



Ecuación Ganadora
ACADEMIA

MATEMÁTICAS II · 2.º DE BACHILLERATO

Determinantes

Determinantes en Matemáticas II: Sarrus, propiedades, adjuntos, rango, inversa por adjuntos y determinantes con parámetros, con ejercicios resueltos de nivel PAU.

ecuacionganadora.com/recursos/matematicas-2-bachillerato/determinantes.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

El determinante es un número asociado a una matriz cuadrada que dice **si la matriz tiene inversa, cuántas filas son independientes** (rango) y, más adelante, **si un sistema tiene solución única**. En este tema aprendes a calcularlo en 2×2 , 3×3 y 4×4 , a usar sus propiedades para ahorrar cuentas y a manejarlo cuando aparece un **parámetro**, que es el tipo de pregunta más frecuente en la PAU.

Orden recomendado

Sigue los apartados en orden: cada uno usa lo anterior. Los determinantes con parámetros son la base del tema de sistemas.

Determinantes 2×2 y 3×3 y regla de Sarrus

IDEA CLAVE

El determinante es un número que se asocia a cada matriz cuadrada. En orden 2 y 3 se calcula con una fórmula directa (la regla de Sarrus en el caso 3×3), mide un área o un volumen y dice si la matriz tiene inversa: es la cuenta que vas a repetir en casi todos los problemas de álgebra de la PAU.

Determinante de orden 2

DEFINICIÓN • DETERMINANTE DE UNA MATRIZ 2×2

El **determinante** de una matriz cuadrada de orden 2 es el número

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

es decir, el producto de la diagonal principal menos el producto de la diagonal secundaria.

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 12 + 10 = 22, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Las barras verticales $|A|$ **no** son un valor absoluto: un determinante puede ser negativo. También se escribe $\det(A)$. El determinante solo existe para matrices **cuadradas**.

En el segundo ejemplo la segunda fila es la mitad de la primera y el determinante sale 0. No es casualidad, y lo verás en las propiedades de los determinantes.

Qué mide el determinante 2×2 : un área con signo

Toma las filas de A como dos vectores del plano, $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (c, d)$, y dibuja el paralelogramo que forman (con un vértice en el origen y lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$).

PROPIEDAD · INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El **valor absoluto** del determinante es el área del paralelogramo de lados $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (c, d)$:

$$\text{Área} = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = |ad - bc|.$$

El **signo** dice la orientación: es positivo si para girar de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ por el camino más corto se gira en sentido antihorario, negativo si se gira en sentido horario y 0 si los vectores son paralelos (el paralelogramo se aplasta).

Por qué: si $\vec{u} = (a, 0)$ está sobre el eje horizontal, el paralelogramo tiene base a y altura d , y su área es $ad = ad - 0 \cdot c$. En el caso general, si encierras el paralelogramo en el rectángulo de lados $a + c$ y $b + d$ y le quitas los triángulos y rectángulos de las esquinas, lo que queda mide exactamente $ad - bc$. El signo aparece porque al intercambiar $\vec{u}$ y $\vec{v}$ la fórmula cambia de signo: $cb - da = -(ad - bc)$.

Animación interactiva disponible en la versión web de este apartado.

Prueba la animación: arrastra los extremos de los dos vectores y mira cómo cambian el paralelogramo y el determinante. Intenta conseguir determinante 0 sin que ningún vector sea nulo, y fíjate en qué pasa con el signo cuando un vector «cruza» al otro.

De aquí sale una fórmula muy útil: un triángulo es medio paralelogramo. Si un triángulo tiene vértices P , Q y R , su área es la mitad del valor absoluto del determinante formado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

PROPIEDAD · ÁREA DE UN TRIÁNGULO CON VÉRTICES CONOCIDOS

Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ y $R = (x_3, y_3)$, el área del triángulo PQR es

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

Los dos determinantes valen lo mismo; el de orden 3 es más fácil de recordar. Si sale 0, los tres puntos están **alineados**.

Determinante de orden 3: la regla de Sarrus

DEFINICIÓN · DETERMINANTE DE UNA MATRIZ 3×3

El determinante de una matriz cuadrada de orden 3 es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}}_{\text{se suman}} - \underbrace{(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})}_{\text{se restan}}.$$

Son seis productos de tres factores. En cada uno hay **un elemento de cada fila y uno de cada columna**. La **regla de Sarrus** es la forma de recordar cuáles se suman y cuáles se restan:

- **Se suman** el producto de la diagonal principal y los de los dos «triángulos» paralelos a ella: $a_{12}a_{23}$ con la esquina opuesta a_{31} , y $a_{21}a_{32}$ con la esquina opuesta a_{13} .

- **Se restan** el producto de la diagonal secundaria y los de sus dos triángulos paralelos: $a_{12}a_{21}$ con a_{33} , y $a_{23}a_{32}$ con a_{11} .

Otra forma equivalente: copia las dos primeras columnas a la derecha de la matriz. Las tres diagonales que bajan hacia la derecha son los productos que se suman, y las tres que bajan hacia la izquierda, los que se restan.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Animación interactiva disponible en la versión web de este apartado.

Prueba la animación: escribe los números de tu matriz y avanza paso a paso. Verás cada diagonal iluminada, su producto y si se suma o se resta. Comprueba con ella los determinantes de los ejercicios.

MÉTODO • CALCULAR UN DETERMINANTE 3×3 CON SARRUS

1. Escribe los tres productos que se suman, cada uno con sus signos y entre paréntesis si hay negativos.
2. Escribe los tres productos que se restan **dentro de un paréntesis** precedido de un signo menos.
3. Calcula cada grupo por separado y resta al final: $|A| = (\text{suma de los positivos}) - (\text{suma de los negativos})$.
4. Si hay ceros, aprovéchalos: todo producto que contiene un 0 desaparece.

Un ejemplo con números:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (0 + (-2)(-1)(-3) + 3 \cdot 2 \cdot 4) - (3 \cdot 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 2 \cdot 2) = 18 - (-12) = 30.$$

Observa un caso que ahorra muchas cuentas: si la matriz es **triangular**, todos los productos menos el de la diagonal

principal contienen algún cero, así que **el determinante es el producto de la diagonal**. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 4 = -24$.

La regla de Sarrus **solo vale para orden 3**. Para orden 4 o mayor se usa el **desarrollo por adjuntos** o se hacen ceros con las propiedades.

NOTA • AMPLIACIÓN: VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO

Igual que en el plano, si las filas de una matriz 3×3 son tres vectores del espacio $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, el **valor absoluto** de su determinante es el volumen del paralelepípedo que forman. Si el determinante es 0, el paralelepípedo se aplasta: los tres vectores están en un mismo plano (son **coplanarios**). Lo usarás en la geometría del espacio.

Determinante e inversa (adelanto)

El determinante decide si una matriz tiene inversa:

TEOREMA · EXISTENCIA DE LA INVERSA

Una matriz cuadrada A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$. En orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, |A| \neq 0 \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

La idea geométrica: si $|A| = 0$, la matriz «aplasta» el plano sobre una recta (o el espacio sobre un plano), y lo aplastado no se puede «desaplastar». Una matriz con $|A| = 0$ se llama **singular**, y una con $|A| \neq 0$, **regular**. En orden 3 la inversa se calcula con Gauss-Jordan o con la inversa por adjuntos. En la PAU, la pregunta «¿para qué valores de m tiene inversa A ?» se responde siempre igual: se calcula $|A|$ en función de m y se resuelve $|A| = 0$.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un determinante 2×2 y uno 3×3

Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

a) Diagonal principal menos diagonal secundaria:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 12 - (-10) = 22.$$

b) Aplicamos la regla de Sarrus.

1. **Productos que se suman** (diagonal principal y sus dos triángulos):

$$2 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) = 40 + 2 + 6 = 48.$$

2. **Productos que se restan** (diagonal secundaria y sus dos triángulos):

$$3 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 5 = 12 - 8 - 5 = -1.$$

3. **Resta:** $|A| = 48 - (-1) = 49.$

Calcular los dos grupos por separado y restar al final evita casi todos los errores de signo.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Área de un triángulo con determinantes

Se consideran los puntos $A = (1, 2)$, $B = (4, 3)$ y $C = (2, 6)$.

- a) Calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
- b) Calcula el área del triángulo ABC .

a) 1. **Los vectores.** $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 4)$.

2. **El determinante.** Con los vectores como filas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11.$$

3. **El área** es su valor absoluto: 11 unidades cuadradas. Que el determinante sea positivo significa que de $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ se gira en sentido antihorario.

b) El triángulo ABC es la mitad del paralelogramo (la diagonal BC lo parte en dos triángulos iguales):

$$\text{Área}(ABC) = \frac{11}{2} \text{ unidades cuadradas.}$$

Con la fórmula de orden 3 sale lo mismo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (3 + 4 + 24) - (6 + 6 + 8) = 31 - 20 = 11$, y la mitad es $\frac{11}{2}$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Determinante con un parámetro e inversa

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula $|A|$ en función de m .
- b) Halla los valores de m para los que A no tiene inversa.
- c) Halla los valores de m para los que $|A| = 6$.

a) **Sarrus con letras.** Se hace exactamente igual que con números; solo hay que tener cuidado al multiplicar.

1. Productos que se suman: $1 \cdot 1 \cdot 1 + m \cdot m \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + m^2 + 2$.

2. Productos que se restan: $1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot m \cdot 1 + m \cdot 2 \cdot 1 = 1 + m + 2m$.

3. Resta:

$$|A| = (m^2 + 3) - (3m + 1) = m^2 - 3m + 2.$$

Comprobación rápida con un valor: para $m = 0$, la fórmula da 2, y Sarrus con $m = 0$ da $(1 + 0 + 2) - (1 + 0 + 0) = 2$. Coincide.

b) **Sin inversa si y solo si el determinante es cero.**

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \iff m = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \iff m = 1 \text{ o } m = 2.$$

Para $m = 1$ y para $m = 2$, A no tiene inversa; para cualquier otro valor real de m sí la tiene. Por ejemplo, con

$m = 1$ la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que tiene la primera y la tercera fila iguales: es lógico que su determinante sea 0.

c) Imponemos

$$m^2 - 3m + 2 = 6 \iff m^2 - 3m - 4 = 0 \iff (m - 4)(m + 1) = 0 \iff m = 4 \text{ o } m = -1.$$

Comprobación: $16 - 12 + 2 = 6$ y $1 + 3 + 2 = 6$.

Para el examen: en la pregunta «¿para qué valores tiene inversa?» la respuesta correcta es «para todo m distinto de 1 y de 2», y hay que decir **por qué**: «porque A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$ ». Comprobar el

determinante sustituyendo un valor sencillo de m cuesta diez segundos y evita arrastrar un error de signo a todo el problema.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · LOS SIGNOS DE LOS PRODUCTOS QUE SE RESTAN

El fallo más frecuente con Sarrus no está en las diagonales, sino en los signos: se resta el primer producto de la diagonal secundaria y se suman los otros dos sin darse cuenta, o se olvida que restar un producto negativo es sumar. Escribe siempre $|A| = (\dots) - (\dots)$, con los tres productos que se restan **dentro del paréntesis**, calcula cada paréntesis por separado y resta al final.

ERROR TÍPICO · USAR SARRUS EN UN DETERMINANTE DE ORDEN 4

La regla de Sarrus es exclusiva de orden 3. Copiar columnas y multiplicar diagonales en una matriz 4×4 da un número que no es su determinante (un determinante de orden 4 tiene 24 productos, no 8). Para orden 4 se hacen ceros y se desarrolla por adjuntos.

ERROR TÍPICO · DAR UN ÁREA NEGATIVA

El determinante puede ser negativo; el área, no. Si en un problema de áreas el determinante sale -6 , el área es 6 (o 3 si es un triángulo). Al revés, no confundas las barras del determinante con un valor absoluto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \text{ no } 2.$$

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$, con a y b números reales.

a) $5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 20 - 6 = 14.$

b) $(-3) \cdot (-4) - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0.$ Era de esperar: la segunda fila es la primera multiplicada por -2 , así que los dos vectores fila son paralelos y el paralelogramo que forman no tiene área.

c) $a \cdot a - (-b) \cdot b = a^2 + b^2.$ Este determinante nunca es negativo, y solo vale 0 si $a = b = 0.$

EJERCICIO 2

★ Básico

Calcula los siguientes determinantes.

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

a) Regla de Sarrus.

1. Se suman: $1 \cdot 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot 4 = 0 - 6 + 24 = 18$.

2. Se restan: $3 \cdot 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 = 0 - 4 - 8 = -12$.

3. $|A| = 18 - (-12) = 30$.

b) La matriz es triangular superior. En la regla de Sarrus, todos los productos salvo el de la diagonal principal contienen alguno de los ceros de debajo de la diagonal, así que

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 4 = -24.$$

EJERCICIO 3 ★ Básico

Se considera el determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

- a) Calcula $D(x)$ en función de x .
- b) Halla los valores reales de x para los que $D(x) = 0$.

a) Regla de Sarrus.

1. Se suman: $x \cdot x \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = x^3 + 1$.

2. Se restan: $0 \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot x = 0$.

3. $D(x) = x^3 + 1$.

- b) $x^3 + 1 = 0 \iff x^3 = -1 \iff x = -1$, que es la única raíz real (la raíz cúbica de un número real es única). Comprobación: $D(-1) = -1 + 1 = 0$.

EJERCICIO 4

★★ Medio

Resuelve las siguientes ecuaciones (con x real).

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

a) 1. El determinante es $x(x+1) - 2 \cdot 3 = x^2 + x - 6$.

2. $x^2 + x - 6 = 0 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$, es decir, $x = 2$ o $x = -3$.

b) 1. **Sarrus**. Se suman $x \cdot x \cdot x + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 = x^3$. Se restan $0 \cdot x \cdot 0 + x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot x = 2x$. El determinante es $x^3 - 2x$.

2. **Factorizar, no dividir**. $x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = 0 \iff x = 0$ o $x^2 = 2$. Las soluciones son $x = 0$, $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$.

Si se divide la ecuación entre x «para simplificar», se pierde la solución $x = 0$.

EJERCICIO 5

★★ Medio

Una parcela agrícola tiene forma de cuadrilátero. Tomando un sistema de coordenadas con unidades en metros, sus vértices son, en este orden al recorrer el contorno, $O = (0, 0)$, $A = (40, 10)$, $B = (35, 40)$ y $C = (5, 30)$. La diagonal OB divide la parcela en dos triángulos.

- a) Calcula el área del triángulo OAB .
- b) Calcula el área del triángulo OBC .
- c) Calcula el área total de la parcela.
- d) Si el terreno se vende a 30 € el metro cuadrado, ¿cuál es el precio de la parcela, en euros?

- a) Como O es el origen, los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ coinciden con las coordenadas de A y B :

$$\text{Área}(OAB) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 40 & 10 \\ 35 & 40 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |1600 - 350| = \frac{1250}{2} = 625 \text{ m}^2.$$

- b) Con $\overrightarrow{OB} = (35, 40)$ y $\overrightarrow{OC} = (5, 30)$:

$$\text{Área}(OBC) = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 35 & 40 \\ 5 & 30 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |1050 - 200| = \frac{850}{2} = 425 \text{ m}^2.$$

- c) La diagonal OB deja los dos triángulos a uno y otro lado, sin solaparse, así que el área total es la suma:
 $625 + 425 = 1050 \text{ m}^2$.
- d) El precio es $1050 \cdot 30 = 31\,500$ euros.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 4 & k \end{pmatrix}$, con k real.

- a) Halla los valores de k para los que A **no** tiene inversa.
- b) Para $k = 3$, calcula A^{-1} .

- a) A no tiene inversa si y solo si $|A| = 0$:

$$|A| = k^2 - 4 = 0 \iff k = 2 \text{ o } k = -2.$$

- b) Para $k = 3$, $|A| = 9 - 4 = 5 \neq 0$, así que existe la inversa. Con la fórmula de orden 2 (se intercambian los elementos de la diagonal principal, se cambia el signo de los otros dos y se divide entre el determinante):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I$, y al dividir entre 5 queda I .

EJERCICIO 7

★★ Medio

Recuerda que el valor absoluto del determinante de una matriz 3×3 cuyas filas son tres vectores del espacio es el volumen del paralelepípedo que forman, y que si ese determinante es 0 los vectores son coplanarios.

- a) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$ y $\vec{w} = (2, 0, 1)$.
- b) Halla el valor de a para el que los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$ y $\vec{w} = (a, 1, 1)$ son coplanarios.

- a) 1. Con los vectores como filas, por Sarrus: se suman $1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 = 13$ y se restan $0 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0$.

2. El determinante vale 13 y el volumen es $|13| = 13$ unidades cúbicas.

- b) 1. Ahora la tercera fila es $(a, 1, 1)$. Se suman $1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot a + 0 = 1 + 6a$ y se restan $0 \cdot 1 \cdot a + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 3$. El determinante es $6a - 2$.

2. Coplanarios si y solo si el determinante es 0: $6a - 2 = 0 \iff a = \frac{1}{3}$.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se consideran los vectores del espacio $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, m, 2)$ y $\vec{w} = (1, 2, m)$, donde m es un parámetro real, y la matriz A cuyas filas son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, en este orden.

- a) Calcula $|A|$ en función de m . (0,5 puntos)
- b) Halla los valores de m para los que los tres vectores son coplanarios. (0,5 puntos)
- c) Halla los valores de m para los que el paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tiene un volumen de 3 unidades cúbicas. (0,75 puntos)
- d) Para $m = 1$, calcula $|A|$ y razona si A tiene inversa. (0,75 puntos)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$. Por Sarrus:

1. Se suman: $1 \cdot m \cdot m + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 = m^2 + 4$.

2. Se restan: $1 \cdot m \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot m = 2m + 4$.

3. $|A| = (m^2 + 4) - (2m + 4) = m^2 - 2m$.

- b) Los vectores son coplanarios si y solo si $|A| = 0$: $m^2 - 2m = m(m - 2) = 0 \iff m = 0$ o $m = 2$. Con $m = 2$ se ve directamente: $\vec{v} = \vec{w} = (1, 2, 2)$, dos filas iguales.

- c) El volumen es el **valor absoluto** del determinante, así que hay que resolver $|m^2 - 2m| = 3$, que se separa en dos ecuaciones:

1. $m^2 - 2m = 3 \iff m^2 - 2m - 3 = 0 \iff (m - 3)(m + 1) = 0 \iff m = 3$ o $m = -1$.

2. $m^2 - 2m = -3 \iff m^2 - 2m + 3 = 0$, cuyo discriminante es $4 - 12 = -8 < 0$: no tiene soluciones reales.

Los valores son $m = 3$ y $m = -1$. Comprobación: $9 - 6 = 3$ y $1 + 2 = 3$.

- d) Para $m = 1$, $|A| = 1 - 2 = -1 \neq 0$, así que A **tiene inversa** (una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante no es nulo). El signo negativo no importa para la inversa; geoméricamente, el volumen del paralelepípedo es $|-1| = 1$.

Para el examen: en c) hay que plantear las **dos** ecuaciones, $|A| = 3$ y $|A| = -3$, y descartar la segunda con el discriminante; quien solo resuelve $|A| = 3$ suele acertar por suerte, pero pierde la justificación. En d) la frase « $|A| \neq 0 \Rightarrow$ existe A^{-1} » es la que da los puntos.

EJERCICIO 9

★★★ Difícil

Tres puntos del plano (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) están alineados si y solo si $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Por eso, la recta que pasa por $P = (1, 2)$ y $Q = (3, -2)$ está formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Desarrolla el determinante y escribe la ecuación de la recta en la forma $y = \dots$ (despejando y en función de x).
- Halla el valor de k para el que el punto $(k, 6)$ está alineado con P y Q .
- Calcula el área del triángulo de vértices P , Q y $R = (4, 3)$.

a) 1. **Sarrus.** Se suman $x \cdot 2 \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) = 2x + 3y - 2$. Se restan $1 \cdot 2 \cdot 3 + x \cdot 1 \cdot (-2) + y \cdot 1 \cdot 1 = 6 - 2x + y$.

2. El determinante es $(2x + 3y - 2) - (6 - 2x + y) = 4x + 2y - 8$.

3. La recta es $4x + 2y - 8 = 0$; dividiendo entre 2 y despejando, $y = -2x + 4$.

4. **Comprobación:** P cumple $2 = -2 + 4$ y Q cumple $-2 = -6 + 4$. Tiene sentido: si $(x, y) = P$ o $(x, y) = Q$, el determinante tiene dos filas iguales y vale 0.

- El punto $(k, 6)$ está alineado con P y Q si está en la recta: $6 = -2k + 4 \iff k = -1$.
- Usamos la fórmula del área con el determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 + 8 + 9) - (-8 + 3 + 6) = 15 - 1 = 14,$$

y el área es $\frac{1}{2}|14| = 7$ unidades cuadradas. Como $14 \neq 0$, los tres puntos no están alineados (en efecto, R no cumple $y = -2x + 4$: $-8 + 4 = -4 \neq 3$).

Para el examen: la condición de alineación con un determinante y la fórmula del área del triángulo son dos usos del mismo hecho: el determinante mide (el doble de) un área, y un área nula significa puntos alineados. Si te piden la recta, comprueba que pasa por los dos puntos dados antes de seguir.

EJERCICIO 10

★★★ Dificil

Se consideran los vectores del plano $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (t, t^2)$, donde t es un número real, y $D(t) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ t & t^2 \end{vmatrix}$.

- a) Halla los valores de t para los que el paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tiene área 3.
- b) Halla los valores de t para los que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.
- c) Halla el valor de t para el que $D(t)$ es mínimo y el valor de ese mínimo.

Primero calculamos $D(t) = 2t^2 - 1 \cdot t = 2t^2 - t$.

- a) 1. El área es $|D(t)|$, así que hay que resolver $|2t^2 - t| = 3$, es decir, $2t^2 - t = 3$ o $2t^2 - t = -3$.
2. $2t^2 - t - 3 = 0 \iff t = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$, luego $t = \frac{3}{2}$ o $t = -1$.
3. $2t^2 - t + 3 = 0$ tiene discriminante $1 - 24 = -23 < 0$: sin soluciones reales.

