



Ecuación Ganadora
ACADEMIA

MATEMÁTICAS II · 2.º DE BACHILLERATO

Álgebra de matrices

Matrices en Matemáticas II: tipos, operaciones, producto, potencias, traspuesta, inversa y ecuaciones matriciales, con ejemplos y ejercicios resueltos.

ecuacionganadora.com/recursos/matematicas-2-bachillerato/algebra-de-matrices.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

Las matrices son la herramienta con la que se organizan los datos y se resuelven sistemas de ecuaciones en Matemáticas II. En este tema aprendes a **operar con ellas** (sumar, multiplicar, trasponer, invertir), a **calcular potencias** y a **resolver ecuaciones cuya incógnita es una matriz**, que es lo que se pregunta en el examen de la PAU.

El producto de matrices no es conmutativo y muchas propiedades «de siempre» dejan de valer: ese es el origen de la mayoría de los errores, y por eso cada apartado tiene su caja de **errores típicos**.

Orden recomendado

Sigue los apartados en orden: cada uno usa solo lo anterior. El apartado de **matriz inversa** se estudia aquí por el método de Gauss-Jordan; en el tema de determinantes aprenderás además a calcularla con adjuntos.

Concepto y tipos de matrices

IDEA CLAVE

Una matriz es una tabla de números ordenada en filas y columnas. En este apartado aprendes a nombrar sus elementos, a reconocer cada tipo de matriz y a plantear ecuaciones a partir de una igualdad de matrices: es el vocabulario que se da por sabido en todos los problemas de matrices de la PAU.

Qué es una matriz

DEFINICIÓN · MATRIZ Y DIMENSIÓN

Una **matriz** de dimensión $m \times n$ es una tabla de números reales con m filas y n columnas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

El número a_{ij} es el **elemento** que está en la fila i y en la columna j . Siempre se dice **primero la fila y después la columna**, tanto en la dimensión como en los subíndices.

Por ejemplo, las notas de tres alumnos en dos exámenes forman una matriz 3×2 (una fila por alumno, una columna por examen):

$$N = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Aquí $n_{21} = 5$ es la nota del alumno 2 en el examen 1, y $n_{12} = 8$ es la del alumno 1 en el examen 2. Una matriz $m \times n$ tiene $m \cdot n$ elementos; N tiene 6.

Igualdad de matrices

DEFINICIÓN · MATRICES IGUALES

Dos matrices A y B son **iguales** si tienen la misma dimensión y $a_{ij} = b_{ij}$ para todos los i y j , es decir, si coinciden elemento a elemento.

Una igualdad de matrices $m \times n$ equivale a $m \cdot n$ igualdades entre números. Por eso, cuando las matrices tienen incógnitas, **una igualdad de matrices es un sistema de ecuaciones**:

$$\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \iff x+1=4, y=-1 \iff x=3, y=-1$$

Matrices de distinta dimensión nunca son iguales, aunque tengan los mismos números: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

MÉTODO • IGUALDAD DE MATRICES CON INCÓGNITAS

1. Comprueba que las dos matrices tienen la misma dimensión (si no, no pueden ser iguales).
2. Escribe una ecuación por cada posición: elemento de la izquierda = elemento de la derecha.
3. Resuelve las ecuaciones más sencillas primero y sustituye en las demás.
4. Comprueba que los valores obtenidos cumplen **todas** las ecuaciones, también las que no has usado. Si alguna falla, no hay solución.

Matrices definidas por una regla

A veces la matriz no se da con sus números, sino con una fórmula para a_{ij} en función de la posición. Para escribirla se sustituye cada pareja (i, j) en la fórmula, fila a fila. Por ejemplo, la matriz 2×3 con $a_{ij} = i + j$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

La regla puede tener casos, por ejemplo $a_{ij} = 1$ si $i \leq j$ y $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

Tipos de matrices según su forma

Tipo	Condición	Ejemplo
Fila	una sola fila ($1 \times n$)	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
Columna	una sola columna ($m \times 1$)	$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
Cuadrada de orden n	tantas filas como columnas ($n \times n$)	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Rectangular	$m \neq n$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Nula O	todos sus elementos son 0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En una matriz cuadrada de orden n , los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ (los que tienen $i = j$) forman la **diagonal principal**. Los que cumplen $i + j = n + 1$ forman la **diagonal secundaria**. Por encima de la diagonal principal están los a_{ij} con $i < j$, y por debajo los que tienen $i > j$.

Para contar: una matriz cuadrada de orden n tiene n^2 elementos, de los cuales n están en la diagonal principal y los otros $n^2 - n$ se reparten a partes iguales, $\frac{n(n-1)}{2}$ por encima y $\frac{n(n-1)}{2}$ por debajo.

Tipos de matrices cuadradas

DEFINICIÓN · TRIANGULAR, DIAGONAL, ESCALAR E IDENTIDAD

Sea A una matriz cuadrada.

- A es **triangular superior** si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos ($a_{ij} = 0$ si $i > j$), y **triangular inferior** si lo son todos los de encima ($a_{ij} = 0$ si $i < j$).
- A es **diagonal** si todos los elementos fuera de la diagonal principal son nulos ($a_{ij} = 0$ si $i \neq j$).
- A es **escalar** si es diagonal y todos los elementos de la diagonal son iguales.
- La **matriz identidad** de orden n , I_n (o simplemente I), es la escalar con unos en la diagonal.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}}_{\text{triangular superior}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{diagonal}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{escalar}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3}$$

Cada tipo es un caso particular del anterior: la identidad es escalar, toda escalar es diagonal y toda diagonal es a la vez triangular superior e inferior. Las condiciones solo hablan de los elementos **fuera** de la diagonal: en la diagonal puede haber ceros (la matriz diagonal del ejemplo tiene $a_{33} = 0$). La matriz nula cuadrada es de todos estos tipos menos identidad.

DEFINICIÓN · MATRIZ SIMÉTRICA

Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $a_{ij} = a_{ji}$ para todos los i y j : cada elemento coincide con el que ocupa la posición «reflejada» respecto a la diagonal principal.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ es simétrica: } s_{12} = s_{21} = 4, s_{13} = s_{31} = -2, s_{23} = s_{32} = 3.$$

La diagonal no impone ninguna condición. Para comprobar que una matriz de orden 3 es simétrica bastan tres igualdades: $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ y $a_{23} = a_{32}$. Las distancias por carretera entre ciudades forman una matriz simétrica, porque la distancia de i a j es la misma que de j a i . Volverás a las simétricas en el apartado de traspuesta, simétricas y ortogonales.

La traza

DEFINICIÓN · TRAZA

La **traza** de una matriz cuadrada A de orden n es la suma de los elementos de su diagonal principal:

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Por ejemplo, $\text{tr} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 3 + 4 = 7$ y $\text{tr}(I_n) = n$. La traza solo tiene sentido en matrices cuadradas.

Matrices como tablas de datos

Muchos problemas de la PAU empiezan con una tabla convertida en matriz. Lo importante es saber **qué significa cada fila y cada columna**, porque de eso depende cómo se interpretan los elementos y las sumas:

- La suma de la fila i es el total de lo que representa esa fila.

- La suma de la columna j es el total de lo que representa esa columna.

Si una matriz V recoge las ventas de 3 tiendas (filas) en 4 semanas (columnas), v_{23} es lo que vendió la tienda 2 en la semana 3, la suma de la fila 2 es lo que vendió la tienda 2 en total y la suma de la columna 3 es lo que se vendió entre todas las tiendas en la semana 3.

Matriz de adyacencia de un grafo

Un **grafo** es un conjunto de puntos (vértices) unidos por flechas o líneas: ciudades unidas por vuelos, personas unidas por amistades, ordenadores conectados en una red.

DEFINICIÓN · MATRIZ DE ADYACENCIA

Si los vértices se numeran $1, 2, \dots, n$, la **matriz de adyacencia** es la matriz cuadrada de orden n con $a_{ij} = 1$ si hay conexión directa de i a j y $a_{ij} = 0$ si no la hay.

Si las conexiones van en los dos sentidos (una amistad, una carretera de doble sentido), la matriz es **simétrica**. Si tienen sentido (un vuelo de i a j no implica uno de j a i), puede no serlo.

PROPIEDAD · CAMINOS DE LONGITUD 2

El número de formas de ir de i a j pasando por **exactamente un** vértice intermedio es el número de vértices k con $a_{ik} = 1$ y $a_{kj} = 1$. Se cuenta recorriendo a la vez la fila i y la columna j y viendo en cuántas posiciones k hay un 1 en las dos.

La razón es directa: para ir de i a j en dos pasos hay que ir de i a algún k y de ese k a j . Cuando estudies el **producto** de matrices verás que esa cuenta es justo el elemento (i, j) de A^2 .

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Escribir una matriz a partir de una regla

Escribe la matriz A de dimensión 3×2 cuyos elementos son $a_{ij} = 2i - j$.

- a) Escribe la matriz A .
- b) ¿Cuánto vale a_{32} ?

1. **Cuántos elementos hay.** La dimensión 3×2 indica 3 filas y 2 columnas: i toma los valores 1, 2, 3 y j los valores 1, 2. Hay 6 elementos.

2. **Fila 1** ($i = 1$): $a_{11} = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0$.

3. **Fila 2** ($i = 2$): $a_{21} = 4 - 1 = 3$, $a_{22} = 4 - 2 = 2$.

4. **Fila 3** ($i = 3$): $a_{31} = 6 - 1 = 5$, $a_{32} = 6 - 2 = 4$.

- a) Colocando cada fila en su sitio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

- b) a_{32} es el elemento de la fila 3 y la columna 2: $a_{32} = 2 \cdot 3 - 2 = 4$. Cuidado con no confundirlo con a_{23} , que ni siquiera existe, porque A solo tiene 2 columnas.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Igualdad de matrices con incógnitas

Halla los números reales x , y y z para que se cumpla

$$\begin{pmatrix} x+y & 3 \\ 2x-y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & z-1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. **Dimensiones.** Las dos matrices son 2×2 , así que pueden ser iguales.

2. **Una ecuación por posición.** Igualando elemento a elemento:

$$\begin{cases} x+y=5 & \text{(posición 1,1)} \\ 3=z-1 & \text{(posición 1,2)} \\ 2x-y=4 & \text{(posición 2,1)} \\ z=4 & \text{(posición 2,2)} \end{cases}$$

3. **Lo sencillo primero.** De la posición (2,2), $z=4$. Comprobamos la posición (1,2): $z-1=4-1=3$. Se cumple; si no se cumpliera, no habría solución.

4. **Las otras dos ecuaciones.** Sumando $x+y=5$ y $2x-y=4$ se obtiene $3x=9$, luego $x=3$ e $y=5-3=2$.

5. **Comprobación.** Con $x=3$, $y=2$, $z=4$ la matriz de la izquierda es $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, igual que la de la derecha.

La solución es $x=3$, $y=2$, $z=4$. Observa que aquí hay 4 ecuaciones y 3 incógnitas: la ecuación que «sobra» no se puede ignorar, sirve de comprobación.

EJEMPLO 3 ★★★ Dificil

Vuelos entre ciudades: matriz de adyacencia

Una aerolínea pequeña opera entre cuatro ciudades, numeradas así: Valencia (1), Madrid (2), Barcelona (3) y Sevilla (4). Sus vuelos directos son:

- desde Valencia, a Madrid y a Sevilla;
- desde Madrid, a Valencia, a Barcelona y a Sevilla;
- desde Barcelona, a Madrid;
- desde Sevilla, a Barcelona.

Sea A la matriz de adyacencia ($a_{ij} = 1$ si hay vuelo directo de la ciudad i a la ciudad j , y $a_{ij} = 0$ si no lo hay).

- Escribe la matriz A .
- Calcula la suma de los elementos de la fila 2 y la de la columna 3 de A , en este orden, y explica qué significa cada una.
- ¿De cuántas formas distintas se puede ir de Valencia a Barcelona con exactamente una escala (dos vuelos)?
- Indica el número de la única ciudad desde la que no se puede llegar a Valencia ni con un vuelo directo ni con una sola escala.

- La matriz fila a fila.** Cada fila corresponde a la ciudad de salida y cada columna a la de llegada. La fila 1 (Valencia) tiene un 1 en las columnas 2 y 4; la fila 2 (Madrid), en las columnas 1, 3 y 4; la fila 3 (Barcelona), en la columna 2; la fila 4 (Sevilla), en la columna 3. Nadie vuela a su propia ciudad, así que la diagonal es nula.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A no es simétrica: $a_{14} = 1$ (hay vuelo Valencia-Sevilla) pero $a_{41} = 0$ (no lo hay de vuelta). Es lo esperable, porque los vuelos tienen sentido.

- Sumas de fila y de columna.**

- Fila 2: $1 + 0 + 1 + 1 = 3$. Cada 1 de la fila 2 es un vuelo que **sale** de Madrid: hay 3 vuelos directos con origen en Madrid.
- Columna 3: $0 + 1 + 0 + 1 = 2$. Cada 1 de la columna 3 es un vuelo que **llega** a Barcelona: hay 2 vuelos directos con destino Barcelona (desde Madrid y desde Sevilla).

- Rutas con una escala.** Una ruta Valencia $\rightarrow k \rightarrow$ Barcelona existe si $a_{1k} = 1$ y $a_{k3} = 1$. Se comparan la fila 1 y la columna 3:

k	a_{1k}	a_{k3}	¿Ruta?
1	0	0	no
2	1	1	sí: Valencia - Madrid - Barcelona
3	0	0	no
4	1	1	sí: Valencia - Sevilla - Barcelona

Hay 2 formas.

d) **Llegar a Valencia.** Ahora miramos la columna 1, que dice quién vuela a Valencia: solo $a_{21} = 1$, es decir, solo Madrid tiene vuelo directo.

- Desde Madrid se llega directamente.
- Con una escala hay que llegar primero a Madrid y desde allí volar a Valencia. La columna 2 dice quién vuela a Madrid: Valencia ($a_{12} = 1$) y Barcelona ($a_{32} = 1$). Desde Barcelona se llega con la ruta Barcelona - Madrid - Valencia.
- Desde Sevilla el único vuelo es a Barcelona, y desde Barcelona no hay vuelo directo a Valencia ($a_{31} = 0$). Sevilla no tiene vuelo a Madrid ($a_{42} = 0$), así que no puede usar Madrid como escala.

La ciudad es **Sevilla (4)**.

Para el examen: escribe siempre qué significan las filas y las columnas antes de interpretar una suma. En una matriz no simétrica, confundir «salir de» con «llegar a» cambia todas las respuestas, y la interpretación es la mitad de la puntuación de estos apartados.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR FILA Y COLUMNA

a_{23} es el elemento de la **fila 2, columna 3**, no al revés. Y una matriz 2×3 tiene 2 filas y 3 columnas, no 3 filas y 2 columnas. El error aparece sobre todo al escribir matrices definidas por una regla: si en $a_{ij} = 2i - j$ se cambia el papel de i y j , sale otra matriz y se pierde todo el ejercicio. Truco: «primero se baja (fila), luego se va a la derecha (columna)».

ERROR TÍPICO • NO COMPROBAR TODAS LAS ECUACIONES DE UNA IGUALDAD

Al igualar matrices con incógnitas, es habitual despejar con dos o tres ecuaciones y dar el resultado sin mirar las demás. Pero una igualdad de matrices 2×2 son **cuatro** ecuaciones, y todas deben cumplirse. Si una de las que no has usado falla, la respuesta correcta es «no existe solución». En ejercicios con cuadrados ($x^2 = 4$) pasa lo mismo: de los candidatos $x = \pm 2$ solo vale el que cumple el resto de ecuaciones.

ERROR TÍPICO · CREER QUE EN LA DIAGONAL NO PUEDE HABER CEROS

Una matriz es diagonal, triangular o escalar por lo que hay **fuera** de la diagonal, no dentro. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonal y la matriz nula también lo es. Del mismo modo, para que una matriz sea simétrica no hay que pedir nada a los elementos de la diagonal: plantear $a_{11} = a_{22}$ es un error frecuente.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Indica su dimensión.
- b) Escribe los elementos a_{23} y a_{32} .
- c) Calcula la suma de los elementos de la tercera columna.

- a) A tiene 3 filas y 4 columnas: su dimensión es 3×4 .
- b) a_{23} está en la fila 2, columna 3: $a_{23} = -2$. a_{32} está en la fila 3, columna 2: $a_{32} = 6$. Son elementos distintos, aunque usen los mismos números como subíndices.
- c) La tercera columna es $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$, y su suma es $0 + (-2) + 7 = 5$.

EJERCICIO 2 ★ Básico

Escribe la matriz B de dimensión 2×3 cuyos elementos son $b_{ij} = (-1)^{i+j} (i + j)$.

1. B tiene 2 filas ($i = 1, 2$) y 3 columnas ($j = 1, 2, 3$). El factor $(-1)^{i+j}$ vale 1 si $i + j$ es par y -1 si es impar.

2. **Fila 1:** $b_{11} = (-1)^2 \cdot 2 = 2$, $b_{12} = (-1)^3 \cdot 3 = -3$, $b_{13} = (-1)^4 \cdot 4 = 4$.

3. **Fila 2:** $b_{21} = (-1)^3 \cdot 3 = -3$, $b_{22} = (-1)^4 \cdot 4 = 4$, $b_{23} = (-1)^5 \cdot 5 = -5$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Los signos se alternan como en un tablero de ajedrez, empezando por $+$ en la posición $(1, 1)$.

EJERCICIO 3 ★ Básico

a) Calcula la traza de la matriz $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

b) Escribe la matriz escalar de orden 3 cuya traza es 12.

a) La traza es la suma de la diagonal principal: $\text{tr}(C) = c_{11} + c_{22} + c_{33} = 3 + (-5) + 6 = 4$. Los elementos de fuera de la diagonal no intervienen.

b) Una matriz escalar de orden 3 es diagonal con los tres elementos de la diagonal iguales, es decir, de la forma $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$. Su traza es $3k$, así que $3k = 12$ y $k = 4$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4

★★ Medio

Halla los números reales x , y , z y t que cumplen

$$\begin{pmatrix} 2x - y & x + z \\ y + z & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & x - t \end{pmatrix}$$

1. Las dos matrices son 2×2 . Igualando elemento a elemento se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + z = 7 \\ y + z = 8 \\ 3 = x - t \end{cases}$$

2. **Despejamos en función de x .** De la primera, $y = 2x - 1$. De la segunda, $z = 7 - x$.

3. **Sustituimos en la tercera:** $(2x - 1) + (7 - x) = 8$, es decir, $x + 6 = 8$, luego $x = 2$.

4. **El resto:** $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $z = 7 - 2 = 5$ y, de la cuarta ecuación, $t = x - 3 = -1$.

5. **Comprobación.** La matriz de la izquierda queda $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y la de la derecha $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 2 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

La solución es $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$, $t = -1$.

EJERCICIO 5 ★★ Medio

Una cooperativa citrícola tiene tres almacenes. La matriz P recoge las toneladas de naranjas recibidas por cada almacén (filas: almacén 1, 2 y 3) en cada mes de la campaña (columnas: noviembre, diciembre, enero y febrero, en este orden):

$$P = \begin{pmatrix} 12 & 18 & 20 & 10 \\ 15 & 14 & 22 & 9 \\ 8 & 16 & 19 & 13 \end{pmatrix}$$

- ¿Cuánto vale p_{32} ? Explica qué significa.
- ¿Cuántas toneladas recibió el almacén 2 en toda la campaña?
- ¿Cuántas toneladas recibió la cooperativa, entre los tres almacenes, en enero?
- ¿Cuál es el número de la columna (el mes) en que la cooperativa recibió menos toneladas en total?

- p_{32} está en la fila 3 y la columna 2: $p_{32} = 16$. Significa que el almacén 3 recibió 16 toneladas en diciembre.
- Lo recibido por el almacén 2 es la suma de su fila: $15 + 14 + 22 + 9 = 60$ toneladas.
- Enero es la columna 3; lo recibido entre todos los almacenes es la suma de esa columna: $20 + 22 + 19 = 61$ toneladas.
- Sumamos cada columna:

Mes	Columna	Total (t)
noviembre	1	$12 + 15 + 8 = 35$
diciembre	2	$18 + 14 + 16 = 48$
enero	3	61
febrero	4	$10 + 9 + 13 = 32$

El mínimo es 32, en la columna 4 (febrero).

EJERCICIO 6

★★ Medio

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x+1 & 2y \\ 3 & 2 & z \\ y+2 & 5 & x \end{pmatrix}$$

- a) Halla x , y y z para que A sea simétrica.
- b) Con esos valores, calcula la traza de A .

a) A es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$. Los elementos de la diagonal no dan condiciones; para orden 3 hay que imponer tres igualdades:

1. $a_{12} = a_{21}$: $x + 1 = 3$, luego $x = 2$.

2. $a_{13} = a_{31}$: $2y = y + 2$, luego $y = 2$.

