : no depende del parámetro. En particular, $A - I$ es siempre invertible.

d) 1. Despejar. $XA = X + B \iff XA - X = B \iff X(A - I) = B$. Hay que sacar X como factor común **por la izquierda**, escribiendo $X = XI$; poner $X(A - 1)$ no tiene sentido. Como $|A - I| = 1 \neq 0$ por c), multiplicamos por $(A - I)^{-1}$ **por la derecha**:

$$X = B(A - I)^{-1}$$

B es 2×3 y $(A - I)^{-1}$ es 3×3 , así que X es 2×3 .

2. Inversa de $A - I$ para $m = 0$.

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |A - I| = 1$$

Sus adjuntos forman la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (por ejemplo, $C_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, $C_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$). Trasponiendo y dividiendo entre 1:

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Producto.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Comprobación. Con X así, $X(A - I) = \begin{pmatrix} -2+3 & 4-3-1 & 2 \\ 1-1 & -2+1+2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B$.

Para el examen: en a) hay que decir con claras palabras para qué valores existe la inversa, no solo resolver $|A| = 0$. En d) el paso clave es $X(A - I) = B$ con la inversa multiplicada por la derecha; escribir $X = (A - I)^{-1}B$ es un error de orden que anula el apartado, y además aquí ni siquiera se podría multiplicar (3×3 por 2×3).

PROBLEMA 2

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción A

Opción A. Se considera el sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ (m + 2)y + 3z = 3 \\ x + 2y + (m - 2)z = 1 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m . (1 punto)
- Resuélvelo para $m = 1$. (0,5 puntos)
- Resuélvelo, en función de m , para los valores de m en los que es compatible determinado. (0,5 puntos)
- Halla el valor de m para el que el sistema es compatible determinado y su solución cumple $x = y$. (0,5 puntos)

Recordamos la clasificación: **SCD** (sistema compatible determinado, solución única), **SCI** (compatible indeterminado, infinitas soluciones) y **SI** (incompatible, sin solución). Por el teorema de Rouché-Frobenius, con 3 incógnitas: SCD si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, SCI si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < 3$ y SI si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$.

- a) 1. **Determinante de la matriz de coeficientes.** Restando la fila 1 a la fila 3 (no cambia el determinante):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m+2 & 3 \\ 1 & 2 & m-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m+2 & 3 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)$$

$$|A| = 0 \iff m = -2 \text{ o } m = 1.$$

2. Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$: $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*) = \text{número de incógnitas}$. **SCD**.

3. Si $m = 1$: la matriz ampliada es

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La fila 3 es igual a la fila 1, y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Luego $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. **SCI** (un parámetro).

4. Si $m = -2$:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$\text{rg}(A) = 2$, porque $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (filas 1 y 2, columnas 1 y 3). Orlando ese menor con la fila 3 y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 + 12) - (-1) \cdot (0 - 3) + 1 \cdot (0 - 3) = 15 - 3 - 3 = 9 \neq 0$$

$\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$. **SI**. (Se ve también con las ecuaciones: la segunda da $3z = 3$, $z = 1$, y la tercera menos la primera da $-3z = 0$, $z = 0$.)

Discusión: $m = 1$, SCl; $m = -2$, SI; cualquier otro valor, SCD.

b) Para $m = 1$ sobra la tercera ecuación (es la primera) y queda

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Tomando $z = t$: de la segunda, $y = 1 - t$; de la primera, $x = 1 - 2(1 - t) + t = -1 + 3t$. La solución es

$$(x, y, z) = (-1 + 3t, 1 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación con $t = 0$: $(-1, 1, 0)$ cumple $-1 + 2 - 0 = 1$ y $3 + 0 = 3$.

c) Para $m \neq 1$, $m \neq -2$, restamos la primera ecuación a la tercera: $(m - 1)z = 0$ y, como $m - 1 \neq 0$, $z = 0$. Sustituyendo en la segunda, $(m + 2)y = 3$, luego $y = \frac{3}{m + 2}$ (se puede dividir porque $m \neq -2$). De la primera,

$$x = 1 - 2y + z = 1 - \frac{6}{m + 2} = \frac{m - 4}{m + 2}$$

La solución es $\left(\frac{m - 4}{m + 2}, \frac{3}{m + 2}, 0\right)$.

d) Usamos la solución de c): $x = y \iff \frac{m - 4}{m + 2} = \frac{3}{m + 2} \iff m - 4 = 3 \iff m = 7$. Como $7 \neq 1$ y $7 \neq -2$, el sistema es SCD para $m = 7$, y su solución es $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$, que cumple $x = y$.

(Para $m = 1$ también hay soluciones con $x = y$, la de $t = \frac{1}{2}$, pero entonces el sistema no es compatible determinado; por eso el enunciado lo excluye.)

Para el examen: en la discusión hay que calcular los dos rangos en cada valor crítico y nombrar el teorema de Rouché-Frobenius; decir « $|A| = 0$, luego es SCl» sin mirar A^* es el error más castigado. En c) justifica cada división ($m - 1 \neq 0$, $m + 2 \neq 0$).