Los valores son $t = \frac{3}{2}$ y $t = -1$. Comprobación: $D(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3$ y $D(-1) = 2 + 1 = 3$.

- b) Dos vectores del plano son paralelos si y solo si el paralelogramo que forman no tiene área, es decir, si $D(t) = 0$: $2t^2 - t = t(2t - 1) = 0 \iff t = 0$ o $t = \frac{1}{2}$. Para $t = 0$, $\vec{v}$ es el vector nulo (paralelo a cualquiera); para $t = \frac{1}{2}$, $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\vec{u}$.
- c) $D(t) = 2t^2 - t$ es una parábola que se abre hacia arriba (coeficiente principal $2 > 0$), así que su mínimo está en el vértice:

$$t_v = -\frac{-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}, \quad D\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$$

El mínimo es $-\frac{1}{8}$, en $t = \frac{1}{4}$. Que sea negativo significa que para valores de t entre 0 y $\frac{1}{2}$ la orientación de $\vec{u}$ a $\vec{v}$ es horaria.

Para el examen: el área es el valor absoluto del determinante, nunca el determinante a secas; por eso en a) aparecen dos ecuaciones. Y el signo de $D(t)$ tiene significado (orientación), así que el mínimo de D puede ser negativo aunque ningún área lo sea.

Resumen

- Orden 2: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Las barras no son un valor absoluto: el determinante puede ser negativo.
- Orden 3 (Sarrus): se suman la diagonal principal y sus dos triángulos, se restan la diagonal secundaria y sus dos triángulos. Escribe $(\dots) - (\dots)$ y resta al final.
- Sarrus solo sirve para orden 3. Si la matriz es triangular, el determinante es el producto de la diagonal.
- $|\det|$ de dos vectores del plano = área del paralelogramo; la mitad, área del triángulo. El signo indica la orientación. Determinante 0 = vectores paralelos o puntos alineados.
- En el espacio, $|\det|$ de tres vectores = volumen del paralelepípedo; determinante 0 = vectores coplanarios.
- A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$. Con parámetro: calcula $|A|$ en función de m y resuelve $|A| = 0$.

Propiedades de los determinantes

IDEA CLAVE

Las propiedades de los determinantes sirven para dos cosas: calcular determinantes grandes o con letras **sin desarrollarlos a lo bruto**, y responder preguntas del tipo «si $|A| = 3$, ¿cuánto vale $|2A^{-1}|$?», que aparecen casi todos los años en la PAU.

Notación

En este apartado A es una matriz cuadrada de orden n . Escribimos $F_1, F_2, \dots$ para sus filas y $C_1, C_2, \dots$ para sus columnas. Por ejemplo, $|F_1, F_2, F_3|$ es el determinante de la matriz cuyas filas son F_1, F_2 y F_3 . Todas las propiedades se pueden comprobar en orden 2 y 3 con las fórmulas del apartado de determinantes 2×2 y 3×3 ; valen igual para cualquier orden.

La clave de casi todas es una observación sobre la regla de Sarrus: **cada producto contiene exactamente un elemento de cada fila y uno de cada columna**.

Filas y columnas valen lo mismo

PROPIEDAD · DETERMINANTE DE LA TRASPUESTA

$$|A^t| = |A|.$$

Por qué: al trasponer, los seis productos de Sarrus son los mismos (cada uno sigue teniendo un elemento de cada fila y de cada columna), con los mismos signos. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$.

Consecuencia: todo lo que se diga de las filas vale también para las columnas. A partir de aquí hablamos de filas, pero cada propiedad es igual de cierta con columnas.

Propiedades que dan determinante cero

PROPIEDAD · CUÁNDO UN DETERMINANTE VALE 0

$|A| = 0$ si se cumple alguna de estas condiciones:

1. A tiene una fila de ceros.
2. A tiene dos filas iguales.
3. A tiene dos filas proporcionales.
4. Una fila es combinación lineal de otras (por ejemplo, $F_3 = 2F_1 - F_2$).

Por qué:

- Con una fila de ceros, cada producto de Sarrus contiene un cero.
- Si se **intercambian dos filas**, el determinante cambia de signo (la propiedad siguiente). Si las dos filas son iguales, el intercambio deja la matriz igual, así que $|A| = -|A|$, y el único número igual a su opuesto es el 0.
- Las filas proporcionales e iguales se relacionan sacando factor común (lo verás enseguida), y el caso de una combinación lineal se reduce a filas iguales con la propiedad de la suma.

Geométricamente: si una fila depende de las otras, el paralelogramo o el paralelepípedo que forman las filas está aplastado y no tiene área ni volumen.

Cómo afectan las operaciones con filas

PROPIEDAD · INTERCAMBIAR DOS FILAS

Si se intercambian dos filas (o dos columnas), el determinante **cambia de signo**:

$$|F_2, F_1, F_3| = -|F_1, F_2, F_3|.$$

En orden 2 se ve directamente: $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc)$. Es el cambio de orientación del apartado anterior.

PROPIEDAD · MULTIPLICAR UNA FILA POR UN NÚMERO

Si se multiplica **una** fila por un número k , el determinante queda multiplicado por k :

$$|kF_1, F_2, F_3| = k |F_1, F_2, F_3|.$$

Leída al revés: se puede **sacar factor común** de una fila (o de una columna).

Por qué: cada producto de Sarrus contiene exactamente un elemento de esa fila, así que cada producto (y por tanto la suma) queda multiplicado por k . Por ejemplo, sacando 10 de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Así se ve por qué dos filas proporcionales dan 0: si $F_2 = kF_1$, se saca k y quedan dos filas iguales.

PROPIEDAD · FILA QUE ES UNA SUMA

Si una fila es suma de dos, el determinante se descompone en suma de dos determinantes (las demás filas no cambian):

$$|F_1 + F'_1, F_2, F_3| = |F_1, F_2, F_3| + |F'_1, F_2, F_3|.$$

Por qué: cada producto de Sarrus tiene un único factor de esa fila, y $(x + x') \cdot y \cdot z = xyz + x'yz$. Cuidado: esto se hace **fila a fila**. En general $|A + B| \neq |A| + |B|$.

PROPIEDAD · SUMAR A UNA FILA UN MÚLTIPLO DE OTRA

Si a una fila se le suma otra fila multiplicada por un número, **el determinante no cambia**:

$$|F_1, F_2 + kF_1, F_3| = |F_1, F_2, F_3|.$$

Por qué: por la propiedad de la suma, el determinante de la izquierda es $|F_1, F_2, F_3| + |F_1, kF_1, F_3|$, y el segundo sumando es 0 porque tiene dos filas proporcionales.

Esta es la propiedad que más se usa: permite **hacer ceros** como en el método de Gauss sin cambiar el determinante. Resumen de las operaciones elementales:

Operación	Efecto en el determinante
$F_i \leftrightarrow F_j$ (intercambiar)	cambia de signo
$F_i \rightarrow kF_i$ (multiplicar una fila)	queda multiplicado por k
$F_i \rightarrow F_i + kF_j$ (con $j \neq i$)	no cambia

Un error frecuente es hacer $F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1$ y creer que el determinante no cambia: al multiplicar F_2 por 2, el determinante se ha multiplicado por 2.

Determinante de una matriz triangular y cómo hacer ceros

PROPIEDAD · MATRIZ TRIANGULAR

El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) de cualquier orden es el **producto de los elementos de la diagonal principal**. En particular, $|I| = 1$.

Por qué: cualquier producto con un elemento de cada fila y de cada columna, salvo el de la diagonal, tiene que «pasar» por debajo (o por encima) de la diagonal y recoger algún cero.

MÉTODO · CALCULAR UN DETERMINANTE HACIENDO CEROS

1. Elige como pivote un elemento sencillo (mejor un 1) de la primera columna; si no está arriba, intercambia filas y **cambia el signo**.
2. Con operaciones $F_i \rightarrow F_i + kF_1$ (que no cambian el determinante) haz ceros debajo del pivote.
3. Repite con la segunda columna y las filas de debajo, y así sucesivamente, hasta llegar a una matriz triangular.
4. El determinante es el producto de la diagonal, corregido por los intercambios (signo) y por los factores que hayas sacado.

Es el procedimiento natural para orden 4. Más adelante lo combinarás con el desarrollo por adjuntos: se hacen ceros en una fila o columna y se desarrolla por ella.

Producto, múltiplo e inversa

PROPIEDAD · DETERMINANTE DE UN PRODUCTO

Si A y B son cuadradas del mismo orden,

$$|AB| = |A| |B|.$$

En consecuencia, $|A^n| = |A|^n$ y $|AB| = |BA|$ aunque $AB \neq BA$.

La intuición viene de la geometría: una matriz 2×2 M transforma el cuadrado unidad en el paralelogramo de lados $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (sus columnas), cuya área es $|\det M|$. Por eso **una matriz multiplica las áreas por $|\det M|$** (y los volúmenes, en orden 3). Aplicar primero B y luego A (la matriz AB) multiplica las áreas primero por un factor y después por el otro. La demostración general no se pide en el curso; sí se pide usar la propiedad.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tienen $|A| = 5$ y $|B| = 2$, y $AB = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$ tiene determinante $49 - 39 = 10 = 5 \cdot 2$.

PROPIEDAD · DETERMINANTE DE UN MÚLTIPLO

Si A es cuadrada de orden n y k es un número,

$$|kA| = k^n |A|.$$

Por qué: kA es A con **todas** sus filas multiplicadas por k ; cada una de las n filas aporta un factor k . Por ejemplo, si A es 3×3 con $|A| = 2$, entonces $|2A| = 2^3 \cdot 2 = 16$, no 4.

PROPIEDAD · DETERMINANTE DE LA INVERSA

Si A tiene inversa, entonces $|A| \neq 0$ y

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Por qué: de $AA^{-1} = I$ y la propiedad del producto, $|A| |A^{-1}| = |I| = 1$. Esto prueba también la mitad del teorema de existencia de la inversa: si $|A| = 0$, el producto no podría valer 1, así que A no tiene inversa.

Con estas propiedades se responden preguntas sin conocer la matriz. Si A es 3×3 con $|A| = 5$:

$$|A^t A| = 5 \cdot 5 = 25, \quad |A^{-1}| = \frac{1}{5}, \quad |2A^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5}, \quad |A^3| = 125.$$

Determinantes que se factorizan

Cuando un determinante tiene letras, hacer ceros y sacar factor común suele dar el resultado **ya factorizado**, que es lo que se necesita para resolver $|A| = 0$. Dos estructuras típicas:

Todas las filas suman lo mismo. Se suman todas las columnas a la primera ($C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$, que no cambia el determinante); la primera columna queda con todos los elementos iguales a esa suma y se saca factor

común. Lo ves en el ejemplo 3.

Determinante de Vandermonde de orden 3.

PROPIEDAD · DETERMINANTE DE VANDERMONDE

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Vale 0 si y solo si dos de los números a, b, c son iguales.

Demostración (con columnas): hacemos $C_2 \rightarrow C_2 - C_1$ y $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$, que no cambian el determinante, y sacamos factor común $b-a$ de C_2 y $c-a$ de C_3 , usando $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}.$$

Por último, $C_3 \rightarrow C_3 - C_2$ deja $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{vmatrix}$, que es triangular y vale $c-b$. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix} = (3-2)(5-2)(5-3) = 6$.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Determinantes sin desarrollar

Calcula los siguientes determinantes usando las propiedades.

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 12 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

a) La segunda fila es el triple de la primera: $F_2 = 3F_1$. Dos filas proporcionales, así que el determinante vale 0.

b) Sacamos factor común 10 de la primera fila y aplicamos Sarrus al determinante que queda:

$$10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10[(20 + 12 + 3) - (36 + 2 + 10)] = 10(35 - 48) = -130.$$

Sacar el 10 primero evita multiplicar números grandes.

c) A simple vista no hay filas proporcionales, pero hacemos $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$ y $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$ (ninguna de las dos cambia el determinante):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

porque quedan dos filas iguales. Dicho de otra forma: $F_3 = 2F_2 - F_1$, una fila es combinación lineal de las otras.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Un determinante de orden 4 haciendo ceros

Calcula el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Sarrus no sirve en orden 4. Hacemos ceros hasta llegar a una matriz triangular.

1. **Primera columna.** El pivote es el 1 de arriba. Con $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \rightarrow F_3 + F_1$ y $F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1$ (no cambian el determinante):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. **Segunda columna.** El pivote es el 1 de la fila 2. Con $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. **Tercera columna.** Con $F_4 \rightarrow F_4 - F_3$, la última fila queda $(0, 0, 0, 1)$ y la matriz es triangular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

No ha habido intercambios ni hemos multiplicado ninguna fila, así que el determinante es 1.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Factorizar con una estructura: Vandermonde ampliado

Sean a, b y c números reales y

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}.$$

a) Calcula D como producto de factores de grado 1.

b) Halla los valores de x para los que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & x & x^3 \end{vmatrix} = 0$.

a) Desarrollar con Sarrus da seis términos de grado 4 difíciles de factorizar. Es mucho mejor hacer ceros.

1. **Ceros en la primera columna.** $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$ y $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$ (no cambian el determinante):

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}.$$

2. **Factor común.** Usamos $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$ y sacamos $b-a$ de la fila 2; igual con $c-a$ en la fila 3:

$$D = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2 + ab + a^2 \\ 0 & 1 & c^2 + ac + a^2 \end{vmatrix}.$$

3. **Triangular.** $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$ deja en la posición (3,3)

$$(c^2 + ac + a^2) - (b^2 + ab + a^2) = c^2 - b^2 + a(c-b) = (c-b)(c+b+a),$$

y ceros debajo de la diagonal. El determinante triangular vale $1 \cdot 1 \cdot (c-b)(a+b+c)$.

4. **Resultado:**

$$D = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

Comprobación con números: para $a = 0, b = 1, c = 2$, Sarrus da $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6$, y la fórmula da $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$.

b) Es el determinante de a) con $a = 1, b = 2$ y $c = x$:

$$(2-1)(x-1)(x-2)(1+2+x) = (x-1)(x-2)(x+3) = 0 \iff x = 1, x = 2 \text{ o } x = -3.$$

Los dos primeros eran previsible: con $x = 1$ o $x = 2$ la tercera fila coincide con otra. El tercero, $x = -3$, solo aparece gracias a la factorización.

Para el examen: si un determinante con letras se va a igualar a 0, no lo desarrolles: haz ceros y saca factores, y el resultado sale factorizado. Escribe en cada paso qué operación haces ($F_2 \rightarrow F_2 - F_1$) para que

se vea que no cambia el determinante; si sacas un factor como $b - a$, recuerda que debe multiplicar al final.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · CREER QUE $|kA| = k|A|$

Multiplicar una matriz por k multiplica **todas** sus filas, y cada fila aporta un factor k : $|kA| = k^n|A|$. Si A es 3×3 y $|A| = 2$, entonces $|-A| = (-1)^3 \cdot 2 = -2$ y $|3A| = 27 \cdot 2 = 54$. Escribir $|3A| = 6$ es el fallo más repetido en las preguntas de propiedades.

ERROR TÍPICO · OPERACIONES QUE SÍ CAMBIAN EL DETERMINANTE

Al hacer ceros, $F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1$ no cambia el determinante, pero $F_2 \rightarrow 2F_2 - 3F_1$ lo multiplica por 2, y un intercambio de filas le cambia el signo. Si haces Gauss «como en los sistemas», sin anotar estos cambios, el determinante sale mal aunque la matriz triangular final sea correcta.

ERROR TÍPICO · EL DETERMINANTE DE UNA SUMA

$|A + B|$ **no** es $|A| + |B|$: con $A = B = I_2$, $|A + B| = |2I| = 4$, mientras que $|A| + |B| = 2$. La propiedad de la suma solo descompone **una fila** cada vez, con las demás filas iguales.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Calcula los siguientes determinantes sin aplicar la regla de Sarrus, justificando qué propiedad usas.

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

c)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

- a) $F_2 = 2F_1$: dos filas proporcionales, el determinante es 0.
- b) La matriz es triangular inferior: el determinante es el producto de la diagonal, $3 \cdot (-2) \cdot 4 = -24$.
- c) Cada elemento de la tercera columna es la suma de los de las dos primeras: $3 = 1 + 2$, $5 = 4 + 1$, $9 = 2 + 7$. Es decir, $C_3 = C_1 + C_2$. Haciendo $C_3 \rightarrow C_3 - C_1 - C_2$, que no cambia el determinante, queda una columna de ceros, así que el determinante es 0.

EJERCICIO 2

★ Básico

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4$. Calcula, sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p+2a & q+2b & r+2c \\ x & y & z \end{vmatrix}$

- a) Se han intercambiado las dos primeras filas: el determinante cambia de signo y vale -4 .
- b) La primera fila está multiplicada por 3; sacando factor común, $3 \cdot 4 = 12$.
- c) A la segunda fila se le ha sumado el doble de la primera ($F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1$): el determinante no cambia y vale 4. (Con la propiedad de la suma: es 4 más un determinante con dos filas proporcionales, $F_2 = 2F_1$, que vale 0.)

EJERCICIO 3 ★ Básico

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula $|A|$ y $|B|$.
- b) Calcula $|AB|$ sin hacer el producto AB .
- c) Calcula $|A + B|$ y compáralo con $|A| + |B|$.
- d) Calcula $|3A|$.

a) $|A| = 8 - 3 = 5$ y $|B| = 3 - 1 = 2$.

b) $|AB| = |A| |B| = 5 \cdot 2 = 10$. (Haciendo el producto, $AB = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$ y $49 - 39 = 10$.)

c) $A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, así que $|A + B| = 25 - 8 = 17$, mientras que $|A| + |B| = 7$. No hay ninguna propiedad para el determinante de una suma.

d) A es de orden 2: $|3A| = 3^2 \cdot 5 = 45$.

EJERCICIO 4

★★ Medio

Calcula haciendo ceros el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 9 & 5 \end{vmatrix}$$

1. **Ceros en la primera columna** con el pivote 2: $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \rightarrow F_3 + F_1$, $F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1$ (no cambian el determinante):

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. **Ceros en la segunda columna** con el pivote 1 de la fila 2: $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3. La matriz ya es triangular. El determinante es el producto de la diagonal: $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4$.

EJERCICIO 5

★★ Medio

a) Calcula $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{vmatrix}$ sin aplicar la regla de Sarrus.

b) Resuelve la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & x^2 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

a) Es un determinante de Vandermonde con $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ (filas 1, los números y sus cuadrados):

$$(b - a)(c - a)(c - b) = (3 - 2)(5 - 2)(5 - 3) = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6.$$

b) Ahora la estructura está en las **columnas**: la primera es $(1, 1, 1)$, la segunda $(1, x, x^2)$ y la tercera $(1, 3, 9)$, es decir, 1, el número y su cuadrado para los números 1, x y 3. Como $|A^t| = |A|$, es el Vandermonde de 1, x , 3:

$$(x - 1)(3 - 1)(3 - x) = 2(x - 1)(3 - x) = 0 \iff x = 1 \text{ o } x = 3.$$

Tiene sentido: para $x = 1$ las dos primeras columnas son iguales, y para $x = 3$ lo son la segunda y la tercera.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Un programa de diseño gráfico transforma las figuras del plano multiplicando las coordenadas de cada punto por una matriz 2×2 . Al aplicar una matriz M , el área de cualquier figura queda multiplicada por $|\det M|$. Se parte de un logotipo de 12 cm^2 de área.

- a) Se aplica al logotipo la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. ¿Qué área tiene el resultado, en cm^2 ?
- b) Al resultado de a) se le aplica después la matriz $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (la transformación total es NM). ¿Qué área tiene la figura final, en cm^2 ?
- c) Al logotipo original se le aplica la matriz $3I$ (una ampliación de factor 3). ¿Qué área tiene el resultado, en cm^2 ?

- a) $\det M = 6 - 1 = 5$, así que el área queda multiplicada por 5: $12 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$.
- b) Por la propiedad del producto, $\det(NM) = \det N \cdot \det M$. Como $\det N = 1 + 1 = 2$, $\det(NM) = 2 \cdot 5 = 10$ y el área final es $12 \cdot 10 = 120 \text{ cm}^2$. No hace falta calcular la matriz NM : aplicar N a la figura de 60 cm^2 la multiplica por 2.
- c) $3I$ es de orden 2, así que $\det(3I) = 3^2 \cdot |I| = 9$. El área es $12 \cdot 9 = 108 \text{ cm}^2$. Ampliar las longitudes al triple multiplica las áreas por 9, como en la semejanza de figuras.

EJERCICIO 7

★★ Medio

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con $|A| = -2$. Calcula:

- a) $|3A|$
- b) $|A^{-1}|$
- c) $|A^t A^2|$
- d) $|(2A)^{-1}|$

a) $|3A| = 3^3 |A| = 27 \cdot (-2) = -54.$

b) Como $|A| \neq 0$, A tiene inversa y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}.$

c) Por la propiedad del producto y la de la traspuesta: $|A^t A^2| = |A^t| |A|^2 = (-2) \cdot 4 = -8.$

d) Primero $|2A| = 2^3 \cdot (-2) = -16$, y después $|(2A)^{-1}| = \frac{1}{-16} = -\frac{1}{16}.$

EJERCICIO 8

★★★ Dificil

Sea A una matriz cuadrada de orden 3. En cada caso, halla **todos** los valores que puede tomar $|A|$ y justifica que todos ellos se alcanzan con alguna matriz.

- a) $A^2 = A$.
- b) A es ortogonal, es decir, $A^t A = I$.
- c) A es antisimétrica, es decir, $A^t = -A$.
- d) $A^2 = 2A$.

- a) 1. Tomando determinantes en $A^2 = A$: $|A|^2 = |A|$, es decir, $|A|(|A| - 1) = 0$, luego $|A| = 0$ o $|A| = 1$.
2. Los dos valores se alcanzan: $A = O$ cumple $O^2 = O$ con $|O| = 0$, e I cumple $I^2 = I$ con $|I| = 1$.