3. $a_{23} = a_{32}$: $z = 5$.

Con $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

que efectivamente es simétrica.

- b) $\text{tr}(A) = 1 + 2 + x = 1 + 2 + 2 = 5$. Fíjate en que x aparece en la diagonal ($a_{33} = x$): hace falta haber resuelto el apartado a) para conocer la traza.

EJERCICIO 7 ★★ Medio

Cinco amigos, Ana (1), Bea (2), Carlos (3), Dani (4) y Eva (5), están conectados en una red social. Las amistades son: Ana-Bea, Ana-Carlos, Bea-Carlos, Bea-Dani, Carlos-Eva y Dani-Eva (toda amistad es mutua y nadie es amigo de sí mismo). Sea M la matriz de adyacencia, con $m_{ij} = 1$ si i y j son amigos y $m_{ij} = 0$ si no lo son.

- Escribe la matriz M .
- Calcula la suma de todos los elementos de M y deduce de ella cuántas amistades hay en la red.
- ¿Cuántos amigos tienen en común Bea y Eva?

- Cada amistad i - j pone un 1 en la posición (i, j) y en la (j, i) , porque es mutua. La diagonal es nula.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

M es simétrica, como corresponde a relaciones en los dos sentidos.

- Las sumas de las filas son 2, 3, 3, 2, 2 (el número de amigos de cada uno), y la suma total es 12. Cada amistad aparece **dos veces** en la matriz (en (i, j) y en (j, i)), así que hay $12/2 = 6$ amistades, que son las seis del enunciado.
- Un amigo común de Bea (2) y Eva (5) es un k con $m_{2k} = 1$ y $m_{k5} = 1$. Comparando la fila 2, $(1, 0, 1, 1, 0)$, con la columna 5, $(0, 0, 1, 1, 0)$, coinciden los unos en $k = 3$ y $k = 4$. Bea y Eva tienen 2 amigos en común: Carlos y Dani.

EJERCICIO 8 ★★★ Difícil

Halla todos los pares de números reales (x, y) que cumplen cada igualdad. Si no hay ninguno, justifícalo.

a) $\begin{pmatrix} x^2 & x+y \\ y^2 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x^2 & x+y \\ y^2 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

- a) 1. **Las ecuaciones.** Igualando elemento a elemento: $x^2 = 4$, $x + y = 1$, $y^2 = 9$, $xy = -6$. Son cuatro ecuaciones con dos incógnitas, y no todas son lineales.
2. **Candidatos.** De $x^2 = 4$, $x = 2$ o $x = -2$. De $y^2 = 9$, $y = 3$ o $y = -3$. Hay cuatro pares posibles: $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(-2, 3)$ y $(-2, -3)$.
3. **Filtramos con $x + y = 1$.** Las sumas son 5, -1 , 1 y -5 : solo sirve $(-2, 3)$.
4. **Comprobamos la ecuación que falta.** $xy = (-2) \cdot 3 = -6$. Se cumple.

La única solución es $(x, y) = (-2, 3)$.

- b) Las tres primeras ecuaciones son las mismas que en a), así que el único par que las cumple es $(-2, 3)$. Pero la cuarta ecuación es ahora $xy = 6$, y $(-2) \cdot 3 = -6 \neq 6$. **No existe ningún par** que cumpla la igualdad.

Para el examen: con ecuaciones no lineales hay que comprobar cada candidato en **todas** las ecuaciones. Dar $x = \pm 2$, $y = \pm 3$ como respuesta, o no detectar en b) que no hay solución, es lo que hace perder el apartado completo.

EJERCICIO 9 ★★★ Difícil

Para cada número natural $n \geq 2$ se define la matriz cuadrada A de orden n con $a_{ij} = |i - j|$.

- Escribe la matriz A para $n = 4$.
- En función de n , ¿cuántos elementos de A valen 1?
- Halla n para que A tenga exactamente 90 elementos distintos de cero.
- En función de n , indica cuál es el mayor elemento de A y cuántas veces aparece.

- Para $n = 4$, sustituyendo cada (i, j) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ve la estructura: a_{ij} es la distancia de la posición (i, j) a la diagonal principal. La matriz es simétrica, porque $|i - j| = |j - i|$, y cada «paralela» a la diagonal tiene todos sus elementos iguales.

- $a_{ij} = 1$ si $j = i + 1$ (la paralela justo encima de la diagonal) o $j = i - 1$ (la de justo debajo). La de encima tiene las posiciones $(1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n)$, que son $n - 1$; la de debajo, otras $n - 1$. En total, $2(n - 1) = 2n - 2$ elementos valen 1. Para $n = 4$: 6, que coincide con a).
- $a_{ij} = 0$ solo si $i = j$, es decir, solo en la diagonal principal, que tiene n elementos. Los elementos no nulos son todos los demás: $n^2 - n = n(n - 1)$. Imponemos

$$n(n - 1) = 90 \iff n^2 - n - 90 = 0 \iff n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 360}}{2} = \frac{1 \pm 19}{2}$$

que da $n = 10$ o $n = -9$. Como n es un número natural, $n = 10$.

- El valor máximo de $|i - j|$ con $1 \leq i, j \leq n$ es $n - 1$, y solo se alcanza cuando uno de los índices es 1 y el otro es n : en las posiciones $(1, n)$ y $(n, 1)$, las dos esquinas de la diagonal secundaria. El mayor elemento es $n - 1$ y aparece 2 veces. (Para $n = 4$: el 3 aparece dos veces.)

Para el examen: en matrices definidas por una regla general, escribe un caso pequeño (como $n = 4$) para ver el patrón, y después justifica el recuento con las posiciones, no solo con el ejemplo. Descartar $n = -9$ con una frase es parte de la puntuación.

EJERCICIO 10

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} m & -4 & 8m \\ m-3 & 2 & m+1 \\ m^2-9 & m^2-2m-3 & m^2-1 \end{pmatrix}$$

- Halla los valores de m para los que A es simétrica. (0,75 puntos)
- Halla los valores de m para los que A es triangular superior. (0,5 puntos)
- ¿Existe algún valor de m para el que A sea diagonal? Justifícalo. (0,5 puntos)
- Halla los valores de m para los que la traza de A vale 7. (0,75 puntos)

- a) A es simétrica si y solo si se cumplen **a la vez** las tres igualdades $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$.

1. $a_{12} = a_{21}$: $-4 = m - 3$, luego $m = -1$.

2. $a_{13} = a_{31}$: $8m = m^2 - 9 \iff m^2 - 8m - 9 = 0 \iff (m - 9)(m + 1) = 0$, luego $m = 9$ o $m = -1$.

3. $a_{23} = a_{32}$: $m + 1 = m^2 - 2m - 3 = (m - 3)(m + 1) \iff (m + 1)(m - 4) = 0$, luego $m = -1$ o $m = 4$.

El único valor común a las tres condiciones es $m = -1$. Comprobación:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es simétrica. Para $m = 9$ o $m = 4$ falla alguna de las otras condiciones (por ejemplo, la primera exige $m = -1$).

- b) A es triangular superior si son nulos los tres elementos de debajo de la diagonal:

1. $a_{21} = m - 3 = 0 \iff m = 3$.

2. $a_{31} = m^2 - 9 = 0 \iff m = 3$ o $m = -3$.

3. $a_{32} = m^2 - 2m - 3 = (m - 3)(m + 1) = 0 \iff m = 3$ o $m = -1$.

El único valor común es $m = 3$, y entonces

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 24 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- Una matriz diagonal es, en particular, triangular superior; por b), el único candidato es $m = 3$. Pero además los elementos de encima de la diagonal deberían ser nulos, y $a_{12} = -4 \neq 0$ para **cualquier** valor de m . Por tanto, **no existe** ningún valor de m para el que A sea diagonal.
- $\text{tr}(A) = m + 2 + (m^2 - 1) = m^2 + m + 1$. Imponemos

$$m^2 + m + 1 = 7 \iff m^2 + m - 6 = 0 \iff (m + 3)(m - 2) = 0$$

luego $m = 2$ o $m = -3$. Comprobación: para $m = 2$, $\text{tr}(A) = 2 + 2 + 3 = 7$; para $m = -3$, $\text{tr}(A) = -3 + 2 + 8 = 7$.

Para el examen: cuando una propiedad exige varias condiciones (simétrica, triangular), resuelve cada ecuación por separado y quédate con los valores **comunes**; escribir solo las soluciones de la primera ecuación o la unión de todas es un error que anula el apartado. En c) basta una frase con el elemento $a_{12} = -4$, pero hay que escribirla: «no existe» sin justificar no puntúa.

Resumen

- Una matriz $m \times n$ tiene m filas y n columnas; a_{ij} es el elemento de la fila i y la columna j (siempre fila primero).
- Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y coinciden elemento a elemento: una igualdad con incógnitas es un sistema, y hay que comprobar **todas** sus ecuaciones.
- Tipos: fila, columna, cuadrada, nula; en las cuadradas, triangular (superior o inferior), diagonal, escalar e identidad I , definidas por los ceros de **fuera** de la diagonal.
- Simétrica: $a_{ij} = a_{ji}$; en orden 3 se comprueba con $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ y $a_{23} = a_{32}$.
- Traza: suma de la diagonal principal de una matriz cuadrada, $\text{tr}(I_n) = n$.
- En una tabla de datos, la suma de una fila o de una columna es un total con significado: escribe qué representan filas y columnas.
- Matriz de adyacencia: $a_{ij} = 1$ si hay conexión de i a j ; es simétrica si las conexiones son en los dos sentidos. Los caminos de i a j con un intermedio se cuentan comparando la fila i con la columna j .

Suma, resta y producto por un escalar

IDEA CLAVE

Sumar matrices y multiplicarlas por un número se hace elemento a elemento y funciona igual que con los números: por eso las ecuaciones como $2X + Y = A$, $X - Y = B$ se resuelven despejando como siempre. En la PAU aparecen como primer apartado de muchos problemas y como paso intermedio de casi todos.

Suma y resta de matrices

DEFINICIÓN · SUMA DE MATRICES

Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ tienen la **misma dimensión** $m \times n$, su **suma** es la matriz $A + B$, también $m \times n$, que se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

Si las dimensiones son distintas, la suma no existe.

Por ejemplo, si las matrices recogen los goles a favor y en contra de dos equipos en la primera vuelta y en la segunda, la suma da los de toda la temporada:

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 14 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 25 \\ 26 & 39 \end{pmatrix}$$

Solo tiene sentido sumar datos que hablan de lo mismo (mismo equipo, misma columna), y eso es lo que garantiza la condición de dimensiones.

PROPIEDAD · PROPIEDADES DE LA SUMA

Para matrices A , B y C de la misma dimensión:

- **Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- **Conmutativa:** $A + B = B + A$.
- **Elemento neutro:** la matriz nula O de esa dimensión cumple $A + O = A$.
- **Elemento opuesto:** la matriz $-A = (-a_{ij})$ cumple $A + (-A) = O$.

Todas son ciertas por la misma razón: en cada posición se están sumando números reales, y los números cumplen esas propiedades. La **resta** se define con el opuesto, $A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$: se restan los elementos que ocupan la misma posición.

Producto de un número por una matriz

DEFINICIÓN · PRODUCTO POR UN ESCALAR

Si k es un número real (un **escalar**) y $A = (a_{ij})$ es una matriz, kA es la matriz de la misma dimensión que se obtiene multiplicando **todos** los elementos de A por k :

$$kA = (k a_{ij})$$

Si una tienda tiene sus precios en una matriz P y los sube un 10 %, la nueva matriz de precios es $\frac{11}{10}P$; si hace un descuento del 25 %, es $\frac{3}{4}P$. Por ejemplo,

$$3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 3 & 12 & -9 \end{pmatrix}$$

PROPIEDAD · PROPIEDADES DEL PRODUCTO POR UN ESCALAR

Para números reales k, h y matrices A, B de la misma dimensión:

- **Distributiva respecto de la suma de matrices:** $k(A + B) = kA + kB$.
- **Distributiva respecto de la suma de números:** $(k + h)A = kA + hA$.
- **Asociativa mixta:** $k(hA) = (kh)A$.
- $1 \cdot A = A$, $(-1)A = -A$ y $0 \cdot A = O$.
- Si $kA = O$, entonces $k = 0$ o $A = O$.

La última propiedad es cierta porque si $k \neq 0$ cada elemento cumple $k a_{ij} = 0$, luego $a_{ij} = 0$. Con el producto de dos matrices no pasará lo mismo, como verás en el producto de matrices.

Con estas propiedades, las expresiones con matrices se operan como las expresiones con letras: $2(A - 3B) + 5B = 2A - 6B + 5B = 2A - B$.

Combinación lineal de matrices

DEFINICIÓN · COMBINACIÓN LINEAL

Una **combinación lineal** de las matrices $A_1, A_2, \dots, A_r$ (todas de la misma dimensión) es cualquier matriz de la forma

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_r A_r, \quad c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$$

Los números $c_1, \dots, c_r$ son los **coeficientes**.

Por ejemplo, toda matriz 2×2 es combinación lineal de cuatro matrices muy sencillas:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para saber si una matriz M es combinación lineal de otras se escriben los coeficientes como incógnitas, se calcula la combinación y se iguala a M elemento a elemento: sale un **sistema de ecuaciones**. Si el sistema tiene solución, M es combinación lineal y la solución da los coeficientes; si no la tiene, no lo es. Como en una igualdad de matrices, hay que comprobar **todas** las ecuaciones.

Ecuaciones y sistemas con matrices incógnita

Una ecuación como $3X - A = 2B$, donde X es una matriz desconocida, se resuelve exactamente igual que $3x - a = 2b$: las propiedades anteriores permiten pasar sumandos al otro miembro y dividir por un número distinto de cero.

$$3X - A = 2B \iff 3X = A + 2B \iff X = \frac{1}{3}(A + 2B)$$

Lo único que no se puede hacer (todavía) es «dividir entre una matriz»: eso necesitará la [matriz inversa](#).

MÉTODO • SISTEMA DE DOS ECUACIONES CON DOS MATRICES INCÓGNITA

1. Trata X e Y como si fueran números y elige reducción o sustitución. Por ejemplo, en
$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$$
 sumando las dos ecuaciones desaparece Y .
2. Despeja **con letras** hasta tener X e Y en función de A y B : aquí $3X = A + B$, luego $X = \frac{1}{3}(A + B)$ e $Y = X - B$.
3. Solo entonces sustituye las matrices y opera.
4. Comprueba el resultado en las **dos** ecuaciones del sistema.

Trabajar con letras hasta el final reduce las cuentas a una o dos operaciones con matrices y evita arrastrar errores de cálculo.

La traza y las operaciones

La traza (suma de la diagonal principal) se lleva bien con estas operaciones: como la diagonal de $A + B$ es la suma de las diagonales y la de kA es k veces la de A ,

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B), \quad \text{tr}(kA) = k \text{tr}(A)$$

Por ejemplo, si $\text{tr}(A) = 3$ y $\text{tr}(B) = -1$, entonces $\text{tr}(2A - 5B) = 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) = 11$, sin conocer las matrices.

Ampliación: parte simétrica y parte antisimétrica

NOTA • AMPLIACIÓN: LA TRASPUESTA, EN DOS LÍNEAS

La **traspuesta** de A , que se escribe A^t , es la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas: el elemento (i, j) de A^t es a_{ji} . Se estudia en el apartado de [traspuesta, simétricas y ortogonales](#); aquí solo se usa para este resultado. Con ella, A es **simétrica** si $A^t = A$ ($a_{ij} = a_{ji}$) y **antisimétrica** si $A^t = -A$ ($a_{ij} = -a_{ji}$). En una antisimétrica la diagonal es nula, porque $a_{ii} = -a_{ii}$ obliga a $a_{ii} = 0$.

TEOREMA • DESCOMPOSICIÓN EN SIMÉTRICA MÁS ANTISIMÉTRICA

Toda matriz cuadrada A se escribe de una única forma como suma de una matriz simétrica S y una antisimétrica N :

$$A = S + N, \quad S = \frac{1}{2}(A + A^t), \quad N = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

La idea es «repartir» cada pareja de elementos reflejados: $s_{ij} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ es la media de los dos (igual en (i, j) y en (j, i)) y $n_{ij} = \frac{a_{ij} - a_{ji}}{2}$ es lo que le falta a cada uno para llegar a a_{ij} (con signo opuesto en la posición reflejada). Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera es simétrica, la segunda antisimétrica, y su suma es la matriz de partida. Que la descomposición es única se demuestra en el ejercicio 9.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Una combinación de tres matrices

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

calcula $2A - 3B + C$.

1. **Dimensiones.** Las tres matrices son 2×3 , así que la operación tiene sentido y el resultado es 2×3 .

2. **Productos por escalares.** Cada número multiplica a todos los elementos de su matriz:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad -3B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ 3 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

3. **Suma posición a posición.** Sumamos $2A$, $-3B$ y C :

$$2A - 3B + C = \begin{pmatrix} 2 - 6 + 0 & -4 + 0 + 3 & 0 + 3 + 1 \\ 6 + 3 + 2 & 2 - 12 - 2 & -2 - 6 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 11 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

Escribir $-3B$ ya con el signo incluido evita el error más común: restar bien el primer elemento y olvidar el signo en los demás.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Sistema de dos ecuaciones matriciales

Halla las matrices X e Y que cumplen

$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Reducción con letras.** Sumando las dos ecuaciones desaparece Y :

$$3X = A + B \iff X = \frac{1}{3}(A + B)$$

De la segunda ecuación, $Y = X - B$.

2. **Ahora los números.**

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \implies X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = X - B = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-4 \\ 1-(-1) & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación en las dos ecuaciones.**

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 4+1 & 2-3 \\ 2+2 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 3 ★★★ Dificil

¿Es combinación lineal? Un parámetro que hay que deducir

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ m & 7 \end{pmatrix}$$

- Halla los valores de m para los que C es combinación lineal de A y B .
- Para ese valor, halla los números x e y tales que $C = xA + yB$.
- Halla todos los pares (x, y) que cumplen $xA + yB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. **La combinación general.** Para cualesquiera x e y ,

$$xA + yB = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ -y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ x - y & 2x + y \end{pmatrix}$$

Esta forma sirve para los tres apartados: cualquier combinación lineal de A y B tiene este aspecto.

- a) 2. **Igualamos a C .** $xA + yB = C$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x = 2 & (\text{posición } 1,1) \\ y = 3 & (\text{posición } 1,2) \\ x - y = m & (\text{posición } 2,1) \\ 2x + y = 7 & (\text{posición } 2,2) \end{cases}$$

Son cuatro ecuaciones con dos incógnitas: las dos primeras dan directamente $x = 2$, $y = 3$, y las otras dos tienen que cumplirse con esos valores.

3. **Las ecuaciones que sobran.** La cuarta: $2 \cdot 2 + 3 = 7$. Se cumple sin condiciones. La tercera: $2 - 3 = m$, que obliga a $m = -1$.

Por tanto, C es combinación lineal de A y B **solo si** $m = -1$. Para cualquier otro valor la tercera ecuación falla y el sistema no tiene solución.

- b) 4. Con $m = -1$, los coeficientes son los de los pasos anteriores: $x = 2$, $y = 3$. Comprobación:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = C$$

- c) 5. **Mismo método con otra matriz.** Igualando la forma general a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$: $x = 1$, $y = 1$, y entonces la posición (2,1) exige $x - y = 1$, pero $1 - 1 = 0 \neq 1$. **No hay ningún par** (x, y) : esa matriz no es combinación lineal de A y B (aunque la posición (2,2), $2 + 1 = 3$, sí cuadre).

Para el examen: al plantear una combinación lineal, escribe primero la matriz $xA + yB$ general y después iguala. Las ecuaciones «sobrantes» no se pueden ignorar: son las que deciden el valor del parámetro en a) y la imposibilidad en c), y justificar «no existe» con la ecuación que falla es lo que puntúa.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • SUMAR UN NÚMERO A UNA MATRIZ

Escribir $A + 2$ o $X - 3 = B$ con X matriz. Un número no se puede sumar a una matriz: la suma solo existe entre matrices de la misma dimensión. Si lo que se quiere es sumar 2 a la diagonal de una matriz cuadrada, se escribe $A + 2I$; si se quiere sumar 2 a todos los elementos, hay que sumar la matriz que tiene todos sus elementos iguales a 2. En la PAU, $A - \lambda I$ aparece muchas veces y nunca se escribe $A - \lambda$.

ERROR TÍPICO • MULTIPLICAR POR EL NÚMERO SOLO UNA PARTE DE LA MATRIZ

$3A$ multiplica por 3 **todos** los elementos de A , no solo una fila ni solo la diagonal. El fallo aparece sobre todo con signos: en $A - 3B$ hay que cambiar el signo de los seis o nueve elementos de $3B$, no solo del primero. Escribe $-3B$ como una matriz aparte antes de sumar.