PROBLEMA 3

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción B

Opción B. Se considera la matriz, que depende del parámetro real a ,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 & a \end{pmatrix}$$

- a) Calcula $|B|$ y exprésalo factorizado. (0,75 puntos)
- b) Estudia el rango de B según los valores de a . (0,75 puntos)
- c) Para $a = 3$, calcula $|2B^{-1}|$ y $|3B^t|$ sin calcular B^{-1} . (0,5 puntos)
- d) Para $a = 2$, resuelve el sistema homogéneo $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (0,5 puntos)

- a) Hacemos ceros restando a cada fila la anterior, empezando por abajo: $F_4 \rightarrow F_4 - F_3$, $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$, $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$. Cada operación resta a una fila otra que todavía está sin modificar, así que el determinante no cambia:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & 2-a & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix}$$

La matriz es triangular, así que el determinante es el producto de la diagonal:

$$|B| = 1 \cdot (a-1)(2-a)(a-2) = -(a-1)(a-2)^2$$

- b) $|B| = 0 \iff a = 1 \text{ o } a = 2$.

1. Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$: $|B| \neq 0$, luego $\text{rg}(B) = 4$.

2. Si $a = 1$: la forma triangular de a) queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con tres filas no nulas, y las filas 1, 3 y 4 son linealmente independientes: el menor de filas 1, 3, 4 y columnas

1, 3, 4 es $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Como las operaciones de fila no cambian el rango, $\text{rg}(B) = 3$.

3. Si $a = 2$: las filas 2, 3 y 4 de B son iguales, $(1, 2, 2, 2)$, y no son proporcionales a la fila 1, $(1, 1, 1, 1)$. El

menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, así que $\text{rg}(B) = 2$.

Resumen: $\text{rg}(B) = 3$ si $a = 1$; $\text{rg}(B) = 2$ si $a = 2$; $\text{rg}(B) = 4$ en otro caso.

- c) Para $a = 3$, $|B| = -(3-1)(3-2)^2 = -2$. B es de orden $n = 4$, y usamos $|kM| = k^4|M|$, $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$ y $|B^t| = |B|$:

$$|2B^{-1}| = 2^4 \cdot \frac{1}{-2} = -8, \quad |3B^t| = 3^4 \cdot (-2) = -162$$

- d) Para $a = 2$, $\text{rg}(B) = 2$ y hay 4 incógnitas: el sistema homogéneo es compatible indeterminado con $4 - 2 = 2$ parámetros. Basta con dos ecuaciones independientes, la primera y la segunda (las otras dos son iguales a la segunda):

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

Restando, $y + z + w = 0$; llevándolo a la primera, $x = 0$. Con $z = s$, $w = t$:

$$(x, y, z, w) = (0, -s - t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Para el examen: en un determinante de orden 4 con parámetro, haz ceros antes de desarrollar y deja el resultado factorizado: es lo que permite estudiar el rango sin errores. En c) el error típico es escribir $|2B^{-1}| = \frac{2}{|B|}$, olvidando que el 2 multiplica a las **cuatro** filas.

PROBLEMA 4
★★★ Difícil
Tipo PAU · 2,5 puntos
Opción B

Opción B. Un agricultor dispone de tres abonos, que se venden en sacos. Cada saco aporta las siguientes cantidades de nitrógeno (N), fósforo (P) y potasio (K), en kilogramos:

N P K

Abono 1 2 1 1

Abono 2 1 2 1

Abono 3 3 3 2

Quiere aportar a una parcela exactamente 20 kg de nitrógeno, 16 kg de fósforo y m kg de potasio. Llama x , y , z al número de sacos de los abonos 1, 2 y 3.

- Plantea un sistema de ecuaciones y discútelo según los valores de m . (1 punto)
- Para $m = 12$, resuelve el sistema. (0,5 puntos)
- Si $m = 12$ y solo se pueden usar sacos completos (el número de sacos de cada abono no puede ser negativo, y se puede no usar alguno de los abonos), ¿cuántas mezclas distintas son posibles? (0,5 puntos)
- Con $m = 12$ y sacos completos, ¿qué mezcla usa el menor número total de sacos? (0,5 puntos)

Usamos la clasificación SCD (compatible determinado, solución única), SCI (compatible indeterminado, infinitas soluciones) y SI (incompatible, sin solución).

1. **Planteamiento.** Cada nutriente da una ecuación (kg aportados por los tres abonos = kg deseados):

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 20 & (\text{nitrógeno}) \\ x + 2y + 3z = 16 & (\text{fósforo}) \\ x + y + 2z = m & (\text{potasio}) \end{cases}$$

2. **Rango de A .**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 - 3) - 1(2 - 3) + 3(1 - 2) = 2 + 1 - 3 = 0$$

y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$ **para todo** m . El sistema nunca es SCD. El motivo es químico: un saco del abono 3 aporta (3, 3, 2), exactamente lo mismo que un saco del abono 1 más uno del abono 2, (2, 1, 1) + (1, 2, 1).

3. **Rango de A^* .** Orlamos el menor anterior con la tercera fila y la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 16 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 2(2m - 16) - 1(m - 16) + 20(1 - 2) = 3m - 36$$

Se anula solo si $m = 12$.

4. **Discusión (Rouché-Frobenius).** Si $m = 12$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$: **SCI**. Si $m \neq 12$, $\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A^*)$: **SI**, es imposible conseguir esas cantidades.

b) Para $m = 12$ basta con las dos primeras ecuaciones (la tercera depende de ellas). Restándolas, $x - y = 4$, es decir, $x = y + 4$. Sustituyendo en la segunda: $y + 4 + 2y + 3z = 16$, $3y + 3z = 12$, $y = 4 - z$. Con $z = t$:

$$(x, y, z) = (8 - t, 4 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en la ecuación del potasio: $(8 - t) + (4 - t) + 2t = 12$.

c) Ahora x, y, z deben ser enteros no negativos. Con t entero:

- $z = t \geq 0$,
- $y = 4 - t \geq 0 \iff t \leq 4$,
- $x = 8 - t \geq 0 \iff t \leq 8$.