Valores posibles: $\{0, 1\}$.

- b) 1. $|A^t A| = |A^t| |A| = |A|^2$ y $|I| = 1$, así que $|A|^2 = 1$ y $|A| = \pm 1$.
2. Se alcanzan: I es ortogonal con determinante 1, y $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal (su traspuesta es ella misma y su cuadrado es I) con determinante -1 .

Valores posibles: $\{-1, 1\}$.

- c) 1. Tomando determinantes en $A^t = -A$: $|A^t| = |-A|$. A la izquierda, $|A^t| = |A|$. A la derecha, $-A = (-1)A$ con A de orden 3, así que $|-A| = (-1)^3 |A| = -|A|$.
2. Queda $|A| = -|A|$, es decir, $2|A| = 0$ y $|A| = 0$. La matriz nula es antisimétrica, así que el valor se alcanza.

Valores posibles: $\{0\}$. (En orden par el argumento no funciona, porque $(-1)^n = 1$: por ejemplo $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica con determinante 1.)

- d) 1. Tomando determinantes: $|A|^2 = |2A| = 2^3 |A| = 8|A|$, luego $|A|(|A| - 8) = 0$ y $|A| = 0$ o $|A| = 8$.
2. Se alcanzan: O cumple $O^2 = 2O$, y $2I$ cumple $(2I)^2 = 4I = 2(2I)$ con $|2I| = 8$.

Valores posibles: $\{0, 8\}$.

Para el examen: el paso clave es siempre «tomar determinantes en los dos lados» y aplicar $|AB| = |A||B|$ y $|kA| = k^n |A|$. No divides $|A|^2 = |A|$ entre $|A|$: perderías el valor 0. En d), escribir $|2A| = 2|A|$ daría el valor falso 2.

EJERCICIO 9 ★★★ Difícil

Para cada número real x se considera la matriz de orden 4

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

- a) Calcula $|A|$ en función de x , factorizado.
- b) Halla los valores de x para los que A no tiene inversa.
- c) Para $x = 2$, calcula $|2A|$.

a) **Estructura:** todas las filas suman lo mismo, $x + 3$.

1. Sumamos a la primera columna las otras tres ($C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$), lo que no cambia el determinante. Todos los elementos de la primera columna pasan a valer $x + 3$, y sacamos ese factor común:

$$|A| = (x + 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

2. Restamos la primera fila a cada una de las demás ($F_i \rightarrow F_i - F_1$ para $i = 2, 3, 4$):

$$|A| = (x + 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x - 1 \end{vmatrix}.$$

3. Es triangular: $|A| = (x + 3)(x - 1)^3$.

Comprobación: para $x = 0$ la fórmula da $3 \cdot (-1)^3 = -3$.

- b) A no tiene inversa si y solo si $|A| = 0$: $(x + 3)(x - 1)^3 = 0 \iff x = -3$ o $x = 1$. Con $x = 1$ todas las filas son iguales; con $x = -3$ las cuatro filas suman 0, es decir, las cuatro columnas suman la columna nula y una de ellas es combinación lineal de las demás.
- c) Para $x = 2$, $|A| = 5 \cdot 1^3 = 5$. Como A es de orden 4, $|2A| = 2^4 \cdot 5 = 80$.

Para el examen: cuando todas las filas (o todas las columnas) suman lo mismo, la jugada es siempre la misma: sumar todas las columnas (o filas) a la primera y sacar factor común. Desarrollar un 4×4 con letras a ciegas lleva mucho tiempo y casi nunca termina factorizado. Y en c), ojo: el orden es 4, así que el factor es 2^4 .

EJERCICIO 10

★★★ Dificil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}$ una matriz tal que $|A| = 3$. Calcula, justificando las propiedades que utilices:

a) $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 2a & 2b & 2c \\ u & v & w \end{vmatrix}$ (0,5 puntos)

b) $\begin{vmatrix} a+2p & b+2q & c+2r \\ p & q & r \\ 3u-a & 3v-b & 3w-c \end{vmatrix}$ (0,75 puntos)

c) $|2A^{-1}|$ (0,5 puntos)

d) $|X|$, sabiendo que X es una matriz cuadrada de orden 3 que cumple $AX = 2A^t$. (0,75 puntos)

a) 1. Sacamos factor común 2 de la segunda fila: $2 \begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ u & v & w \end{vmatrix}$.

2. Intercambiamos las dos primeras filas, lo que cambia el signo: $2 \cdot (-|A|) = 2 \cdot (-3) = -6$.

b) 1. $F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2$ no cambia el determinante y deja la primera fila en (a, b, c) .

2. Con la primera fila ya igual a (a, b, c) , $F_3 \rightarrow F_3 + F_1$ tampoco lo cambia y deja la tercera fila en $(3u, 3v, 3w)$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 3u & 3v & 3w \end{vmatrix}.$$

3. Sacamos factor común 3 de la tercera fila: $3|A| = 3 \cdot 3 = 9$.

c) A es de orden 3 y $|A| = 3 \neq 0$, así que existe A^{-1} con $|A^{-1}| = \frac{1}{3}$. Entonces

$$|2A^{-1}| = 2^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

d) Tomamos determinantes en los dos lados de $AX = 2A^t$:

$$|A| |X| = 2^3 |A^t| \iff 3|X| = 8 \cdot 3 \iff |X| = 8.$$

(También se puede despejar $X = 2A^{-1}A^t$ y llegar a $|X| = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 8$.)

Para el examen: cada paso tiene que ir con su propiedad: «intercambio de filas: cambia el signo», « $F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2$: no cambia», «factor común de una fila», « $|kA| = k^n |A|$ ». En b), el orden de las operaciones

importa: primero se arregla la fila 1 y luego se usa para arreglar la 3. El fallo que más puntos cuesta es $|2A^{-1}| = \frac{2}{3}$, olvidando que el 2 multiplica a las tres filas.

Resumen

- $|A^t| = |A|$: todo lo que vale para filas vale para columnas.
- El determinante es 0 si hay una fila nula, dos filas iguales o proporcionales, o una fila combinación lineal de otras.
- Intercambiar dos filas cambia el signo; multiplicar una fila por k multiplica el determinante por k ; sumar a una fila un múltiplo de **otra** no lo cambia.
- Triangular: producto de la diagonal. Para orden 4, haz ceros hasta llegar a una triangular.
- $|AB| = |A||B|$, $|A^n| = |A|^n$, $|kA| = k^n|A|$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. Pero $|A + B| \neq |A| + |B|$.
- Si todas las filas suman lo mismo, suma todas las columnas a la primera y saca factor común.

Vandermonde:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

- Con matrices que cumplen una ecuación ($A^2 = A$, $A^t A = I$, $A^t = -A$), toma determinantes en los dos lados.

Desarrollo de un determinante por adjuntos

IDEA CLAVE

Desarrollar por adjuntos convierte un determinante de orden n en varios de orden $n - 1$. Es la única forma práctica de calcular determinantes de orden 4 en la PAU, y combinada con «hacer ceros» reduce cualquier determinante a uno de orden 3 o 2.

Menor complementario y adjunto

Sarrus solo sirve para orden 3. Para orden 4 o mayor hace falta otra herramienta: reducir el tamaño del determinante quitando una fila y una columna.

DEFINICIÓN · MENOR COMPLEMENTARIO Y ADJUNTO

Sea A una matriz cuadrada de orden n .

- El **menor complementario** del elemento a_{ij} , que escribimos α_{ij} , es el determinante de orden $n - 1$ que queda al **suprimir la fila i y la columna j** de A .
- El **adjunto** de a_{ij} es el menor con un signo:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$$

Por ejemplo, en

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

el menor de $a_{12} = 1$ se obtiene tachando la fila 1 y la columna 2:

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \alpha_{12} = -(-5) = 5.$$

El factor $(-1)^{i+j}$ vale $+1$ si $i + j$ es par y -1 si es impar. No hace falta calcular la potencia: los signos se colocan como en un tablero de ajedrez, empezando por $+$ en la esquina $(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal siempre llevan $+$, porque $i + j = 2i$ es par.

Desarrollo por una fila o una columna

TEOREMA • DESARROLLO POR ADJUNTOS (REGLA DE LAPLACE)

El determinante de una matriz cuadrada es la suma de los productos de los elementos de **una fila cualquiera** por sus adjuntos. Por la fila i :

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

Lo mismo vale para **una columna cualquiera** j : $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$.

En orden 3 puedes comprobarlo con Sarrus. Si agrupas los seis términos de Sarrus según el elemento de la primera fila que contienen,

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

y cada paréntesis es justo el menor α_{11} , α_{12} , α_{13} ; el signo menos del centro es el del tablero. Desarrollar por otra fila o columna es agrupar los mismos seis términos de otra manera, por eso el resultado no cambia.

La consecuencia práctica es clara: **elige la fila o la columna con más ceros**. Cada cero es un adjunto que no hay que calcular. Con la matriz de antes, la segunda fila tiene un cero:

$$|A| = 0 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} = 4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 15 - (-9) = 69.$$

NOTA • POR QUÉ SARRUS NO SIRVE EN ORDEN 4

Un determinante de orden n tiene $n!$ sumandos: 2 en orden 2, 6 en orden 3 y 24 en orden 4. Sarrus da los 6 de orden 3; cualquier «Sarrus» con diagonales en una matriz 4×4 produce solo 8 productos y da un resultado falso. En orden 4 se desarrolla por adjuntos (4 determinantes de orden 3, o menos si hay ceros).

Hacer ceros antes de desarrollar

Si una fila o columna tiene **un solo elemento no nulo**, el desarrollo se reduce a un único término. Y se pueden fabricar ceros con la propiedad vista en las [propiedades de los determinantes](#): **sumar a una fila un múltiplo de otra no cambia el determinante** (lo mismo con columnas).

MÉTODO • CALCULAR UN DETERMINANTE DE ORDEN 4

1. Busca la fila o columna con más ceros, o un elemento igual a 1 o -1 que sirva de pivote.
2. Con operaciones del tipo $F_i \rightarrow F_i + k F_j$ (o con columnas), haz ceros en el resto de la columna (o fila) del pivote. La fila F_j que usas para operar no se toca.
3. Desarrolla por esa columna: queda **un solo adjunto**, de orden 3. No olvides su signo $(-1)^{i+j}$.
4. Calcula el determinante de orden 3 por Sarrus o repite la idea (hacer ceros y desarrollar).
5. Si hay factores comunes en una fila, sácalos antes: los números pequeños evitan errores.

Lo que **no** se puede hacer es sustituir una fila por un múltiplo de ella misma más otra: $F_2 \rightarrow 2F_2 - F_1$ multiplica el determinante por 2. Si lo haces, tienes que dividir al final.

Determinantes con estructura

Algunas matrices tienen una forma que permite calcular el determinante casi sin cuentas.

PROPIEDAD • MATRICES TRIANGULARES Y DIAGONALES

El determinante de una matriz triangular (superior o inferior), y en particular de una diagonal, es el **producto de los elementos de la diagonal principal**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

La razón: desarrollando por la primera columna solo queda a_{11} por un determinante triangular de orden menor, y se repite. Por eso, en el fondo, **hacer ceros es buscar una forma triangular**: es lo que hace el método de Gauss aplicado a un determinante. En particular, $|I_n| = 1$.

Otras dos estructuras frecuentes:

- **Todas las filas suman lo mismo.** Si sumas todas las columnas a la primera, la primera columna queda con ese valor repetido, que sale como factor común; después, restando la primera fila a las demás, aparecen muchos ceros. Así se calcula el determinante con a en la diagonal y b fuera de ella (ejercicios de este apartado).
- **Matrices tridiagonales** (solo hay elementos no nulos en la diagonal y en sus dos paralelas vecinas). Desarrollando por la primera fila, el determinante de orden n se expresa con los de orden $n - 1$ y $n - 2$ del mismo tipo: se obtiene una **fórmula de recurrencia**.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Adjuntos de una fila y desarrollo

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula los adjuntos A_{21} , A_{22} y A_{23} de los elementos de la segunda fila.
- b) Calcula $|A|$ desarrollando por la segunda fila.

- a) Para cada adjunto tachamos la fila 2 y la columna correspondiente, calculamos el menor y le ponemos el signo del tablero. En la fila 2 los signos son $-$, $+$, $-$.

1. A_{21} : tachando fila 2 y columna 1, $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$, y $A_{21} = -\alpha_{21} = 6$.

2. A_{22} : tachando fila 2 y columna 2, $\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 15 = 15$, y $A_{22} = +\alpha_{22} = 15$.

3. A_{23} : tachando fila 2 y columna 3, $\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9$, y $A_{23} = -\alpha_{23} = 9$.

- b) Por la regla de Laplace, multiplicando cada elemento de la fila 2 por su adjunto:

$$|A| = 0 \cdot 6 + 4 \cdot 15 + 1 \cdot 9 = 69$$

Comprobación con Sarrus: $|A| = (0 + 5 + 0) - (-60 + 0 - 4) = 5 + 64 = 69$. El cero de la fila 2 ha ahorrado un adjunto; por eso conviene elegir filas con ceros.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Determinante de orden 4 haciendo ceros

Calcula el determinante

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. **Elegimos pivote.** El elemento $b_{11} = 1$ permite hacer ceros en la primera columna sin fracciones.

2. **Hacemos ceros** (el determinante no cambia, porque a cada fila le sumamos un múltiplo de la primera):

$$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1, F_3 \rightarrow F_3 + F_1, F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1.$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

3. **Desarrollamos por la primera columna.** Solo queda el término de $b_{11} = 1$, con signo +:

$$|B| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

donde hemos sacado factor común 2 de la segunda fila.

4. **Orden 3 por Sarrus:**

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-5 - 5 - 2) - (-10 + 1 + 5) = -12 - (-4) = -8$$

5. **Resultado:** $|B| = 2 \cdot (-8) = -16$.

Hemos pasado de cuatro determinantes de orden 3 (desarrollo directo) a uno solo. El paso 2 es el que ahorra el trabajo.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Determinante 4×4 con parámetro

Se considera la matriz

$$C = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

- Calcula $|C|$ en función de m y exprésalo factorizado.
- Halla los valores de m para los que C no tiene inversa.

a) Desarrollar directamente daría cuatro determinantes de orden 3 con m y un polinomio de grado 4 difícil de factorizar. Mejor buscar la estructura.

- Todas las filas suman lo mismo:** $m + 2$. Sumamos a la primera columna las otras tres ($C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$), lo que no cambia el determinante:

$$|C| = \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 0 & 1 \\ m+2 & m & 1 & 0 \\ m+2 & 1 & m & 1 \\ m+2 & 0 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{vmatrix}$$

El factor $m + 2$ sale de la primera columna porque todos sus elementos lo tienen.

- Hacemos ceros en la primera columna:** $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$, $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$, $F_4 \rightarrow F_4 - F_1$:

$$|C| = (m+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m-1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & -1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m+2) \begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m & 0 \\ -1 & 1 & m-1 \end{vmatrix}$$

(desarrollo por la primera columna: un solo término, con signo +).

- El determinante de orden 3** tiene una fila con un solo elemento no nulo: la segunda. Desarrollando por ella (posición (2, 2), signo +):

$$\begin{vmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 0 & m & 0 \\ -1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ -1 & m-1 \end{vmatrix} = m[(m-1)^2 - 1] = m \cdot m(m-2)$$

usando $(m-1)^2 - 1 = (m-1-1)(m-1+1) = (m-2)m$.

- Resultado:**

$$|C| = m^2(m+2)(m-2)$$

Comprobaciones rápidas. Con $m = 0$ la fórmula da 0, y en efecto las filas 1 y 3 son iguales, $(0, 1, 0, 1)$. Con $m = 2$ también da 0: la primera fila menos la segunda, $(1, -1, -1, 1)$, coincide con la cuarta menos la tercera, así que $F_1 - F_2 - F_4 + F_3 = 0$ y las filas son dependientes.

b) C tiene inversa si y solo si $|C| \neq 0$. Resolvemos $m^2(m+2)(m-2) = 0$: $m = 0$ (raíz doble), $m = 2$ o $m = -2$. C no tiene inversa para $m \in \{-2, 0, 2\}$.

Para el examen: factoriza siempre antes de igualar a cero. Si desarrollas a lo bruto y llegas a $m^4 - 4m^2$, también vale $(m^2(m^2 - 4))$, pero el camino con la suma de columnas es más corto y con menos riesgo. Una comprobación con un valor sencillo del parámetro (aquí $m = 0$) detecta casi cualquier error de signo.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • OLVIDAR EL SIGNO DEL ADJUNTO

El adjunto no es el menor: es el menor con el signo $(-1)^{i+j}$. El fallo más habitual es desarrollar por la segunda fila o columna con los signos $+, -, +$ de la primera, cuando en la segunda empiezan por $-$. Antes de desarrollar, escribe encima de la fila elegida los signos del tablero.

ERROR TÍPICO • APLICAR SARRUS A UN DETERMINANTE DE ORDEN 4

Sarrus solo vale para orden 3. Copiar columnas y multiplicar diagonales en una matriz 4×4 da un número sin sentido (8 productos de los 24 que tiene el determinante). En orden 4 o mayor: hacer ceros y desarrollar por adjuntos.

ERROR TÍPICO • MULTIPLICAR LA FILA QUE SE CAMBIA

La operación $F_i \rightarrow F_i + kF_j$ no cambia el determinante, pero $F_i \rightarrow 2F_i - F_j$ lo multiplica por 2, porque multiplica por 2 la fila que se sustituye. Si quieres evitar fracciones con ese tipo de operaciones, compensa al final dividiendo, o mejor elige como pivote un 1 o un -1 .

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Dada la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula el menor complementario α_{12} y el adjunto A_{12} .
- b) Calcula el adjunto A_{32} .
- c) Calcula $|C|$ desarrollando por la segunda columna.

- a) Tachando la fila 1 y la columna 2: $\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9$. Como $1 + 2 = 3$ es impar, $A_{12} = -9$.
- b) Tachando la fila 3 y la columna 2: $\alpha_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$. Como $3 + 2 = 5$ es impar, $A_{32} = -10$.
- c) La segunda columna es $(-1, 0, 5)$, con signos $-, +, -$. El elemento $c_{22} = 0$ no hace falta calcularlo:

$$|C| = c_{12}A_{12} + c_{22}A_{22} + c_{32}A_{32} = (-1)(-9) + 0 + 5 \cdot (-10) = 9 - 50 = -41$$

Comprobación con Sarrus: $(0 + 8 + 10) - (0 + 60 - 1) = 18 - 59 = -41$.

EJERCICIO 2

★ Básico

Calcula el determinante

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1. **Columna con más ceros.** La segunda columna solo tiene un elemento no nulo, $d_{32} = 3$. Desarrollando por ella queda un único término:

$$|D| = 3 \cdot A_{32} = 3 \cdot (-1)^{3+2} \alpha_{32} = -3 \alpha_{32}$$

2. **El menor** se obtiene tachando la fila 3 y la columna 2:

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-8 + 16 + 3) - (-24 + 8 + 2) = 11 - (-14) = 25$$

3. **Resultado:** $|D| = -3 \cdot 25 = -75$.

El signo de la posición $(3, 2)$ es $-$: olvidarlo daría 75.

EJERCICIO 3 ★ Básico

a) Calcula $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

b) Halla los valores de x para los que $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & x & 0 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 54$.

a) La matriz es triangular superior: el determinante es el producto de la diagonal, $2 \cdot (-3) \cdot 1 \cdot 4 = -24$. (Desarrollando por la primera columna se llega a lo mismo: 2 por un determinante triangular de orden 3, y así sucesivamente.)

b) Ahora la matriz es triangular inferior (todo lo que hay por encima de la diagonal es 0), así que su determinante es $x \cdot 2 \cdot x \cdot 3 = 6x^2$. Imponemos

$$6x^2 = 54 \iff x^2 = 9 \iff x = 3 \text{ o } x = -3$$

EJERCICIO 4

★★ Medio

Calcula, haciendo ceros antes de desarrollar,

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

1. **Pivote** $e_{11} = 1$. Operaciones que no cambian el determinante: $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$, $F_3 \rightarrow F_3 + F_1$, $F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1$:

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -8 \end{vmatrix}$$

2. **Desarrollo por la primera columna** (un solo término, signo +):

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -8 \end{vmatrix}$$

3. **Otra vez ceros**, ahora con el 1 de la posición (1,1): $F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1$, $F_3 \rightarrow F_3 + 2F_1$:

$$|E| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & 7 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 11 \\ 7 & -12 \end{vmatrix} = 72 - 77 = -5$$

El resultado es $|E| = -5$.

EJERCICIO 5

★★ Medio

Resuelve la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

1. **Desarrollo por la primera fila**, que tiene dos ceros. Los signos de la fila 1 son $+$, $-$, $+$, $-$; solo intervienen $a_{11} = x$ (signo $+$) y $a_{14} = 1$ (signo $-$):

$$|A| = x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. **Primer menor**. Desarrollando por la tercera columna (solo el x de la posición $(3, 3)$, signo $+$): $x(x^2 - 1)$.

3. **Segundo menor**. Desarrollando por la primera columna (solo el 1 de la posición $(3, 1)$, signo $+$):

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1.$$

4. **Juntamos:**

$$|A| = x \cdot x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2$$

5. **Ecuación:** $(x^2 - 1)^2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ o } x = -1$.

Fíjate en que no hemos desarrollado $x^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1)$: sacar factor común $x^2 - 1$ deja el resultado factorizado y la ecuación resuelta.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Para cada $n \geq 1$, sea D_n el determinante de orden n con 2 en la diagonal principal, 1 en las dos paralelas inmediatas (justo encima y justo debajo de la diagonal) y 0 en el resto. Por ejemplo,

$$D_1 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

- a) Calcula D_2 y D_3 .
- b) Desarrollando por la primera fila, demuestra que $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ para $n \geq 3$, y úsalo para calcular D_4 .
- c) Calcula D_{10} .