ERROR TÍPICO • SUSTITUIR NÚMEROS DEMASIADO PRONTO EN UN SISTEMA MATRICIAL

En un sistema como $3X + 2Y = A$, $2X + Y = B$, hay quien sustituye A y B desde el principio y acaba con ocho ecuaciones con ocho incógnitas. Es correcto, pero larguísimo y lleno de ocasiones de error. Resuelve el sistema con letras ($X = 2B - A$, $Y = 2A - 3B$) y opera con matrices solo al final.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula $A + B$.
- b) Calcula $A - B$.
- c) Calcula $3A - 2B$.

Las dos matrices son 2×3 , así que todas las operaciones existen y dan matrices 2×3 .

- a) Sumando posición a posición:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & -1+5 & 3-1 \\ 0-3 & 4+2 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

- b) Restando posición a posición:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-1 & -1-5 & 3-(-1) \\ 0-(-3) & 4-2 & -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- c) Primero los productos por escalares, $3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$ y $-2B = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, y después la suma:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 4 & -13 & 11 \\ 6 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

★ Básico

Halla la matriz X que cumple $2X - 3A = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. **Despejamos con letras.** Como con números: $2X = B + 3A$, luego $X = \frac{1}{2}(B + 3A)$.

2. **Operamos.**

$$B + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación.** $2X - 3A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = B$.

EJERCICIO 3 ★ Básico

Halla los números reales x , y , z y t que cumplen

$$2 \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & t \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Operamos el miembro izquierdo.

$$\begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 2y & 2z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & t \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3 & 2-t \\ 2y+1 & 2z-2 \end{pmatrix}$$

2. Igualamos elemento a elemento.

$$2x - 3 = 5, \quad 2 - t = 4, \quad 2y + 1 = 7, \quad 2z - 2 = -6$$

3. Resolvemos. $x = 4$, $t = -2$, $y = 3$, $z = -2$.

Cuidado con la posición $(2, 1)$: se resta -1 , así que queda $2y + 1$, no $2y - 1$.

EJERCICIO 4

★★ Medio

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 3X + 2Y = A \\ 2X + Y = B \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Sustitución con letras. De la segunda ecuación, $Y = B - 2X$. Sustituyendo en la primera:

$$3X + 2(B - 2X) = A \iff 3X + 2B - 4X = A \iff -X = A - 2B \iff X = 2B - A$$

Y entonces $Y = B - 2X = B - 2(2B - A) = 2A - 3B$.

2. Operamos.

$$X = 2B - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Y = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Comprobación.

$$3X + 2Y = \begin{pmatrix} 3-2 & 6-6 \\ -6+8 & 9-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = A, \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 2-1 & 4-3 \\ -4+4 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

EJERCICIO 5 ★★ Medio

Una panadería tiene dos tiendas. Las matrices S y D recogen las unidades vendidas el sábado y el domingo (filas: tienda 1 y tienda 2; columnas: barras de pan, croissants y empanadillas, en este orden):

$$S = \begin{pmatrix} 120 & 80 & 50 \\ 90 & 60 & 40 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 150 & 100 & 70 \\ 110 & 70 & 30 \end{pmatrix}$$

- Calcula la matriz de ventas de todo el fin de semana.
- Calcula $D - S$. ¿Hay algún producto que alguna tienda vendiera menos el domingo que el sábado? Indica su fila y su columna.
- Para el fin de semana siguiente se prevé vender un 20 % más que este sábado el sábado y un 10 % menos que este domingo el domingo. Escribe la matriz de ventas previstas para ese fin de semana completo.
- ¿Cuántas unidades en total (de los tres productos y en las dos tiendas) se prevé vender ese fin de semana?

- Las ventas del fin de semana son la suma de las de los dos días, posición a posición:

$$S + D = \begin{pmatrix} 270 & 180 & 120 \\ 200 & 130 & 70 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la tienda 2 vendió 130 croissants en el fin de semana.

- $D - S = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 20 \\ 20 & 10 & -10 \end{pmatrix}$. Todos los elementos son positivos salvo el -10 de la fila 2, columna 3: la tienda 2 vendió 10 empanadillas menos el domingo que el sábado.
- Un 20 % más es multiplicar por $\frac{6}{5}$ y un 10 % menos es multiplicar por $\frac{9}{10}$:

$$\frac{6}{5}S = \begin{pmatrix} 144 & 96 & 60 \\ 108 & 72 & 48 \end{pmatrix}, \quad \frac{9}{10}D = \begin{pmatrix} 135 & 90 & 63 \\ 99 & 63 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\frac{6}{5}S + \frac{9}{10}D = \begin{pmatrix} 279 & 186 & 123 \\ 207 & 135 & 75 \end{pmatrix}$$

- Sumamos todos los elementos de la matriz de c): $279 + 186 + 123 + 207 + 135 + 75 = 1005$ unidades.

EJERCICIO 6 ★★ Medio

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Halla los números a , b y c tales que $aA + bB + cC = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) Halla todas las ternas (a, b, c) que cumplen $aA + bB + cC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- c) Halla el valor de k para el que $\begin{pmatrix} k & 2k \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de A , B y C .

1. Combinación general.

$$aA + bB + cC = \begin{pmatrix} a & a+b \\ b+c & c \end{pmatrix}$$

- a) Igualando a $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$: $a = 2$, $c = 1$, $a + b = 5 \Rightarrow b = 3$, y la ecuación que queda, $b + c = 4$, se cumple: $3 + 1 = 4$. Los coeficientes son $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.
- b) Igualando a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$: $a = 1$, $c = 1$, $a + b = 2 \Rightarrow b = 1$, y la posición $(2, 1)$ exige $b + c = 3$, pero $1 + 1 = 2 \neq 3$. **No hay ninguna terna:** la matriz no es combinación lineal de A , B y C .
- c) Igualando a $\begin{pmatrix} k & 2k \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$: $a = k$, $c = 1$, $a + b = 2k \Rightarrow b = k$, y la posición $(2, 1)$ da $b + c = 5$, es decir, $k + 1 = 5$: $k = 4$. Comprobación: $4A + 4B + C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Observa que las combinaciones de A , B y C cumplen siempre $(a + b) + c = a + (b + c)$, es decir, la suma de la segunda columna es igual a la suma de la primera. Eso explica de un vistazo b) $(2 + 1 \neq 1 + 3)$ y c) $(2k + 1 = k + 5)$.

EJERCICIO 7 ★★ Medio

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Halla los valores de k para los que $A + kB$ es simétrica.
- Para ese valor, calcula $A + kB$ y su traza.
- Halla los valores de k para los que $A + kB$ es triangular superior.

1. La matriz general.

$$A + kB = \begin{pmatrix} 1+k & 3-k & 2k \\ -1+k & 2 & 2-k \\ 4 & -2+k & -1+3k \end{pmatrix}$$

- Una matriz de orden 3 es simétrica si se cumplen a la vez las tres igualdades de las parejas reflejadas:

- $(1, 2)$ y $(2, 1)$: $3 - k = -1 + k \iff k = 2$.
- $(1, 3)$ y $(3, 1)$: $2k = 4 \iff k = 2$.
- $(2, 3)$ y $(3, 2)$: $2 - k = -2 + k \iff k = 2$.

Las tres dan $k = 2$, así que $A + kB$ es simétrica solo para $k = 2$.

- Con $k = 2$:

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{tr}(A + 2B) = 3 + 2 + 5 = 10$$

También se podía usar que la traza respeta las operaciones: $\text{tr}(A) + 2\text{tr}(B) = 2 + 2 \cdot 4 = 10$.

- Hacen falta tres ceros debajo de la diagonal: $-1 + k = 0$, $4 = 0$ y $-2 + k = 0$. La segunda condición es imposible (el elemento $(3, 1)$ vale 4 para cualquier k), así que **no existe ningún valor** de k .

EJERCICIO 8 ★★★ Dificil

Para cada número real m se consideran

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^2 & 2 \end{pmatrix}$$

y las matrices X e Y que cumplen $X + Y = A$ y $X - Y = B$.

- Calcula X e Y en función de m .
- Halla los valores de m para los que X es simétrica.
- Halla los valores de m para los que, a la vez, X es simétrica e Y es triangular superior.
- Para el valor de c), escribe X e Y .

- a)** 1. **Con letras.** Sumando las ecuaciones, $2X = A + B$; restándolas, $2Y = A - B$. Así, $X = \frac{1}{2}(A + B)$ e $Y = \frac{1}{2}(A - B)$.

2. **Con números.**

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3+m \\ 1+m^2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3+m}{2} \\ \frac{1+m^2}{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3-m \\ 1-m^2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3-m}{2} \\ \frac{1-m^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- b)** 3. Una matriz 2×2 es simétrica si $x_{12} = x_{21}$:

$$\frac{3+m}{2} = \frac{1+m^2}{2} \iff m^2 - m - 2 = 0 \iff (m-2)(m+1) = 0$$

X es simétrica para $m = 2$ y para $m = -1$.

- c)** 4. Y es triangular superior si $y_{21} = 0$: $1 - m^2 = 0 \iff m = 1$ o $m = -1$. El único valor que cumple las dos condiciones es el común, $m = -1$.

- d)** 5. Con $m = -1$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A$ y $X - Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, que es B con $m = -1$ ($m^2 = 1$).

Para el examen: resuelve primero el sistema con letras; con X e Y en función de m , cada condición es una ecuación sencilla. En c) la respuesta es la **intersección** de las dos condiciones, no la unión: dar $m = 2$ o $m = 1$ es un error típico.

EJERCICIO 9

★★★ Difícil

Demostración

Usa la definición de matriz simétrica ($a_{ij} = a_{ji}$) y antisimétrica ($a_{ij} = -a_{ji}$) para cada i, j .

- a) Demuestra que si A y B son simétricas del mismo orden y k es un número real, entonces $A + B$ y kA son simétricas. Demuestra lo mismo para antisimétricas.
- b) Demuestra que la única matriz que es a la vez simétrica y antisimétrica es la matriz nula.
- c) Deduce que la descomposición de una matriz cuadrada como suma de una simétrica y una antisimétrica es única: si $A = S_1 + N_1 = S_2 + N_2$, con S_1, S_2 simétricas y N_1, N_2 antisimétricas, entonces $S_1 = S_2$ y $N_1 = N_2$.

- a) 1. **Suma de simétricas.** Llamamos $C = A + B$, con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Usando que A y B son simétricas,

$$c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

para todos los i, j , así que C es simétrica.

2. **Producto por un número.** El elemento (j, i) de kA es $k a_{ji} = k a_{ij}$, que es el elemento (i, j) . Luego kA es simétrica.

3. **Antisimétricas.** Si $a_{ji} = -a_{ij}$ y $b_{ji} = -b_{ij}$, entonces $a_{ji} + b_{ji} = -(a_{ij} + b_{ij})$ y $k a_{ji} = -k a_{ij}$: $A + B$ y kA son antisimétricas.

- b) 4. Si A es simétrica y antisimétrica, para cada i, j se cumplen a la vez $a_{ji} = a_{ij}$ y $a_{ji} = -a_{ij}$. Restando, $2a_{ij} = 0$, es decir, $a_{ij} = 0$. Todos los elementos son nulos: $A = O$.

- c) 5. De $S_1 + N_1 = S_2 + N_2$ se obtiene, pasando términos,

$$S_1 - S_2 = N_2 - N_1$$

6. Por a), $S_1 - S_2 = S_1 + (-1)S_2$ es simétrica, y $N_2 - N_1$ es antisimétrica. Como son la misma matriz, esa matriz es a la vez simétrica y antisimétrica, y por b) es la nula: $S_1 - S_2 = O$ y $N_2 - N_1 = O$. Es decir, $S_1 = S_2$ y $N_1 = N_2$.

Para el examen: en una demostración con elementos, escribe qué hay que probar («hay que ver que $c_{ji} = c_{ij}$ para todos los i, j ») y usa la hipótesis en una línea explícita. Comprobarlo con un ejemplo numérico no es una demostración.

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

- a) Halla las matrices X e Y que cumplen $2X + 3Y = A$ y $X + 2Y = B$. (1 punto)
- b) Halla los números reales α y β tales que $\alpha X + \beta Y = I$. (0,75 puntos)
- c) Halla el número real k para el que $X + kY$ es una matriz diagonal, y escribe esa matriz. ¿De qué tipo es? (0,75 puntos)

- a) 1. **Con letras.** De la segunda ecuación, $X = B - 2Y$. Sustituyendo en la primera: $2B - 4Y + 3Y = A$, luego $Y = 2B - A$, y $X = B - 2(2B - A) = 2A - 3B$.

2. **Con números.**

$$X = 2A - 3B = \begin{pmatrix} 10 - 9 & 16 - 15 \\ 16 - 15 & 26 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y = 2B - A = \begin{pmatrix} 6 - 5 & 10 - 8 \\ 10 - 8 & 16 - 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación.** $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2+3 & 2+6 \\ 2+6 & 4+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = A$ y $X + 2Y = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+4 \\ 1+4 & 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = B$.

- b) 4. **Combinación general e igualdad.**

$$\alpha X + \beta Y = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta & 2\alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las posiciones (1, 2) y (2, 1) dan la misma ecuación, así que hay tres ecuaciones distintas: $\alpha + \beta = 1$, $\alpha + 2\beta = 0$ y $2\alpha + 3\beta = 1$.

5. Restando las dos primeras, $\beta = -1$, y entonces $\alpha = 2$. La tercera se cumple: $4 - 3 = 1$. Por tanto, $\alpha = 2$, $\beta = -1$, es decir, $2X - Y = I$.

- c) 6. $X + kY = \begin{pmatrix} 1+k & 1+2k \\ 1+2k & 2+3k \end{pmatrix}$ es diagonal si los dos elementos de fuera de la diagonal son nulos: $1 + 2k = 0$, es decir, $k = -\frac{1}{2}$.

7. Con ese valor:

$$X - \frac{1}{2}Y = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}I$$

Es una matriz **escalar** (diagonal con los dos elementos de la diagonal iguales). Cuadra con b): multiplicando $2X - Y = I$ por $\frac{1}{2}$ se obtiene exactamente $X - \frac{1}{2}Y = \frac{1}{2}I$.

Para el examen: en a) se puntúa despejar correctamente y comprobar; resolver el sistema con letras te deja en dos operaciones. En b) y c) escribe la matriz general antes de igualar y comprueba la ecuación que «sobra»: si no se cumpliera, la respuesta sería «no existen».

Resumen

- Suma y resta: solo entre matrices de la **misma dimensión**, elemento a elemento. Cumplen las propiedades de los números (asociativa, conmutativa, neutro O , opuesto $-A$).
- kA multiplica por k **todos** los elementos. $k(A + B) = kA + kB$, $(k + h)A = kA + hA$, y $kA = O$ solo si $k = 0$ o $A = O$.
- Un número no se suma a una matriz: se escribe $A + kI$.
- Combinación lineal: $c_1A_1 + \dots + c_rA_r$. Para ver si M lo es, se iguala la combinación general a M y se resuelve el sistema, comprobando todas las ecuaciones.
- Ecuaciones y sistemas lineales con matrices incógnita: se despeja con letras como con números y se opera con matrices al final; se comprueba en todas las ecuaciones.
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ y $\text{tr}(kA) = k \text{tr}(A)$.
- Ampliación: toda matriz cuadrada es, de forma única, $\frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$, simétrica más antisimétrica.

Producto de matrices

IDEA CLAVE

El producto de matrices se hace «fila por columna» y solo existe cuando las dimensiones encajan. Es la operación que más se usa en la PAU y la que más errores provoca, porque **no es conmutativo**: AB y BA suelen ser distintas.

Cuándo se pueden multiplicar dos matrices

Para multiplicar A por B , el número de columnas de A tiene que ser igual al número de filas de B . El resultado tiene las filas de A y las columnas de B :

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times p}{B} = \underset{m \times p}{C}$$

Una forma de recordarlo: escribe las dimensiones una al lado de la otra. Los dos números «de dentro» deben coincidir y los dos «de fuera» dan la dimensión del producto. Por ejemplo, $(2 \times 3) \cdot (3 \times 4)$ da una matriz 2×4 , pero $(3 \times 4) \cdot (2 \times 3)$ no existe.

Definición: fila por columna

DEFINICIÓN · PRODUCTO DE MATRICES

Si $A = (a_{ij})$ es $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ es $n \times p$, su producto es la matriz $C = AB$, de dimensión $m \times p$, cuyo elemento c_{ij} se obtiene multiplicando la **fila i de A** por la **columna j de B** , elemento a elemento, y sumando:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Por ejemplo, con A de dimensión 2×2 y B de dimensión 2×3 , el producto es 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 9 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

El elemento $c_{13} = 9$ sale de la fila 1 de A , $(2, -1)$, y de la columna 3 de B , $(4, -1)$: $2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) = 9$. Ahora se entiende la condición de dimensiones: para multiplicar una fila por una columna «elemento a elemento», las dos tienen que tener la misma longitud.

Animación interactiva disponible en la versión web de este apartado.

Prueba la animación: elige las dimensiones, cambia los números y pulsa en cualquier elemento del resultado para ver qué fila y qué columna lo producen. Fíjate en qué pasa con el resultado cuando intercambias el orden de los factores.

MÉTODO · CÓMO CALCULAR UN PRODUCTO SIN PERDERTE

1. Escribe las dimensiones y comprueba que los números de dentro coinciden. Anota la dimensión del resultado.
2. Para cada elemento c_{ij} , señala con un dedo la fila i de la primera matriz y con otro la columna j de la segunda.
3. Multiplica los pares y suma. Rellena el resultado fila a fila.
4. Repasa los signos: casi todos los fallos de cálculo vienen de un $(-1) \cdot (-1)$ mal hecho.

Propiedades del producto

PROPIEDAD · LO QUE SÍ SE CUMPLE

Siempre que las dimensiones permitan hacer las operaciones:

- **Asociativa:** $(AB)C = A(BC)$. Por eso se escribe ABC sin paréntesis.
- **Distributiva:** $A(B + C) = AB + AC$ y $(A + B)C = AC + BC$.
- **Con un número:** $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.
- **Elemento neutro:** si A es $m \times n$, entonces $I_m A = A$ y $A I_n = A$.
- **Matriz nula:** $AO = O$ y $OA = O$ (con la matriz nula de la dimensión adecuada).

La asociativa dice que da igual qué producto hagas primero, **siempre que no cambies el orden de las matrices**. Por ejemplo, con $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$: $(PQ)R = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \end{pmatrix}$, y $P(QR)$ da lo mismo. La identidad hace el papel del 1: cada fila de I «elige» una sola fila de A .

Si A es cuadrada, tiene sentido multiplicarla por sí misma: $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, etc. Si A no es cuadrada, A^2 no existe. Las potencias se estudian a fondo en el apartado **potencias de matrices**.

El producto no es conmutativo

PROPIEDAD · EN GENERAL, $AB \neq BA$

Puede pasar que exista AB y no exista BA ; que existan las dos con dimensiones distintas; o que sean de la misma dimensión y aun así distintas. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}: \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La razón es que en AB se usan las filas de A y las columnas de B , y en BA justo al revés: son cuentas diferentes. Por eso, en una igualdad de matrices hay que respetar el lado: si multiplicas un miembro por C **por la izquierda**, el otro también se multiplica por C **por la izquierda**.

DEFINICIÓN · MATRICES QUE CONMUTAN

Dos matrices cuadradas del mismo orden **conmutan** si $AB = BA$. Por ejemplo, cualquier matriz conmuta con la identidad ($AI = IA = A$) y con sí misma ($A \cdot A = A \cdot A$). Pero $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no conmutan.

Para hallar todas las matrices que conmutan con una dada, se escribe una matriz genérica $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se calculan AX y XA y se igualan elemento a elemento: sale un sistema lineal en a, b, c, d (lo verás en el ejemplo 3).

Más diferencias con los números

Con números reales, si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$, y si $ab = ac$ con $a \neq 0$ se puede «tachar» la a . Con matrices **ninguna de las dos cosas es cierta**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y ninguno de los dos factores es la matriz nula. Del mismo modo, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene $AB = AC = A$ y, sin embargo, $B \neq C$. Lo de «tachar» solo se podrá hacer cuando A tenga inversa (lo verás en el apartado de [matriz inversa](#)).

Las fórmulas notables cambian

Al desarrollar con la distributiva, el orden de los factores se mantiene:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2, \\ (A + B)(A - B) &= A^2 - AB + BA - B^2.\end{aligned}$$

PROPIEDAD · CUÁNDO VALEN LAS FÓRMULAS DE SIEMPRE

Para matrices cuadradas del mismo orden:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA, \quad (A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \iff AB = BA.$$

Basta comparar: $(A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = BA - AB$, y $(A + B)(A - B) - (A^2 - B^2) = BA - AB$. Las dos diferencias son nulas exactamente cuando A y B conmutan.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Producto de una 2×3 por una 3×2 , y al revés

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

- a) Calcula AB .
- b) Calcula BA .