Luego $t \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$: hay 5 mezclas posibles, $(8, 4, 0)$, $(7, 3, 1)$, $(6, 2, 2)$, $(5, 1, 3)$ y $(4, 0, 4)$.

d) El número total de sacos es $x + y + z = (8 - t) + (4 - t) + t = 12 - t$, que es menor cuanto mayor es t . El máximo permitido es $t = 4$: la mezcla $(4, 0, 4)$, con 8 sacos (4 del abono 1, ninguno del abono 2 y 4 del abono 3). Tiene sentido: cada saco del abono 3 sustituye a un saco del 1 y otro del 2, y ahorra un saco.

Para el examen: define siempre las incógnitas y escribe qué representa cada ecuación. En un SCI con contexto, las restricciones del problema (no negativos, enteros) son parte de la respuesta: dar solo $(8 - t, 4 - t, t)$ cuando se piden las mezclas posibles deja el apartado sin puntuar.

Modelo de examen 2 de Álgebra

IDEA CLAVE

Cuatro problemas de 2,5 puntos con el formato de la PAU: el 1 y el 2 forman la opción A (determinantes y rango, discusión de un sistema) y el 3 y el 4 la opción B (problema de contexto, inversa y ecuación matricial). Elige una opción, dedica unos 25 minutos a cada problema justificando cada paso y después compara tu razonamiento con la solución.

Problemas

Intenta cada problema en 25 minutos, como en la prueba, antes de mirar la solución.

PROBLEMA 1

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción A

Opción A. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 cuyas filas son F_1 , F_2 y F_3 (en este orden) y cuyo determinante es $|A| = -2$.

- Calcula $|-2A^{-1}|$ y $|A^t A^3|$. (0,75 puntos)
- Calcula el determinante de la matriz cuyas filas son, en este orden, F_3 , $F_1 + F_2$ y $2F_2 - F_3$. (0,75 puntos)
- Estudia el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro real k . (1 punto)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & k & 1 & 1 \\ 0 & -1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Determinante de $-2A^{-1}$.** Multiplicar una matriz de orden 3 por un número λ multiplica las tres filas por λ , así que el determinante queda multiplicado por λ^3 . Además, de $AA^{-1} = I$ se obtiene $|A| |A^{-1}| = 1$, es decir, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|-2A^{-1}| = (-2)^3 |A^{-1}| = \frac{-8}{-2} = 4$$

2. **Determinante de $A^t A^3$.** El determinante de un producto es el producto de los determinantes y $|A^t| = |A|$:

$$|A^t A^3| = |A^t| |A|^3 = |A|^4 = (-2)^4 = 16$$

- Llamamos $D = \begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 + F_2 \\ 2F_2 - F_3 \end{vmatrix}$ (escribimos las filas una debajo de otra). Transformamos las filas con operaciones que no cambian el determinante o que cambian de forma controlada:

1. **Fila 3 + fila 1** (no cambia el determinante): $2F_2 - F_3 + F_3 = 2F_2$.

$$D = \begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 + F_2 \\ 2F_2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 + F_2 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

(el factor 2 de una fila sale fuera del determinante).

2. **Fila 2 - fila 3** (no cambia el determinante): $F_1 + F_2 - F_2 = F_1$.

$$D = 2 \begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$$

3. **Reordenar las filas.** Cada intercambio de dos filas cambia el signo. Intercambiando las filas 1 y 2 se pasa de (F_3, F_1, F_2) a (F_1, F_3, F_2) , e intercambiando después las filas 2 y 3 se llega a (F_1, F_2, F_3) : son dos cambios de signo, que se anulan. Por tanto

$$D = 2 |A| = 2 \cdot (-2) = -4$$

1. **Un menor de orden 2 no nulo.** Con las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

No depende de k , así que $\text{rg}(B) \geq 2$ para todo k . Como B tiene 3 filas, $\text{rg}(B) \leq 3$.

2. Menor de orden 3 con las tres primeras columnas. Desarrollando por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & k & 1 \\ 0 & -1 & k \end{vmatrix} = (k^2 + 1) - 2(-2k) + 1 \cdot 2 = k^2 + 4k + 3 = (k + 1)(k + 3)$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq -3$, este menor es distinto de cero y $\text{rg}(B) = 3$.

3. Caso $k = -1$. El menor anterior se anula, pero hay que mirar los otros menores de orden 3. Con las columnas 1, 2 y 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & k & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k + 1) - 2(-2) + (-1) \cdot 2 = k + 3$$

que para $k = -1$ vale $2 \neq 0$. Luego $\text{rg}(B) = 3$ también para $k = -1$.

4. Caso $k = -3$. Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ (filas 1 y 2, columnas 1 y 3) con la fila 3 y con cada una de las columnas que faltan:

- con la columna 2: es el menor de las columnas 1, 2 y 3, que vale $(k + 1)(k + 3) = 0$;
- con la columna 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = (1 - k) - (-2) + (-1)(-2k) = k + 3 = 0$$

Los dos menores orlados son nulos, así que $\text{rg}(B) = 2$.

5. Conclusión. $\text{rg}(B) = 2$ si $k = -3$ y $\text{rg}(B) = 3$ para cualquier otro valor de k (incluido $k = -1$).

Para el examen: en a) y b) escribe cada propiedad que usas ($|\lambda A| = \lambda^3 |A|$, $|A^{-1}| = 1/|A|$, cambio de signo al permutar filas); un resultado sin justificar no puntúa. En c) el error típico es concluir que el rango es 2 para $k = -1$ y $k = -3$ por anularse un solo menor: en una matriz 3×4 hay que comprobar los menores orlados antes de bajar el rango.