- a) $D_2 = 4 - 1 = 3$. Para D_3 , desarrollando por la primera fila:

$$D_3 = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

- b) En la primera fila de D_n solo hay dos elementos no nulos: 2 en la posición $(1, 1)$ y 1 en la $(1, 2)$.

1. El menor de la posición $(1, 1)$ es el mismo tipo de determinante con una fila y una columna menos: D_{n-1} .
2. El menor de la posición $(1, 2)$ (tachando fila 1 y columna 2) tiene como primera columna $(1, 0, \dots, 0)$; desarrollándolo por esa columna queda $1 \cdot D_{n-2}$.
3. Con los signos $+$ y $-$ de la primera fila:

$$D_n = 2 D_{n-1} - 1 \cdot D_{n-2}$$

Entonces $D_4 = 2D_3 - D_2 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$.

- c) Los valores $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, $D_3 = 4$, $D_4 = 5$ sugieren $D_n = n + 1$. Se confirma con la recurrencia: si $D_{n-1} = n$ y $D_{n-2} = n - 1$, entonces $D_n = 2n - (n - 1) = n + 1$. Aplicándola paso a paso: $D_5 = 6$, $D_6 = 7$, ..., $D_{10} = 11$.

EJERCICIO 7

★★ Medio

Un sistema de cifrado convierte cada bloque de cuatro letras en un vector de cuatro números y lo multiplica por una matriz clave K . Para poder descifrar hace falta multiplicar por K^{-1} , así que una clave solo es válida si $|K| \neq 0$. La empresa usa claves de la forma

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 2 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

con k un número real.

- Calcula $|K|$ en función de k y exprésalo factorizado.
- ¿Para qué valores de k la clave no es válida?
- Calcula $|K|$ para $k = 3$.

1. **Ceros en la primera columna** con el 1 de la posición $(1, 1)$: $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$, $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1$, $F_4 \rightarrow F_4 - F_1$ (no cambian el determinante):

$$|K| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix}$$

- La matriz ha quedado **triangular superior**: el determinante es el producto de la diagonal,

$$|K| = 1 \cdot (k-1)(k-2)(k-1) = (k-1)^2(k-2)$$

- La clave no es válida si $|K| = 0$: $(k-1)^2(k-2) = 0 \iff k = 1$ o $k = 2$. Se ve también en la matriz: con $k = 1$ las filas 1 y 2 son iguales, y con $k = 2$ la fila 3 es el doble de la 1.
- Con $k = 3$: $|K| = (3-1)^2(3-2) = 4 \neq 0$, así que esa clave sí sirve.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

Para números reales a y b se consideran los determinantes de orden 3 y 4 que tienen a en la diagonal principal y b en todas las demás posiciones:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

- Calcula Δ_3 y exprésalo como producto de factores de primer grado en a y b .
- Calcula Δ_4 de la misma forma.
- Para $b = 2$, halla los valores de a que anulan Δ_4 .

1. **Todas las filas suman $a + 2b$.** Sumamos las columnas 2 y 3 a la primera y sacamos ese factor común:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ a+2b & a & b \\ a+2b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$$

2. **Restamos la primera fila a las otras dos** ($F_2 \rightarrow F_2 - F_1, F_3 \rightarrow F_3 - F_1$):

$$\Delta_3 = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2$$

porque la matriz es triangular.

- Igual que antes: las filas suman $a + 3b$; sumando las columnas 2, 3 y 4 a la primera y sacando factor común queda una primera columna de unos, y restando la primera fila a las demás se obtiene una matriz triangular con diagonal 1, $a - b$, $a - b$, $a - b$:

$$\Delta_4 = (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)(a-b)^3$$

- Con $b = 2$: $\Delta_4 = (a+6)(a-2)^3 = 0 \iff a = -6$ o $a = 2$.

Interpretación: con $a = b = 2$ todas las filas son iguales; con $a = -6$ las cuatro filas suman el vector nulo ($-6 + 2 + 2 + 2 = 0$ en cada columna), así que son dependientes.

Para el examen: el patrón general, para orden n , es $(a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$, pero en la PAU hay que deducirlo con las operaciones (sumar columnas, sacar factor, restar filas), no citarlo. Desarrollar por adjuntos a lo bruto lleva a un polinomio de grado 4 en a que luego hay que factorizar: es el camino largo.

EJERCICIO 9

★★★ Difícil

Demostración

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden 3 y sean A_{ij} sus adjuntos. Demuestra que

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$$

es decir, que si multiplicas los elementos de una fila por los adjuntos **de otra fila** y sumas, el resultado es 0.

1. **Una matriz auxiliar.** Sea B la matriz que se obtiene de A sustituyendo la segunda fila por una copia de la primera:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

2. **Sus adjuntos de la fila 2 son los de A .** El adjunto de la posición $(2, j)$ se calcula tachando la fila 2, y el resto de B (filas 1 y 3) coincide con el de A . Por tanto, los adjuntos de la segunda fila de B son A_{21} , A_{22} y A_{23} .

3. **Desarrollamos $|B|$ por su segunda fila**, cuyos elementos son a_{11}, a_{12}, a_{13} :

$$|B| = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$$

4. **Pero B tiene dos filas iguales**, así que $|B| = 0$ (propiedad de los determinantes). Juntando 3 y 4 se obtiene la igualdad pedida.

El mismo razonamiento vale para dos filas distintas cualesquiera, para columnas y para cualquier orden n .

Para el examen: este resultado, junto con la regla de Laplace, es la base de la fórmula de la inversa por adjuntos: el producto de A por la traspuesta de su matriz de adjuntos tiene $|A|$ en la diagonal y 0 fuera de ella. En una demostración, lo que puntúa es justificar el paso 2 (por qué los adjuntos coinciden).

EJERCICIO 10

★★★ Dificil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

- a) Calcula el determinante de A en función de m . (1 punto)
- b) Halla los valores reales de m para los que A no tiene inversa. (0,5 puntos)
- c) Para $m = 2$, calcula $|2A^{-1}|$. (0,5 puntos)
- d) Para $m = 0$, calcula $|A^t A^3|$. (0,5 puntos)

- a) La primera fila solo tiene dos elementos no nulos: $a_{11} = m$ (signo +) y $a_{14} = 1$ (signo -). Desarrollamos por ella:

$$|A| = m \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. El primer menor es triangular inferior: $m \cdot m \cdot m = m^3$.

2. El segundo menor es triangular superior: $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

3. Por tanto

$$|A| = m \cdot m^3 - 1 = m^4 - 1 = (m - 1)(m + 1)(m^2 + 1)$$

- b) A no tiene inversa si y solo si $|A| = 0$. El factor $m^2 + 1$ nunca se anula en los reales, así que $m^4 - 1 = 0 \iff m = 1$ o $m = -1$.
- c) Con $m = 2$, $|A| = 16 - 1 = 15$. Usamos dos propiedades: $|kB| = k^n |B|$ para una matriz de orden n (aquí $n = 4$) y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$:

$$|2A^{-1}| = 2^4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{16}{15}$$

- d) Con $m = 0$, $|A| = 0 - 1 = -1$. Por $|A^t| = |A|$ y $|BC| = |B||C|$:

$$|A^t A^3| = |A| \cdot |A|^3 = (-1)^4 = 1$$

Para el examen: en a) lo que se puntúa es elegir una fila con ceros y poner bien los signos de los adjuntos; el signo $-$ del a_{14} es el error típico (daría $m^4 + 1$, que nunca se anula, y arrastraría b). En c) el fallo habitual es escribir $2|A^{-1}|$ en lugar de $2^4|A^{-1}|$: el 2 multiplica las cuatro filas.

Resumen

- Menor complementario α_{ij} : determinante que queda al tachar la fila i y la columna j . Adjunto: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij}$, con los signos en tablero de ajedrez empezando por $+$.
- Regla de Laplace: $|A|$ es la suma de los elementos de **cualquier** fila o columna por sus adjuntos. Elige la que tenga más ceros.
- Orden 4: haz ceros con $F_i \rightarrow F_i + kF_j$ (no cambia el determinante) hasta dejar un solo elemento en una columna y desarrolla: queda un determinante de orden 3. Sarrus no vale en orden 4.
- Triangular o diagonal: el determinante es el producto de la diagonal. Hacer ceros es acercarse a esa forma.
- Si todas las filas suman lo mismo, suma las columnas a la primera y saca factor común; con a en la diagonal y b fuera sale $(a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}$.
- Con parámetro, deja el resultado factorizado antes de igualar a cero y comprueba con un valor sencillo.
- Elementos de una fila por adjuntos de **otra** fila suman 0.

Rango de una matriz

IDEA CLAVE

El rango de una matriz es el número de filas que aportan información de verdad, es decir, que no se pueden obtener combinando las demás. En la PAU se calcula por menores (con determinantes) o por Gauss, casi siempre con un parámetro, y es la pieza clave del teorema de Rouché para discutir sistemas.

Filas que dependen de otras

DEFINICIÓN · COMBINACIÓN LINEAL Y DEPENDENCIA

Una fila F es **combinación lineal** de las filas $F_1, \dots, F_k$ si existen números $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tales que $F = \alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_k F_k$.

Un conjunto de filas (o de vectores) es **linealmente dependiente** si alguna de ellas es combinación lineal de las demás, y **linealmente independiente** si ninguna lo es.

Por ejemplo, en

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

la tercera fila es $2F_1 + 3F_2 = (2, 0, 4) + (0, 3, -3) = (2, 3, 1)$. Las tres filas son dependientes: la tercera no añade nada que no esté ya en las dos primeras. En cambio F_1 y F_2 son independientes, porque ninguna es múltiplo de la otra (dos filas son dependientes solo si son proporcionales).

Una fila nula siempre hace dependiente al conjunto, porque $\vec{0} = 0 \cdot F_1$.

Qué es el rango

DEFINICIÓN · RANGO

El **rango** de una matriz A , que se escribe $\text{rg}(A)$, es el número máximo de filas de A linealmente independientes.

En el ejemplo anterior $\text{rg}(A) = 2$: hay dos filas independientes y la tercera depende de ellas. La matriz nula tiene rango 0, y cualquier otra tiene rango al menos 1.

TEOREMA · RANGO POR FILAS Y POR COLUMNAS

El número máximo de filas independientes de una matriz coincide con el número máximo de columnas independientes. Por eso

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^t).$$

Es un resultado sorprendente: en A hay una relación entre las filas ($F_3 = 2F_1 + 3F_2$), y el teorema asegura que también hay una entre las columnas. En efecto, $C_3 = 2C_1 - C_2$: $(2, -1, 1) = 2(1, 0, 2) - (0, 1, 3)$.

Consecuencia inmediata: si A es $m \times n$, como mucho tiene m filas independientes y como mucho n columnas independientes, así que

$$\operatorname{rg}(A) \leq \min(m, n).$$

Una matriz 3×4 tiene rango 3 como máximo, y una 2×5 , rango 2 como máximo.

Rango por el método de Gauss

Las operaciones elementales con filas no cambian el rango: intercambiar dos filas, multiplicar una fila por un número **distinto de cero** y sumar a una fila un múltiplo de otra. Las filas nuevas son combinaciones de las antiguas, y al revés, así que el número de filas independientes no varía.

MÉTODO · RANGO POR GAUSS

1. Con operaciones elementales, lleva la matriz a **forma escalonada**: cada fila empieza (tiene su primer elemento no nulo) más a la derecha que la anterior, y las filas nulas quedan abajo.
2. El rango es el **número de filas no nulas** de la forma escalonada.

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. El método de Gauss es el más rápido con matrices numéricas grandes. Con parámetros es delicado, porque al dividir o multiplicar por una expresión como $m - 1$ hay que asegurarse de que no vale cero.

Rango por menores

DEFINICIÓN · MENOR DE ORDEN k

Un **menor de orden k** de una matriz A es el determinante de la submatriz cuadrada $k \times k$ que se forma eligiendo k filas y k columnas de A (no hace falta que sean consecutivas).

En $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, eligiendo las columnas 1 y 3 se obtiene el menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$. Cada elemento no nulo es un menor de orden 1 no nulo.

TEOREMA · RANGO POR MENORES

El rango de A es el orden del mayor menor no nulo de A . Es decir, $\text{rg}(A) = r$ si hay algún menor de orden r distinto de cero y todos los de orden $r + 1$ (si existen) son nulos.

La idea: un determinante es cero si y solo si sus filas son dependientes. Un menor de orden r no nulo garantiza r filas independientes, y si todos los menores de orden $r + 1$ son nulos no se pueden encontrar $r + 1$. En particular, para una matriz **cuadrada** de orden n :

$$\text{rg}(A) = n \iff |A| \neq 0 \iff A \text{ tiene inversa.}$$

Comprobar **todos** los menores de orden $r + 1$ es mucho trabajo (una matriz 3×4 tiene cuatro menores de orden 3 y dieciocho de orden 2). El método del orlado lo reduce.

MÉTODO · MÉTODO DEL ORLADO

1. Busca un menor de orden 2 no nulo (si todos los elementos son cero, el rango es 0; si todos los menores de orden 2 son nulos, el rango es 1). Ya sabes que $\text{rg}(A) \geq 2$.
2. **Orla** ese menor: añádele una fila y una columna de las que no usa, de todas las formas posibles, y calcula esos menores de orden 3.
3. Si alguno es distinto de cero, $\text{rg}(A) \geq 3$ y se repite el proceso con él. Si **todos los orlados** son nulos, el rango es 2 y has terminado.

Funciona porque, si todos los orlados de un menor no nulo son cero, cada fila que falta es combinación lineal de las filas del menor. En una matriz 3×4 , un menor de orden 2 que usa dos filas se orla con la fila restante y con cada una de las dos columnas restantes: hay que mirar **dos** menores de orden 3, no cuatro.

Rango con parámetros

Es la pregunta típica de la PAU: «estudia el rango de A según los valores de m ».

MÉTODO · RANGO DE UNA MATRIZ CON UN PARÁMETRO

1. Calcula el menor de orden máximo que dependa del parámetro (el determinante, si A es cuadrada) y factorízalo.
2. Halla los valores del parámetro que lo anulan: son los **valores críticos**. Para los demás valores, el rango es el máximo posible.
3. Sustituye **cada** valor crítico en la matriz y calcula su rango por separado, buscando un menor no nulo de orden menor u orlando.
4. Resume el resultado por casos: «si $m \neq \dots$, $\text{rg}(A) = \dots$; si $m = \dots$, $\text{rg}(A) = \dots$ ».

En una matriz 3×4 no basta con que un menor de orden 3 se anule para que el rango baje a 2: hay que comprobar que se anulan **todos los orlados** de un menor de orden 2 no nulo (o los cuatro menores de orden 3).

Propiedades del rango

PROPIEDAD · PROPIEDADES DEL RANGO

Sean A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$.

- $\text{rg}(A) \leq \min(m, n)$ y $\text{rg}(A^t) = \text{rg}(A)$.
- Las operaciones elementales con filas (o con columnas) no cambian el rango.
- $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.
- Si A es cuadrada e invertible, $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B)$.

Por qué. Cada fila de AB es una combinación lineal de las filas de B (la fila i de AB es $a_{i1}F_1 + \dots + a_{in}F_n$, con F_j las filas de B), así que AB no puede tener más filas independientes que B . Del mismo modo, cada columna de AB es combinación de las columnas de A , y $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$. Si además A es invertible, $B = A^{-1}(AB)$ y la misma propiedad da $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(AB)$: los dos rangos son iguales. Multiplicar por una matriz invertible no cambia el rango.

Ejemplo de uso: si A es 3×2 y B es 2×3 , el producto AB es 3×3 pero $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A) \leq 2$, así que $|AB| = 0$ **sin hacer ninguna cuenta**.

Rango y dependencia de vectores

Unos vectores son linealmente independientes si y solo si el rango de la matriz que los tiene como filas es igual al número de vectores. Tres vectores de $\mathbb{R}^3$ son independientes si y solo si el determinante que forman no es cero. Y si el rango es menor que el número de vectores, alguno es combinación lineal de los otros: para encontrar los coeficientes se plantea la igualdad coordenada a coordenada.

Más adelante, en el teorema de Rouché-Frobenius, comparar $\text{rg}(A)$ con $\text{rg}(A^*)$ dirá si un sistema tiene solución.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Rango por Gauss y por menores

Calcula el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

por el método de Gauss y comprueba el resultado con el método del orlado.

Por Gauss.

1. Hacemos ceros en la primera columna con $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$ y $F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Las filas 2 y 3 son iguales; con $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Quedan dos filas no nulas en forma escalonada: $\text{rg}(A) = 2$.

Por menores.

1. **Un menor de orden 2 no nulo.** Con las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$. Luego $\text{rg}(A) \geq 2$.

2. **Orlados.** Se añade la fila 3 y cada una de las columnas que faltan (la 3 y la 4):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1 + 8 - 10) - (-4 + 5 - 4) = -3 - (-3) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (6 + 0 + 30) - (12 + 0 + 24) = 36 - 36 = 0$$

3. Los dos orlados son nulos, así que $\text{rg}(A) = 2$. No hace falta calcular los otros dos menores de orden 3.

Los dos métodos coinciden, y además los pasos de Gauss dicen **cuál** es la relación: la fila 3 se anuló con $F_3 - 4F_1 - (F_2 - 2F_1) = F_3 - 2F_1 - F_2$, es decir, $F_3 = 2F_1 + F_2$. Compruébalo: $(2, 4, -2, 6) + (2, 1, 1, 0) = (4, 5, -1, 6)$.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Rango de una matriz cuadrada con un parámetro

Estudia el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro real m .1. **El determinante.** Por Sarrus,

$$|A| = (1 + 1 + m^3) - (m + m + m) = m^3 - 3m + 2.$$

2. **Factorizar.** $m = 1$ es raíz ($1 - 3 + 2 = 0$). Por Ruffini, $m^3 - 3m + 2 = (m - 1)(m^2 + m - 2) = (m - 1)(m - 1)(m + 2)$:

$$|A| = (m - 1)^2(m + 2).$$

3. **Caso general.** Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, $|A| \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 3$.4. **Caso $m = 1$.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: las tres filas son iguales y no nulas, así que todos los menores de orden 2 son nulos y $\text{rg}(A) = 1$.5. **Caso $m = -2$.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. El determinante es 0, pero el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$. (Aquí las tres filas suman la fila nula: $F_3 = -F_1 - F_2$.)**Resumen:** $\text{rg}(A) = 3$ si $m \notin \{1, -2\}$; $\text{rg}(A) = 1$ si $m = 1$; $\text{rg}(A) = 2$ si $m = -2$.Observa que los dos valores críticos dan rangos distintos. Por eso no se puede contestar «si $|A| = 0$, el rango es 2» sin sustituir cada valor.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Matriz 3×4 con dos parámetros

Estudia el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 4 & b & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

según los valores de los parámetros reales a y b .

1. **Cota superior.** A es 3×4 , así que $\text{rg}(A) \leq 3$.

2. **Un menor de orden 2 sin parámetros.** Las filas 1 y 3 no tienen parámetros. Con las columnas 1 y 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0,$$

luego $\text{rg}(A) \geq 2$ para cualesquiera a y b . Elegir un menor sin parámetros evita casos: este no se anula nunca.

3. **Orlados.** Se añade la fila que falta (la 2) y cada una de las columnas que faltan (la 2 y la 4).

- Con la columna 2 (columnas 1, 2 y 3): la columna 2 es el doble de la columna 1, así que el menor es 0 para todos los valores de a y b .
- Con la columna 4 (columnas 1, 3 y 4), por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & b & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (b + 2 + 4a) - (ab + 4 + 2) = b + 4a - ab - 4.$$

4. **Factorizar** agrupando: $b + 4a - ab - 4 = b(1 - a) - 4(1 - a) = (1 - a)(b - 4)$.

5. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 3$ si y solo si algún orlado es no nulo, es decir, si $(1 - a)(b - 4) \neq 0$: si $a \neq 1$ y $b \neq 4$. Si $a = 1$ o $b = 4$, los dos orlados son nulos y $\text{rg}(A) = 2$.

6. **Comprobación de los casos especiales**, para ver de dónde sale la dependencia:

- Si $b = 4$, la fila 2 es $(2, 4, 4, 2) = 2F_3$.
- Si $a = 1$, la columna 4 es igual a la columna 1 y la columna 2 es su doble: solo las columnas 1 y 3 pueden ser independientes, y lo son.

Resumen: $\text{rg}(A) = 2$ si $a = 1$ o $b = 4$; $\text{rg}(A) = 3$ en cualquier otro caso.

Para el examen: con dos parámetros, factoriza el menor y escribe la conclusión con «y» y «o» bien puestos: el rango es máximo cuando **todos** los factores son no nulos, y baja en cuanto **uno** se anula. Si usas el orlado,

di explícitamente que el menor de orden 2 no depende de los parámetros y que has calculado todos los orlados; calcular un solo menor de orden 3 y concluir rango 2 no puntúa.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · CONCLUIR QUE EL RANGO ES 2 PORQUE UN MENOR DE ORDEN 3 ES CERO

En una matriz 3×4 hay cuatro menores de orden 3. Que uno valga 0 no dice nada: puede haber otro distinto de cero y el rango ser 3. Para afirmar que el rango es 2 hay que comprobar que son nulos **todos los orlados** de un menor de orden 2 no nulo (o los cuatro menores de orden 3). En una matriz cuadrada, en cambio, sí basta con el determinante.

ERROR TÍPICO · NO SUSTITUIR LOS VALORES CRÍTICOS

Al estudiar el rango con un parámetro, hay quien escribe «si $|A| = 0$, entonces $\text{rg}(A) = 2$ » para todos los valores críticos. Pero cada valor da una matriz distinta, y su rango puede ser 2 o 1 (en el ejemplo de esta página, $m = 1$ da rango 1). Hay que sustituir cada valor en la matriz y estudiar su rango por separado.