1. Dimensiones. A es 2×3 y B es 3×2 . Para AB : $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2)$, coinciden los de dentro (3) y el resultado es 2×2 . Para BA : $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3)$, coinciden (2) y el resultado es 3×3 . Los dos productos existen, pero ni siquiera tienen la misma dimensión.

2. Cálculo de AB (fila de A por columna de B):

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 2 - 2 - 3 = -3,$$

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = 1 + 0 - 4 = -3,$$

$$c_{21} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 0 - 3 + 6 = 3,$$

$$c_{22} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 8.$$

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Cálculo de BA (fila de B por columna de A). La primera fila de B es (2, 1); por las tres columnas de A da $2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$, $2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7$ y $2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$. Con las otras dos filas, (-1, 0) y (3, 4), se hace igual:

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 18 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Conclusión. AB y BA son matrices de dimensiones distintas: el orden de los factores importa.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

¿Vale el cuadrado de una suma?

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcula $(A + B)^2$.
b) Calcula $A^2 + 2AB + B^2$ y explica por qué no coincide con el resultado del apartado a).

1. Apartado a). Primero se suma y después se multiplica la suma por sí misma:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+4 \\ 1+2 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Las piezas del apartado b).

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

3. Suma.

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Por qué no coinciden. Desarrollando, $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. La fórmula «de siempre» sustituye $AB + BA$ por $2AB$, y eso solo es correcto si $AB = BA$. Aquí

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq AB,$$

y de hecho la diferencia es $(A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = BA - AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, como se comprueba restando los dos resultados.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Todas las matrices que conmutan con una dada

Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Planteamiento. «Conmutar» significa $AX = XA$. Como no sabemos nada de X , la escribimos con cuatro incógnitas y calculamos los dos productos.

2. Los dos productos.

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}.$$

3. Igualamos elemento a elemento. Dos matrices son iguales si lo son todos sus elementos:

$$\begin{cases} a+c = a \\ b+d = a+b \\ c = c \\ d = c+d \end{cases} \implies \begin{cases} c = 0 \\ d = a \end{cases}$$

La tercera ecuación se cumple siempre y la cuarta repite $c = 0$. Sobre a y b no hay ninguna condición: quedan libres.

4. Resultado. Las matrices que conmutan con A son exactamente

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

5. Comprobación rápida. Con $a = 2, b = 5$: $AX = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $XA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Coinciden. Observa que la identidad ($a = 1, b = 0$) y la propia A ($a = 1, b = 1$) están en la familia, como debía ser.

Para el examen: en este tipo de ejercicio se puntúa el planteamiento ($AX = XA$ con una matriz genérica), los dos productos bien hechos y la resolución del sistema. La respuesta debe ser **una familia de matrices** que dependa de parámetros, no una sola matriz: si te sale una única matriz, revisa el sistema.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · MULTIPLICAR ELEMENTO A ELEMENTO

Calcular AB multiplicando $a_{11}b_{11}$, $a_{12}b_{12}$, etc., como si fuera una suma. Eso **no** es el producto de matrices. Cada elemento del producto es una suma de varios productos: fila de la primera por columna de la segunda. Si te sale un producto de dos matrices 2×2 en el que cada elemento es una sola multiplicación, está mal.

ERROR TÍPICO · CAMBIAR EL ORDEN DE LOS FACTORES

Escribir $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ o $(AB)^2 = A^2B^2$ sin más. Todas suponen que $AB = BA$, y en general es falso. Lo correcto es $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ y $(AB)^2 = ABAB$. Lo mismo al despejar: si en una igualdad multiplicas por C a la izquierda en un lado y a la derecha en el otro, la igualdad deja de ser cierta.

ERROR TÍPICO · SIMPLIFICAR COMO CON NÚMEROS

Deducir de $AB = O$ que $A = O$ o $B = O$, o de $AB = AC$ que $B = C$. Con matrices ninguna de las dos deducciones es válida: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = O$ con ambos factores no nulos. Solo se puede «tachar» una matriz cuando tiene inversa, y hay que decirlo.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Sean la matriz fila $A = (1 \quad 2 \quad -1)$ y la matriz columna $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula AB .
- b) Calcula BA .

1. Dimensiones. A es 1×3 y B es 3×1 . AB es $(1 \times 3) \cdot (3 \times 1) = 1 \times 1$, y BA es $(3 \times 1) \cdot (1 \times 3) = 3 \times 3$.

2. Apartado a). Una sola fila por una sola columna:

$$AB = (1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2) = (3 - 2 - 2) = (-1).$$

3. Apartado b). Cada fila de B tiene un solo número, y cada columna de A también, así que $c_{ij} = b_{i1}a_{1j}$: la fila i del resultado es la fila de A multiplicada por el elemento i de B .

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad -1) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Fila por columna da un número; columna por fila da una matriz entera.

EJERCICIO 2 ★ Básico

Sean A una matriz de dimensión 3×2 , B una de dimensión 2×4 y C una de dimensión 4×3 . Indica la dimensión de cada uno de estos productos:

- a) AB
- b) ABC
- c) CAB
- d) BCA

Para cada producto se encadenan las dimensiones: los números de dentro tienen que coincidir y se quedan los de fuera.

1. **Apartado a).** $(3 \times 2) \cdot (2 \times 4)$: coincide el 2. AB es 3×4 .
2. **Apartado b).** AB es 3×4 y C es 4×3 : $(3 \times 4) \cdot (4 \times 3)$, coincide el 4. ABC es 3×3 .
3. **Apartado c).** CA es $(4 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 4 \times 2$, y $(4 \times 2) \cdot (2 \times 4) = 4 \times 4$. CAB es 4×4 .
4. **Apartado d).** BC es $(2 \times 4) \cdot (4 \times 3) = 2 \times 3$, y $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 2 \times 2$. BCA es 2×2 .

Observa que, con estas mismas tres matrices, BA no existe: $(2 \times 4) \cdot (3 \times 2)$ y $4 \neq 3$.

EJERCICIO 3 ★ Básico

Dadas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

- a) Calcula AB .
- b) Calcula BA . ¿Conmutan A y B ?

1. Apartado a). Fila de A por columna de B :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Apartado b). Fila de B por columna de A :

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}.$$

3. Conclusión. $AB \neq BA$ (basta con que un elemento sea distinto; aquí lo son todos), así que A y B no conmutan.

EJERCICIO 4

★★ Medio

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Halla x e y para que $AB = O$.
- b) Con esos valores, calcula BA . ¿Es también la matriz nula?

1. Calculamos AB en función de x e y .

$$AB = \begin{pmatrix} 2-y & 2x-4 \\ -4+2y & -4x+8 \end{pmatrix}.$$

2. Igualamos a la matriz nula. Cada elemento debe valer 0:

$$2-y=0, \quad 2x-4=0, \quad -4+2y=0, \quad -4x+8=0 \implies x=2, y=2.$$

Las cuatro ecuaciones son compatibles (la tercera y la cuarta son las dos primeras multiplicadas por -2). Así, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Ni A ni B son nulas y, sin embargo, $AB = O$.

3. Apartado b).

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-8 & -1+4 \\ 4-16 & -2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

No es la matriz nula: que $AB = O$ no implica que $BA = O$.

EJERCICIO 5 ★★ Medio

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcula $(A + B)(A - B)$.
- b) Calcula $A^2 - B^2$.
- c) Calcula $BA - AB$ y explica qué relación tiene con los resultados de a) y b).

1. Apartado a).

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 0 - 6 & 4 + 0 \\ 0 - 6 & 6 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Apartado b).

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

No coincide con a).

3. Apartado c).

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad BA - AB = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Relación. Desarrollando con la distributiva y sin cambiar el orden, $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$, luego

$$(A + B)(A - B) - (A^2 - B^2) = BA - AB.$$

Efectivamente, $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. La fórmula «suma por diferencia» falla justo porque A y B no conmutan.

EJERCICIO 6

★★ Medio

Sean

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Halla x e y para que A y B conmuten.
- b) Con esos valores, calcula AB .

1. Los dos productos.

$$AB = \begin{pmatrix} 3x+4 & xy+1 \\ 10 & 2y+1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 3x+2y & y+3 \\ 4x+2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Igualamos elemento a elemento.

$$\begin{cases} 3x+4 = 3x+2y \\ xy+1 = y+3 \\ 10 = 4x+2 \\ 2y+1 = 5 \end{cases}$$

De la primera, $2y = 4$, es decir, $y = 2$. De la tercera, $x = 2$. Hay que comprobar que estos valores cumplen **todas** las ecuaciones: la segunda da $2 \cdot 2 + 1 = 5 = 2 + 3$ y la cuarta $2 \cdot 2 + 1 = 5$. Se cumplen, así que $x = 2$, $y = 2$.

3. Apartado b). Con $x = y = 2$:

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix},$$

y, como deben conmutar, BA da lo mismo (compruébalo).

EJERCICIO 7 ★★ Medio

Una carpintería recibe pedidos de dos tiendas. La matriz Q da las unidades pedidas (filas: tienda 1 y tienda 2; columnas: mesas, sillas y estanterías) y la matriz R da lo que necesita cada mueble (filas: mesa, silla y estantería; columnas: horas de trabajo y tablones de madera):

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Cada hora de trabajo cuesta 20 euros y cada tablón 15 euros.

- Calcula QR e interpreta sus elementos.
- Escribe los costes en una matriz columna p y calcula la matriz columna QRp , que da el coste en euros del pedido de cada tienda.
- La tienda 2 quiere añadir sillas a su pedido sin que su coste total pase de 2000 euros. ¿Cuántas sillas más puede pedir como máximo?

1. Apartado a). Q es 2×3 y R es 3×2 , así que QR es 2×2 :

$$QR = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 4 \cdot 6 + 10 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 54 \\ 42 & 49 \end{pmatrix}.$$

Cada fila es una tienda y cada columna un recurso: el pedido de la tienda 1 necesita 48 horas y 54 tablones; el de la tienda 2, 42 horas y 49 tablones. El producto «encadena» tienda $\rightarrow$ mueble $\rightarrow$ recurso: por eso las columnas de Q y las filas de R tienen que hablar de lo mismo (los muebles).

2. Apartado b). El vector de costes va en el orden de las columnas de R (horas, tablones): $p = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

$$QRp = \begin{pmatrix} 48 & 54 \\ 42 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 960 + 810 \\ 840 + 735 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1770 \\ 1575 \end{pmatrix}.$$

El pedido de la tienda 1 cuesta 1770 euros y el de la tienda 2, 1575 euros.

3. Apartado c). Por la asociativa, $QRp = Q(Rp)$, y Rp da el coste de cada mueble:

$$Rp = \begin{pmatrix} 5 \cdot 20 + 6 \cdot 15 \\ 2 \cdot 20 + 2 \cdot 15 \\ 4 \cdot 20 + 5 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 70 \\ 155 \end{pmatrix}.$$

Cada silla cuesta 70 euros. Si la tienda 2 añade n sillas, su coste es $1575 + 70n$, y debe cumplirse $1575 + 70n \leq 2000$, es decir, $70n \leq 425$, $n \leq 6,07 \dots$. Como n es entero, puede pedir **6 sillas más** como máximo (coste: $1575 + 420 = 1995$ euros).

EJERCICIO 8 ★★★ Dificil

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcula $AB - BA$ en función de m .
- b) Halla los valores de m para los que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- c) Para el valor hallado en b), calcula $(A + B)^2$.
- d) Para ese mismo valor, calcula $(A + B)(A - B)$.

1. Apartado a).

$$AB = \begin{pmatrix} m & 1+4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} m & 2m+3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 2-2m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Apartado b). Desarrollando sin cambiar el orden, $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Restando,

$$(A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = BA - AB = \begin{pmatrix} 0 & 2m-2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La igualdad se cumple si y solo si esta matriz es nula, es decir, si $2m - 2 = 0$: $m = 1$. No hace falta calcular ningún cuadrado: la igualdad equivale a que A y B conmuten.

3. Apartado c). Con $m = 1$, $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ y

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6+15 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 21 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

4. Apartado d). Con $m = 1$, $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Como para $m = 1$ las matrices conmutan, también vale $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$: en efecto, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Para el examen: la clave es escribir $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ y reducir el problema a $AB = BA$. Quien calcula los dos cuadrados con m llega al mismo sitio, pero con más cuentas y más riesgo de error.

EJERCICIO 9 ★★★ Difícil

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- a) Halla todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $AB = O$. Exprésalas en función de c y d .
- b) De las matrices del apartado a), halla las que además cumplen $BA = O$. Exprésalas en función de d .
- c) Halla la matriz B que cumple $AB = O$, $BA = O$ y cuyo elemento b_{11} vale 8.

1. Apartado a).

$$AB = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda fila es el doble de la primera, así que solo hay dos condiciones: $a = -2c$ y $b = -2d$. Por tanto,

$$B = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Intuición: cada columna de B tiene que ser «perpendicular» a la fila $(1, 2)$ de A , y todas esas columnas son múltiplos de $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Apartado b). Multiplicamos la B del apartado anterior por A por la derecha:

$$BA = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c-4d & -4c-8d \\ c+2d & 2c+4d \end{pmatrix}.$$

Todos los elementos son múltiplos de $c+2d$, así que $BA = O \iff c = -2d$. Sustituyendo:

$$B = \begin{pmatrix} 4d & -2d \\ -2d & d \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

3. Apartado c). $b_{11} = 4d = 8$, luego $d = 2$ y

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: $AB = \begin{pmatrix} 8-8 & -4+4 \\ 16-16 & -8+8 \end{pmatrix} = O$ y $BA = \begin{pmatrix} 8-8 & 16-16 \\ -4+4 & -8+8 \end{pmatrix} = O$.

Para el examen: este ejercicio demuestra que $AB = O$ no obliga a que A o B sean nulas. Si en otro problema necesitas concluir « $A = O$ o $B = O$ », recuerda que con matrices no se puede.

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A . (1 punto)
- b) Halla la matriz X que conmuta con A y cumple $AX = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. (0,75 puntos)
- c) Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula $(A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)$. (0,75 puntos)

1. Apartado a). Imponemos $AX = XA$:

$$AX = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}, \quad XA = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+b \\ c+2d & 2c+d \end{pmatrix}.$$

Igualando elemento a elemento:

$$\begin{cases} a+2c = a+2b \\ b+2d = 2a+b \\ 2a+c = c+2d \\ 2b+d = 2c+d \end{cases} \implies \begin{cases} c = b \\ d = a \end{cases}$$

(la tercera ecuación repite $d = a$ y la cuarta, $c = b$). Las matrices que conmutan con A son

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Apartado b). Por el apartado a), $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Entonces

$$AX = \begin{pmatrix} a+2b & 2a+b \\ 2a+b & a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a+2b = 4 \\ 2a+b = 5 \end{cases}$$

Restando la primera ecuación multiplicada por 2 de la segunda: $-3b = -3$, $b = 1$, y entonces $a = 2$. Así,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: $AX = \begin{pmatrix} 2+2 & 1+4 \\ 4+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$

3. Apartado c). Como $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, la diferencia pedida es $BA - AB$, sin necesidad de calcular cuadrados:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = BA - AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como no es la matriz nula, para estas A y B la fórmula del cuadrado de una suma no vale: B no es de la forma del apartado a), así que no conmuta con A .

Para el examen: en a) se valora el planteamiento $AX = XA$ con la matriz genérica, los productos y el sistema resuelto; la respuesta es una familia con dos parámetros. En b) hay que **usar** la familia de a), no empezar de cero. En c), escribir $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ y reducir a $BA - AB$ ahorra tiempo y errores; quien calcula los cuadrados por separado también puntúa si las cuentas están bien.

Resumen

- AB existe si el número de columnas de A es igual al número de filas de B : $(m \times n) \cdot (n \times p) = m \times p$.
- Cada elemento c_{ij} es la fila i de A por la columna j de B : se multiplica elemento a elemento y se suma.
- Se cumplen la asociativa, la distributiva y $AI = IA = A$. $A^2 = A \cdot A$ solo existe si A es cuadrada.
- **No es conmutativo:** en general $AB \neq BA$. Dos matrices conmutan si $AB = BA$; para hallarlas, matriz genérica e igualar elemento a elemento.
- $AB = O$ no implica $A = O$ o $B = O$, y $AB = AC$ no implica $B = C$.
- $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Las fórmulas $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ y $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ solo valen si $AB = BA$.

Potencias de matrices

IDEA CLAVE

Calcular A^n multiplicando n veces es inviable cuando $n = 2027$: hay que encontrar una regularidad. En este apartado ves las cuatro formas de hacerlo que salen en la PAU (patrón con inducción, matrices diagonales, potencias que se repiten y el binomio de Newton con una nilpotente) y dos aplicaciones: las rotaciones y los cambios entre dos estados.

Potencia de una matriz cuadrada

DEFINICIÓN · POTENCIA N-ÉSIMA

Si A es una matriz **cuadrada** y n es un número natural, A^n es el producto de n factores iguales a A :

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ veces}}, \quad A^1 = A, \quad A^0 = I$$

Solo las matrices cuadradas tienen potencias: si A es 2×3 , el producto $A \cdot A$ no existe. Por la asociativa da igual cómo se agrupan los factores, y eso permite reutilizar cálculos: $A^4 = A^2 \cdot A^2$ y $A^5 = A^4 \cdot A$.

PROPIEDAD · PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Para A cuadrada, k un número y m, n naturales:

- $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ y $(A^m)^n = A^{mn}$. En particular, A^m y A^n conmutan.
- $(kA)^n = k^n A^n$ y $I^n = I$.
- En general, $(AB)^n \neq A^n B^n$: por ejemplo, $(AB)^2 = ABAB$, y para «juntar» las A haría falta que $BA = AB$.

Las dos primeras son ciertas porque solo se cuentan factores iguales a A , y esos sí conmutan entre sí. La tercera falla por lo mismo que falla $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$: el producto de matrices no es conmutativo.

Matrices diagonales y triangulares

PROPIEDAD · POTENCIAS DE UNA MATRIZ DIAGONAL

Si D es diagonal, D^n es diagonal y se obtiene elevando a n cada elemento de la diagonal:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}$$

Al multiplicar dos diagonales, la fila i por la columna i solo tiene un producto no nulo, $d_i \cdot d_i$, y fuera de la diagonal todo da 0. Es el **único** caso en que una potencia se calcula elemento a elemento.

En una matriz **triangular** (superior o inferior) pasa algo parecido, pero solo con la diagonal: los elementos de la diagonal de T^n son las potencias n -ésimas de los de T , y T^n sigue siendo triangular del mismo tipo. Los elementos de fuera de la diagonal hay que calcularlos.

Calcular A^n por patrón: el método de inducción

Cuando la matriz no es diagonal, se calculan las primeras potencias, se busca una regularidad y se **demuestra** que se cumple siempre. Por ejemplo, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parece que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ver que se cumple para $n = 1, 2, 3, 4$ no basta: hay que probarlo para **todos** los n .

MÉTODO · DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN DE UNA FÓRMULA PARA A^n

1. **Conjetura.** Calcula A^2 , A^3 (y A^4 si hace falta) y escribe la fórmula que crees que da A^n .
2. **Caso inicial.** Comprueba que la fórmula es cierta para $n = 1$.
3. **Hipótesis de inducción.** Supón que la fórmula es cierta para un n cualquiera.
4. **Paso de inducción.** Calcula $A^{n+1} = A^n \cdot A$ usando la fórmula para A^n , y comprueba que el resultado es la fórmula con $n + 1$ en lugar de n .
5. **Conclusión.** Si se cumple para $n = 1$ y cada vez que se cumple para n se cumple para $n + 1$, se cumple para todo $n \geq 1$.

En el ejemplo: el caso $n = 1$ es la propia A , y si $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es la fórmula para $n + 1$. Funciona como una fila de fichas de dominó: la primera cae (caso inicial) y cada una tira la siguiente (paso de inducción), así que caen todas.

Potencias que se repiten

A veces una potencia pequeña da una matriz muy sencilla y, a partir de ahí, las potencias se repiten. Entonces A^n se calcula sin ninguna fórmula general.

DEFINICIÓN · IDEMPOTENTE, INVOLUTIVA Y PERIÓDICA

Sea A una matriz cuadrada.

- A es **idempotente** si $A^2 = A$. Entonces $A^3 = A^2 A = A A = A$ y, en general, $A^n = A$ para todo $n \geq 1$.
- A es **involutiva** si $A^2 = I$. Entonces las potencias pares valen I y las impares valen A .
- Si $A^p = I$ para algún p , las potencias se repiten cada p : $A^n = A^r$, donde r es el **resto** de dividir n entre p (con $A^0 = I$).

Por ejemplo, si $A^3 = I$, para calcular A^{2027} se divide: $2027 = 3 \cdot 675 + 2$, así que

$$A^{2027} = (A^3)^{675} \cdot A^2 = I^{675} \cdot A^2 = A^2$$

Otra situación frecuente es $A^2 = kA$ para un número k . Entonces $A^3 = A^2 A = kA^2 = k^2 A$ y, por inducción, $A^n = k^{n-1} A$. Es lo que pasa con la matriz de orden 3 con todos sus elementos iguales a 1, que cumple $A^2 = 3A$ (cada elemento de A^2 es $1 + 1 + 1$) y, por tanto, $A^n = 3^{n-1} A$.