PROBLEMA 2

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción A

Opción A. Se considera el sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + y + 3z = -2 \\ -2x + my + 2z = 1 \\ 2x + 3y + (m+1)z = -1 \end{cases}$$

- a) Discute el sistema según los valores de m . (1,25 puntos)
- b) Resuelve el sistema para $m = -3$. (0,75 puntos)
- c) Resuelve el sistema para $m = 3$. (0,5 puntos)

a) **1. Matrices del sistema.** La matriz de coeficientes A y la ampliada A^* son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & m & 2 \\ 2 & 3 & m+1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & m & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m+1 & -1 \end{array} \right)$$

2. Determinante de A . Desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot (m(m+1) - 6) - 1 \cdot (-2(m+1) - 4) + 3 \cdot (-6 - 2m) \\ &= m^2 + m - 6 + 2m + 6 - 18 - 6m = m^2 - 3m - 18 = (m-6)(m+3) \end{aligned}$$

Se anula para $m = 6$ y para $m = -3$.

3. Caso $m \neq 6$ y $m \neq -3$. $|A| \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 3 = \text{rg}(A^*) =$ número de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible determinado** (SCD: una única solución).

4. Caso $m = 6$. $\text{rg}(A) = 2$, porque $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Orlamos ese menor con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6 - 3) - 1 \cdot (2 - 2) + (-2) \cdot (-6 - 12) = -9 + 36 = 27 \neq 0$$

Luego $\text{rg}(A^*) = 3 \neq \text{rg}(A)$: el sistema es **incompatible** (SI: no tiene solución).

5. Caso $m = -3$. $\text{rg}(A) = 2$, porque $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Orlamos con la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 - 3) - 1 \cdot (2 - 2) + (-2) \cdot (-6 + 6) = 0$$

(la tercera fila de A^* , $(2, 3, -2 | -1)$, es la opuesta de la segunda). Luego $\text{rg}(A^*) = 2 = \text{rg}(A) < 3$: el sistema es **compatible indeterminado** (SCI: infinitas soluciones), con $3 - 2 = 1$ parámetro.

Valor de m $\text{rg}(A)$ $\text{rg}(A^*)$ Sistema

$m \neq 6, m \neq -3$ 3 3 SCD

$m = 6$ 2 3 SI

Valor de m $\text{rg}(A)$ $\text{rg}(A^*)$ Sistema

$m = -3$ 2 2 SCI

- b) 1. **Ecuaciones independientes.** Para $m = -3$ la tercera ecuación es la segunda cambiada de signo, así que basta con las dos primeras:

$$\begin{cases} x + y + 3z = -2 \\ -2x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$$

2. **Parámetro.** Tomamos $z = t$ (el menor no nulo usa las columnas de x e y , así que esas dos incógnitas se pueden despejar):

$$\begin{cases} x + y = -2 - 3t \\ -2x - 3y = 1 - 2t \end{cases}$$

3. **Resolución.** Multiplicando la primera por 2 y sumando: $-y = -3 - 8t$, luego $y = 3 + 8t$. Entonces $x = -2 - 3t - (3 + 8t) = -5 - 11t$.

4. **Comprobación** en la primera ecuación: $(-5 - 11t) + (3 + 8t) + 3t = -2$. Correcto.

La solución es $(x, y, z) = (-5 - 11t, 3 + 8t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

- c) Para $m = 3$, $|A| = (3 - 6)(3 + 3) = -18 \neq 0$: es un SCD y se puede aplicar la regla de Cramer al sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = -2 \\ -2x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{0}{-18} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-18}{-18} = 1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{18}{-18} = -1$$

Comprobación: $0 + 1 - 3 = -2$, $0 + 3 - 2 = 1$ y $0 + 3 - 4 = -1$. La solución es $(x, y, z) = (0, 1, -1)$.

Para el examen: la discusión exige dar los rangos de A y de A^* en cada caso y citar el teorema de Rouché-Frobenius; decir solo « $|A| = 0$, luego no es SCD» no basta para distinguir SI de SCI. En b) indica qué ecuación eliminamos y por qué, y en c) comprueba la solución en las tres ecuaciones.

PROBLEMA 3

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción B

Opción B. Un teatro vende tres tipos de entradas: general, a 9 euros; reducida, a 6 euros, e infantil, a 3 euros. En una función se vendieron 200 entradas en total y se recaudaron 1500 euros. Llama x , y y z al número de entradas generales, reducidas e infantiles vendidas, respectivamente.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones con estos datos y clasifícalo. (0,75 puntos)
- b) Resuelve el sistema tomando $z = t$ como parámetro e indica cuántas posibilidades distintas de venta (x, y, z) son compatibles con los datos, teniendo en cuenta que x , y y z son números enteros mayores o iguales que cero. (0,75 puntos)
- c) ¿Cuál es el mayor número de entradas infantiles que se pudo vender? En ese caso, ¿cuántas entradas de cada tipo se vendieron? (0,5 puntos)
- d) Si además se sabe que se vendió el doble de entradas reducidas que de infantiles, ¿cuántas entradas de cada tipo se vendieron? (0,5 puntos)

- a) 1. **Planteamiento.** El número total de entradas y la recaudación dan

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ 9x + 6y + 3z = 1500 \end{cases}$$

La segunda ecuación se puede simplificar dividiendo entre 3: $3x + 2y + z = 500$.