ERROR TÍPICO · DIVIDIR POR UNA EXPRESIÓN QUE PUEDE SER CERO EN GAUSS

Al escalar con parámetros, operaciones como $F_2 \rightarrow \frac{1}{m-1}F_2$ o $F_3 \rightarrow (m-1)F_3 - F_2$ solo son válidas si $m-1 \neq 0$. Multiplicar una fila por 0 la borra y cambia el rango. Si tienes que hacerlo, separa antes el caso $m = 1$; o usa menores, que no tienen este problema.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Calcula, por el método de Gauss, el rango de cada matriz.

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

a) 1. $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$ y $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dos filas no nulas: $\text{rg}(B) = 2$.

b) 1. $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1$: la tercera fila pasa a ser $(0, 1, 1, 0)$.

2. $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$: queda $(0, 0, 0, 1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tres filas no nulas en forma escalonada: $\text{rg}(C) = 3$, el máximo posible para una matriz 3×4 .

c) Todas las filas son proporcionales a $(2, 4, -2)$: $F_2 = -\frac{1}{2}F_1$ y $F_3 = \frac{3}{2}F_1$. Con $F_2 \rightarrow 2F_2 + F_1$ y $F_3 \rightarrow 2F_3 - 3F_1$ quedan dos filas nulas, y la primera no lo es: $\text{rg}(D) = 1$.

EJERCICIO 2

★ Básico

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula el menor de orden 2 formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2.
- b) Calcula los dos menores de orden 3 que lo orlan: el de las columnas 1, 2 y 3 y el de las columnas 1, 2 y 4 (con las tres filas).
- c) Deduce el rango de A .

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$

b) Por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 4 + 0) - (0 - 3 + 0) = -3 + 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (4 + 8 + 0) - (6 + 6 + 0) = 12 - 12 = 0$$

- c) El menor de a) es no nulo, así que $\text{rg}(A) \geq 2$. Sus dos orlados son nulos, y por el método del orlado $\text{rg}(A) = 2$; no hace falta calcular los menores de las columnas 1, 3, 4 ni 2, 3, 4. En efecto, la tercera fila es $2F_1 - F_2 = (2, 4, 0, 6) - (0, 1, -1, 2) = (2, 3, 1, 4)$.

EJERCICIO 3

★ Básico

Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$ y $\vec{w} = (2, 5, 1)$.

- a) Calcula el rango del conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ (el de la matriz que los tiene como filas).
- b) Halla los números α y β tales que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

- a) 1. **Determinante** de la matriz con los vectores como filas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 12 + 0) - (-2 + 15 + 0) = 13 - 13 = 0.$$

2. Así que el rango es menor que 3. El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ da rango 2. Los vectores son linealmente dependientes, pero $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son independientes.

- b) Igualamos coordenada a coordenada $(2, 5, 1) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(0, 1, 3)$:

1. Primera coordenada: $2 = \alpha$.

2. Segunda: $5 = 2\alpha + \beta$, luego $\beta = 1$.

3. Tercera (comprobación): $-\alpha + 3\beta = -2 + 3 = 1$. Se cumple.

Por tanto $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$.

EJERCICIO 4

★★ Medio

Estudia el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ 1 & k & k+1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro real k .

1. **Determinante haciendo un cero.** La operación $C_3 \rightarrow C_3 - 3C_1$ no cambia el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & k & k-2 \end{vmatrix} = (k-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} = (k-2)(k-4),$$

desarrollando por la tercera columna (solo queda el elemento $(3,3)$, con signo $+$).

2. **Caso general.** Si $k \neq 2$ y $k \neq 4$, $|A| \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 3$.

3. **Caso $k = 2$.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$: las filas 1 y 3 son iguales, y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Luego $\text{rg}(A) = 2$.

4. **Caso $k = 4$.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$: la fila 2 es el doble de la 1, y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ (filas 1 y 3, columnas 1 y 2). Luego $\text{rg}(A) = 2$.

Resumen: $\text{rg}(A) = 2$ si $k = 2$ o $k = 4$; $\text{rg}(A) = 3$ en otro caso.

EJERCICIO 5

★★ Medio

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 1 & 2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

- a) Halla los valores de m que anulan el menor de orden 3 formado por las columnas 1, 2 y 3.
- b) Estudia el rango de A según los valores de m y justifica que no depende de m .

a) Por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - m + 8) - (2 + 2m - 2) = 9 - m - 2m = 9 - 3m,$$

que se anula solo para $m = 3$.

b) 1. **Un menor de orden 2 sin parámetro:** $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$ (filas 1 y 2, columnas 1 y 2). Así $\operatorname{rg}(A) \geq 2$.

2. **Sus dos orlados** (con la fila 3 y la columna 3 o la 4). El primero es el de a), $9 - 3m$. El segundo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = (m - 3 + 4) - (1 + 6 - 2m) = 3m - 6.$$

3. **Discusión.** El primer orlado solo se anula si $m = 3$, y el segundo solo si $m = 2$. No hay ningún valor de m que anule los dos a la vez, así que siempre hay un menor de orden 3 no nulo: si $m \neq 3$, el primero; si $m = 3$, el segundo vale $3 \neq 0$.

Por tanto $\operatorname{rg}(A) = 3$ para todo m real. Que el menor de a) se anule en $m = 3$ no hace bajar el rango.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Una cooperativa fabrica piensos para ganado a partir de tres sacos base, cuya composición en kilos de proteína, fibra y grasa es: saco $A = (2, 1, 1)$, saco $B = (1, 3, 0)$ y saco $C = (3, 4, 1)$. Mezclar sacos suma sus composiciones.

- Calcula el rango del conjunto $\{A, B, C\}$ y explica qué significa para la cooperativa.
- Un cliente pide un pienso de composición $D = (5, 5, 2)$. Halla cuántos sacos de A y cuántos de B hay que mezclar para obtenerlo; da la respuesta como (sacos de A , sacos de B).
- Otro cliente pide $E = (1, 1, 1)$. Calcula el rango de $\{A, B, E\}$ y deduce si E se puede obtener combinando A y B .

1. Con los sacos como filas:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 0 + 4) - (9 + 0 + 1) = 10 - 10 = 0.$$

- El menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, así que el rango es 2.

Significado: uno de los sacos sobra. En efecto, $C = A + B$: $(2, 1, 1) + (1, 3, 0) = (3, 4, 1)$. Todo lo que se fabrica con A , B y C se puede fabricar solo con A y B .

- Buscamos α y β con $(5, 5, 2) = \alpha(2, 1, 1) + \beta(1, 3, 0)$:

1. Tercera coordenada: $2 = \alpha$.

2. Primera: $5 = 2\alpha + \beta = 4 + \beta$, luego $\beta = 1$.

3. Segunda (comprobación): $\alpha + 3\beta = 2 + 3 = 5$. Se cumple.

Hay que mezclar **2 sacos de A y 1 de B** .

- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6 + 0 + 1) - (3 + 0 + 1) = 7 - 4 = 3 \neq 0$, así que $\text{rg}\{A, B, E\} = 3$. Los tres vectores son independientes: E **no** es combinación lineal de A y B , y no se puede obtener mezclando esos sacos (ni añadiendo C , que es $A + B$).

EJERCICIO 7

★★ Medio

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula $\text{rg}(A)$.
- b) Calcula la matriz $A^t A$ y su determinante.
- c) Calcula $\text{rg}(A^t A)$ y $\text{rg}(AA^t)$, y explica por qué el primero no podía ser 3.

a) El menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y A solo tiene dos filas: $\text{rg}(A) = 2$.

b) A^t es 3×2 y $A^t A$ es 3×3 :

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y por Sarrus, $|A^t A| = (5 + 0 + 0) - (0 + 1 + 4) = 0$.

c) 1. Como $|A^t A| = 0$, el rango es menor que 3; el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ da $\text{rg}(A^t A) = 2$.

2. $AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, con determinante $10 - 4 = 6 \neq 0$: $\text{rg}(AA^t) = 2$.

3. **Por qué no podía ser 3.** Por la propiedad del producto, $\text{rg}(A^t A) \leq \min(\text{rg}(A^t), \text{rg}(A)) = 2$. Así que $|A^t A| = 0$ se sabía antes de calcularlo: un producto 3×3 en el que interviene una matriz de rango 2 nunca es invertible. En cambio AA^t es 2×2 y la cota 2 no impide que sea invertible.

EJERCICIO 8

★★★ Dificil

Se consideran los vectores de $\mathbb{R}^4$, que dependen del parámetro real k ,

$$\vec{u} = (1, 0, 1, 2), \quad \vec{v} = (0, 1, k, 1), \quad \vec{w} = (1, 2, k^2 + 1, k + 2).$$

- Estudia el rango de $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ según los valores de k .
- Para el valor de k en que los vectores son linealmente dependientes, halla α y β tales que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- Para ese mismo valor de k , halla el número p para el que el vector $\vec{z} = (3, 1, p, 7)$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

1. **Matriz y menor de orden 2.** Con los vectores como filas,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & k^2 + 1 & k + 2 \end{pmatrix}.$$

El menor de las filas 1, 2 y columnas 1, 2 es $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, sin parámetro: $\text{rg}(M) \geq 2$ siempre.

2. **Primer orlado** (columnas 1, 2, 3). Con $F_3 \rightarrow F_3 - F_1 - 2F_2$, que no cambia el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 2 & k^2 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2 - 2k \end{vmatrix} = k^2 - 2k = k(k - 2).$$

3. **Segundo orlado** (columnas 1, 2, 4), con la misma operación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k - 2 \end{vmatrix} = k - 2.$$

4. **Discusión.** El rango es 2 solo si los dos orlados son nulos: $k(k - 2) = 0$ y $k - 2 = 0$, es decir, solo si $k = 2$. Para $k = 0$ el primer orlado se anula, pero el segundo vale $-2 \neq 0$, así que el rango sigue siendo 3.

$\text{rg} = 2$ si $k = 2$ y $\text{rg} = 3$ si $k \neq 2$.

- Con $k = 2$: $\vec{v} = (0, 1, 2, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 5, 4)$. De $(1, 2, 5, 4) = \alpha(1, 0, 1, 2) + \beta(0, 1, 2, 1)$:

1. Primera coordenada: $\alpha = 1$. Segunda: $\beta = 2$.

2. Comprobación: tercera, $\alpha + 2\beta = 1 + 4 = 5$; cuarta, $2\alpha + \beta = 2 + 2 = 4$. Se cumplen: $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$. (Era de esperar: la operación $F_3 - F_1 - 2F_2$ de a) anula toda la fila cuando $k = 2$.)

- De $(3, 1, p, 7) = \alpha(1, 0, 1, 2) + \beta(0, 1, 2, 1)$, las dos primeras coordenadas dan $\alpha = 3$ y $\beta = 1$. La cuarta debe cumplirse: $2 \cdot 3 + 1 = 7$. Se cumple. La tercera fija p : $p = \alpha + 2\beta = 3 + 2 = 5$.

Para el examen: cuando un orlado se anula para varios valores (aquí $k = 0$ y $k = 2$), hay que mirar los demás orlados **en esos valores**. Responder «rango 2 para $k = 0$ y $k = 2$ » por haber calculado un solo menor es el error que se quiere detectar con este tipo de enunciado.

EJERCICIO 9

★★★ Difícil

Demostración

- a) Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes. Demuestra que los vectores $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ también son linealmente independientes.
- b) Sean A una matriz 3×2 y B una matriz 2×3 . Demuestra que la matriz AB no tiene inversa.

- a)
1. Sea M la matriz con filas $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Como son independientes, $\text{rg}(M) = 3$ (equivalentemente, $|M| \neq 0$).
 2. La matriz N con filas $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ se obtiene de M con operaciones elementales: $F_2 \rightarrow F_2 + F_1$ (da $\vec{u} + \vec{v}$) y después $F_3 \rightarrow F_3 + F_2$ (da $\vec{w} + \vec{u} + \vec{v}$).
 3. Las operaciones elementales no cambian el rango, así que $\text{rg}(N) = \text{rg}(M) = 3$, y las tres filas de N son independientes. (Con determinantes: sumar a una fila un múltiplo de otra no cambia el determinante, así que $|N| = |M| \neq 0$.)
- b)
1. AB es una matriz cuadrada de orden 3.
 2. Por la propiedad del rango de un producto, $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$, y como A solo tiene 2 columnas, $\text{rg}(A) \leq 2$. Luego $\text{rg}(AB) \leq 2 < 3$.
 3. Una matriz cuadrada de orden 3 tiene inversa si y solo si su rango es 3 (es decir, $|AB| \neq 0$). Como $\text{rg}(AB) \leq 2$, $|AB| = 0$ y AB no tiene inversa.

Para el examen: en estas demostraciones hay que nombrar la propiedad que se usa en cada paso («las operaciones elementales no cambian el rango», « $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$ »). Comprobarlo con unas matrices concretas no demuestra nada. Fíjate en que BA , que es 2×2 , sí puede tener inversa.

EJERCICIO 10

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 2 & m+2 & m \end{pmatrix}$$

- a) Estudia el rango de A según los valores de m . (1 punto)
- b) Para cada valor de m en que $\text{rg}(A) < 3$, expresa la tercera fila como combinación lineal de las dos primeras, $F_3 = \alpha F_1 + \beta F_2$. (0,75 puntos)
- c) Para $m = 0$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula $\text{rg}(AB)$ sin calcular el producto AB . (0,75 puntos)

- a) 1. **Determinante con una operación.** $F_3 \rightarrow F_3 - F_1 - F_2$ no cambia el determinante y deja la tercera fila como $(0, 0, m-1)$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)(m-2).$$

2. **Caso general.** Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$, $|A| \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 3$.

3. **Caso $m = 1$.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, con el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$; $\text{rg}(A) = 2$.

4. **Caso $m = 2$.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, con el menor de filas 1, 2 y columnas 1, 3: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$; $\text{rg}(A) = 2$.

Resumen: $\text{rg}(A) = 2$ si $m = 1$ o $m = 2$, y $\text{rg}(A) = 3$ en otro caso.

- b) En los dos casos F_1 y F_2 son independientes (lo dicen los menores de a)), así que α y β son únicos.
1. $m = 1$: $(2, 3, 1) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 1, 0)$. La tercera coordenada da $\alpha = 1$; la primera, $1 + \beta = 2$, $\beta = 1$; la segunda comprueba: $2 + 1 = 3$. Así $F_3 = F_1 + F_2$.
2. $m = 2$: $(2, 4, 2) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, 2, 0)$. La tercera coordenada da $\alpha = 2$; la primera, $2 + \beta = 2$, $\beta = 0$; la segunda comprueba: $4 + 0 = 4$. Así $F_3 = 2F_1$.
- c) 1. Para $m = 0$, $|A| = (0-1)(0-2) = 2 \neq 0$: A es invertible.
2. Multiplicar por una matriz invertible no cambia el rango: $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B)$ (porque $\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(B)$ y $B = A^{-1}(AB)$ da $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(AB)$).
3. En B , la fila 2 es el doble de la fila 1, y el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (filas 1 y 3, columnas 1 y 2): $\text{rg}(B) = 2$.
Por tanto $\text{rg}(AB) = 2$.

Para el examen: en a) se puntúa el determinante factorizado, el caso general y cada valor crítico con su menor no nulo. En c) el enunciado prohíbe el camino largo: la justificación « A es invertible, luego $\text{rg}(AB) =$

$\text{rg}(B)$ » es la que da los puntos.

Resumen

- El rango $\text{rg}(A)$ es el número máximo de filas linealmente independientes, que coincide con el de columnas: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t) \leq \min(m, n)$.
- Por Gauss: escalona y cuenta las filas no nulas. Las operaciones elementales no cambian el rango (multiplicar una fila solo por números distintos de cero).
- Por menores: el rango es el orden del mayor menor no nulo. Método del orlado: parte de un menor no nulo y orla con las filas y columnas que faltan; si todos los orlados son nulos, ya está.
- Cuadrada de orden n : $\text{rg}(A) = n \iff |A| \neq 0 \iff \text{existe } A^{-1}$.
- Con parámetros: factoriza el menor de orden máximo, halla los valores críticos y estudia **cada uno** sustituyendo en la matriz. En una 3×4 , un menor de orden 3 nulo no basta.
- $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$; si A es invertible, $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B)$.
- Unos vectores son independientes si el rango de la matriz que forman es igual a su número.

Matriz inversa por adjuntos

IDEA CLAVE

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante no es cero, y entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$. Es el método de la PAU para invertir matrices 3×3 , sobre todo cuando hay parámetros, y la herramienta para resolver ecuaciones matriciales.

Cuándo existe la inversa

En el tema 1 viste qué es la matriz inversa: A^{-1} es la matriz que cumple $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Allí la calculabas por Gauss-Jordan y descubrías que no existe cuando el método se atasca. Con determinantes la pregunta «¿tiene inversa?» se responde con un solo número.

TEOREMA · EXISTENCIA DE LA INVERSA

Una matriz cuadrada A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$. Las matrices con inversa se llaman **regulares** (o invertibles) y las de determinante nulo, **singulares**.

Una mitad se ve enseguida: si existe A^{-1} , tomando determinantes en $AA^{-1} = I$ y usando $|AB| = |A||B|$ queda $|A||A^{-1}| = |I| = 1$, así que $|A|$ no puede ser 0. Además sale gratis que

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

La otra mitad (si $|A| \neq 0$ la inversa existe) la da la fórmula de este apartado, que la construye.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa, porque su determinante es $4 - 4 = 0$ (la segunda fila es la mitad de la primera). En cambio $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sí la tiene: su determinante es $6 - 5 = 1$.

La matriz adjunta

Recuerda del desarrollo por adjuntos que el **menor** M_{ij} es el determinante que queda al tachar la fila i y la columna j , y que el **adjunto** es $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Los signos $(-1)^{i+j}$ siguen el tablero de ajedrez:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN · MATRIZ ADJUNTA

La **matriz adjunta** de una matriz cuadrada A , que se escribe $\text{Adj}(A)$, es la matriz que se obtiene sustituyendo cada elemento a_{ij} por su adjunto A_{ij} :

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

En orden 2 todo es inmediato. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, cada menor es un solo número, y

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

NOTA · OTRA NOTACIÓN EN ALGUNOS LIBROS

Algunos libros llaman «adjunta» directamente a la traspuesta de la matriz de adjuntos. Aquí $\text{Adj}(A)$ es la matriz de adjuntos **sin transponer**, que es lo habitual en la PAU. Da igual el orden en que hagas las dos cosas: $\text{Adj}(A)^t = \text{Adj}(A^t)$.

La fórmula de la inversa

TEOREMA · INVERSA POR ADJUNTOS

Si $|A| \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t.$$

Por qué funciona. Calcula el producto $A \cdot \text{Adj}(A)^t$. Su elemento (i, j) es la fila i de A multiplicada por la fila j de $\text{Adj}(A)$ (la traspuesta convierte filas en columnas), es decir, $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3}$.

- Si $i = j$, es el desarrollo de $|A|$ por la fila i : vale $|A|$.
- Si $i \neq j$, es el desarrollo por la fila j de la matriz que resulta de **copiar la fila i encima de la fila j** . Esa matriz tiene dos filas iguales, así que el resultado es 0.

Por tanto $A \cdot \text{Adj}(A)^t = |A| I$, y dividiendo entre $|A|$ (que no es cero) se obtiene la fórmula. Esta identidad es útil por sí misma:

$$A \cdot \text{Adj}(A)^t = \text{Adj}(A)^t \cdot A = |A| I.$$

En orden 2 la fórmula es la que ya conocías: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (se intercambia la diagonal principal y se cambia de signo la secundaria). Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

MÉTODO · INVERSA DE UNA MATRIZ 3×3 POR ADJUNTOS

1. Calcula $|A|$ (Sarrus). Si es 0, la matriz no tiene inversa y has terminado; si no, escribe «como $|A| \neq 0$, existe A^{-1} ».
2. Calcula los nueve menores M_{ij} (determinantes 2×2), fila a fila.
3. Pon los signos del tablero de ajedrez para obtener los adjuntos y escribe $\text{Adj}(A)$.
4. Traspón: $\text{Adj}(A)^t$.
5. Divide entre $|A|$.
6. Comprueba al menos una fila de $A \cdot A^{-1} = I$: es rápido y detecta casi todos los errores de signo.

Adjuntos o Gauss-Jordan

Los dos métodos dan la misma inversa (es única). Elige según la matriz:

	Adjuntos	Gauss-Jordan
Cuentas en 3×3	un determinante 3×3 y nueve 2×2	unas seis operaciones con filas de longitud 6
Con parámetros	muy cómodo: cada adjunto es un polinomio y $ A $ dice para qué valores existe	incómodo: hay que dividir por expresiones que pueden ser cero
En 4×4	dieciséis determinantes 3×3: muy largo	lo más práctico
Errores típicos	signos de los adjuntos, olvidar transponer	errores de arrastre en las operaciones

En la PAU, para 3×3 se usan casi siempre los adjuntos, porque el determinante hace falta de todos modos para justificar que la inversa existe.

Propiedades de la adjunta

Todas salen de la identidad $A \cdot \text{Adj}(A)^t = |A| I$. Sea A cuadrada de orden n con $|A| \neq 0$.

PROPIEDAD · DETERMINANTE DE LA ADJUNTA

$$|\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$$

Tomando determinantes en $A \cdot \text{Adj}(A)^t = |A| I$: a la izquierda queda $|A| \cdot |\text{Adj}(A)|$ (el determinante no cambia al transponer) y a la derecha $|A|^n$, porque $|A| I$ es la identidad multiplicada por un número y $|kI_n| = k^n$. Dividiendo entre $|A|$ se obtiene la fórmula. En orden 3: $|\text{Adj}(A)| = |A|^2$. Por ejemplo, si $|A| = -3$ en orden 3, $|\text{Adj}(A)| = 9$.

Otras consecuencias útiles:

- $\text{Adj}(A)^t = |A| A^{-1}$. Si te dan la adjunta y el determinante, tienes la inversa.
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ y $|kA^{-1}| = \frac{k^n}{|A|}$.
- Si A tiene elementos enteros y $|A| = \pm 1$, la inversa también tiene elementos enteros (los adjuntos son enteros y se divide entre ± 1).