Matrices nilpotentes y el binomio de Newton

DEFINICIÓN · MATRIZ NILPOTENTE

Una matriz cuadrada N es **nilpotente** si alguna potencia suya es la matriz nula: $N^p = O$. Entonces $N^n = O$ para todo $n \geq p$.

Las matrices triangulares con la diagonal nula son nilpotentes. Por ejemplo,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = O$$

Cada vez que se multiplica por N , los elementos no nulos «suben» una diagonal, hasta que se salen de la matriz.

Esto se aprovecha cuando una matriz es «un número por la identidad más una nilpotente», $A = \lambda I + N$. La fórmula del binomio de Newton, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, se demuestra usando solo que $ab = ba$, así que **vale para matrices que conmutan**. Y λI conmuta con cualquier matriz.

TEOREMA · BINOMIO DE NEWTON CON UNA NILPOTENTE

Si $A = \lambda I + N$ con $N^3 = O$, entonces, para todo $n \geq 2$,

$$A^n = \lambda^n I + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} N + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} N^2 = \lambda^n I + n \lambda^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} N^2$$

Si además $N^2 = O$, queda solo $A^n = \lambda^n I + n \lambda^{n-1} N$.

Los demás términos del binomio llevan $N^3, N^4, \dots$ y son nulos. Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de antes es $I + N$ con $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N^2 = O$, así que su potencia es $I + nN = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la misma fórmula que salió por inducción.

Rotaciones

La matriz

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

gira cada punto del plano un ángulo θ alrededor del origen (en sentido antihorario) cuando se multiplica por su vector columna de coordenadas. Por ejemplo, $R(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lleva el punto $(1, 0)$ al $(0, 1)$.

PROPIEDAD · POTENCIAS DE UNA ROTACIÓN

$R(\alpha) R(\beta) = R(\alpha + \beta)$ y, en consecuencia, $R(\theta)^n = R(n\theta)$ para todo $n \geq 1$.

Girar α y después β es girar $\alpha + \beta$. En cuentas, el elemento $(1, 1)$ del producto es $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$, y los demás salen igual con las fórmulas del seno y el coseno de una suma. La fórmula de la potencia se demuestra por inducción: $R(\theta)^{n+1} = R(n\theta)R(\theta) = R((n+1)\theta)$.

Así se explica la periodicidad: como $R(90^\circ)^4 = R(360^\circ) = I$, las potencias de $R(90^\circ)$ se repiten cada 4; las de $R(60^\circ)$, cada 6; y las de $R(120^\circ)$ cumplen $R(120^\circ)^3 = I$.

Aplicación: cambios entre dos estados

Supón que una población se reparte entre dos estados (clientes de dos compañías, alumnos que aprueban o suspenden...) y que cada año una fracción fija pasa de uno a otro. Si x_n e y_n son las cantidades en cada estado tras n años, la regla del cambio se escribe

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde M es la **matriz de transición**: su columna j dice cómo se reparte, al año siguiente, lo que estaba en el estado j . Por eso sus elementos son no negativos y cada columna suma 1. Aplicando la regla n veces,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

y la potencia M^n da directamente la situación al cabo de n años. Un reparto que no cambia de un año a otro ($Mv = v$) se llama **de equilibrio**; se encuentra resolviendo un sistema lineal.

La misma idea sirve para cualquier sucesión definida a partir de las anteriores. La de Fibonacci ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$) cumple $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$, y en el ejercicio 8 verás que las potencias de esa matriz contienen la sucesión entera.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Una matriz nilpotente

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A^2 .
- b) Calcula A^3 .
- c) Calcula A^{2027} .

- a) Fila por columna:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \cdot 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El único elemento no nulo es el $(1, 3)$: fila 1 de A , $(0, 1, 2)$, por columna 3, $(2, 3, 0)$, da $0 + 3 + 0 = 3$.

- b) $A^3 = A^2 \cdot A$. La única fila no nula de A^2 es la primera, $(0, 0, 3)$, y al multiplicarla por cualquier columna de A se multiplica el 3 por un elemento de la tercera fila de A , que es nula:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

- c) Como $A^3 = O$, para $n \geq 3$ es $A^n = A^3 \cdot A^{n-3} = O \cdot A^{n-3} = O$. En particular, $A^{2027} = O$.

A es nilpotente, como toda matriz triangular con la diagonal nula.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

 A^n por patrón e inducción

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A^2 y A^3 .
 b) Halla una fórmula para A^n y demuéstrela por inducción.
 c) Calcula A^{50} .

a) 1. Primeras potencias.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) 2. **Conjetura.** Solo cambian los elementos $(2, 1)$ y $(3, 1)$, que valen $1, 2, 3$: parece que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Caso inicial.** Para $n = 1$ la fórmula da A .4. **Paso de inducción.** Suponemos la fórmula cierta para n y calculamos $A^{n+1} = A^n \cdot A$:

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 0 \\ n+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el elemento $(2, 1)$ es la fila $(n, 1, 0)$ por la columna $(1, 1, 1)$: $n + 1$. Es la fórmula con $n + 1$.5. **Conclusión.** Por inducción, la fórmula vale para todo $n \geq 1$.c) Sustituyendo $n = 50$:

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otra forma de verlo: $A = I + N$ con $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que cumple $N^2 = O$, así que $A^n = I + nN$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Binomio de Newton con una matriz nilpotente

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Escribe $A = 2I + N$ y calcula N^2 y N^3 .
- Calcula A^n para $n \geq 2$.
- Calcula A^{10} .

- a) 1. **La descomposición.** Restando $2I$ queda la parte de fuera de la diagonal:

$$N = A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = N^2 N = O$$

N es nilpotente: cada potencia «sube» un escalón los unos, y al tercer paso desaparecen.

- b) 2. **Por qué se puede usar el binomio.** El binomio de Newton solo vale si los dos sumandos conmutan. Aquí uno de ellos es $2I$, y $(2I)N = 2N = N(2I)$. Por tanto,

$$A^n = (2I + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2I)^{n-k} N^k$$

3. **Los términos que sobreviven.** Como $N^3 = O$, todos los términos con $k \geq 3$ son nulos, y $(2I)^{n-k} = 2^{n-k} I$:

$$A^n = 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 = 2^n I + n 2^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2$$

4. **Colocando cada término en su sitio.** $2^n I$ ocupa la diagonal, N tiene unos en la diagonal de encima y N^2 un uno en la esquina $(1, 3)$. Además, $\frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} = n(n-1) 2^{n-3}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n 2^{n-1} & n(n-1) 2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

5. **Comprobación con $n = 2$.** La fórmula da $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, y multiplicando directamente $A \cdot A$ sale lo mismo (por ejemplo, el elemento $(1, 3)$ es $2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 1$).

- c) 6. Con $n = 10$: $2^{10} = 1024$, $10 \cdot 2^9 = 5120$ y $10 \cdot 9 \cdot 2^7 = 11520$:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 5120 & 11520 \\ 0 & 1024 & 5120 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$$

Para el examen: hay que **justificar** que se puede usar el binomio (« $2I$ y N conmutan») y que los términos desaparecen (« $N^3 = O$ »). Sin esas dos frases el desarrollo no es válido y se puntúa como un resultado sin justificar. Comprobar la fórmula con $n = 2$ cuesta un minuto y detecta casi todos los errores.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · ELEVAR CADA ELEMENTO A LA POTENCIA

Escribir $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$. Eso **no** es A^2 : $A^2 = A \cdot A$ se hace fila por columna y da $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$. Elevar elemento a elemento solo funciona con matrices diagonales.

ERROR TÍPICO · USAR EL BINOMIO DE NEWTON CUANDO LOS SUMANDOS NO CONMUTAN

$(A + B)^n$ solo se desarrolla con el binomio si $AB = BA$. Con $A = \lambda I + N$ siempre se puede, porque λI conmuta con todo; pero si se descompone A en dos matrices cualesquiera (por ejemplo, su parte diagonal y su parte de fuera cuando la diagonal no es constante) el binomio da un resultado falso. Antes de usarlo, escribe por qué conmutan los dos sumandos.

ERROR TÍPICO · DAR LA FÓRMULA DE A^n SIN DEMOSTRARLA O EQUIVOCARSE CON EL RESTO

Ver que una fórmula vale para $n = 1, 2, 3$ no prueba que valga para todo n : si el enunciado dice «demuestra» o «justifica», hace falta la inducción. Y en las potencias periódicas, el exponente que importa es el **resto**: si $A^4 = I$, entonces $A^{2026} = A^2$ porque $2026 = 4 \cdot 506 + 2$; no es $A^{2026/4}$ ni A^{506} .

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Sea la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula D^3 .
- b) Escribe D^n en función de n .

- a) Las potencias de una matriz diagonal se obtienen elevando cada elemento de la diagonal: $2^3 = 8$, $(-1)^3 = -1$, $3^3 = 27$.

$$D^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

- b) Por la misma razón,

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

El elemento central vale 1 si n es par y -1 si es impar.

EJERCICIO 2 ★ Básico

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Comprueba que $A^2 = A$ y calcula A^{50} .
b) Comprueba que $B = I - A$ también cumple $B^2 = B$ y calcula B^{10} .

- a) 1. Fila por columna:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4-2 & -2+1 \\ 4-2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = A$$

2. A es idempotente, así que $A^3 = A^2A = AA = A$ y, en general, $A^n = A$. Por tanto, $A^{50} = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- b) 3. $B = I - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Se puede comprobar con las letras: como I conmuta con A ,

$$B^2 = (I - A)^2 = I - 2A + A^2 = I - 2A + A = I - A = B$$

o con números: $B^2 = \begin{pmatrix} 1-2 & -1+2 \\ 2-4 & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = B$.

4. Como B es idempotente, $B^{10} = B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 3

★ Básico

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A^2 , A^3 y A^4 .
b) Calcula A^{2026} .

- a) 1. Fila por columna:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

2. Con eso, sin más productos: $A^3 = A^2 A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^4 = A^2 A^2 = (-I)(-I) = I$.

- b) 3. Como $A^4 = I$, las potencias se repiten cada 4. Dividimos: $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, luego

$$A^{2026} = (A^4)^{506} A^2 = I \cdot A^2 = -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A es la rotación de -90° : cuatro giros de un cuarto de vuelta dejan cada punto donde estaba.

EJERCICIO 4 ★★ Medio

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A^2 y A^3 .
- b) Halla una fórmula para A^n y demuéstrela por inducción.
- c) Calcula A^{10} .

a) 1. Primeras potencias.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- b) 2. Conjetura. El elemento $(1, 2)$ va 1, 2, 3 y el $(3, 3)$ va 2, 4, 8:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

3. Caso inicial. Para $n = 1$ da A .

4. Paso de inducción. Si la fórmula vale para n :

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

que es la fórmula para $n + 1$. Por inducción, vale para todo $n \geq 1$.

- c) Con $n = 10$: $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$.

Fíjate en que A está formada por dos «bloques» que no se mezclan: el 2×2 de arriba, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cuya potencia ya conoces, y el número 2 de abajo.

EJERCICIO 5

★★ Medio

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A^2 y A^3 .
 b) Calcula A^{2027} .
 c) Calcula $A^{2027} + A^{2028} + A^{2029}$.

- a) 1. Fila por columna:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Multiplicar por A por la izquierda «baja» cada fila un puesto (la última pasa arriba); al hacerlo tres veces, todo vuelve a su sitio.

- b) 2. Como $A^3 = I$, las potencias se repiten cada 3. Dividimos: $2027 = 3 \cdot 675 + 2$, luego

$$A^{2027} = (A^3)^{675} A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) 3. Los tres exponentes consecutivos dan los tres restos: $A^{2028} = A^{2027} A = A^3 = I$ y $A^{2029} = A^{2028} A = A$. Por tanto,

$$A^{2027} + A^{2028} + A^{2029} = A^2 + I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En cada posición hay un 1 en exactamente una de las tres matrices I, A, A^2 .

EJERCICIO 6

★★ Medio

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Escribe $A = 3I + N$, comprueba que $N^2 = O$ y calcula A^n en función de n .
- b) Calcula A^4 .
- c) Halla el valor de n para el que el elemento $(1, 2)$ de A^n es el triple del elemento $(1, 1)$.

a) 1. $N = A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Como $3I$ conmuta con N , vale el binomio de Newton, y como $N^2 = O$, solo quedan dos términos:

$$A^n = (3I + N)^n = 3^n I + n 3^{n-1} N = \begin{pmatrix} 3^n & n 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

b) Con $n = 4$: $3^4 = 81$ y $4 \cdot 3^3 = 108$, así que $A^4 = \begin{pmatrix} 81 & 108 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$.

c) Imponemos $n 3^{n-1} = 3 \cdot 3^n$. Dividiendo entre 3^{n-1} (que no es cero): $n = 3 \cdot 3 = 9$. Comprobación: en A^9 el elemento $(1, 1)$ es 3^9 y el $(1, 2)$ es $9 \cdot 3^8 = 3 \cdot 3^9$.

EJERCICIO 7 ★★ Medio

En una ciudad hay dos compañías de internet, A y B, que se reparten 1000 clientes (el total no cambia). Cada año, el 80 % de los clientes de A sigue en A y el 20 % se pasa a B; de los clientes de B, el 70 % sigue en B y el 30 % se pasa a A. Sean x_n e y_n los clientes de A y de B al cabo de n años.

- Escribe la matriz M que cumple $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ y calcula M^2 .
- Hoy A tiene 800 clientes y B tiene 200. ¿Cuántos tendrá cada una dentro de dos años?
- Halla el reparto de los 1000 clientes que se mantiene igual de un año al siguiente.

- 1. La matriz.** Los clientes de A el año próximo son el 80 % de los de A más el 30 % de los de B, y los de B, el 20 % de los de A más el 70 % de los de B:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{3}{10}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{7}{10}y_n \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

Cada columna suma 1: los clientes de cada compañía se reparten, pero no desaparecen.

2. Su cuadrado.

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} + \frac{3}{50} & \frac{6}{25} + \frac{21}{100} \\ \frac{4}{25} + \frac{7}{50} & \frac{3}{50} + \frac{49}{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{9}{20} \\ \frac{3}{10} & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$$

M^2 es la matriz de transición «a dos años»: por ejemplo, de cada cliente actual de A, al cabo de dos años un 70 % está en A.

- 3.** Dentro de dos años,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 560 + 90 \\ 240 + 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 650 \\ 350 \end{pmatrix}$$

A tendrá 650 clientes y B, 350 (paso a paso: tras el primer año, 700 y 300).

- 4.** Buscamos x, y con $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $x + y = 1000$. La primera ecuación es $\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y = x$, es decir, $\frac{3}{10}y = \frac{1}{5}x$, o $2x = 3y$ (la segunda ecuación da lo mismo). Con $x + y = 1000$: $x = 600$, $y = 400$.

Comprobación: $M \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 480 + 120 \\ 120 + 280 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \end{pmatrix}$. Cada año pasan 120 clientes de A a B y 120 de B a A.

EJERCICIO 8 ★★★ Difícil

La sucesión de Fibonacci se define por $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ y $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para $n \geq 1$. Sea

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula F^2 , F^3 y F^5 .
- b) Demuestra por inducción que, para todo $n \geq 1$, $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$, y usa la fórmula para escribir F^{10} .
- c) Usando que $F^{20} = F^{10} \cdot F^{10}$, calcula f_{20} sin calcular los términos de la sucesión entre f_{12} y f_{19} .

a) 1. Primeras potencias.

$$F^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^3 = F^2 F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^5 = F^3 F^2 = \begin{pmatrix} 6+2 & 3+2 \\ 4+1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Aparecen los términos de la sucesión: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

- b) 2. **Caso inicial.** Para $n = 1$, la fórmula da $\begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = F$.

3. **Paso de inducción.** Si la fórmula vale para n ,

$$F^{n+1} = F^n F = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} + f_n & f_{n+1} \\ f_n + f_{n-1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}$$

usando la definición de la sucesión en los dos elementos de la primera columna. Es la fórmula para $n + 1$, así que vale para todo $n \geq 1$.

4. F^{10} . La sucesión sigue 8, 13, 21, 34, 55, 89, así que $f_9 = 34$, $f_{10} = 55$, $f_{11} = 89$ y

$$F^{10} = \begin{pmatrix} 89 & 55 \\ 55 & 34 \end{pmatrix}$$

- c) 5. Por la fórmula, f_{20} es el elemento $(1, 2)$ de $F^{20} = F^{10} F^{10}$, es decir, la fila 1 de F^{10} por la columna 2 de F^{10} :

$$f_{20} = 89 \cdot 55 + 55 \cdot 34 = 55(89 + 34) = 55 \cdot 123 = 6765$$

En general, el mismo razonamiento da $f_{2n} = f_n (f_{n+1} + f_{n-1})$: las potencias de matrices permiten «saltar» en la sucesión.

Para el examen: en la inducción hay que señalar dónde se usa la hipótesis (la fórmula para F^n) y dónde la definición de la sucesión ($f_{n+1} + f_n = f_{n+2}$). En c) se puntúa usar $F^{20} = F^{10} F^{10}$ y la posición correcta del elemento.

EJERCICIO 9 ★★★ Difícil

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- a) Halla a y b para que $A^2 = I$. Comprueba que, con esos valores, A no es ni I ni $-I$.
 b) Para esos valores, calcula A^{2027} .
 c) Para esos valores, demuestra que $(I + A)^2 = 2(I + A)$ y calcula $(I + A)^n$ en función de n .

a) 1. El cuadrado.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 2b & ab - b \\ 2a - 2 & 2b + 1 \end{pmatrix}$$

2. **Igualamos a I .** Las posiciones $(2, 1)$ y $(2, 2)$ dan $2a - 2 = 0$ y $2b + 1 = 1$, es decir, $a = 1$ y $b = 0$. Las otras dos se cumplen: $a^2 + 2b = 1$ y $ab - b = 0$. Así,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

que no es I ni $-I$ (tiene un 2 fuera de la diagonal). A diferencia de los números, donde $x^2 = 1$ solo tiene las soluciones ± 1 , hay infinitas matrices con $A^2 = I$.

- b) 3. A es involutiva: las potencias pares valen I y las impares A . Como $2027 = 2 \cdot 1013 + 1$,

$$A^{2027} = (A^2)^{1013} A = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- c) 4. **El cuadrado de $I + A$.** I conmuta con A , así que se puede desarrollar como con números:

$$(I + A)^2 = I + 2A + A^2 = I + 2A + I = 2I + 2A = 2(I + A)$$

5. **Potencias.** Llamando $B = I + A$, se tiene $B^2 = 2B$, luego $B^3 = B^2 B = 2B^2 = 4B$ y, en general, $B^n = 2^{n-1} B$. Por inducción: vale para $n = 1$, y si $B^n = 2^{n-1} B$, entonces $B^{n+1} = 2^{n-1} B^2 = 2^{n-1} \cdot 2B = 2^n B$.

6. Como $I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$$(I + A)^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n & 0 \end{pmatrix}$$

Para el examen: en a) hay que plantear las cuatro ecuaciones y comprobar las que no se usan. En c), escribir $(I + A)^2 = I + 2A + A^2$ exige decir que I y A conmutan; con dos matrices cualesquiera no se podría.

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A^2 y A^3 . (0,75 puntos)
- b) Halla el menor número natural $n \geq 1$ tal que $A^n = I$. (0,5 puntos)
- c) Calcula A^{2027} . (0,75 puntos)
- d) Calcula $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6$. (0,5 puntos)

a) 1. El cuadrado.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. El cubo.

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

Interpretación: $A = R(60^\circ)$, la rotación de 60° ($\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$). A^2 es el giro de 120° y A^3 el de 180° , que cambia el signo de todos los vectores.

- b) 3. De $A^3 = -I$ se obtiene $A^6 = (A^3)^2 = (-I)^2 = I$. Hay que ver que ninguna potencia menor vale I : A y A^2 no lo son (a la vista), $A^3 = -I$, $A^4 = A^3 A = -A \neq I$ y $A^5 = A^3 A^2 = -A^2 \neq I$. El menor es $n = 6$ (seis giros de 60° son una vuelta completa).
- c) 4. Las potencias se repiten cada 6. Dividimos: $2027 = 6 \cdot 337 + 5$, luego

$$A^{2027} = (A^6)^{337} A^5 = A^5 = -A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(un giro de 300° , es decir, de -60°).

- d) 5. Usando $A^3 = -I$: $A^4 = -A$, $A^5 = -A^2$ y $A^6 = I$. La suma es

$$A + A^2 + (-I) + (-A) + (-A^2) + I = O$$

la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: los términos se cancelan por parejas.