2. **Clasificación.** La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y su menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$. La ampliada tiene solo dos filas, luego también $\text{rg}(A^*) = 2$. Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$ incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado** (SCI): tiene infinitas soluciones, con un parámetro. Con estos datos no se puede saber cuántas entradas de cada tipo se vendieron.

- b) 1. **Resolución.** Con $z = t$:

$$\begin{cases} x + y = 200 - t \\ 3x + 2y = 500 - t \end{cases}$$

Restando a la segunda el doble de la primera: $x = 500 - t - 400 + 2t = 100 + t$. Entonces $y = 200 - t - (100 + t) = 100 - 2t$.

$$(x, y, z) = (100 + t, 100 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

2. **Soluciones con sentido.** Las tres cantidades deben ser enteros no negativos:

- $z = t \geq 0$ y entero;
- $y = 100 - 2t \geq 0 \iff t \leq 50$;
- $x = 100 + t \geq 0$, que se cumple siempre que $t \geq 0$.

Por tanto $t \in \{0, 1, 2, \dots, 50\}$, y cada valor de t da una venta distinta: hay **51** posibilidades.

- c) El número de entradas infantiles es $z = t$, y su máximo es $t = 50$. Entonces $x = 150$, $y = 0$, $z = 50$: se vendieron 150 generales, ninguna reducida y 50 infantiles. Comprobación: $150 + 0 + 50 = 200$ entradas y $9 \cdot 150 + 3 \cdot 50 = 1350 + 150 = 1500$ euros.

d) La nueva condición es $y = 2z$, es decir, $100 - 2t = 2t$, de donde $t = 25$. Se vendieron $x = 125$ generales, $y = 50$ reducidas y $z = 25$ infantiles. Comprobación: $125 + 50 + 25 = 200$ y $9 \cdot 125 + 6 \cdot 50 + 3 \cdot 25 = 1125 + 300 + 75 = 1500$ euros. Al añadir una ecuación independiente, el sistema pasa a ser compatible determinado y la venta queda fijada.

Para el examen: define las incógnitas con sus unidades antes de plantear y clasifica con los rangos, no solo «hay más incógnitas que ecuaciones» (un sistema así puede ser incompatible). En un SCI con contexto, la interpretación (enteros, no negativos, cuántas posibilidades) es parte de la nota: da siempre el intervalo de valores del parámetro que tiene sentido.

PROBLEMA 4

★★★ Dificil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción B

Opción B. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Comprueba que $A^2 = A + 2I$, donde I es la matriz identidad de orden 3, y utiliza esa igualdad para justificar que A es invertible y calcular A^{-1} . (1 punto)
- b) Halla la matriz X que cumple $AX = B + X$. (1 punto)
- c) Halla los números reales α y β tales que $A^3 = \alpha A + \beta I$. (0,5 puntos)

- a) 1. **Cálculo de A^2 .** Multiplicando filas por columnas:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } A + 2I = \begin{pmatrix} 0+2 & 1 & 1 \\ 1 & 0+2 & 1 \\ 1 & 1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Son iguales: } A^2 = A + 2I.$$

2. **Inversa a partir de la igualdad.** Pasando A al primer miembro y sacando factor común A por la izquierda:

$$A^2 - A = 2I \iff A(A - I) = 2I \iff A \cdot \frac{1}{2}(A - I) = I$$

Como A conmuta con $A - I$, también $\frac{1}{2}(A - I) \cdot A = I$. Por tanto A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(Comprobación independiente: $|A| = 0 - 1 \cdot (0 - 1) + 1 \cdot (1 - 0) = 2 \neq 0$.)

- b) 1. **Despejar.** Pasamos los términos con X al primer miembro y sacamos X factor común **por la derecha** (porque X está a la derecha en AX):

$$AX - X = B \iff (A - I)X = B$$

Ojo: $AX - X = (A - I)X$, no $(A - 1)X$; hay que escribir I .

2. **Inversa de $A - I$.** Por el apartado a), $(A - I) \cdot \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(A^2 - A) = \frac{1}{2} \cdot 2I = I$, luego $A - I$ es invertible y $(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}A$. Multiplicando por la izquierda:

$$X = (A - I)^{-1}B = \frac{1}{2}AB$$

X tiene dimensión 3×2 , como B .

3. **Cálculo.**

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Comprobación.** $AX = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B + X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Coinciden.

c) Multiplicamos la igualdad de a) por A y la volvemos a usar:

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(A + 2I) = A^2 + 2A = (A + 2I) + 2A = 3A + 2I$$

Luego $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Son los únicos valores posibles, porque A no es múltiplo de I : si $3A + 2I = \alpha A + \beta I$ con $\alpha \neq 3$, A sería una matriz escalar, y no lo es.

Para el examen: en a) se pide usar la igualdad, así que calcular la inversa por adjuntos no da la puntuación completa; escribe el paso $A \cdot \frac{1}{2}(A - I) = I$. En b) el fallo más caro es despejar $X = B(A - I)^{-1}$ (el producto no es conmutativo y además las dimensiones no encajan): la inversa se multiplica por el mismo lado en que está el factor.

Modelo de examen 3 de Álgebra

IDEA CLAVE

Cuatro problemas de 2,5 puntos con el formato de la PAU y el nivel más alto del bloque: el 1 y el 2 forman la opción A (inversa con parámetro y potencias de una matriz, sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas) y el 3 y el 4 la opción B (sistema homogéneo de tres ecuaciones con cuatro incógnitas y un problema de síntesis con dos parámetros). Elige una opción, dedica unos 25 minutos a cada problema justificando cada paso y después compara tu razonamiento con la solución.

Problemas

Intenta cada problema en 25 minutos, como en la prueba, antes de mirar la solución.