La inversa a partir de una relación

A veces se sabe que A cumple una igualdad polinómica, por ejemplo $A^2 = A + I$. Entonces no hace falta ningún determinante: se busca escribir $A \cdot (\text{algo}) = I$.

$$A^2 = A + I \iff A^2 - A = I \iff A(A - I) = I$$

y como A conmuta con $A - I$, también $(A - I)A = I$. Por tanto A tiene inversa y $A^{-1} = A - I$. Un ejemplo es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A + I$, luego $A^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

MÉTODO • INVERSA EN FUNCIÓN DE A

1. Pasa a un lado todos los términos con A y al otro el múltiplo de I : $A^2 - \alpha A = \beta I$.
2. Saca A factor común **por la izquierda**: $A(A - \alpha I) = \beta I$.
3. Si $\beta \neq 0$, divide: $A \cdot \frac{1}{\beta}(A - \alpha I) = I$, luego $A^{-1} = \frac{1}{\beta}(A - \alpha I)$.

Ecuaciones matriciales con adjuntos

Las ecuaciones matriciales se resuelven despejando X con inversas, multiplicando siempre por el mismo lado en los dos miembros:

Ecuación	Despeje	Condición
$AX = B$	$X = A^{-1}B$ (inversa por la izquierda)	$ A \neq 0$
$XA = B$	$X = BA^{-1}$ (inversa por la derecha)	$ A \neq 0$
$AX + B = C$	$X = A^{-1}(C - B)$	$ A \neq 0$
$AX = X + B$	$(A - I)X = B, X = (A - I)^{-1}B$	$ A - I \neq 0$

El último caso es el que más se falla: para sacar X factor común hay que escribir $X = IX$, de modo que $AX - X = (A - I)X$, nunca $(A - 1)X$. Y la matriz que hay que invertir es $A - I$, así que lo que hay que comprobar es $|A - I| \neq 0$.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Inversa de una matriz 3×3 paso a paso

Calcula, si existe, la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinante (Sarrus).

$$|A| = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 2 = 2 + 0 + 2 - 1 - 0 - 0 = 3$$

Como $|A| = 3 \neq 0$, existe A^{-1} .

2. Los nueve menores, tachando fila i y columna j :

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, & M_{12} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, & M_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & M_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, & M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

3. Signos del tablero (+, -, + / -, +, - / +, -, +): cambian de signo M_{12} , M_{21} , M_{23} y M_{32} .

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Trasponer (las filas pasan a columnas):

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Dividir entre $|A| = 3$:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. **Comprobación** de la primera fila de AA^{-1} : la fila $(1, 0, 1)$ de A por las columnas de $\text{Adj}(A)^t$ da $2 + 1 = 3$, $1 - 1 = 0$ y $-1 + 1 = 0$; dividido entre 3, $(1, 0, 0)$, la primera fila de I .

Fíjate en que A no es simétrica: si no hubieras traspuesto, la matriz obtenida no sería la inversa.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Una ecuación matricial con factor común

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que cumple $XA = 2X + B$.

1. **Dimensión de X .** XA tiene sentido si X tiene 3 columnas, y XA debe poder sumarse con B , que es 2×3 . Así que X es 2×3 .

2. **Agrupar X .** Pasamos los términos con X a la izquierda: $XA - 2X = B$. Como $X = XI$, sacamos X factor común **por la izquierda**:

$$X(A - 2I) = B, \quad A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C.$$

3. **¿Existe C^{-1} ?** Por Sarrus, $|C| = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 - 0 = -1 \neq 0$. Entonces, multiplicando por C^{-1} **por la derecha**, $X = BC^{-1}$.

4. **Inversa por adjuntos.** Los menores son

$$M_{11} = 1, \quad M_{12} = 0, \quad M_{13} = -1, \quad M_{21} = 0, \quad M_{22} = -1, \quad M_{23} = 0, \quad M_{31} = -2, \quad M_{32} = 0, \quad M_{33} = 1.$$

Los menores que cambian de signo ($M_{12}, M_{21}, M_{23}, M_{32}$) son ceros, así que $\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$C^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. **Producto.**

$$X = BC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. **Comprobación.** $XC = \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 2-1 \\ 0+1 & 1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.

El orden importa: $C^{-1}B$ ni siquiera se puede calcular (3×3 por 2×3).

Inversa en función de A y ecuación matricial

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcula A^2 y comprueba que $A^2 = A + 2I$.
- Deduce de a) que A es invertible y expresa A^{-1} en función de A y de I . Calcula A^{-1} .
- Resuelve la ecuación $AX = X + B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
- Calcula $|\text{Adj}(A)|$.

- a) El cuadrado.** Cada elemento de la diagonal de A^2 es el producto de una fila por la columna del mismo número, por ejemplo $(0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1) = 2$; cada elemento de fuera, por ejemplo el $(1, 2)$, es $(0, 1, 1) \cdot (1, 0, 1) = 1$. Así

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I.$$

- b) La inversa sin adjuntos.** De $A^2 = A + 2I$ se obtiene $A^2 - A = 2I$, y sacando A factor común,

$$A(A - I) = 2I \iff A \cdot \frac{1}{2}(A - I) = I.$$

Como A y $A - I$ conmutan, también $\frac{1}{2}(A - I)A = I$. Luego A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobación con adjuntos. Por Sarrus, $|A| = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$. Los menores de la diagonal valen

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \text{ y los de fuera } \pm 1; \text{ por ejemplo } A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1. \text{ Sale } \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y,}$$

dividiendo entre 2, la misma matriz.

- c) Despejar.** $AX - X = B$, y escribiendo $X = IX$, $(A - I)X = B$. Hay que invertir $A - I$, y el apartado b) ya lo da hecho: de $A(A - I) = 2I$ se deduce que

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}A.$$

(Si prefieres comprobarlo con determinantes: $|A - I| = 4 \neq 0$.) Por tanto

$$X = (A - I)^{-1}B = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación de la primera fila: AX tiene primera fila $(2 + 1, 1 + 2) = (3, 3)$, y $X + B$ también: $(1 + 2, 3 + 0) = (3, 3)$.

d) Determinante de la adjunta. En orden $n = 3$, $|\text{Adj}(A)| = |A|^2 = 2^2 = 4$. No hace falta calcular la adjunta.

Para el examen: cuando el enunciado da una relación como $A^2 = A + 2I$, se espera que la uses: deducir la inversa sacando factor común y justificar con una frase que A^{-1} existe porque $A \cdot \frac{1}{2}(A - I) = I$. Calcularla por adjuntos es correcto, pero en un apartado que dice «deduce» puede no puntuar entero.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • OLVIDAR TRASPONER LA ADJUNTA

La fórmula es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$, con la traspuesta. Si la matriz no es simétrica, $\frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$ **no** es la inversa, y todo lo que se haga después con ella (una ecuación matricial, por ejemplo) sale mal. La comprobación de una fila de $AA^{-1} = I$ lo detecta en un minuto: hazla siempre.

ERROR TÍPICO • SIGNOS DE LOS ADJUNTOS

El adjunto es $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$: el signo depende de la **posición**, no del signo del menor. Un menor negativo en una posición «-» da un adjunto positivo. Es el error más frecuente al invertir por adjuntos; escribe

primero los nueve menores y después aplica el tablero $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$ de una vez.

ERROR TÍPICO · DESPEJAR EN EL LADO EQUIVOCADO

De $XA = B$ se obtiene $X = BA^{-1}$, no $X = A^{-1}B$: el producto de matrices no es conmutativo, y la inversa tiene que quedar pegada a A . Tampoco se puede «dividir entre A » ni escribir $\frac{B}{A}$. Y en $AX = X + B$ el factor común es $A - I$, no $A - 1$.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

- a) Calcula $|A|$.
- b) Calcula la matriz adjunta $\text{Adj}(A)$.
- c) Calcula A^{-1} .

a) Por Sarrus: $|A| = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1 + 4 = 5$.

b) Los menores, fila a fila:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & M_{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, & M_{13} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, & M_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, & M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Con los signos del tablero:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Como $|A| = 5 \neq 0$, existe la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación de la primera fila de AA^{-1} : $(1, 2, 0)$ por las columnas de $\text{Adj}(A)^t$ da $1 + 4 = 5$, $-2 + 2 = 0$, $2 - 2 = 0$; entre 5, $(1, 0, 0)$.

EJERCICIO 2

★ Básico

Calcula por adjuntos la inversa de la matriz triangular

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Determinante.** El de una matriz triangular es el producto de la diagonal: $|T| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$, así que existe T^{-1} .

2. **Menores.** $M_{11} = 1$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $M_{13} = 0$; $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $M_{22} = 1$, $M_{23} = 0$; $M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$,
 $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$, $M_{33} = 1$.

3. **Adjunta** (signos del tablero): $\text{Adj}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **Inversa**, trasponiendo y dividiendo entre 1:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación de la primera fila de TT^{-1} : $(1, 2, 3)$ por las columnas da 1 , $-2 + 2 = 0$ y $5 - 8 + 3 = 0$.

Observa que la inversa de una triangular superior es también triangular superior, y que como $|T| = 1$ y los elementos son enteros, la inversa tiene elementos enteros.

EJERCICIO 3

★ Básico

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con $|A| = -2$. Calcula:

- a) $|A^{-1}|$
- b) $|\text{Adj}(A)|$
- c) $|3A^{-1}|$
- d) $|\text{Adj}(A)^t \cdot A|$

Como $|A| \neq 0$, A tiene inversa y se pueden usar todas las propiedades.

- a) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$.
- b) En orden $n = 3$, $|\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1} = (-2)^2 = 4$.
- c) Multiplicar una matriz de orden 3 por 3 multiplica cada una de sus tres filas por 3, así que el determinante queda multiplicado por $3^3 = 27$: $|3A^{-1}| = 27 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{2}$.
- d) Por la identidad fundamental, $\text{Adj}(A)^t \cdot A = |A| I = -2I$, cuyo determinante es $(-2)^3 = -8$. También sale como $|\text{Adj}(A)^t| \cdot |A| = 4 \cdot (-2) = -8$.

EJERCICIO 4

★★ Medio

Resuelve la ecuación matricial $AX = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **¿Se puede despejar?** Por Sarrus, $|A| = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 - 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 3 = 6 - 2 - 3 = 1 \neq 0$. Existe A^{-1} y, multiplicando por la izquierda, $X = A^{-1}B$ (una matriz 3×2).

2. **Menores.** $M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$, $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$, $M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$,
 $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

3. **Adjunta e inversa.** Con los signos, $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, que es simétrica (como A), y

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Producto.**

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2+0+1 & 0-3+2 \\ -3+0-2 & 0+6-4 \\ 1+0+1 & 0-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. **Comprobación** de la primera fila de AX : $(2, 1, 0)$ por las columnas de X da $6 - 5 = 1$ y $-2 + 2 = 0$, la primera fila de B .

EJERCICIO 5

★★ Medio

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

- a) Indica la dimensión que debe tener una matriz X que cumpla $XA + B = C$.
- b) Halla X .

a) XA debe sumarse con B , que es 2×3 , así que XA es 2×3 . Para que XA exista, X tiene 3 columnas (tantas como filas de A), y XA tiene tantas filas como X : X es 2×3 .

b) 1. **Despeje.** $XA = C - B$. Si A es invertible, multiplicando por A^{-1} **por la derecha**, $X = (C - B)A^{-1}$.

2. **Determinante.** $|A| = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 2 = 2 + 4 - 1 = 5 \neq 0$.

3. **Adjunta.** Los menores son $M_{11} = 2$, $M_{12} = -2$, $M_{13} = -1$, $M_{21} = 4$, $M_{22} = 1$, $M_{23} = -2$, $M_{31} = 3$, $M_{32} = 2$, $M_{33} = 1$. Con los signos:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Producto.** $C - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ y

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. **Comprobación.** $XA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} = C$.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Para enviar mensajes cifrados, Laura y Pablo numeran las letras del alfabeto español así: A = 1, B = 2, ..., N = 14, Ñ = 15, O = 16, ..., Z = 27. Escriben una palabra de seis letras en una matriz M de dimensión 3×2 , por columnas (las tres primeras letras en la primera columna y las tres siguientes en la segunda), y envían la matriz $E = KM$, donde

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pablo recibe $E = \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 26 & 19 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$.

- Calcula K^{-1} .
- Halla la matriz M .
- ¿Qué palabra ha enviado Laura? (Escríbela en mayúsculas y sin tildes.)

1. $|K| = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$, así que K tiene inversa.
2. Menores: $M_{11} = 0$, $M_{12} = -1$, $M_{13} = -1$, $M_{21} = 1$, $M_{22} = 1$, $M_{23} = 0$, $M_{31} = 1$, $M_{32} = 1$, $M_{33} = 1$. Con los signos, $\text{Adj}(K) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Trasponiendo y dividiendo entre 1:

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- De $E = KM$, multiplicando por K^{-1} por la izquierda, $M = K^{-1}E$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 26 & 19 \\ 31 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 + 31 & -19 + 32 \\ 30 + 26 - 31 & 18 + 19 - 32 \\ -30 + 31 & -18 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 25 & 5 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}$$

- Leyendo por columnas: 5, 25, 1, 13, 5, 14, es decir, E, X, A, M, E, N. La palabra es **EXAMEN**.

Este método funciona porque $|K| = 1$: la inversa tiene elementos enteros y el mensaje descifrado vuelve a ser una matriz de números enteros. Con una clave de determinante 0 el mensaje no se podría descifrar.

EJERCICIO 7

★★ Medio

De una matriz cuadrada A de orden 3 se sabe que $|A| = 2$ y que

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A^{-1} .
- b) Calcula $|\text{Adj}(A)|$ sin desarrollar ningún determinante.
- c) Halla la matriz A .

a) Por la fórmula de la inversa, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) En orden 3, $|\text{Adj}(A)| = |A|^2 = 4$. (Puedes comprobarlo: el determinante de la matriz dada, que es el de $\text{Adj}(A)$ traspuesta, vale 4.)

c) A es la inversa de A^{-1} . Llamemos $N = \text{Adj}(A)^t$, de modo que $A^{-1} = \frac{1}{2}N$ y $A = \left(\frac{1}{2}N\right)^{-1} = 2N^{-1}$.

1. $|N| = 4$, por b).

2. Menores de N : $M_{11} = 2$, $M_{12} = 0$, $M_{13} = 2$, $M_{21} = -2$, $M_{22} = 2$, $M_{23} = 0$, $M_{31} = 0$, $M_{32} = -2$, $M_{33} = 2$

. Con los signos, $\text{Adj}(N) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $N^{-1} = \frac{1}{4} \text{Adj}(N)^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y

$$A = 2N^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Comprobación.** $|A| = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2$, como dice el enunciado, y la primera fila de $A \cdot A^{-1}$ es $\frac{1}{2}(1 + 1, -1 + 1, 1 - 1) = (1, 0, 0)$.

EJERCICIO 8

★★★ Dificil

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Halla los números reales α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
- b) Usando a), justifica que A es invertible y calcula A^{-1} como combinación de A y de I .
- c) Halla los números reales γ y δ tales que $A^3 = \gamma A + \delta I$.

a) 1. El cuadrado.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Igualamos con $\alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & 0 & \alpha \\ \alpha & \alpha + \beta & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$. La posición (1,3) da $\alpha = 3$; la (1,1), $2\alpha + \beta = 4$, luego $\beta = -2$.

3. Comprobamos el resto: las posiciones (2,1) y (2,3) piden $\alpha = 3$, y se cumple; las posiciones (2,2) y (3,3) piden $\alpha + \beta = 1$, y también se cumple; los ceros coinciden. Por tanto $A^2 = 3A - 2I$.

b) De $A^2 = 3A - 2I$: $3A - A^2 = 2I$, y sacando A factor común,

$$A(3I - A) = 2I \iff A \cdot \frac{1}{2}(3I - A) = I.$$

Como A y $3I - A$ conmutan, también el producto en el otro orden es I . Luego A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación con determinantes: desarrollando por la tercera fila, $|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, y la primera fila de AA^{-1} es $\frac{1}{2}(2, 0, -2 + 2) = (1, 0, 0)$.

c) Multiplicamos la relación de a) por A y volvemos a usarla:

$$A^3 = A \cdot A^2 = A(3A - 2I) = 3A^2 - 2A = 3(3A - 2I) - 2A = 7A - 6I.$$

Así $\gamma = 7$ y $\delta = -6$. Comprobación en la posición (1,1): $A^3 = A \cdot A^2$ tiene $(2, 0, 1) \cdot (4, 3, 0) = 8$, y $7 \cdot 2 - 6 = 8$.

Para el examen: la igualdad de matrices de a) da varias ecuaciones; resuelve con dos y **comprueba las demás**, porque si alguna fallara no existirían α y β . En b) hay que escribir explícitamente el producto igual a I ; poner solo la fórmula de A^{-1} sin justificar que existe pierde parte del apartado.

EJERCICIO 9

★★★ Dificil

Demostración

Sea A una matriz cuadrada cuyos elementos son todos números enteros.

- a) Demuestra que si $|A| = 1$ o $|A| = -1$, entonces A tiene inversa y todos los elementos de A^{-1} son enteros.
- b) Demuestra que, recíprocamente, si A tiene inversa y todos los elementos de A^{-1} son enteros, entonces $|A| = \pm 1$.

- a)
- Como $|A| = \pm 1 \neq 0$, A tiene inversa y $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t = \pm \text{Adj}(A)^t$.
 - Cada adjunto $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ es, salvo el signo, un determinante formado con elementos de A . Un determinante se calcula con sumas, restas y productos de sus elementos, así que si estos son enteros el determinante es entero. Por tanto todos los elementos de $\text{Adj}(A)$ son enteros.
 - Multiplicar por ± 1 y trasponer no cambia ese hecho: los elementos de $A^{-1} = \pm \text{Adj}(A)^t$ son enteros.
- b)
- Por el mismo argumento, $|A|$ y $|A^{-1}|$ son números **enteros**, porque las dos matrices tienen elementos enteros.
 - Tomando determinantes en $AA^{-1} = I$: $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$.
 - Dos enteros cuyo producto es 1 son los dos 1 o los dos -1 . Luego $|A| = \pm 1$.

Para el examen: en una demostración, di de qué propiedad sale cada paso («la inversa es $\frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$ », « $|AB| = |A||B|$ »). Comprobarlo con un ejemplo no es una demostración. Esta propiedad explica por qué en un cifrado como el del ejercicio de Laura y Pablo se eligen claves con determinante ± 1 .

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Justifica que A tiene inversa y calcúlala por el método de los adjuntos. (1 punto)
 b) Calcula $|\text{Adj}(A)|$ y $|(2A)^{-1}|$. (0,5 puntos)
 c) Halla la matriz X que verifica $AX + B = A^2$. (1 punto)

- a) 1. **Existencia.** Por Sarrus,

$$|A| = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1.$$

Como $|A| \neq 0$, A tiene inversa.

2. **Menores.**

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & M_{12} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, & M_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, & M_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, & M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

3. **Adjunta, traspuesta e inversa.**

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. **Comprobación** de la primera fila de AA^{-1} : $(1, 0, -1)$ por las columnas da $-1 + 2 = 1$, $1 - 1 = 0$, $-1 + 1 = 0$.

- b) En orden 3, $|\text{Adj}(A)| = |A|^2 = (-1)^2 = 1$. Para la otra: $|2A| = 2^3|A| = -8$, luego $|(2A)^{-1}| = \frac{1}{|2A|} = -\frac{1}{8}$.

- c) 1. **Despeje.** $AX = A^2 - B$ y, multiplicando por A^{-1} por la izquierda,

$$X = A^{-1}(A^2 - B) = A - A^{-1}B.$$

(Fíjate en que $A^{-1}A^2 = A$; no hace falta calcular A^2 .)

2. **El producto $A^{-1}B$.**

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Resultado.**

$$X = A - A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Comprobación** de la primera fila: AX tiene primera fila $(1 - 1, 0, -1 - 1) = (0, 0, -2)$; $A^2 - B$ tiene primera fila $(1, -1, -2) - (1, -1, 0) = (0, 0, -2)$.

Para el examen: en a) la frase «como $|A| \neq 0$, existe A^{-1} » forma parte de la puntuación. En c) se valora el despeje correcto (la inversa multiplicando por la izquierda, en los dos miembros) tanto como las cuentas; si te equivocas en A^{-1} pero despejas bien, conservas la mayor parte del apartado.

Resumen

- A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$; entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.
- $\text{Adj}(A)$ es la matriz de los adjuntos $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, y $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t$: no olvides trasponer.
- Receta 3×3: determinante, nueve menores, signos del tablero, trasponer, dividir y comprobar una fila.
- Identidad clave: $A \cdot \text{Adj}(A)^t = |A| I$. De ella salen $|\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$ y $\text{Adj}(A)^t = |A| A^{-1}$.
- Si A cumple una relación como $A^2 = \alpha A + \beta I$ con $\beta \neq 0$, saca A factor común: $A^{-1} = \frac{1}{\beta} (A - \alpha I)$.
- Ecuaciones: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$; $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$; en $AX = X + B$, el factor común es $A - I$.
- En 3×3 y con parámetros, adjuntos; en 4×4 numéricas, Gauss-Jordan.

Determinantes con parámetros

IDEA CLAVE

Cuando una matriz depende de un parámetro, su determinante es un polinomio en ese parámetro, y sus raíces deciden casi todo: si hay inversa, cuál es el rango y, en el tema siguiente, cómo es un sistema. Este apartado reúne las técnicas para calcular ese polinomio ya factorizado y el problema completo de la PAU: valores con inversa, inversa para un valor y ecuación matricial.

El determinante es un polinomio

Si los elementos de A dependen de m , el determinante $|A(m)|$ es un polinomio en m , porque se calcula con sumas y productos de los elementos. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2).$$

Casi todas las preguntas terminan en resolver $|A(m)| = 0$, así que lo que interesa es obtener el polinomio **factorizado**. Hay dos caminos:

- **Desarrollar** (Sarrus o adjuntos) y factorizar después: sacar factor común, identidades notables, la fórmula de segundo grado o Ruffini.
- **Hacer ceros antes** con las [propiedades de los determinantes](#), de modo que los factores salgan solos. Suele ser más corto y con menos errores.