Para el examen: calcula solo A^2 y A^3 a mano; a partir de $A^3 = -I$ todo se obtiene con las propiedades de las potencias, sin más productos. En b) no basta con dar $n = 6$: hay que justificar que $A^1, \dots, A^5$ no son I . En c) se puntúa la división $2027 = 6 \cdot 337 + 5$ escrita explícitamente.

Resumen

- A^n solo existe si A es cuadrada; $A^0 = I$, $A^m A^n = A^{m+n}$, $(kA)^n = k^n A^n$, pero en general $(AB)^n \neq A^n B^n$.
- Diagonal: se eleva cada elemento de la diagonal. Es el único caso en que se trabaja elemento a elemento.
- Por patrón: calcula A^2 , A^3 , conjetura A^n y demuéstalo por inducción ($n = 1$ y $A^{n+1} = A^n A$).
- Potencias que se repiten: $A^2 = A \Rightarrow A^n = A$; $A^2 = I \Rightarrow$ pares I , impares A ; $A^p = I \Rightarrow A^n = A^r$ con r el resto de n entre p ; $A^2 = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1} A$.
- $A = \lambda I + N$ con N nilpotente: binomio de Newton (válido porque λI conmuta con N), y solo sobreviven los términos hasta la última potencia no nula de N .
- Rotaciones: $R(\theta)^n = R(n\theta)$; son periódicas si θ es una fracción de vuelta.
- Transiciones entre dos estados: la situación tras n pasos es M^n por la inicial; el reparto de equilibrio cumple $Mv = v$.

Matriz traspuesta, simétricas y ortogonales

IDEA CLAVE

La traspuesta de una matriz se obtiene cambiando filas por columnas. Con ella se definen las matrices simétricas ($A^t = A$), antisimétricas ($A^t = -A$) y ortogonales ($A^t A = I$), y su propiedad estrella, $(AB)^t = B^t A^t$, aparece en casi todas las demostraciones cortas y ecuaciones matriciales de la PAU.

La matriz traspuesta

DEFINICIÓN · MATRIZ TRASPUESTA

La **traspuesta** de una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ es la matriz A^t de dimensión $n \times m$ que se obtiene escribiendo las filas de A como columnas:

$$(A^t)_{ij} = a_{ji}.$$

La fila 1 de A pasa a ser la columna 1 de A^t , la fila 2 la columna 2, y así sucesivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \implies A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A es 2×3 y A^t es 3×2 . En una matriz cuadrada, trasponer es «darle la vuelta» respecto a la diagonal principal: la diagonal se queda donde está y cada a_{ij} cambia su sitio con a_{ji} . La traspuesta de una columna es una fila, y al revés.

Propiedades de la traspuesta

PROPIEDAD · PROPIEDADES DE LA TRASPUESTA

Siempre que las operaciones tengan sentido:

1. $(A^t)^t = A$.
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
3. $(kA)^t = k A^t$ para cualquier número k .
4. $(AB)^t = B^t A^t$: **la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas en orden inverso.**
5. Si A es cuadrada, $(A^n)^t = (A^t)^n$ y $\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A)$.

Las tres primeras son inmediatas: trasponer dos veces deja cada elemento en su sitio, y sumar o multiplicar por un número se hace elemento a elemento, así que da igual hacerlo antes o después de trasponer.

La cuarta es la importante. Primero, las dimensiones: si A es $m \times n$ y B es $n \times p$, entonces AB es $m \times p$ y $(AB)^t$ es $p \times m$. El producto $B^t A^t$ es $(p \times n) \cdot (n \times m)$, que da $p \times m$; en cambio, $A^t B^t$ sería $(n \times m) \cdot (p \times n)$, que en general ni siquiera existe. La demostración es corta:

$$((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k (B^t)_{ik} (A^t)_{kj} = (B^t A^t)_{ij}.$$

Se lee así: el elemento (i, j) de $(AB)^t$ es la fila j de A por la columna i de B , que es lo mismo que la fila i de B^t por la columna j de A^t . La propiedad 5 sale de aplicar la 4 repetidas veces: $(A^2)^t = (AA)^t = A^t A^t = (A^t)^2$.

Con tres factores también se invierte el orden: $(ABC)^t = C^t B^t A^t$. Es como quitarse los calcetines y los zapatos: lo último que te pusiste es lo primero que te quitas.

Matrices simétricas y antisimétricas

DEFINICIÓN · SIMÉTRICA Y ANTISIMÉTRICA

Una matriz cuadrada A es

- **simétrica** si $A^t = A$, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i, j ;
- **antisimétrica** si $A^t = -A$, es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$ para todos i, j .

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{simétrica}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisimétrica}}$$

En una antisimétrica, los elementos de la diagonal cumplen $a_{ii} = -a_{ii}$, luego $a_{ii} = 0$: **la diagonal de una antisimétrica es siempre nula**. La única matriz que es a la vez simétrica y antisimétrica es la nula, porque $A = A^t = -A$ obliga a $A = O$.

PROPIEDAD · CÓMO FABRICAR SIMÉTRICAS

Para cualquier matriz cuadrada A :

- $A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica.
- $A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$: toda matriz cuadrada es suma de una simétrica y una antisimétrica.

Para cualquier matriz A (también rectangular), AA^t y $A^t A$ son cuadradas y simétricas.

Para la primera basta trasponer: $(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A$, que es la misma matriz. La de AA^t la demostrarás tú en los ejercicios, con la propiedad 4.

Cuidado: **el producto de dos simétricas no tiene por qué ser simétrico**. Si A y B son simétricas, $(AB)^t = B^t A^t = BA$, así que AB es simétrica si y solo si $AB = BA$. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, que no es simétrica.

Matrices ortogonales

DEFINICIÓN · MATRIZ ORTOGONAL

Una matriz cuadrada A de orden n es **ortogonal** si

$$A^t A = I_n.$$

El elemento (i, j) de $A^t A$ es la fila i de A^t (la columna i de A) por la columna j de A . Por tanto, $A^t A = I$ significa dos cosas sobre las columnas de A :

- cada columna «por sí misma» da 1: la suma de los cuadrados de sus elementos es 1 (tiene longitud 1);
- dos columnas distintas dan 0 al multiplicarlas elemento a elemento y sumar (son perpendiculares).

Por ejemplo, $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ es ortogonal: las columnas $\frac{1}{5}(3, 4)$ y $\frac{1}{5}(-4, 3)$ cumplen $\frac{9+16}{25} = 1$, $\frac{16+9}{25} = 1$ y $\frac{-12+12}{25} = 0$.

PROPIEDAD · ROTACIONES DEL PLANO

Para cualquier ángulo α , la matriz de giro

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

es ortogonal, y su traspuesta $R_\alpha^t = R_{-\alpha}$ es el giro del mismo ángulo en sentido contrario.

En efecto, $R_\alpha^t R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{pmatrix} = I$. Las rotaciones no cambian longitudes ni ángulos, y esa es la idea geométrica de «ortogonal». También son ortogonales las simetrías $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y las matrices que solo cambian el orden de las filas de I , como $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si A es ortogonal, A^t «deshace» lo que hace A : si $AX = B$, multiplicando por A^t por la izquierda queda $A^t AX = A^t B$, es decir, $X = A^t B$. Es lo que usarás en el ejemplo 3.

NOTA · ADELANTO: LA TRASPUESTA ES LA INVERSA

En el apartado de **matriz inversa** verás que, si A es cuadrada y $A^t A = I$, entonces también $AA^t = I$, es decir, $A^{-1} = A^t$. Por eso las filas de una matriz ortogonal también tienen longitud 1 y son perpendiculares entre sí. Y en el tema de determinantes verás que una matriz ortogonal tiene determinante 1 o -1 .

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

La traspuesta de un producto

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) Calcula A^t .
- b) Calcula $(AB)^t$.
- c) Calcula $A^t B^t$ y compárala con $(AB)^t$.

- a) Las filas de A pasan a ser columnas:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) 1. **Dimensiones.** A es 2×3 y B es 3×2 : AB existe y es 2×2 .

2. **Producto fila por columna.**

$$AB = \begin{pmatrix} 2+1+9 & 4+0+3 \\ 0-4+3 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Trasponemos.**

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puedes comprobar que $B^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ da exactamente lo mismo, como dice la propiedad.

- c) A^t es 3×2 y B^t es 2×3 , así que $A^t B^t$ es 3×3 :

$$A^t B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ni siquiera tiene la dimensión de $(AB)^t$, que es 2×2 . Por eso la traspuesta de un producto **no** es $A^t B^t$: el orden se invierte.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Una antisimétrica y su cuadrado

Se considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} t & 2x & -4 \\ -6 & 0 & y \\ z+1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Halla x , y , z y t para que M sea antisimétrica.
 b) Con esos valores, justifica sin hacer cuentas que M^2 es simétrica y calcula M^2 .

a) M es antisimétrica si $m_{ij} = -m_{ji}$ para todos los i, j .

1. **Diagonal.** Debe ser nula: $t = 0$ (los otros dos elementos ya son 0).
2. **Posición (1, 2) con (2, 1):** $2x = -(-6) = 6$, luego $x = 3$.
3. **Posición (1, 3) con (3, 1):** $-4 = -(z+1)$, luego $z = 3$.
4. **Posición (2, 3) con (3, 2):** $y = -3$.

Con $x = 3$, $y = -3$, $z = 3$, $t = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -6 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) 1. **Sin cuentas.** Usando $(M^2)^t = (M^t)^2$ y $M^t = -M$:

$$(M^2)^t = (M^t)^2 = (-M)^2 = M^2.$$

Así que M^2 es simétrica. Esto vale para **cualquier** matriz antisimétrica.

2. **Cálculo.**

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -6 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -6 & 0 & -3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 & -12 & -18 \\ -12 & -45 & 24 \\ -18 & 24 & -25 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, $(M^2)_{11} = 0 \cdot 0 + 6 \cdot (-6) + (-4) \cdot 4 = -52$. El resultado es simétrico, como se había anunciado: sirve de comprobación de las cuentas.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Completar una matriz ortogonal y usarla

Se considera la matriz

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -2 & 2 & b \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}.$$

a) Halla todos los valores de a , b y c para los que A es ortogonal, es decir, $A^t A = I$.

b) Para la solución con $c > 0$, halla la matriz X tal que $AX = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) 1. **Qué significa $A^t A = I$.** El elemento (i, j) de $A^t A$ es la columna i de A por la columna j de A (elemento a elemento y sumando). Llamamos $c_1 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$, $c_2 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ y $c_3 = \frac{1}{3}(a, b, c)$ a las columnas. Hay que imponer que cada columna por sí misma dé 1 y dos distintas den 0.

2. **Lo que ya se cumple.** $c_1 \cdot c_1 = \frac{4+4+1}{9} = 1$, $c_2 \cdot c_2 = \frac{1+4+4}{9} = 1$, $c_1 \cdot c_2 = \frac{2-4+2}{9} = 0$. Las dos primeras columnas están bien.

3. **Condiciones para la tercera columna.**

$$\begin{cases} c_1 \cdot c_3 = 0 & \Longleftrightarrow 2a - 2b + c = 0 \\ c_2 \cdot c_3 = 0 & \Longleftrightarrow a + 2b + 2c = 0 \\ c_3 \cdot c_3 = 1 & \Longleftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 9 \end{cases}$$

4. **Las dos ecuaciones lineales.** Sumándolas, $3a + 3c = 0$, luego $a = -c$. Sustituyendo en la segunda, $-c + 2b + 2c = 0$, luego $b = -\frac{c}{2}$.

5. **La ecuación de la longitud.** $c^2 + \frac{c^2}{4} + c^2 = 9 \Longleftrightarrow \frac{9c^2}{4} = 9 \Longleftrightarrow c^2 = 4 \Longleftrightarrow c = \pm 2$.

- Si $c = 2$: $a = -2$, $b = -1$.
- Si $c = -2$: $a = 2$, $b = 1$.

Hay dos soluciones: $(a, b, c) = (-2, -1, 2)$ y $(a, b, c) = (2, 1, -2)$. Tiene sentido: en el espacio hay exactamente dos direcciones de longitud 1 perpendiculares a dos columnas dadas, una opuesta a la otra.

b) 1. **La matriz.** Con $c = 2$:

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. **Despejar X con la traspuesta.** Si $AX = B$, multiplicando por A^t **por la izquierda** en los dos miembros: $A^t AX = A^t B$, y como $A^t A = I$, queda $X = A^t B$. Así, si hay solución, es esta y solo esta:

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 - 2 + 4 \\ -1 + 2 + 8 \\ 2 - 1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. **Comprobación** (necesaria: hemos visto que la solución, si existe, es esa, y ahora vemos que funciona):

$$AX = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0+3-6 \\ 0+6-3 \\ 0+6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Para el examen: en a), escribe qué significa $A^t A = I$ en términos de las columnas antes de plantear ecuaciones; resolver primero las lineales y después la cuadrática evita sistemas largos. No olvides la segunda solución $c = -2$. En b), di explícitamente que multiplicas **por la izquierda** por A^t y comprueba el resultado.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · TRASPONER UN PRODUCTO SIN CAMBIAR EL ORDEN

Escribir $(AB)^t = A^t B^t$ es el fallo más frecuente con la traspuesta. Lo correcto es $(AB)^t = B^t A^t$. Si dudas, mira las dimensiones: con A de 2×3 y B de 3×2 , $(AB)^t$ es 2×2 y $A^t B^t$ es 3×3 (ejemplo 1). En las demostraciones, este error invalida todo el razonamiento.

ERROR TÍPICO · COMPROBAR SOLO LA LONGITUD DE LAS COLUMNAS

Para ver si una matriz es ortogonal no basta con que cada columna tenga longitud 1: también tienen que ser perpendiculares dos a dos. $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene columnas de longitud 1 y no es ortogonal, porque $A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq I$. Lo más seguro es calcular $A^t A$ completo. Tampoco hay que confundir ortogonal ($A^t A = I$) con antisimétrica ($A^t = -A$).

ERROR TÍPICO • OLVIDAR LA DIAGONAL DE UNA ANTISIMÉTRICA

Al imponer que una matriz sea antisimétrica, muchos alumnos plantean solo las condiciones de fuera de la diagonal, como en las simétricas. Pero en una antisimétrica la diagonal **sí** da condiciones: $a_{ii} = -a_{ii}$ obliga a $a_{ii} = 0$. Si un elemento de la diagonal es un número distinto de 0, la matriz no puede ser antisimétrica para ningún valor de los parámetros.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

- a) Calcula A^t .
- b) Calcula $A^t - 2B$.
- c) Calcula $A - 2B^t$ y comprueba que es la traspuesta del resultado de b).

- a) Las filas de A se escriben como columnas:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- b) Las dos matrices son 3×2 , así que se pueden restar:

$$A^t - 2B = \begin{pmatrix} 1-4 & 3-2 \\ -2-0 & 1+2 \\ 0-10 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, y

$$A - 2B^t = \begin{pmatrix} 1-4 & -2-0 & 0-10 \\ 3-2 & 1+2 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -10 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

que es la traspuesta de la matriz de b). Es lo que dicen las propiedades: $(A^t - 2B)^t = (A^t)^t - 2B^t = A - 2B^t$.

EJERCICIO 2 ★ Básico

Indica si cada una de las siguientes matrices es simétrica, antisimétrica o ninguna de las dos:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. P : $p_{12} = p_{21} = -1$, así que $P^t = P$: es **simétrica**.
2. Q : la diagonal es nula y $q_{12} = 3 = -q_{21}$, así que $Q^t = -Q$: es **antisimétrica**.
3. R : no es simétrica, porque $r_{12} = 2 \neq r_{21} = -2$. Tampoco es antisimétrica, porque $r_{11} = 1 \neq 0$ (la diagonal de una antisimétrica es nula), aunque fuera de la diagonal sí se cumple $r_{12} = -r_{21}$. **Ninguna** de las dos.
4. S : la diagonal es nula, $s_{12} = 4 = -s_{21}$, $s_{13} = -1 = -s_{31}$ y $s_{23} = 2 = -s_{32}$: es **antisimétrica**.

EJERCICIO 3 ★ Básico

Sean

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcula $A^t A$.
- b) Calcula $B^t B$.
- c) ¿Cuál de las dos matrices es ortogonal?

a) $A^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, y

$$A^t A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9+16 & -12+12 \\ -12+12 & 16+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observa que el factor $\frac{1}{5}$ aparece dos veces (en A^t y en A) y da $\frac{1}{25}$.

b)

$$B^t B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- c) A es ortogonal porque $A^t A = I$. B no lo es: sus columnas son perpendiculares, pero tienen longitud $\sqrt{2}$, no 1. (La matriz $\frac{1}{\sqrt{2}}B$ sí sería ortogonal.)

EJERCICIO 4 ★★ Medio

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcula AB^t .
- b) Calcula BA^t usando el resultado de a) y una propiedad de la traspuesta, sin multiplicar.
- c) Calcula $AB^t + BA^t$ y justifica por qué tenía que salir una matriz simétrica.

- a) A es 2×3 y B^t es 3×2 , así que AB^t es 2×2 :

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0-1 & 1-2-2 \\ 0+0+1 & 0-3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- b) Por la propiedad de la traspuesta del producto, $(AB^t)^t = (B^t)^t A^t = BA^t$. Basta trasponer el resultado de a):

$$BA^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

- c)

$$AB^t + BA^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Llamando $C = AB^t$, la suma es $C + C^t$, y toda matriz de la forma $C + C^t$ es simétrica: $(C + C^t)^t = C^t + C$.

EJERCICIO 5 ★★ Medio

Escribe la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

como suma $A = S + T$ de una matriz simétrica S y una antisimétrica T .

a) Calcula S .

b) Calcula T .

1. **Idea.** Si $A = S + T$ con $S^t = S$ y $T^t = -T$, trasponiendo $A^t = S - T$. Sumando y restando las dos igualdades:

$$S = \frac{A + A^t}{2}, \quad T = \frac{A - A^t}{2}.$$

2. **La traspuesta.** $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$

a)

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -4 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comprobación: S es simétrica, T es antisimétrica (con diagonal nula) y $S + T = A$. Además la descomposición es única: el paso 1 muestra que S y T no pueden ser otras.

EJERCICIO 6 ★★ Medio

Una cadena tiene tres tiendas que venden dos productos. La matriz Q recoge las unidades vendidas en una semana (filas: tiendas 1, 2 y 3; columnas: producto 1 y producto 2), y la matriz fila p , el precio en euros de cada producto:

$$Q = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 10 & 25 \\ 30 & 5 \end{pmatrix}, \quad p = (4 \quad 6).$$

Sea $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Calcula Qp^t e interpreta el resultado.
- Calcula Q^tu e interpreta el resultado.
- Calcula pQ^tu e interpreta el resultado.

- a) p^t es la columna de precios. Q es 3×2 y p^t es 2×1 , así que Qp^t es 3×1 :

$$Qp^t = \begin{pmatrix} 20 \cdot 4 + 15 \cdot 6 \\ 10 \cdot 4 + 25 \cdot 6 \\ 30 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 190 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Cada fila multiplica las unidades de una tienda por los precios: son los **ingresos de cada tienda**, 170, 190 y 150 euros.

- b) Q^t es 2×3 (filas: productos; columnas: tiendas), y multiplicar por u suma cada fila:

$$Q^tu = \begin{pmatrix} 20 + 10 + 30 \\ 15 + 25 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Son las **unidades vendidas de cada producto** entre las tres tiendas.

- c) $p(Q^tu) = (4 \quad 6) \begin{pmatrix} 60 \\ 45 \end{pmatrix} = 240 + 270 = 510$. Es el **ingreso total** de la cadena en euros: precio por unidades de cada producto, sumado. Coincide con la suma de los ingresos de a), $170 + 190 + 150 = 510$, como debe ser: $pQ^tu = (Qp^t)^tu$.

EJERCICIO 7 ★★ Medio

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $n \geq 1$ un número natural.

- a) Calcula A^n en función de n .
- b) Calcula $(A^t)^n$ en función de n usando una propiedad de la traspuesta.
- c) Calcula $A^n(A^t)^n$ y justifica por qué es simétrica.

a) 1. **Primeras potencias.** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. El patrón es $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. **Inducción.** Vale para $n = 1$. Si vale para n , entonces

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Como $(A^t)^n = (A^n)^t$, basta trasponer a):

$$(A^t)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$A^n(A^t)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4n^2 & 2n \\ 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

Es simétrica porque, llamando $B = A^n$, el producto es BB^t , y $(BB^t)^t = (B^t)^t B^t = BB^t$.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

Demostración

Demuestra las siguientes afirmaciones.

- a) Para cualquier matriz A (no necesariamente cuadrada), las matrices AA^t y A^tA son simétricas.
- b) Si A y B son matrices ortogonales del mismo orden, su producto AB también es ortogonal.
- c) Si A es a la vez simétrica y ortogonal, entonces $A^2 = I$.