PROBLEMA 1

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción A

Opción A. Se considera la matriz, que depende del parámetro real k ,

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

- a) Determina los valores reales de k para los que A no tiene inversa. (0,5 puntos)
- b) Calcula A^{-1} en función de k para los valores de k en los que existe. (0,75 puntos)
- c) Para $k = 0$, comprueba que $A^3 = I$, deduce A^{-1} a partir de esa igualdad y calcula A^{2027} . (0,5 puntos)
- d) Para $k = 0$, halla la matriz X que cumple $AXA^2 = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (0,75 puntos)

- a) 1. **Determinante.** Desarrollando por la primera fila:

$$|A| = k \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot k^2 + 1 = k^3 + 1$$

2. **Raíces reales.** Por Ruffini, $k^3 + 1 = (k + 1)(k^2 - k + 1)$. El factor $k^2 - k + 1$ no tiene raíces reales (su discriminante es $1 - 4 = -3 < 0$), así que $|A| = 0 \iff k = -1$.

3. **Conclusión.** A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$: A **no** es invertible únicamente para $k = -1$.

- b) 1. **Matriz de adjuntos.** Para $k \neq -1$ calculamos cada adjunto $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ (menor que queda al quitar la fila i y la columna j):

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2, & A_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = -k, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{21} &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = 1, & A_{22} &= \begin{vmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2, & A_{23} &= - \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -k, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{vmatrix} = -k, & A_{32} &= - \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, & A_{33} &= \begin{vmatrix} k & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 \end{aligned}$$

2. **Inversa.** $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$, es decir, se traspone la matriz de adjuntos y se divide entre el determinante:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} k^2 & -k & 1 \\ 1 & k^2 & -k \\ -k & 1 & k^2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{k^3 + 1} \begin{pmatrix} k^2 & 1 & -k \\ -k & k^2 & 1 \\ 1 & -k & k^2 \end{pmatrix} \quad (k \neq -1)$$

3. **Comprobación.** Para $k = 1$ la fórmula da $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, y al multiplicar por $A =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se obtiene I . También se ve que para $k = 0$ la fórmula da la matriz de c).

- c) 1. **Potencias.** Para $k = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y, multiplicando filas por columnas,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

2. **Inversa.** De $A^3 = I$ se obtiene $A \cdot A^2 = I$ y $A^2 \cdot A = I$, luego A es invertible y

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Potencia alta.** Las potencias se repiten de 3 en 3. Como $2027 = 3 \cdot 675 + 2$,

$$A^{2027} = (A^3)^{675} A^2 = I^{675} A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) 1. **Despejar.** A y A^2 son invertibles, con $A^{-1} = A^2$ y $(A^2)^{-1} = A$ (porque $A^2 \cdot A = I$). Multiplicamos $AXA^2 = B$ por A^{-1} **por la izquierda** y por $(A^2)^{-1}$ **por la derecha**:

$$X = A^{-1} B (A^2)^{-1} = A^2 B A$$

2. **Cálculo.**

$$A^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2 B) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Comprobación. } AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } (AX)A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Para el examen: en a) hay que justificar que $k^2 - k + 1$ no se anula (discriminante negativo); decir solo « $k = -1$ » sin factorizar deja la respuesta incompleta. En b) no olvides trasponer la matriz de adjuntos ni indicar para qué k vale la fórmula. En c) se pide **usar** $A^3 = I$: la inversa sale de $A \cdot A^2 = I$, sin adjuntos. En d) cada inversa se multiplica por el lado en que está su factor; escribir $X = BA^{-1}A^{-2}$ es el error más caro.

PROBLEMA 2

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción A

Opción A. Se considera el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas, que depende del parámetro real m ,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y = 2 \\ 2x + 3y + mz = m + 2 \\ y + (m - 2)z = m^2 \end{cases}$$

- Discute el sistema según los valores de m . (1,5 puntos)
- Resuélvelo para el valor o los valores de m en los que es compatible determinado. (0,5 puntos)
- Resuélvelo para $m = 1$. (0,5 puntos)

a) 1. **Matrices del sistema.** La matriz de coeficientes A es 4×3 y la ampliada A^* es 4×4 :

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & m & m+2 \\ 0 & 1 & m-2 & m^2 \end{array} \right)$$

Como A solo tiene 3 columnas, $\text{rg}(A) \leq 3$. Si $|A^*| \neq 0$, entonces $\text{rg}(A^*) = 4 \neq \text{rg}(A)$ y el sistema es incompatible. Por eso se empieza calculando $|A^*|$.

2. **Hacer ceros.** Con operaciones que no cambian el determinante ni el rango: $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$, $F_3 \rightarrow F_3 - F_1 - F_2$ (con las filas originales) y $F_4 \rightarrow F_4 - F_2 + F_1$:

- $F_2 - F_1 = (0, 1, -1 | 1)$;
- $F_3 - F_1 - F_2 = (0, 0, m - 1 | m - 1)$;
- $F_4 - F_2 + F_1 = (0, 0, m - 1 | m^2 - 1)$.

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & 0 & m-1 & m^2-1 \end{array} \right)$$

3. **Determinante de A^* .** Desarrollando dos veces por la primera columna:

$$|A^*| = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} m-1 & m-1 \\ m-1 & m^2-1 \end{vmatrix} = (m-1)(m^2-1) - (m-1)^2 = (m-1)(m^2-m) = m(m-1)^2$$

Se anula para $m = 0$ y para $m = 1$.