Para comparar: con $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 2 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$, Sarrus da $m^3 - m^2 - 2m$ y hay que factorizar. En cambio,

desarrollando por la primera columna (que tiene dos ceros) el factor m aparece directamente: $m[(m-1)m-2] = m(m^2 - m - 2)$.

Resolver la ecuación $|A(m)| = 0$

MÉTODO · RESOLVER UNA ECUACIÓN CON UN DETERMINANTE

1. Busca ceros, filas o columnas que se restan bien, o factores comunes de una fila o columna, y úsalos **antes** de desarrollar.
2. Desarrolla y deja el resultado como producto de factores. Si queda un polinomio de grado 3 o más, prueba con Ruffini: las raíces enteras dividen al término independiente.
3. Iguala **cada factor** a cero. Nunca dividas los dos miembros entre una expresión que contiene el parámetro: perderías las soluciones que la anulan.
4. Comprueba al menos una raíz sustituyéndola en la matriz: muchas veces se ve que dos filas se vuelven iguales o proporcionales.

Una pista útil para encontrar raíces sin cuentas: si al dar al parámetro un valor dos filas (o columnas) quedan **iguales o proporcionales**, ese valor es raíz. Y si el determinante es un polinomio de grado n , no puede tener más de n raíces: cuando ya has encontrado n , están todas.

Para qué valores existe la inversa

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante no es cero (lo viste en la [inversa por adjuntos](#)). Por tanto:

PROPIEDAD · INVERSA DE UNA MATRIZ CON PARÁMETRO

$A(m)$ tiene inversa **para todos los valores de m salvo las raíces** de $|A(m)|$. Si el polinomio no tiene raíces reales (por ejemplo, $m^2 + m + 1$), $A(m)$ tiene inversa para todo m .

La respuesta a «¿para qué valores tiene inversa?» es el **complementario** de las soluciones de $|A(m)| = 0$: si las raíces son 1 y 3, la respuesta es «para todo m distinto de 1 y 3», no « $m = 1$ y $m = 3$ ».

Determinante con parámetro y rango

El determinante resuelve también la mitad del estudio del **rango**: para los valores que no lo anulan, el rango de una matriz cuadrada de orden n es n . Para cada raíz hay que sustituir y buscar un menor no nulo de orden menor. Es exactamente el primer paso para discutir un sistema con parámetro.

Ecuaciones con determinantes de orden 3 y 4

Cuando la incógnita se llama x y se pide resolver $D(x) = 0$, el método es el mismo, pero conviene mirar antes la estructura:

- **Filas que solo se diferencian en x .** Restar una fila de otra deja muchos ceros. Por ejemplo, si cada fila repite la anterior cambiando un elemento por x , restando filas consecutivas (de abajo arriba) queda una matriz triangular.
- **Filas que se igualan.** Si para $x = 1$ la primera fila coincide con la segunda, $x = 1$ es solución, sin hacer ninguna cuenta.
- **Desarrollo por una línea con ceros.** En orden 4 hay que reducir a un determinante de orden 3; elige la fila o columna con más ceros, como en el [desarrollo por adjuntos](#).

El problema completo de la PAU

El enunciado típico es: «Se considera la matriz $A(m)$. a) Halla los valores de m para los que A tiene inversa. b) Calcula A^{-1} para $m = \dots$ c) Resuelve la ecuación $AX = B$ para ese valor».

MÉTODO • PROBLEMA PAU DE INVERSA CON PARÁMETRO

1. Calcula $|A(m)|$ factorizado y halla sus raíces. Responde: « A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$, es decir, para $m \neq \dots$ ».
2. Para el valor pedido, comprueba que no es una raíz (si lo fuera, la inversa no existiría) y calcula $|A|$ con ese valor.
3. Calcula la inversa por adjuntos: menores, signos, trasponer y dividir. Comprueba una fila de $AA^{-1} = I$.
4. Despeja la ecuación multiplicando por A^{-1} por el lado correcto: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$; $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$; $AX = X + B \Rightarrow X = (A - I)^{-1}B$.
5. Comprueba el resultado con una fila del producto original.

Sustituye el valor del parámetro **antes** de calcular la inversa: hacer los adjuntos con m y sustituir al final es correcto, pero mucho más largo.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Factorizar sin desarrollar a lo bruto

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 2 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

- a) Calcula $|A|$ y exprésalo como producto de factores de primer grado.
- b) Halla los valores de m para los que A no tiene inversa.
- c) Para $m = 3$, calcula $|A^{-1}|$.

- a) 1. **Elegir la columna.** La primera columna tiene dos ceros. Desarrollando por ella solo queda el término de $a_{11} = m$, con signo +:

$$|A| = m \begin{vmatrix} m-1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m[(m-1)m - 2] = m(m^2 - m - 2).$$

2. **Factorizar el segundo grado.** $m^2 - m - 2 = 0 \iff m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$, es decir, $m = 2$ o $m = -1$. Así $m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$ y

$$|A| = m(m-2)(m+1).$$

3. **Comprobación** con $m = 1$: la fórmula da $1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2$, y la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante $1 \cdot (0 - 2) = -2$.

- b) A no tiene inversa si y solo si $|A| = 0$: $m = 0$, $m = 2$ o $m = -1$. Para cualquier otro valor sí la tiene.
- c) Con $m = 3$, $|A| = 3 \cdot 1 \cdot 4 = 12 \neq 0$, y $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{12}$. No hace falta calcular la inversa.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Una ecuación con un determinante de orden 4

Resuelve la ecuación

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ x & x & x & 3 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0.$$

1. **Ver la estructura.** Cada fila repite la anterior cambiando un elemento más por x . Restando filas consecutivas aparecerán muchos ceros.

2. **Restar de abajo arriba,** para que la fila que se resta sea todavía la original: $F_4 \rightarrow F_4 - F_3$, $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$, $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$. Ninguna de estas operaciones cambia el determinante:

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix}.$$

3. **Matriz triangular.** El determinante es el producto de la diagonal:

$$D(x) = x(x-1)(x-2)(x-3).$$

4. **Soluciones.** Igualando cada factor a cero: $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

5. **Comprobación sin cuentas.** Para $x = 1$ las dos primeras filas son iguales, $(1, 1, 2, 3)$; para $x = 2$, las filas 2 y 3, $(2, 2, 2, 3)$; para $x = 3$, las filas 3 y 4; y para $x = 0$ la primera columna es nula. Las cuatro raíces se explican solas, y un polinomio de grado 4 no puede tener más.

Desarrollar este determinante por adjuntos directamente daría un polinomio de grado 4 que luego habría que factorizar con Ruffini. Si hubieras hecho las restas de arriba abajo ($F_2 - F_1$ primero y después $F_3 - F_2$ con la fila 2 **ya cambiada**), la matriz no quedaría triangular.

Problema PAU: inversa con parámetro y ecuación matricial

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & m & 3 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$$

- Halla los valores de m para los que A no tiene inversa.
- Calcula A^{-1} para $m = 2$.
- Para $m = 2$, resuelve la ecuación $AX = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
- Calcula el rango de A para cada uno de los valores obtenidos en a); da la respuesta en el orden de menor a mayor valor de m .

a) 1. Determinante por Sarrus.

$$|A| = (1 \cdot m \cdot m + 2 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot (-1)) - (0 \cdot m \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot m) = m^2 - (4m - 3) = m^2 - 4m + 3.$$

2. **Raíces.** $m^2 - 4m + 3 = 0 \iff m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$, es decir, $m = 1$ o $m = 3$. Factorizado: $|A| = (m-1)(m-3)$.

3. **Conclusión.** A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$. No tiene inversa para $m = 1$ y $m = 3$; la tiene para cualquier otro valor.

1. **¿Existe?** Para $m = 2$, $|A| = (2-1)(2-3) = -1 \neq 0$. La matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Menores.

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7, & M_{12} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & M_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, & M_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6, & M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2. \end{aligned}$$

3. **Adjunta, traspuesta e inversa.** Con los signos del tablero,

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -6 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. **Comprobación** de la primera fila de AA^{-1} : $(1, 2, 0)$ por las columnas da $-7 + 8 = 1$, $4 - 4 = 0$ y $-6 + 6 = 0$.

- Como A es invertible, multiplicando por A^{-1} **por la izquierda**, $X = A^{-1}B$ (una matriz 3×2):

$$X = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -6 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 + 20 - 12 & -14 - 4 + 18 \\ 4 - 10 + 6 & 8 + 2 - 9 \\ 2 - 5 + 4 & 4 + 1 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobación de la primera fila de AX : $(1, 2, 0)$ por las columnas de X da 1 y 2, la primera fila de B .

d) Para los dos valores $|A| = 0$, así que el rango es menor que 3.

$$1. m = 1: A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0: \text{rg}(A) = 2.$$

$$2. m = 3: A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0: \text{rg}(A) = 2.$$

Para el examen: en a) se puntúa el determinante, las raíces y la frase que relaciona inversa y determinante.

En b) escribe «como $|A| = -1 \neq 0$, existe A^{-1} » antes de calcularla, y no olvides que al dividir entre -1 cambian **todos** los signos. En c) el orden del producto es parte de la nota: BA^{-1} ni siquiera se puede calcular (3×2 por 3×3).

Errores típicos

ERROR TÍPICO • DIVIDIR ENTRE UNA EXPRESIÓN CON EL PARÁMETRO

En $m^3 - m = 0$ es tentador dividir entre m y quedarse con $m^2 - 1 = 0$, pero así se pierde la solución $m = 0$. Lo mismo pasa al «simplificar» $(m - 1)(m + 2) = (m - 1) \cdot 3$ dividiendo entre $m - 1$. Factoriza y anula cada factor: $m(m - 1)(m + 1) = 0$ da $m = 0$, $m = 1$ y $m = -1$.

ERROR TÍPICO • DAR LOS VALORES AL REVÉS

Si $|A| = (m - 1)(m - 3)$ y la pregunta es «¿para qué valores tiene inversa?», la respuesta es $m \neq 1$ y $m \neq 3$. Contestar « $m = 1$ y $m = 3$ » es dar justo los valores para los que **no** la tiene, y en la PAU es un apartado perdido aunque el determinante esté bien. Escribe siempre la frase completa: « A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$, es decir, si $m \neq 1$ y $m \neq 3$ ».

ERROR TÍPICO · DESARROLLAR TODO Y NO SABER FACTORIZAR

Desarrollar un determinante con parámetro a lo bruto suele dar un polinomio de grado 3 o 4 desordenado, con más riesgo de error de signo y difícil de factorizar. Antes de desarrollar, busca ceros, resta filas parecidas o saca factor común. Y comprueba siempre el resultado con un valor sencillo del parámetro ($m = 0$ o $m = 1$): cuesta diez segundos.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 2 \\ 0 & 3 & m \end{pmatrix}$.

- a) Calcula $|A|$ en función de m y factorízalo.
- b) Halla los valores de m para los que A no tiene inversa.

a) Por Sarrus:

$$|A| = (m^2 + 0 + 0) - (0 + 6 + m) = m^2 - m - 6.$$

Las raíces de $m^2 - m - 6$ son $m = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, es decir, 3 y -2 . Así $|A| = (m - 3)(m + 2)$.

- b) A no tiene inversa si y solo si $|A| = 0$: para $m = 3$ y $m = -2$. Comprobación con $m = 3$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, y $F_2 - F_1 = (0, 2, 2)$ es proporcional a F_3 .

EJERCICIO 2

★ Básico

Resuelve las ecuaciones (con x real):

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Primero el determinante, por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x^2 + 2 + 2) - (x + x + 4) = x^2 - 2x.$$

a) $x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \iff x = 0$ o $x = 2$. Para $x = 2$ las dos primeras filas son iguales.

b) $x^2 - 2x = 3 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x - 3)(x + 1) = 0 \iff x = 3$ o $x = -1$. Comprobación: $9 - 6 = 3$ y $1 + 2 = 3$.

EJERCICIO 3

★ Básico

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con k real.

- a) Halla los valores reales de k para los que A no tiene inversa.
- b) Para $k = 1$, calcula $|A^{-1}|$.
- c) Para $k = 1$, calcula $|\text{Adj}(A)|$.

Por Sarrus, $|A| = (1 + k^3 + 0) - (0 + 0 + 0) = 1 + k^3$.

- a) $1 + k^3 = 0 \iff k^3 = -1 \iff k = -1$ (la única raíz cúbica real de -1). Factorizando, $1 + k^3 = (k + 1)(k^2 - k + 1)$, y el segundo factor no tiene raíces reales (discriminante $1 - 4 < 0$). A no tiene inversa solo para $k = -1$.
- b) Para $k = 1$, $|A| = 2$ y $|A^{-1}| = \frac{1}{2}$.
- c) En orden 3, $|\text{Adj}(A)| = |A|^2 = 4$.

EJERCICIO 4

★★ Medio

Se considera el determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

- a) Justifica que $D(x)$ es un polinomio en x e indica su grado.
- b) Halla, sin desarrollar el determinante, todas las soluciones de $D(x) = 0$.
- c) Calcula $D(0)$.
- d) Deduce de lo anterior la expresión de $D(x)$ como producto de factores.

- a) x solo aparece en la primera fila. Desarrollando por ella, $D(x) = 1 \cdot A_{11} + x \cdot A_{12} + x^2 \cdot A_{13} + x^3 \cdot A_{14}$, donde los adjuntos son números (no contienen x). El coeficiente de x^3 es

$$A_{14} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -[(18 + 4 + 3) - (2 + 12 + 9)] = -2 \neq 0,$$

así que $D(x)$ es un polinomio de **grado 3**.

- b) Para $x = 1$, la primera fila es $(1, 1, 1, 1)$, igual a la segunda; para $x = 2$ es $(1, 2, 4, 8)$, igual a la tercera; para $x = 3$, igual a la cuarta. Un determinante con dos filas iguales vale 0, así que $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$ son soluciones. Como D tiene grado 3, no puede tener más de 3 raíces: las soluciones son exactamente 1, 2 y 3.
- c) Con $x = 0$ la primera fila es $(1, 0, 0, 0)$, y desarrollando por ella:

$$D(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 = 12,$$

sacando factor común 2 de la segunda fila y 3 de la tercera (el último determinante ya se calculó en a).

- d) Un polinomio de grado 3 con raíces 1, 2 y 3 es $D(x) = c(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ para algún número c . Con $x = 0$: $D(0) = c \cdot (-1)(-2)(-3) = -6c = 12$, luego $c = -2$:

$$D(x) = -2(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Coincide con a): el coeficiente de x^3 es -2 .

EJERCICIO 5

★★ Medio

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & m & m^2 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula $|A|$ y exprésalo factorizado.
b) Estudia el rango de A según los valores de m .

- a) 1. Hacer ceros con $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$ y $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & m-1 & m^2-1 \end{vmatrix}.$$

2. Sacar factor común $m-1$ de la fila 2 y de la fila 3 (recuerda que $m^2-1 = (m-1)(m+1)$):

$$|A| = (m-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 [(m+1) - 1] = m(m-1)^2.$$

- b) 1. Caso general. Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, $|A| \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 3$.

2. $m = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$: $\text{rg}(A) = 2$.

3. $m = 1$: todos los elementos valen 1; las tres filas son iguales y no nulas: $\text{rg}(A) = 1$.

Resumen: $\text{rg}(A) = 3$ si $m \notin \{0, 1\}$, $\text{rg}(A) = 2$ si $m = 0$ y $\text{rg}(A) = 1$ si $m = 1$. Fíjate en que el factor doble $(m-1)^2$ anuncia que el rango puede bajar más de una unidad, aunque eso hay que comprobarlo siempre en la matriz.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Una aplicación de mensajería cifra cada bloque de un mensaje, escrito como una matriz M de números enteros con 3 filas, multiplicándolo por una clave: $E = KM$, con

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & m & 1 \\ 0 & -3 & m \end{pmatrix},$$

donde m es un número entero que se cambia cada día. Para descifrar hay que calcular $M = K^{-1}E$, y se sabe que si K tiene elementos enteros y $|K| = \pm 1$, entonces K^{-1} también tiene elementos enteros.

- Halla los valores de m para los que K no sirve como clave porque no tiene inversa.
- Halla todos los valores **enteros** de m para los que $|K| = 1$ o $|K| = -1$.
- Para el valor obtenido en b), calcula K^{-1} .

Por Sarrus, $|K| = (m^2 + 0 + 0) - (0 - 3 + 4m) = m^2 - 4m + 3 = (m - 1)(m - 3)$.

- K no tiene inversa si y solo si $|K| = 0$: para $m = 1$ y $m = 3$.
1. $|K| = 1 \iff m^2 - 4m + 2 = 0 \iff m = 2 \pm \sqrt{2}$, que no son enteros.
2. $|K| = -1 \iff m^2 - 4m + 4 = 0 \iff (m - 2)^2 = 0 \iff m = 2$.

El único valor entero es $m = 2$.

- Con $m = 2$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $|K| = -1$.

1. Menores: $M_{11} = 7$, $M_{12} = 8$, $M_{13} = -12$, $M_{21} = 2$, $M_{22} = 2$, $M_{23} = -3$, $M_{31} = 1$, $M_{32} = 1$, $M_{33} = -2$.

2. Con los signos del tablero, $\text{Adj}(K) = \begin{pmatrix} 7 & -8 & -12 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Trasponiendo y dividiendo entre -1 :

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -1 \\ 8 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobación de la primera fila de KK^{-1} : $(1, 1, 0)$ por las columnas da $-7 + 8 = 1$, $2 - 2 = 0$ y $-1 + 1 = 0$. Los elementos son enteros, como se esperaba.

EJERCICIO 7

★★ Medio

Se considera la matriz de orden 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula $|A|$ en función de m .
- b) Halla m para que $|2A^{-1}| = 2$.
- c) Halla el valor real de m para el que $|A^t A^2| = -8$.
- d) Para el valor de m obtenido en b), calcula $|\text{Adj}(A)|$.

- a) Por Sarrus:

$$|A| = (2m - 2 + 0) - (m - 3 + 0) = m + 1.$$

- b) Si $|A| \neq 0$, $|2A^{-1}| = 2^3 |A^{-1}| = \frac{8}{m+1}$. Imponemos $\frac{8}{m+1} = 2$, es decir, $m+1 = 4$ y $m = 3$ (para el que, efectivamente, $|A| = 4 \neq 0$).
- c) Como $|A^t| = |A|$ y el determinante de un producto es el producto de determinantes, $|A^t A^2| = |A|^3 = (m+1)^3$. Imponemos $(m+1)^3 = -8$, luego $m+1 = -2$ (única raíz cúbica real) y $m = -3$.
- d) Con $m = 3$, $|A| = 4$ y, en orden 3, $|\text{Adj}(A)| = |A|^2 = 16$.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

Se considera la matriz

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 4 & 0 & -5 & x \end{pmatrix}$$

- Calcula $D(x) = |A(x)|$ desarrollando por la primera columna.
- Halla todas las soluciones reales de $D(x) = 0$.
- Justifica que, para cada una de esas soluciones, el rango de $A(x)$ es el mismo, y calcúlalo.
- Halla los valores reales de x para los que $|A(x)| = 4$.

- La primera columna tiene dos elementos no nulos: $a_{11} = x$ (signo +) y $a_{41} = 4$ (posición (4, 1), signo $(-1)^5 = -1$).

1. Primer menor:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -5 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 \\ -5 & x \end{vmatrix} = x(x^2 - 5) = x^3 - 5x.$$

2. Segundo menor (tachando fila 4 y columna 1), triangular inferior:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3 = -1.$$

3. Desarrollo:

$$D(x) = x(x^3 - 5x) - 4 \cdot (-1) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Comprobación: con $x = 0$, $D(0) = 4$; y el determinante con $x = 0$, desarrollado por la primera columna, solo tiene el término $-4 \cdot (-1) = 4$.

- Es una ecuación **bicuadrada**. Con $t = x^2$: $t^2 - 5t + 4 = 0 \iff t = 1$ o $t = 4$. Volviendo a x : $x^2 = 1$ da $x = \pm 1$ y $x^2 = 4$ da $x = \pm 2$. Las soluciones son $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$, y $D(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

- Para esos valores $|A(x)| = 0$, así que $\text{rg}(A(x)) \leq 3$.

2. El menor de las filas 1, 2, 3 y las columnas 2, 3, 4 es

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

para cualquier x , porque es triangular con -1 en la diagonal. Luego $\text{rg}(A(x)) \geq 3$.

3. Para las cuatro soluciones, $\text{rg}(A(x)) = 3$. No hace falta sustituir cada valor: el menor no depende de x .

d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 4 \iff x^4 - 5x^2 = 0 \iff x^2(x^2 - 5) = 0$, que da $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{5}$. (Sacando factor común x^2 , no dividiendo: dividir entre x^2 perdería $x = 0$.)

Para el examen: en un determinante de orden 4 lo que se puntúa es elegir la línea con más ceros y poner bien los signos de los adjuntos; el -1 de la posición $(4, 1)$ es el que suele fallar. Cuando hay un menor sin parámetro, úsalo: justifica el rango para todos los valores a la vez.