- a) 1. **Dimensiones.** Si A es $m \times n$, A^t es $n \times m$; AA^t es $m \times m$ y A^tA es $n \times n$. Las dos son cuadradas, así que tiene sentido preguntar si son simétricas.

2. **Trasponemos** con $(XY)^t = Y^tX^t$ y $(A^t)^t = A$:

$$(AA^t)^t = (A^t)^tA^t = AA^t, \quad (A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA.$$

Cada una coincide con su traspuesta: son simétricas.

- b) Hay que probar que $(AB)^t(AB) = I$. Usando la traspuesta del producto, la asociativa y que $A^tA = I$ y $B^tB = I$:

$$(AB)^t(AB) = B^tA^tAB = B^t(A^tA)B = B^tIB = B^tB = I.$$

Luego AB es ortogonal. (Geoméricamente: girar y después volver a girar sigue siendo un giro.)

- c) Por ser simétrica, $A^t = A$. Por ser ortogonal, $A^tA = I$. Sustituyendo la primera en la segunda: $AA = I$, es decir, $A^2 = I$. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es simétrica y ortogonal, y su cuadrado es I .

Para el examen: en las demostraciones, escribe en cada paso qué propiedad usas («traspuesta del producto», «asociativa», «porque A es ortogonal»). Una cadena de igualdades sin justificar se puntúa a medias, y escribir $(AB)^t = A^tB^t$ anula el apartado b).

EJERCICIO 9 ★★★ Difícil

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$, con x, y, z reales (las dos matrices son simétricas).

- a) Halla la condición que deben cumplir x, y, z para que el producto AB sea simétrico. Escribe x en función de y y z .
- b) Halla todas las matrices B que cumplen la condición de a) y que además son ortogonales. Da cada una como la terna (x, y, z) .

a) 1. El producto.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & y + 2z \\ 2x - y & 2y - z \end{pmatrix}.$$

2. Condición de simetría. Basta igualar los elementos $(1, 2)$ y $(2, 1)$: $y + 2z = 2x - y$, es decir, $2x = 2y + 2z$:

$$x = y + z.$$

Es lo esperado: como A y B son simétricas, $(AB)^t = B^t A^t = BA$, así que AB es simétrica si y solo si A y B conmutan.

- b) 1. La matriz. Con a), $B = \begin{pmatrix} y + z & y \\ y & z \end{pmatrix}$.

2. Ortogonal. Como B es simétrica, $B^t B = B^2$. Hay que imponer

$$B^2 = \begin{pmatrix} (y+z)^2 + y^2 & y(y+z) + yz \\ y(y+z) + yz & y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La ecuación sencilla primero. El elemento $(1, 2)$ da $y^2 + 2yz = 0$, es decir, $y(y + 2z) = 0$: $y = 0$ o $y = -2z$.

4. Caso $y = 0$. Entonces $x = z$ y las ecuaciones de la diagonal son $z^2 = 1$: $z = 1$ o $z = -1$. Salen $(1, 0, 1)$ y $(-1, 0, -1)$, es decir, $B = I$ y $B = -I$.

5. Caso $y = -2z$. Entonces $x = y + z = -z$. La ecuación $(2, 2)$: $4z^2 + z^2 = 1$, luego $z^2 = \frac{1}{5}$ y $z = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. La ecuación $(1, 1)$ también se cumple: $x^2 + y^2 = z^2 + 4z^2 = 1$.

- $z = \frac{\sqrt{5}}{5}$: $(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.
- $z = -\frac{\sqrt{5}}{5}$: $(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Hay cuatro matrices: $I, -I$ y $\pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Para el examen: al resolver un sistema no lineal, empieza por la ecuación que se factoriza ($y(y + 2z) = 0$) y separa casos; perder el caso $y = 0$ (las soluciones $\pm I$, que parecen «demasiado fáciles») es el error más habitual. Comprueba cada candidato en **todas** las ecuaciones.

EJERCICIO 10

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcula $A^t A$ y comprueba que es un múltiplo de la identidad. (0,75 puntos)
- b) Halla los valores de m para los que A es ortogonal. (0,5 puntos)
- c) Halla, en función de m , el número $k > 0$ para el que la matriz kA es ortogonal. (0,5 puntos)
- d) Para $m = 2$, halla la matriz X que cumple $AX = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, usando el resultado de a). (0,75 puntos)

a)

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+m^2 & m-m \\ m-m & m^2+1 \end{pmatrix} = (1+m^2) I.$$

- b) A es ortogonal si $A^t A = I$, es decir, $(1+m^2)I = I$, que equivale a $1+m^2 = 1$, luego $m = 0$. Para $m = 0$, $A = I$, que efectivamente es ortogonal.
- c) Usando $(kA)^t = kA^t$ y a):

$$(kA)^t (kA) = k^2 A^t A = k^2 (1+m^2) I.$$

Es la identidad si $k^2(1+m^2) = 1$. Como $1+m^2 > 0$ para todo m y $k > 0$:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}.$$

- d) 1. El dato de a). Para $m = 2$, $A^t A = 5I$, con $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Despejar. Si $AX = B$, multiplicando por A^t por la izquierda: $A^t AX = A^t B$, es decir, $5X = A^t B$, luego

$$X = \frac{1}{5} A^t B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 3. Comprobación. $AX = \begin{pmatrix} 1+4 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. El paso 2 prueba que no puede haber otra solución, y la comprobación, que esta lo es.

Para el examen: en b) no basta con decir « $m = 0$ »: escribe la ecuación $1 + m^2 = 1$. En c) justifica el signo de k con el enunciado ($k > 0$). En d) se pide **usar a)**: si resuelves el sistema por sustitución el resultado es correcto, pero no se puntúa entero.

Resumen

- La traspuesta A^t cambia filas por columnas: $(A^t)_{ij} = a_{ji}$; si A es $m \times n$, A^t es $n \times m$.
- Propiedades: $(A^t)^t = A$, $(A + B)^t = A^t + B^t$, $(kA)^t = kA^t$, $(A^n)^t = (A^t)^n$ y, sobre todo, $(AB)^t = B^t A^t$ (orden inverso).
- Simétrica: $A^t = A$. Antisimétrica: $A^t = -A$, con la diagonal nula.
- $A + A^t$ es simétrica, $A - A^t$ antisimétrica; AA^t y $A^t A$ son siempre simétricas. Toda cuadrada es $\frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$.
- El producto de dos simétricas es simétrico solo si conmutan.
- Ortogonal: $A^t A = I$; sus columnas tienen longitud 1 y son perpendiculares. Las rotaciones son ortogonales y el producto de ortogonales es ortogonal.
- Si $A^t A = I$ (o $A^t A = kI$), una ecuación $AX = B$ se despeja multiplicando por A^t por la izquierda. Más adelante: $A^{-1} = A^t$.

Matriz inversa

IDEA CLAVE

La inversa de una matriz cuadrada A es la matriz A^{-1} que «deshace» lo que hace A : $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Es la herramienta que sustituye a la división en las ecuaciones matriciales, y en la PAU se pide casi siempre: calcularla por Gauss-Jordan, usar sus propiedades y decidir para qué valores de un parámetro existe.

Qué es la matriz inversa

Con números, $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$: el inverso de 3 es el número que multiplicado por 3 da el elemento neutro del producto. Con matrices, el neutro es la identidad I .

DEFINICIÓN • MATRIZ INVERSA

Sea A una matriz **cuadrada** de orden n . Una matriz B de orden n es la **inversa** de A si

$$AB = BA = I_n$$

Si existe, se escribe $B = A^{-1}$ y se dice que A es **invertible** (o regular). Si no existe, A es **singular**.

Por ejemplo, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$AB = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 \\ -2+2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así que $B = A^{-1}$. Para comprobar que una matriz es la inversa de otra **basta con multiplicarlas**.

Solo las matrices cuadradas pueden tener inversa, y **no todas la tienen**. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa: su segunda fila es el doble de la primera, y entonces, para cualquier X , la segunda fila de AX es el doble de la primera fila de AX . Como en I la segunda fila, $(0, 1)$, no es el doble de la primera, $(1, 0)$, nunca puede ser $AX = I$. La matriz nula tampoco tiene inversa, igual que el número 0.

NOTA • BASTA CON UN PRODUCTO (SE ADMITE SIN DEMOSTRACIÓN)

Si A y B son cuadradas del mismo orden y $AB = I$, entonces también $BA = I$. La demostración no es de este curso, pero el resultado se usa mucho: para comprobar que $B = A^{-1}$ es suficiente calcular **uno** de los dos productos. Por ejemplo, si una matriz cuadrada cumple $A^t A = I$ (matriz ortogonal), entonces también $AA^t = I$ y su inversa es su traspuesta: $A^{-1} = A^t$.

La inversa es única

PROPIEDAD · UNICIDAD DE LA INVERSA

Una matriz cuadrada tiene, como mucho, una inversa.

Supón que B y C cumplen las dos la definición: $BA = I$ y $AC = I$. Usando la propiedad asociativa,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Por eso tiene sentido hablar de la inversa y escribir A^{-1} . En la práctica, esto significa que, calcules la inversa por el método que la calcules, tiene que salir siempre la misma matriz.

Para qué sirve: «tachar» y despejar

La inversa permite hacer con matrices lo que con números se hace dividiendo. Si A es invertible:

- **Simplificar.** Si $AB = AC$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda queda $B = C$. Sin inversa esto es falso, como viste en el producto de matrices.
- **Resolver sistemas.** Un sistema lineal con tantas ecuaciones como incógnitas se escribe $AX = B$, con A la matriz de coeficientes, X la columna de incógnitas y B la de términos independientes. Si A es invertible, la solución es única: $X = A^{-1}B$.

Por ejemplo, el sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, y con la inversa calculada antes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones matriciales generalizan esta idea.

Una matriz 2×2 transforma el plano

Una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lleva cada punto (x, y) del plano al punto $(ax + by, cx + dy)$, que es el resultado de $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Las **columnas** de A dicen dónde van los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, así que el cuadrado unidad se convierte en el paralelogramo construido sobre las dos columnas. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ lleva $(1, 0)$ a $(2, 0)$ y $(0, 1)$ a $(1, 1)$: estira y tuerce el cuadrado.

La inversa A^{-1} es la transformación que **devuelve cada punto a su sitio**: aplicar A y después A^{-1} es aplicar $A^{-1}A = I$, que no mueve nada. El área del paralelogramo es $|ad - bc|$. Cuando $ad - bc = 0$, el cuadrado se aplasta sobre un segmento (o un punto): puntos distintos van a parar al mismo sitio y ya no hay forma de saber de dónde venían, así que **no existe la inversa**. Ese número $ad - bc$ es el **determinante** de A , que estudiarás en el tema siguiente.

Prueba a escribir tu propia matriz en la animación: mira en qué se convierte el cuadrado unidad, cuánto vale $ad - bc$ (el «det») y pulsa «Aplicar la inversa» para ver cómo se deshace la transformación. Elige después la matriz singular y observa por qué no se puede volver atrás.

Animación interactiva disponible en la versión web de este apartado.

Propiedades de la inversa

PROPIEDAD · PROPIEDADES (A Y B CUADRADAS DEL MISMO ORDEN E INVERTIBLES)

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (cambia el orden).
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ si $k \neq 0$.
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ para todo natural n , e $I^{-1} = I$.

Cada una se demuestra multiplicando y comprobando que sale I (por la nota anterior, basta un producto):

- $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. La intuición es la de vestirse: primero los calcetines (B) y luego los zapatos (A); para deshacerlo, primero te quitas los zapatos (A^{-1}) y luego los calcetines (B^{-1}).
- $A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$, usando $(MN)^t = N^tM^t$. Da igual trasponer y luego invertir que invertir y luego trasponer.
- $(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = \frac{k}{k}AA^{-1} = I$.

Lo que **no** se cumple: en general $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$, y la suma de dos matrices invertibles puede no serlo ($I + (-I) = O$).

La fórmula de la inversa 2×2

Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, intercambia los elementos de la diagonal principal y cambia de signo los de la otra diagonal:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (ad - bc)I$$

TEOREMA · INVERSA DE UNA MATRIZ 2×2

La matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es invertible si y solo si $ad - bc \neq 0$, y entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Si $ad - bc \neq 0$, basta dividir la igualdad anterior entre ese número. Si $ad - bc = 0$, el producto anterior da O ; si A tuviera inversa, multiplicando por A^{-1} por la izquierda saldría $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = O$, es decir, $A = O$, que no es invertible: contradicción. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10-9} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

El método de Gauss-Jordan

Para matrices de orden 3 o mayor no hay una fórmula sencilla, y se usa el método de Gauss-Jordan. Se trabaja con tres **operaciones elementales por filas**:

1. Intercambiar dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$.
2. Multiplicar una fila por un número distinto de cero: kF_i .
3. Sumar a una fila un múltiplo de otra: $F_i + kF_j$.

1. Escribe la matriz ampliada $(A | I)$: A a la izquierda y la identidad del mismo orden a la derecha.
2. Haz ceros **debajo** de la diagonal, columna a columna, de izquierda a derecha (como en el método de Gauss). Si un elemento de la diagonal es 0, intercambia esa fila con una de debajo que no lo tenga.
3. Si en la parte izquierda aparece una **fila de ceros**, para: A no tiene inversa.
4. Haz ceros **encima** de la diagonal, de la última columna a la primera.
5. Divide cada fila entre su elemento de la diagonal para que quede I a la izquierda.
6. Lo que queda a la derecha es A^{-1} : $(A | I) \rightarrow (I | A^{-1})$. Si puedes, comprueba que $AA^{-1} = I$.

Cada operación se hace con la **fila entera**, a los dos lados de la barra. Por qué funciona: cada operación elemental equivale a multiplicar por la izquierda por una matriz. Si una sucesión de operaciones convierte A en I , el producto E de esas matrices cumple $EA = I$, luego $E = A^{-1}$; y las mismas operaciones aplicadas a I dan $EI = E = A^{-1}$. Por eso a la derecha va apareciendo la inversa.

Vamos a calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ paso a paso.

1. **Ceros debajo de la diagonal.** En la primera columna solo hay que anular el 1 de la fila 2; después, el 1 de la fila 3 en la segunda columna:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

2. **No hay fila de ceros** a la izquierda: los tres elementos de la diagonal son 1, así que la inversa existe.
3. **Ceros encima de la diagonal**, empezando por la tercera columna y siguiendo con la segunda:

$$\xrightarrow{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

4. **Resultado.** A la izquierda ha quedado I (no hace falta dividir), así que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación de la primera fila de AA^{-1} : $(3 - 2 + 0, -2 + 2 + 0, 1 - 1 + 0) = (1, 0, 0)$; las otras dos se comprueban igual.

Cuándo no existe la inversa

Si al hacer ceros aparece una fila de ceros en la parte izquierda, ya no se puede conseguir I y **la matriz no tiene**

inversa. Por ejemplo, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La fila de ceros indica que la tercera fila de A depende de las otras dos: aquí $F_3 = F_2 - F_1$. Es la misma situación que en la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ del principio.

NOTA • ADELANTO: EL DETERMINANTE

En este tema decides si una matriz tiene inversa **intentando calcularla**: existe si Gauss-Jordan se puede completar hasta llegar a I , y no existe si aparece una fila de ceros a la izquierda. En el tema 2 verás un criterio directo: A es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero, $|A| \neq 0$ (en 2×2 , $|A| = ad - bc$), y una segunda forma de calcular la inversa, la inversa por adjuntos.

Inversa de una matriz con parámetro

Si A depende de un parámetro m , se hace Gauss-Jordan con m dentro. La clave es **no dividir entre una expresión que pueda valer 0**:

- Haz ceros con operaciones del tipo $F_i + kF_j$ usando pivotes que sean números (o, si hay que usar una expresión, multiplica la fila en vez de dividirla).
- Cuando la parte izquierda sea triangular, mira los elementos de la diagonal: los valores de m que anulan alguno son los candidatos a que no haya inversa. Estudia cada uno aparte sustituyendo.
- Para los demás valores, todos los pivotes son distintos de cero, el método se puede terminar y la inversa existe.

En la PAU la pregunta suele ser «¿para qué valores de m tiene inversa A ?». La respuesta se da como «para todo m salvo...», y hay que justificar tanto los valores que se excluyen como que en los demás la inversa existe.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Inversa 2×2 y de su traspuesta

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula A^{-1} y comprueba el resultado.
- b) Calcula $(A^t)^{-1}$.

a) 1. **¿Existe?** $ad - bc = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0$, así que A es invertible.

2. **Fórmula.** Se intercambian 3 y 2, se cambia el signo de 5 y de 1, y se divide entre 1:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación.**

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Por la propiedad $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, no hace falta repetir el cálculo: basta trasponer el resultado de a).

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Se puede confirmar con la fórmula: $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, con $ad - bc = 6 - 5 = 1$, y su inversa es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Gauss-Jordan en una matriz 4×4 triangular

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcula A^{-1} por el método de Gauss-Jordan.
- Calcula $(A^t)^{-1}$.

- a) 1. **Aprovechar la estructura.** A ya es triangular superior con unos en la diagonal: no hay que hacer ceros debajo, y la inversa existe porque ningún elemento de la diagonal es 0. Solo quedan los ceros de encima, de abajo arriba. Escribimos $(A | I)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. **Cuarta columna.** $F_3 - F_4$ anula el 1 de la fila 3:

$$\xrightarrow{F_3 - F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3. **Tercera columna.** $F_2 - F_3$ (con la nueva fila 3):

$$\xrightarrow{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

4. **Segunda columna.** $F_1 - F_2$:

$$\xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

A la izquierda está I , así que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tres operaciones han bastado. La inversa de una triangular superior es triangular superior, y aquí tiene un patrón: signos alternos por encima de la diagonal.

- b) Por la propiedad $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, se traspone el resultado de a):

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Repetir Gauss-Jordan con A^t daría lo mismo, pero con más trabajo y más ocasiones de equivocarse.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

¿Para qué valores existe la inversa?

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla, usando el método de Gauss, los valores de m para los que A **no** tiene inversa.

b) Calcula A^{-1} para $m = 0$.

c) Para $m = 0$, resuelve el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$ usando la inversa.

a) 1. **Ceros en la primera columna** con pivote 1 (un número, así que no hay riesgo de dividir entre 0):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - mF_1]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix}$$

2. **Ceros en la segunda columna.** En vez de dividir entre $m-1$ (que puede ser 0), sumamos las filas 2 y 3, porque $(1-m) + (m-1) = 0$:

$$\xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 \end{pmatrix}$$

$$y \ 2 - m - m^2 = -(m^2 + m - 2) = -(m-1)(m+2).$$

3. **Estudio de la diagonal.** Los elementos de la diagonal son 1, $m-1$ y $-(m-1)(m+2)$. Se anulan para $m = 1$ y para $m = -2$.

- Si $m = 1$, las filas 2 y 3 son $(0, 0, 0)$: hay filas de ceros, **no hay inversa** (de hecho, A tiene todos sus elementos iguales a 1).
- Si $m = -2$, la fila 3 es $(0, 0, 0)$: **no hay inversa**.
- Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, los tres pivotes son distintos de cero: se pueden hacer los ceros de encima y dividir cada fila entre su pivote, así que el método termina y A **es invertible**.

A no tiene inversa exactamente para $m = 1$ y $m = -2$.

b) Para $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que es invertible por a). Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Dividimos la fila 3 entre 2 y cambiamos el signo de la fila 2:

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}F_3 \\ -F_2}]{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)} \xrightarrow{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación de la primera fila de AA^{-1} : $\frac{1}{2}(1+1, 1-1, -1+1) = (1, 0, 0)$.

- c) La matriz de coeficientes del sistema es justamente A con $m = 0$, y el sistema es $AX = B$ con $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Como A es invertible:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+2-3 \\ 1-2+3 \\ -1+2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = 0, y = 1, z = 2$. Comprobación: $0 + 1 = 1, 0 + 2 = 2, 1 + 2 = 3$.

Para el examen: en a) cada operación debe estar escrita y no se puede dividir entre $m - 1$ sin decir antes que $m \neq 1$. Hay que estudiar por separado cada valor que anula un pivote y concluir con una frase clara: « A tiene inversa si y solo si $m \neq 1$ y $m \neq -2$ ». En el tema 2 llegarás a lo mismo con $|A| = -(m-1)^2(m+2)$.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · INVERTIR UN PRODUCTO SIN CAMBIAR EL ORDEN

$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ es **falso** en general: lo correcto es $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Como el producto no es conmutativo, las dos matrices suelen ser distintas. Lo mismo con tres factores: $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Tampoco existe una regla para la suma: $(A+B)^{-1}$ no es $A^{-1} + B^{-1}$.

ERROR TÍPICO · INVERTIR ELEMENTO A ELEMENTO O «DIVIDIR» ENTRE A

La inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **no** es $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, como se comprueba multiplicando. Escribir $\frac{1}{A}$ o $\frac{B}{A}$ tampoco tiene sentido. En la fórmula 2×2 , el fallo habitual es cambiar de signo los elementos de la diagonal principal en vez de intercambiarlos.