4. **Caso $m \neq 0$ y $m \neq 1$.** $|A^*| \neq 0$, luego $\text{rg}(A^*) = 4$, mientras que $\text{rg}(A) \leq 3$. Por el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es **incompatible** (SI: no tiene solución).

5. **Caso $m = 0$.** El menor de A formado por las tres primeras filas vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & m \end{vmatrix} = 1 \cdot 2m - 1 \cdot m + 1 \cdot (3 - 4) = m - 1$$

que para $m = 0$ es $-1 \neq 0$: $\text{rg}(A) = 3$. Como $|A^*| = 0$, $\text{rg}(A^*) = 3$. Así $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}$: el sistema es **compatible determinado** (SCD: una única solución).

6. **Caso $m = 1$.** Las filas 3 y 4 de la matriz escalonada son nulas (también en la columna de términos independientes, porque $m - 1 = 0$ y $m^2 - 1 = 0$). Quedan dos filas no nulas: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. El sistema es **compatible indeterminado** (SCI: infinitas soluciones), con $3 - 2 = 1$ parámetro.

Valor de m	$\text{rg}(A)$	$\text{rg}(A^*)$	Sistema
$m = 0$	3	3	SCD
$m = 1$	2	2	SCI
$m \neq 0, m \neq 1$	3	4	SI

b) Solo es SCD para $m = 0$. La matriz escalonada da el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ -z = -1 \\ -z = -1 \end{cases}$$

De donde $z = 1$, $y = 1 + z = 2$ y $x = 1 - y - z = -2$. Comprobación en el sistema original con $m = 0$: $-2 + 2 + 1 = 1$; $-2 + 4 = 2$; $-4 + 6 + 0 = 2$; $2 + (-2) \cdot 1 = 0 = 0^2$. La solución es $(x, y, z) = (-2, 2, 1)$.

c) Para $m = 1$ quedan dos ecuaciones independientes:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Tomamos $z = t$ (el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ usa las columnas de x e y). Entonces $y = 1 + t$ y $x = 1 - (1 + t) - t = -2t$. Comprobación en la tercera ecuación original con $m = 1$: $2(-2t) + 3(1 + t) + t = 3 = m + 2$. Correcto.

La solución es $(x, y, z) = (-2t, 1 + t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

Para el examen: con más ecuaciones que incógnitas, el determinante que decide es el de la **ampliada**: si no es cero, el sistema es incompatible sin más cálculos. El error típico es estudiar solo un menor 3×3 de A y declarar SCD cuando no se anula, olvidando la cuarta ecuación. Da los dos rangos en cada caso y cita el teorema de Rouché-Frobenius.

PROBLEMA 3

★★★ Dificil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción B

Opción B. Se considera el sistema homogéneo de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, que depende del parámetro real λ ,

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + \lambda y + z + 2w = 0 \\ 2x + (\lambda + 1)y + (\lambda + 1)z + 3w = 0 \end{cases}$$

- Justifica, sin resolverlo, que para cualquier valor de λ el sistema es compatible y tiene infinitas soluciones. Clasifícalo. (0,5 puntos)
- Estudia el rango de la matriz de coeficientes según los valores de λ e indica, en cada caso, cuántos parámetros tiene la solución. (0,75 puntos)
- Resuelve el sistema para $\lambda = 1$, tomando $y = s$ y $z = t$ como parámetros. (0,5 puntos)
- Resuelve el sistema, en función de λ , para $\lambda \neq 1$, tomando $w = t$ como parámetro. (0,75 puntos)

a) 1. **Compatible.** Un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial $x = y = z = w = 0$. Dicho con rangos: la columna de términos independientes es nula, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$.

2. **Infinitas soluciones.** La matriz de coeficientes A es 3×4 , luego $\text{rg}(A) \leq 3 < 4 = \text{número de incógnitas}$. Por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es **compatible indeterminado** (SCI: infinitas soluciones) para todo λ ; en particular tiene soluciones distintas de la trivial.

b) 1. **Escalonar.** Hacemos $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$ y $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y después $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Caso $\lambda \neq 1$.** Las tres filas son no nulas y escalonadas (la tercera tiene su primer elemento no nulo en la columna 3, la segunda en la columna 2). Equivalentemente, el menor de las columnas 1, 2 y 3 vale $1 \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2 \neq 0$. Luego $\text{rg}(A) = 3$ y la solución tiene $4 - 3 = 1$ parámetro.

3. **Caso $\lambda = 1$.** La matriz queda $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con dos filas no nulas: $\text{rg}(A) = 2$ y la solución tiene $4 - 2 = 2$ parámetros.

Valor de λ $\text{rg}(A)$ Parámetros

$\lambda = 1$ 2 2

$\lambda \neq 1$ 3 1

c) Para $\lambda = 1$ el sistema equivale a

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Con $y = s$ y $z = t$: $w = 0$ y $x = -s - t$. Comprobación en la tercera ecuación original ($2x + 2y + 2z + 3w = 0$): $2(-s - t) + 2s + 2t + 0 = 0$. La solución es

$$(x, y, z, w) = (-s - t, s, t, 0), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

d) Para $\lambda \neq 1$ usamos la forma escalonada de b), con $w = t$:

1. Tercera fila: $(\lambda - 1)z = 0$ y, como $\lambda - 1 \neq 0$, $z = 0$.

2. Segunda fila: $(\lambda - 1)y + t = 0$, luego $y = \frac{-t}{\lambda - 1}$ (se puede dividir porque $\lambda \neq 1$).

3. Primera fila: $x = -y - z - w = \frac{t}{\lambda - 1} - t = \frac{t - (\lambda - 1)t}{\lambda - 1} = \frac{(2 - \lambda)t}{\lambda - 1}$.