EJERCICIO 9

★★★ Difícil

Se considera la matriz, que depende de los parámetros reales a y b ,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

- Calcula $|A|$ y exprésalo como producto de dos factores.
- Halla los valores de a para los que A no tiene inversa, cualquiera que sea b .
- Halla los valores de a para los que A tiene inversa, cualquiera que sea b .
- Para $a = 0$ y $b = 1$, resuelve la ecuación $XA = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. **Una resta que saca factor.** $F_1 \rightarrow F_1 - F_2$ no cambia el determinante y deja la primera fila como $(a - 1, 1 - a, 0) = (a - 1)(1, -1, 0)$:

$$|A| = (a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}.$$

2. **El determinante que queda**, desarrollado por la primera fila:

$$1 \cdot (ab - 1) - (-1) \cdot (b - 1) + 0 = ab - 1 + b - 1 = ab + b - 2.$$

3. Por tanto

$$|A| = (a - 1)(ab + b - 2) = (a - 1)[(a + 1)b - 2].$$

- A no tiene inversa si $|A| = 0$. Para que eso pase **para todo** b , el factor que no depende de b debe anularse: $a = 1$. (El otro factor, $(a + 1)b - 2$, no se anula para todo b con ningún valor de a : con $b = 0$ vale -2 .) Con $a = 1$, en efecto, las dos primeras filas son iguales.
- Hace falta que **ningún** factor se anule, sea cual sea b :

1. $a - 1 \neq 0$, es decir, $a \neq 1$.

2. $(a + 1)b - 2 \neq 0$ para todo b . Si $a + 1 \neq 0$, el valor $b = \frac{2}{a+1}$ lo anula, así que no sirve. Si $a + 1 = 0$, el factor vale $0 \cdot b - 2 = -2 \neq 0$ para todo b .

El único valor es $a = -1$, y entonces $|A| = (-2)(-2) = 4$ para cualquier b .

1. **Existencia.** Con $a = 0$ y $b = 1$, $|A| = (0 - 1)(0 + 1 - 2) = 1 \neq 0$, y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. **Despeje.** Multiplicando $XA = B$ por A^{-1} **por la derecha**: $X = BA^{-1}$, de dimensión 2×3 .

3. **Inversa.** Los menores son $M_{11} = -1$, $M_{12} = 0$, $M_{13} = 1$, $M_{21} = 0$, $M_{22} = -1$, $M_{23} = -1$, $M_{31} = 1$, $M_{32} = -1$, $M_{33} = -1$. Con los signos,

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

que es simétrica, y $A^{-1} = \frac{1}{1} \text{Adj}(A)^t = \text{Adj}(A)$.

4. Producto.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -1+3 & 2+1-3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. **Comprobación** de la primera fila de XA : $(1, 2, 0)$ por las columnas de A da 2, 1 y 3, la primera fila de B .

Para el examen: con dos parámetros, «para todo b » y «para algún b » son preguntas distintas. Analiza cada factor por separado: uno que depende solo de a y otro que depende de los dos. El caso $a = -1$, en el que b desaparece del factor, es el que se busca en el apartado c).

EJERCICIO 10

★★★ Dificil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Halla los valores de m para los que A no tiene inversa. (0,5 puntos)
- b) Para $m = 2$, calcula A^{-1} . (0,75 puntos)
- c) Calcula $|A - I|$ en función de m y justifica que $A - I$ tiene inversa para cualquier valor de m . (0,5 puntos)
- d) Para $m = 0$, resuelve la ecuación $AX = X + B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. (0,75 puntos)

a) Por Sarrus:

$$|A| = (0 + 1 + m^2) - (0 + 1 + m) = m^2 - m = m(m - 1).$$

A tiene inversa si y solo si $|A| \neq 0$. No la tiene para $m = 0$ y $m = 1$; la tiene para cualquier otro valor.

b) 1. Para $m = 2$, $|A| = 2 \cdot 1 = 2 \neq 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Menores: $M_{11} = -1$, $M_{12} = 1$, $M_{13} = 2$, $M_{21} = -1$, $M_{22} = -1$, $M_{23} = 0$, $M_{31} = 1$, $M_{32} = -3$, $M_{33} = -2$.

3. Con los signos del tablero y trasponiendo:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Comprobación de la primera fila de AA^{-1} : $(1, 1, 2)$ por las columnas de $\text{Adj}(A)^t$ da $-1 - 1 + 4 = 2$, $1 - 1 + 0 = 0$ y $1 + 3 - 4 = 0$; dividido entre 2, $(1, 0, 0)$.

c) $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y, por Sarrus,

$$|A - I| = (0 + 1 + m^2) - (-m + 0 + 0) = m^2 + m + 1.$$

La ecuación $m^2 + m + 1 = 0$ tiene discriminante $1 - 4 = -3 < 0$: no tiene soluciones reales. Así $|A - I| \neq 0$ para todo m y $A - I$ siempre tiene inversa (de hecho $m^2 + m + 1 > 0$, porque la parábola se abre hacia arriba y no corta el eje).

d) 1. **Despeje.** $AX - X = B$ y, escribiendo $X = IX$, $(A - I)X = B$. Por c), $A - I$ es invertible, y $X = (A - I)^{-1}B$.

2. **La inversa.** Para $m = 0$, $C = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $|C| = 1$. Sus menores son $M_{11} = -1$, $M_{12} = -1$, $M_{13} = 1$, $M_{21} = 0$, $M_{22} = 0$, $M_{23} = -1$, $M_{31} = 1$, $M_{32} = 0$, $M_{33} = 0$, y

$$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \text{Adj}(C)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **Producto.**

$$X = C^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -1+1 \\ 2 & 1 \\ 2-2 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. **Comprobación** con la primera fila: para $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la primera fila de AX es $(1+2, 0+1) = (3, 1)$; la de $X+B$ es $(1+2, 0+1) = (3, 1)$.

Observa que para $m = 0$ la propia A no tiene inversa (por a)), pero la ecuación tiene solución única porque la matriz que hay que invertir es $A - I$, no A .

Para el examen: en d) se valora sacar bien el factor común, $(A - I)X$ y no $(A - 1)X$, y justificar que $A - I$ es invertible antes de usar su inversa: el apartado c) está puesto para eso. Si intentas despejar con A^{-1} , que no existe para $m = 0$, el apartado no puntúa.

Resumen

- $|A(m)|$ es un polinomio en m ; busca ceros, resta filas o saca factor común **antes** de desarrollar para obtenerlo factorizado.
- Para resolver $|A(m)| = 0$, anula cada factor; nunca divides entre una expresión con el parámetro. Ruffini para grado 3 o más (raíces enteras entre los divisores del término independiente).
- Si al dar un valor dos filas se igualan o son proporcionales, ese valor es raíz; un polinomio de grado n tiene como mucho n raíces.
- $A(m)$ tiene inversa para todos los m **salvo** las raíces del determinante; si no hay raíces reales, para todo m .

- Para cada raíz, sustituye y estudia el rango con un menor de orden menor.
- Problema PAU: determinante y raíces, inversa por adjuntos para el valor pedido (comprobando que existe), despeje por el lado correcto y comprobación de una fila.
- En $AX = X + B$ la matriz que hay que invertir es $A - I$, y puede tener inversa aunque A no la tenga.

Problemas de síntesis: determinantes

IDEA CLAVE

Estos problemas combinan los seis apartados del tema con el álgebra de matrices: calcular un determinante con propiedades, decidir si hay inversa, calcularla y resolver una ecuación matricial. En el examen casi nunca aparece una técnica aislada, así que conviene entrenar el encadenamiento.

Problemas de síntesis

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

PROBLEMA 1**★★ Medio**

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula $|A|$ y razona si A tiene inversa.
- b) Calcula A^{-1} mediante la matriz adjunta.
- c) Resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

- a) Desarrollando por la primera columna, que tiene un cero:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0.$$

Como $|A| \neq 0$, A tiene inversa.

- b) La matriz adjunta (la traspuesta de la de adjuntos) es

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

y $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)$:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Como A tiene inversa, multiplicamos por la izquierda: $X = A^{-1}B$.

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 2

★★ Medio

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula $|A|$ haciendo ceros.
- b) Calcula $|\text{Adj}(A)|$.
- c) Calcula $|(2A)^{-1}|$.
- d) Calcula $\text{rg}(A)$.

- a) Hacemos ceros en la primera columna con $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$ y $F_4 \rightarrow F_4 - F_1$ (no cambian el determinante):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Por Sarrus. Términos positivos: $0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot 2 = 0 + 2 - 4 = -2$. Términos negativos: $(-2) \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = -2 + 0 + 1 = -1$. Entonces $|A| = -2 - (-1) = -1$.

- b) En orden $n = 4$, $|\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1} = (-1)^3 = -1$.
- c) Para una matriz de orden 4, $|2A| = 2^4|A| = -16$. Por tanto $|(2A)^{-1}| = \frac{1}{-16} = -\frac{1}{16}$.
- d) Como $|A| \neq 0$ y A es 4×4 , el rango es 4.

PROBLEMA 3

★★ Medio

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, con m real.

- a) Calcula $|A|$ en función de m .
- b) Estudia el rango de A según los valores de m .
- c) Para $m = 1$, calcula A^{-1} .

- a) Por Sarrus: términos positivos $1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot m \cdot m = 1 + m^2$; términos negativos $1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot m + 0 \cdot m \cdot 1 = 1$. Así $|A| = 1 + m^2 - 1 = m^2$.
- b) Si $m \neq 0$, $|A| \neq 0$ y $\text{rg}(A) = 3$. Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $F_1 = F_3$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, luego $\text{rg}(A) = 2$.

- c) Con $m = 1$, $|A| = 1$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Su adjunta (traspuesta de la matriz de adjuntos) es $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Como $|A| = 1$, $A^{-1} = \text{Adj}(A)$. Comprobación: la primera fila de A por la primera columna de A^{-1} da $1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 1$.

PROBLEMA 4

★★ Medio

Recuerda que el área de un triángulo de vértices P, Q, R es $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})|$ y que el volumen del paralelepípedo generado por tres vectores es el valor absoluto del determinante de sus coordenadas.

- a) Calcula el área del triángulo de vértices $P(1, 1), Q(5, 2)$ y $R(2, 6)$.

Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0), \vec{v} = (0, 1, 3)$ y $\vec{w} = (2, 0, k)$, con k real.

- b) Calcula el volumen del paralelepípedo que generan para $k = 1$.
 c) Halla el valor de k para el que los tres vectores están en un mismo plano (volumen cero).
 d) Halla todos los valores reales de k para los que el volumen vale 30.

- a) $\overrightarrow{PQ} = (4, 1)$ y $\overrightarrow{PR} = (1, 5)$. Entonces $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19$ y el área es $\frac{19}{2}$.

- b) Por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix} = (k + 12 + 0) - (0 + 0 + 0) = k + 12.$$

Para $k = 1$ el determinante vale 13, así que el volumen es 13.

- c) Los vectores son coplanarios si y solo si el determinante es 0: $k + 12 = 0$, es decir, $k = -12$.
 d) Volumen 30 significa $|k + 12| = 30$, luego $k + 12 = 30$ o $k + 12 = -30$: $k = 18$ o $k = -42$. Ojo: el volumen es el valor absoluto, por eso hay dos soluciones.

PROBLEMA 5

★★★ Difícil

Sea A una matriz cuadrada real que cumple $A^2 = A$.

a) Demuestra que $|A|$ solo puede valer 0 o 1 y escribe el conjunto de valores posibles.

b) Si A es de orden 2 y tiene inversa, demuestra que $A = I$ y escribe esa matriz.

Se considera la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, que cumple $M^2 = M$.

c) Calcula $\text{rg}(M)$.

d) Sea $B = 2M - I$. Calcula B^2 .

e) Calcula $|B|$.

a) De $A^2 = A$ se obtiene $|A|^2 = |A|$, es decir, $|A|(|A| - 1) = 0$. Luego $|A| \in \{0, 1\}$.

b) Si A tiene inversa, multiplicamos $A^2 = A$ por A^{-1} a la izquierda: $A^{-1}A A = A^{-1}A$, es decir, $A = I$. Para orden 2, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $|M| = -2 + 2 = 0$, así que $\text{rg}(M) < 2$. Como $M \neq O$, $\text{rg}(M) = 1$. (Comprueba que $M^2 = \begin{pmatrix} 4-2 & -4+2 \\ 2-1 & -2+1 \end{pmatrix} = M$.)

d) $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Directamente, $B^2 = \begin{pmatrix} 9-8 & -12+12 \\ 6-6 & -8+9 \end{pmatrix} = I$. En general, si $A^2 = A$, entonces $(2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I = I$.

e) $|B| = -9 + 8 = -1$. Coherente con d): $|B|^2 = |I| = 1$ obliga a $|B| = \pm 1$.

Para el examen: al hablar de determinantes de una igualdad matricial, aplica $|XY| = |X||Y|$; y para «tiene inversa», multiplica por A^{-1} por el lado correcto.

PROBLEMA 6

★★★ Difícil

Sea A una matriz real antisimétrica de orden 3, es decir, $A^t = -A$.

a) Demuestra que $|A| = 0$ y escribe ese valor.

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calcula $\text{rg}(A)$.

c) Halla todos los valores reales de x para los que $A + xI$ no tiene inversa.

a) Como $A^t = -A$ y el orden es 3: $|A^t| = |-A| = (-1)^3|A| = -|A|$. Pero $|A^t| = |A|$. Entonces $|A| = -|A|$, es decir, $|A| = 0$.

b) Como $|A| = 0$, $\text{rg}(A) \leq 2$. El menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$.

c) Por Sarrus:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & x & 3 \\ -2 & -3 & x \end{vmatrix} = (x^3 - 6 + 6) - (-4x - x - 9x) = x^3 + 14x = x(x^2 + 14).$$

No tiene inversa si $x(x^2 + 14) = 0$. Como $x^2 + 14 > 0$ para todo x real, la única solución real es $x = 0$.

Para el examen: la propiedad $|-A| = (-1)^n|A|$ es la clave; anota que el orden es impar.

PROBLEMA 7

★★★ Difícil

Sean a, b, c números reales y $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula A^3 en función de a, b y c .
- b) Calcula $|A|$.
- c) Si $A^3 = I$, $a = 2$ y $c = -4$, halla b .
- d) Con esos valores, demuestra que $A^{-1} = A^2$ y calcula A^{-1} .

a) Calculamos $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \\ 0 & ca & 0 \end{pmatrix}$ y luego

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} = abc I.$$

- b) Por Sarrus solo sobrevive el producto $a_{12}a_{23}a_{31} = abc$; los demás productos de la fórmula valen 0. Entonces $|A| = abc$.
- c) $A^3 = I$ equivale a $abc = 1$. Con $a = 2$ y $c = -4$: $2 \cdot b \cdot (-4) = 1$, luego $b = -\frac{1}{8}$.
- d) De $A^3 = I$ se tiene $A \cdot A^2 = I$, así que $A^{-1} = A^2$ (la inversa existe porque $|A| = abc = 1 \neq 0$). Sustituyendo en A^2 :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{pmatrix},$$

pues $ab = -\frac{1}{4}$, $bc = \frac{1}{2}$ y $ca = -8$.

Para el examen: si te piden la inversa y sabes que $A^3 = I$, no hace falta la fórmula de la adjunta: $A^{-1} = A^2$.

PROBLEMA 8

★★★ Difícil

Sea x un número real y A la matriz de orden 4 con x en la diagonal principal y 1 en el resto de posiciones:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

- Calcula $|A|$ y exprésalo factorizado.
- Halla los valores reales de x para los que A no tiene inversa.
- Calcula $\text{rg}(A)$ para cada uno de esos valores de x .
- Para $x = 2$, calcula $|\text{Adj}(A)|$.

- Sumamos a la primera columna todas las demás ($C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$). Cada elemento de la nueva primera columna vale $x + 3$.
- Sacamos $x + 3$ factor común de esa columna: queda una columna de unos.
- Restamos la primera fila a las otras tres: en la diagonal aparece $x - 1$ y los demás elementos de esas filas son 0:

$$|A| = (x + 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x - 1 \end{vmatrix} = (x + 3)(x - 1)^3.$$

- $|A| = 0 \iff x = -3 \text{ o } x = 1$.
- Para $x = 1$ todos los elementos valen 1: las cuatro filas son iguales y no nulas, $\text{rg}(A) = 1$. Para $x = -3$, el menor de orden 3 de las tres primeras filas y columnas es $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-27 + 1 + 1) - (-3 - 3 - 3) = -25 + 9 = -16 \neq 0$, y como $|A| = 0$, $\text{rg}(A) = 3$.
- Para $x = 2$, $|A| = 5 \cdot 1^3 = 5$. En orden 4, $|\text{Adj}(A)| = |A|^3 = 125$.

Para el examen: al factorizar, anota cada operación entre filas o columnas; una operación con determinante que cambia el valor (multiplicar una fila por un número) hay que compensarla.

PROBLEMA 9

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 cuyas filas son F_1 , F_2 y F_3 , con $|A| = -3$. Sea B la matriz de orden 3 cuyas filas son $2F_1$, $F_2 - F_3$ y $F_1 + F_3$.

- a) Calcula $|B|$. (0,75 puntos)
- b) Calcula $|A^t B^{-1}|$. (0,5 puntos)
- c) Calcula $|\text{Adj}(A) (2A)^{-1}|$. (0,75 puntos)
- d) Calcula $|A^2 B^t|$. (0,5 puntos)

- a) Sacamos el factor 2 de la primera fila y descomponemos la segunda fila en suma:

$$|B| = 2 \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 - F_3 \\ F_1 + F_3 \end{vmatrix} = 2 \left[\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_1 + F_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_1 + F_3 \end{vmatrix} \right].$$

En el segundo determinante, la tercera fila es la suma de las dos primeras: vale 0. En el primero, restamos F_1 a la tercera fila: queda $|F_1, F_2, F_3| = |A|$. Entonces $|B| = 2|A| = -6$.

- b) $|A^t B^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$. (B tiene inversa porque $|B| \neq 0$.)
- c) En orden 3, $|\text{Adj}(A)| = |A|^2 = 9$ y $|(2A)^{-1}| = \frac{1}{2^3|A|} = \frac{1}{-24}$. Entonces

$$|\text{Adj}(A) (2A)^{-1}| = 9 \cdot \left(-\frac{1}{24}\right) = -\frac{3}{8}.$$

- d) $|A^2 B^t| = |A|^2 |B| = 9 \cdot (-6) = -54$.

Para el examen: escribe la propiedad que usas en cada paso (multilineal, producto, traspuesta, inversa, adjunta). Sin eso se pierde la mitad de cada apartado.

PROBLEMA 10

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula $(A - I)^2$. (0,5 puntos)
- b) Deduce que $A^2 = 2A - I$, que A tiene inversa y calcula A^{-1} sin usar la matriz adjunta. (0,5 puntos)
- c) Demuestra que $A^n = nA - (n - 1)I$ para todo entero $n \geq 1$ y calcula A^{10} . (0,75 puntos)
- d) Resuelve la ecuación matricial $AX = B$, con $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (0,75 puntos)

a) $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = O.$$

- b) Desarrollando, $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I = O$, luego $A^2 = 2A - I$. Despejando $I = 2A - A^2 = A(2I - A)$, así que A tiene inversa y

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Además $|A| = 0 + 1 = 1 \neq 0$.)

- c) Sea $N = A - I$, con $N^2 = O$. Como I y N conmutan, el binomio de Newton da $A^n = (I + N)^n = I + nN$, porque todos los términos con N^k , $k \geq 2$, son nulos. Entonces $A^n = I + n(A - I) = nA - (n - 1)I$. Para $n = 10$:

$$A^{10} = 10A - 9I = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -10 & -9 \end{pmatrix}.$$

- d) Multiplicando por la izquierda por A^{-1} :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para el examen: en c) basta con el argumento de $N^2 = O$ o una inducción bien escrita; sin justificar la fórmula solo se puntúa el cálculo de A^{10} .

PROBLEMA 11

★★★ Dificil

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$, con m real.

- Calcula $|A|$ y exprésalo factorizado.
- Estudia el rango de A según m .
- Para $m = 2$, calcula A^{-1} .
- Para $m = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX + X = I$.

- Por Sarrus: $|A| = (m^3 + 1 + 1) - (m + m + m) = m^3 - 3m + 2$. Como $m = 1$ es raíz, dividimos: $m^3 - 3m + 2 = (m - 1)(m^2 + m - 2) = (m - 1)^2(m + 2)$.
- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, $\text{rg}(A) = 3$. Para $m = 1$ todos los elementos valen 1, así que $\text{rg}(A) = 1$. Para $m = -2$, $|A| = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$: $\text{rg}(A) = 2$.
- Para $m = 2$: $|A| = 1 \cdot 4 = 4$. Los adjuntos de la diagonal valen $m^2 - 1 = 3$ y los demás $-(m - 1) = -1$; la matriz es simétrica, luego

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- $AX + X = (A + I)X = I$, luego $X = (A + I)^{-1}$. La matriz $A + I$ es la misma familia con $m = 3$: $|A + I| = (3 - 1)^2(3 + 2) = 20 \neq 0$, con adjuntos diagonales $3^2 - 1 = 8$ y el resto $-(3 - 1) = -2$. Entonces

$$X = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Para el examen: en d) hay que sacar factor común X antes de despejar; $AX + X = (A + I)X$, no $(A + 1)X$.

PROBLEMA 12

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 2 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m real.

- a) Calcula $|A|$ y halla para qué valores de m la matriz A no tiene inversa. (0,5 puntos)
- b) Para $m = \frac{1}{3}$, calcula $\text{rg}(A)$. (0,5 puntos)
- c) Para $m = 1$, calcula A^{-1} mediante la matriz adjunta. (0,75 puntos)
- d) Para $m = 1$, resuelve la ecuación matricial $XA = B$, con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (0,75 puntos)

a) Por Sarrus: términos positivos $1 \cdot 1 \cdot 1 + m \cdot m \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 1 = 1$; términos negativos $0 \cdot 1 \cdot 0 + m \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot m \cdot 1 = 3m$. Entonces $|A| = 1 - 3m$, que se anula solo si $m = \frac{1}{3}$. Para ese valor A no tiene inversa.

b) Con $m = \frac{1}{3}$, $|A| = 0$, luego $\text{rg}(A) \leq 2$. El menor $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$.

c) Con $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $|A| = 1 - 3 = -2$. La matriz adjunta es $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, y

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

d) Multiplicamos por A^{-1} por la derecha: $X = BA^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para el examen: en $XA = B$ la inversa va a la derecha ($X = BA^{-1}$); poner $A^{-1}B$ es el error más caro de este tipo de apartado.