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{(2 - \lambda)t}{\lambda - 1}, \frac{-t}{\lambda - 1}, 0, t \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Comprobación con $\lambda = 2$: la fórmula da $(0, -t, 0, t)$, y en el sistema $x + 2y + z + 2w = -2t + 2t = 0$ y $2x + 3y + 3z + 3w = -3t + 3t = 0$. Correcto.

Para el examen: en a) basta con un argumento de rangos ($\text{rg}(A) \leq 3 < 4$), sin calcular nada; es medio punto que se pierde por ponerse a resolver. En b) no confundas «tiene soluciones no triviales» (siempre, aquí) con el número de parámetros, que depende de λ . En d) indica que divides entre $\lambda - 1$ porque $\lambda \neq 1$.

PROBLEMA 4

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Opción B

Opción B. Se consideran la matriz M y el sistema $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$, que dependen de los parámetros reales a y b :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Calcula $|M|$ y estudia el rango de M según los valores de a . (0,5 puntos)
- Discute el sistema según los valores de a y b . (1 punto)
- Para $a = 0$, calcula M^{-1} y utilízala para resolver el sistema en función de b . (0,5 puntos)
- Para $a = 2$ y $b = 0$, resuelve el sistema tomando $z = t$ como parámetro y halla la solución que cumple, además, $x + y + z = 0$. (0,5 puntos)

- 1. Escalonar.** Con $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$ y $F_3 \rightarrow F_3 - F_1 - F_2$ (operaciones que no cambian el determinante), la tercera fila queda $(2 - 1 - 1, a + 1 - 1 - a, 3 - a - 1) = (0, 0, 2 - a)$:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = (a-1)(2-a)$$

(el determinante de una matriz triangular es el producto de la diagonal).

- 2. Rango.** Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, $|M| \neq 0$ y $\text{rg}(M) = 3$. Para $a = 1$ y para $a = 2$, $|M| = 0$; el menor $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2a$ (filas 1 y 3, columnas 1 y 3) vale 1 para $a = 1$ y -1 para $a = 2$, así que $\text{rg}(M) = 2$ en los dos casos.

- 1. Escalonar la ampliada** con las mismas operaciones. La columna de términos independientes pasa a ser $(1, b-1, 1-1-b) = (1, b-1, -b)$:

$$M^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & b-1 \\ 0 & 0 & 2-a & -b \end{array} \right)$$

- Caso $a \neq 1$ y $a \neq 2$.** $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 3 =$ número de incógnitas: **SCD** (una única solución) para cualquier b .

- Caso $a = 1$.** La segunda fila queda $(0, 0, 0 \mid b-1)$ y la tercera $(0, 0, 1 \mid -b)$. Las filas 1 y 3 dan $\text{rg}(M) = 2$.

- Si $b \neq 1$, la segunda fila es la ecuación imposible $0 = b-1 \neq 0$: $\text{rg}(M^*) = 3 \neq \text{rg}(M)$, el sistema es **incompatible** (SI).
- Si $b = 1$, la segunda fila es nula: $\text{rg}(M^*) = 2 = \text{rg}(M) < 3$, el sistema es **compatible indeterminado** (SCI) con un parámetro.

- Caso $a = 2$.** La segunda fila queda $(0, 1, -1 \mid b-1)$ y la tercera $(0, 0, 0 \mid -b)$, y $\text{rg}(M) = 2$.

- Si $b \neq 0$, la tercera fila es $0 = -b \neq 0$: **SI**.

- Si $b = 0$, la tercera fila es nula: $\text{rg}(M^*) = 2 = \text{rg}(M) < 3$, **SCI**.

Valores	$\text{rg}(M)$	$\text{rg}(M^*)$	Sistema
$a \neq 1, a \neq 2$	3	3	SCD
$a = 1, b = 1$	2	2	SCI
$a = 1, b \neq 1$	3	3	SI
$a = 2, b = 0$	2	2	SCI
$a = 2, b \neq 0$	3	3	SI

c) 1. **Inversa.** Para $a = 0$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $|M| = (0 - 1)(2 - 0) = -2 \neq 0$. La matriz de adjuntos y la inversa son

$$\text{Adj}(M) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. **Solución.** El sistema es $MX = C$ con $C = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$; multiplicando por M^{-1} por la izquierda, $X = M^{-1}C$:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3b}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3b}{2} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3b}{2} \\ 1 - \frac{3b}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación** en la tercera ecuación ($2x + y + 3z = 1$): $3b + 1 - \frac{3b}{2} - \frac{3b}{2} = 1$. Correcto.

d) 1. **Resolución.** Para $a = 2$ y $b = 0$ quedan las dos primeras filas de la escalonada:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

Con $z = t$: $y = t - 1$ y $x = 1 - (t - 1) - 2t = 2 - 3t$. La solución general es $(x, y, z) = (2 - 3t, t - 1, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

2. **Condición añadida.** $x + y + z = (2 - 3t) + (t - 1) + t = 1 - t = 0 \iff t = 1$, que da $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$. Comprobación en el sistema original con $a = 2, b = 0$: $-1 + 0 + 2 = 1$; $-1 + 0 + 1 = 0$; $-2 + 0 + 3 = 1$.

Para el examen: con dos parámetros, la tabla final debe cubrir **todos** los pares (a, b) ; es habitual olvidar que para $a \neq 1, 2$ el sistema es SCD sea cual sea b . En c) se pide expresamente usar M^{-1} : resolver por Cramer no da la puntuación completa. Comprueba siempre la solución en una ecuación que no hayas usado.