ERROR TÍPICO · ERRORES EN GAUSS-JORDAN

Los tres fallos más frecuentes: hacer la operación solo en la parte izquierda y olvidar la derecha; mezclar operaciones con columnas (en Gauss-Jordan para la inversa solo valen operaciones por filas); y, con parámetro, dividir entre una expresión como $m - 1$ sin estudiar antes qué pasa cuando vale 0. Comprobar al final una fila de AA^{-1} cuesta poco y detecta casi todos los errores.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1

★ Básico

- a) Calcula la inversa de $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- b) Halla el valor de k para el que la matriz $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ k & 6 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

- a) 1. $ad - bc = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1 \neq 0$, así que A es invertible.

2. Con la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Comprobación: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} -8 + 9 & 12 - 12 \\ -6 + 6 & 9 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- b) Una matriz 2×2 no tiene inversa si y solo si $ad - bc = 0$:

$$6 \cdot 6 - 4k = 0 \iff 36 = 4k \iff k = 9$$

Para $k = 9$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$: la segunda fila es $\frac{3}{2}$ de la primera, como en el ejemplo singular de la teoría.

EJERCICIO 2 ★ Básico

Halla los números reales x e y para que la matriz B sea la inversa de A , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Idea.** $B = A^{-1}$ si $AB = I$ (para matrices cuadradas, un producto basta).

2. **Producto.**

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2+2 & x+2y \\ 0 & 1 & y+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x+2y \\ 0 & 1 & y+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Igualemos a I .** $y + 3 = 0$, luego $y = -3$; $x + 2y = 0$, luego $x = 6$.

4. **Comprobación.** Con $x = 6$, $y = -3$, el producto es I , así que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 3 ★ Básico

Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Ceros debajo de la diagonal.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

No hay fila de ceros: la inversa existe.

2. Ceros encima de la diagonal (tercera columna; la segunda ya está):

$$\xrightarrow[\substack{F_2 - F_3 \\ F_1 - 2F_3}]{\substack{F_2 - F_3 \\ F_1 - 2F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

3. Resultado.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación de la tercera fila de AA^{-1} : $(3 + 1 - 4, 2 + 2 - 4, -2 - 1 + 4) = (0, 0, 1)$.

EJERCICIO 4 ★★ Medio

De dos matrices cuadradas invertibles A y B de orden 2 se conocen sus inversas:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando las propiedades de la inversa, calcula:

- a) $(AB)^{-1}$.
- b) $(A^t)^{-1}$.
- c) La matriz A .
- d) $(2B)^{-1}$.

- a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (el orden cambia):

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4+1 \\ 1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si se calcula $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, sale otra matriz: ese es el error típico.

- b) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
- c) $A = (A^{-1})^{-1}$. Con la fórmula 2×2 ($ad - bc = 1$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- d) $(2B)^{-1} = \frac{1}{2}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Comprobación: $B = (B^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $(2B) \cdot \frac{1}{2}B^{-1} = BB^{-1} = I$.

EJERCICIO 5 ★★ Medio

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula A^{-1} por el método de Gauss-Jordan.
 b) Justifica, con el método de Gauss, que B no tiene inversa, y halla los números α y β tales que la tercera fila de B es $\alpha F_1 + \beta F_2$.

- a) 1. **Pivote nulo.** El elemento $(1, 1)$ es 0: intercambiamos filas. Además, colocamos la fila $(0, 1, 1)$ antes que la $(0, 2, 1)$ para tener un 1 como segundo pivote:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2. **Ceros debajo.**

$$\xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

3. **Ceros encima.**

$$\xrightarrow{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los intercambios de filas no cambian el resultado: la inversa es única. Comprobación de la primera fila de AA^{-1} : $(0 + 2 - 1, 0 + 0 + 0, 0 - 2 + 2) = (1, 0, 0)$.

- b) 1. **Gauss en B .**

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Aparece una fila de ceros, así que Gauss-Jordan no puede llegar a I y B no tiene inversa.

2. **La relación entre filas.** La fila nula es $(F_3 - 4F_1) - (F_2 - 2F_1) = F_3 - 2F_1 - F_2$. Como vale 0, $F_3 = 2F_1 + F_2$. Comprobación: $2(1, 2, 1) + (2, 1, 0) = (4, 5, 2)$. Por tanto $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

EJERCICIO 6 ★★ Medio

Una papelería vende tres packs para estudiantes:

- Pack Básico: 2 cuadernos, 1 bolígrafo y 1 lápiz.
- Pack Estudio: 1 cuaderno, 1 bolígrafo y 1 lápiz.
- Pack Examen: 1 cuaderno y 1 lápiz.

Si se venden x packs Básico, y packs Estudio y z packs Examen, las unidades de cuadernos, bolígrafos y lápices que salen de la tienda (en este orden) son $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donde cada columna de M es la composición de un pack.

- Escribe la matriz M .
- Calcula M^{-1} por el método de Gauss-Jordan.
- Un día salieron de la tienda, solo en packs, 40 cuadernos, 25 bolígrafos y 30 lápices. ¿Cuántos packs de cada tipo se vendieron? Da la respuesta como (x, y, z) .

- Las filas son cuadernos, bolígrafos y lápices; las columnas, los packs Básico, Estudio y Examen:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Ordenamos para tener un 1 como primer pivote:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2. Ceros debajo.

$$\xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La parte izquierda ya es triangular sin ceros en la diagonal: la inversa existe.

3. Ceros encima y pivotes a 1.

$$\xrightarrow{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Las unidades vendidas son $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$. Multiplicando por M^{-1} por la izquierda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 40 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 - 30 \\ -40 + 25 + 30 \\ -25 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se vendieron 10 packs Básico, 15 Estudio y 5 Examen. Comprobación: cuadernos $20 + 15 + 5 = 40$, bolígrafos $10 + 15 = 25$, lápices $10 + 15 + 5 = 30$.

La inversa responde a la pregunta «al revés»: M pasa de packs a unidades y M^{-1} de unidades a packs. Como M es invertible, la respuesta es única.

EJERCICIO 7 ★★ Medio

Se consideran las matrices

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(A tiene P en la esquina superior izquierda, Q en la inferior derecha y ceros en el resto).

- Calcula P^{-1} y Q^{-1} .
- Calcula A^{-1} y justifica el resultado.

- Con la fórmula 2×2 . Para P : $ad - bc = 2 - 1 = 1$, y para Q : $ad - bc = 3 - 2 = 1$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1. La estructura.** En $(A | I)$, las filas 1 y 2 solo tienen elementos no nulos en las columnas 1 y 2 de la izquierda, y las filas 3 y 4 solo en las columnas 3 y 4. Las operaciones de Gauss-Jordan que convierten P en I_2 se hacen solo con las filas 1 y 2, y las que convierten Q en I_2 , solo con las filas 3 y 4; unas no estropean los ceros de las otras. A la derecha aparece P^{-1} arriba a la izquierda y Q^{-1} abajo a la derecha:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 2. Justificación por el producto.** Al multiplicar A por esta matriz, cada elemento de las filas 1 y 2 combina solo la fila de P con las columnas de P^{-1} , y lo mismo con Q :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 & 0 & 0 \\ 1-1 & -1+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2 & -6+6 \\ 0 & 0 & 1-1 & -2+3 \end{pmatrix} = I_4$$

Como el producto es I_4 , la matriz obtenida es la inversa (y es la única).

Una matriz «por bloques diagonales» se invierte invirtiendo cada bloque: así se evita un Gauss-Jordan de 4×4 .

EJERCICIO 8 ★★★ Dificil

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Halla, por el método de Gauss, los valores de m para los que A **no** tiene inversa.
- Para los demás valores, calcula A^{-1} en función de m por el método de Gauss-Jordan.
- Deduce de b) la inversa para $m = 1$.

- a) 1. Ceros en la primera columna.** El pivote es 1: $F_3 - mF_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - mF_1} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & -m^2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + m^2 F_2} \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 + m^3 \end{pmatrix}$$

El segundo pivote también es 1, así que no se ha dividido entre nada que dependa de m .

- 2. Diagonal.** Los pivotes son 1, 1 y $1 + m^3$. Solo el último puede anularse:

$$1 + m^3 = (m + 1)(m^2 - m + 1) = 0$$

El factor $m^2 - m + 1$ no tiene raíces reales (su discriminante es $1 - 4 = -3 < 0$), así que la única solución real es $m = -1$. Para $m = -1$ la tercera fila es de ceros y **no hay inversa**; para $m \neq -1$ los tres pivotes son distintos de cero y la inversa existe.

- b) 1. Las mismas operaciones con $(A | I)$.** Llamamos $D = 1 + m^3 \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & m & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - mF_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & m & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m^2 & 1 & -m & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + m^2 F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & m & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D & -m & m^2 & 1 \end{array} \right)$$

- 2. Dividimos la fila 3 entre D** (permitido, porque $m \neq -1$): la fila 3 queda $\left(0, 0, 1 \mid \frac{-m}{D}, \frac{m^2}{D}, \frac{1}{D}\right)$.

- 3. $F_2 - mF_3$.** A la derecha: $\left(0 - \frac{-m^2}{D}, 1 - \frac{m^3}{D}, 0 - \frac{m}{D}\right) = \left(\frac{m^2}{D}, \frac{D - m^3}{D}, \frac{-m}{D}\right) = \frac{1}{D} (m^2, 1, -m)$, porque $D - m^3 = 1$.

- 4. $F_1 - mF_2$** (con la nueva fila 2). A la derecha: $\left(1 - \frac{m^3}{D}, 0 - \frac{m}{D}, 0 + \frac{m^2}{D}\right) = \frac{1}{D} (1, -m, m^2)$.

- 5. Resultado.** A la izquierda queda I y

$$A^{-1} = \frac{1}{1 + m^3} \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m^2 & 1 & -m \\ -m & m^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (m \neq -1)$$

Comprobación del elemento $(1, 1)$ de AA^{-1} : $\frac{1}{D}(1 \cdot 1 + m \cdot m^2 + 0) = \frac{1+m^3}{D} = 1$; y del $(1, 2)$: $\frac{1}{D}(-m + m \cdot 1) = 0$.

- c) Para $m = 1$, $D = 2$:**

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el examen: hacer Gauss-Jordan con letras es más largo, pero se puntúa igual que con números si cada operación está indicada. Lo imprescindible: justificar que $m^2 - m + 1$ no se anula, escribir la condición $m \neq -1$ antes de dividir entre $1 + m^3$ y comprobar al menos un par de elementos del producto.

EJERCICIO 9

★★★ Difícil

Demostración

Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. Demuestra:

- a) Si A es invertible y simétrica, entonces A^{-1} también es simétrica.
- b) Si $A^3 = O$, entonces $I - A$ es invertible y $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.
- c) Si A es invertible y $AB = O$, entonces $B = O$.
- d) Si $A^2 = O$, entonces A no es invertible.

- a) A es simétrica si $A^t = A$. Usando $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$$

así que A^{-1} coincide con su traspuesta: es simétrica.

- b) Multiplicamos y usamos la propiedad distributiva (sin cambiar el orden de los factores):

$$(I - A)(I + A + A^2) = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I - A^3 = I - O = I$$

Del mismo modo, $(I + A + A^2)(I - A) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I$. Por la definición, $I - A$ es invertible y su inversa es $I + A + A^2$. Es la versión matricial de $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$, que aquí se corta porque $A^3 = O$.

- c) Multiplicando $AB = O$ por A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}O \Rightarrow (A^{-1}A)B = O \Rightarrow IB = O \Rightarrow B = O$$

Es el «tachar» que sin inversa no está permitido.

- d) Por reducción al absurdo: si A fuera invertible, como $A \cdot A = A^2 = O$, el apartado c) con $B = A$ daría $A = O$. Pero la matriz nula no es invertible ($OX = O \neq I$ para toda X), contradicción. Por tanto A no es invertible.

Para el examen: en las demostraciones con inversas se escribe el producto que da I en los dos órdenes (o se cita que para matrices cuadradas basta uno) y se nombra cada propiedad que se usa. En b), desarrollar $(I - A)(I + A + A^2)$ cambiando el orden de algún producto es un error grave, aunque aquí todas las potencias de A conmutan.

Se considera la matriz, que depende del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Halla, por el método de Gauss, los valores de m para los que A no tiene inversa. (0,75 puntos)
- b) Para $m = 2$, calcula A^{-1} por el método de Gauss-Jordan. (0,75 puntos)
- c) Para $m = 2$, calcula $(A^t)^{-1}$ sin repetir el método. (0,5 puntos)
- d) Para $m = 2$, resuelve el sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ usando la inversa. (0,5 puntos)

- a) 1. Ceros en la primera columna. Solo hay que anular el 1 de la fila 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 0 & 1 - m \end{pmatrix}$$

La matriz ya es triangular superior, con diagonal $1, m, 1 - m$.

2. Casos.

- Si $m = 0$: las filas 2 y 3 son $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, 1)$; con $F_3 - F_2$ aparece una fila de ceros. **No hay inversa.**
- Si $m = 1$: la fila 3 es $(0, 0, 0)$. **No hay inversa.**
- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$: los tres pivotes son distintos de cero, Gauss-Jordan se completa y A es invertible.

A no tiene inversa para $m = 0$ y para $m = 1$.

- b) Para $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, invertible por a).

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{F_2 - F_3 \\ F_1 - 2F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ & A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comprobación de la primera fila de AA^{-1} : $(0 - 1 + 2, -1 + 1 + 0, 1 + 1 - 2) = (1, 0, 0)$.

- c) Por la propiedad $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, basta trasponer b):

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

d) La matriz de coeficientes del sistema es A con $m = 2$, así que el sistema es $AX = B$ con $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Como A es invertible, la solución es única:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 + 1 \\ -\frac{3}{2} + 0 + \frac{1}{2} \\ 3 + 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$. Comprobación: $1 - 2 + 4 = 3$, $-2 + 2 = 0$, $1 - 2 + 2 = 1$.

Para el examen: en a) no olvides el caso $m = 0$: el pivote nulo está en la segunda columna y hay que ver que la fila 3 se anula después con $F_3 - F_2$; dar solo $m = 1$ cuesta medio apartado. En c), citar la propiedad $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ es lo que se puntúa; repetir Gauss-Jordan es correcto pero pierde tiempo. En d), escribe el sistema en la forma $AX = B$ antes de despejar.

Resumen

- A^{-1} es la matriz que cumple $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Solo las matrices cuadradas pueden tenerla, no todas la tienen y, si existe, es única. Para matrices cuadradas, basta comprobar un producto.
- Con la inversa se «tacha» ($AB = AC \Rightarrow B = C$) y se resuelven sistemas: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.
- Propiedades: $(A^{-1})^{-1} = A$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (cambia el orden), $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$. No hay regla para $(A + B)^{-1}$.
- 2×2 : existe si y solo si $ad - bc \neq 0$, y $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Una matriz 2×2 transforma el plano; su inversa deshace la transformación, y no existe cuando el cuadrado unidad se aplasta ($ad - bc = 0$).
- Gauss-Jordan: $(A | I) \rightarrow (I | A^{-1})$ con operaciones por filas, siempre a los dos lados. Si aparece una fila de ceros a la izquierda, no hay inversa.

- Con parámetro: Gauss sin dividir entre expresiones que puedan ser 0; los valores que anulan un pivote se estudian aparte. En el tema 2, el criterio será $|A| \neq 0$.

Ecuaciones matriciales

IDEA CLAVE

Una ecuación matricial es una ecuación cuya incógnita es una matriz X . Se resuelve como una ecuación de primer grado, pero sin dividir: se despeja X multiplicando por la inversa **por el lado correcto**. Es uno de los ejercicios que más se repiten en el bloque de Álgebra de la PAU.

Qué es una ecuación matricial

DEFINICIÓN · ECUACIÓN MATRICIAL

Una **ecuación matricial** es una igualdad entre expresiones con matrices en la que una (o varias) de las matrices es desconocida. Resolverla es encontrar todas las matrices X que la cumplen.

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una ecuación matricial cuya incógnita X es una matriz columna 2×1 . Con números, $ax = b$ se resuelve dividiendo entre a . **Con matrices no existe la división**: lo que hace su papel es multiplicar por la matriz inversa, y como el producto no es conmutativo, importa por qué lado se multiplica.

Los tres despejes básicos

Si A es invertible, multiplicar los dos miembros de $AX = B$ **por la izquierda** por A^{-1} deja X sola:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Cada paso usa una propiedad: la asociativa del producto, $A^{-1}A = I$ y $IX = X$.

PROPIEDAD · DESPEJES BÁSICOS (A Y B CUADRADAS E INVERTIBLES)

- $AX = C \iff X = A^{-1}C$ (se multiplica por A^{-1} **por la izquierda**).
- $XA = C \iff X = CA^{-1}$ (se multiplica por A^{-1} **por la derecha**).
- $AXB = C \iff X = A^{-1}CB^{-1}$ (A^{-1} por la izquierda y B^{-1} por la derecha).

La regla para no equivocarse: **la inversa se coloca en el mismo lado en el que estaba la matriz que quieres quitar**. En $XA = C$ la A está a la derecha de X , así que A^{-1} va a la derecha de C . En general $A^{-1}C \neq CA^{-1}$, de modo que equivocarse de lado da otra matriz (y el ejercicio está mal).

Las **dimensiones** también salen de la ecuación. Si A es 2×2 y C es 2×3 , en $AX = C$ la incógnita X tiene que ser 2×3 : tantas filas como columnas tiene A y tantas columnas como C .

Agrupar los términos con X

Cuando X aparece en varios términos, se pasan todos a un miembro y se **saca factor común por el mismo lado**:

$$AX + B = CX \Rightarrow CX - AX = B \Rightarrow (C - A)X = B \Rightarrow X = (C - A)^{-1}B$$

siempre que $C - A$ sea invertible. Dos detalles que deciden el ejercicio:

- Un número que multiplica a X se convierte en una matriz al sacar factor común: $AX + X = AX + IX = (A + I)X$, y $XA - 2X = X(A - 2I)$. Escribir $(A + 1)X$ no tiene sentido, porque no se puede sumar una matriz y un número.
- Solo se saca factor común si X está **en el mismo lado** en todos los términos. $AX + XB$ no se puede escribir como un producto de una matriz por X ; esas ecuaciones se resuelven planteando las incógnitas (ver más abajo).

Ecuaciones con traspuestas

Se usan las propiedades de la traspuesta: $(A^t)^t = A$, $(A + B)^t = A^t + B^t$ y, sobre todo, $(AB)^t = B^t A^t$ (cambia el orden). La estrategia es transponer **la ecuación entera** para que X aparezca sin transponer. Por ejemplo:

$$X^t A = B \Rightarrow (X^t A)^t = B^t \Rightarrow A^t X = B^t \Rightarrow X = (A^t)^{-1} B^t$$

Si la matriz no tiene inversa, o aparece X^2

Si la matriz que habría que invertir no tiene inversa, o la incógnita aparece al cuadrado (X^2), o en dos lados distintos ($AX = XB$), no se puede despejar. Entonces se escribe X con incógnitas, por ejemplo $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, se hacen las operaciones y se iguala elemento a elemento: sale un sistema de ecuaciones, que puede tener una solución, infinitas o ninguna.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa ($1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$). Para resolver $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hay que resolver $x + 2y = 1$ y $2x + 4y = 3$. Multiplicando la primera por 2 queda $2x + 4y = 2 \neq 3$: **no hay solución**.

Sistemas de ecuaciones matriciales

Con dos incógnitas X e Y se usa reducción o sustitución, como con números, pero sin dividir y respetando el orden de los productos. Por ejemplo:

$$\begin{cases} X + Y = B \\ AX + Y = C \end{cases} \Rightarrow AX - X = C - B \Rightarrow (A - I)X = C - B$$

Si $A - I$ es invertible, $X = (A - I)^{-1}(C - B)$ y después $Y = B - X$. Cuando los coeficientes son números ($2X + Y = A$, $X - Y = B$), el sistema se resuelve como en el apartado de suma, resta y producto por un escalar.

La inversa a partir de una relación

Si una matriz cuadrada cumple una relación como $A^2 - 2A + I = O$, se puede obtener A^{-1} sin hacer ninguna cuenta: se deja I sola en un miembro y se saca A factor común.

$$A^2 - 2A + I = O \Rightarrow 2A - A^2 = I \Rightarrow A(2I - A) = I$$

Como también $(2I - A)A = 2A - A^2 = I$, la matriz $2I - A$ es la inversa de A : $A^{-1} = 2I - A$.

PROPIEDAD · INVERSA A PARTIR DE UNA RELACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Si una matriz cuadrada cumple $A^2 + pA + qI = O$ con $q \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = -\frac{1}{q}(A + pI)$$

La intuición: $A(A + pI) = A^2 + pA = -qI$, y dividir entre el número $-q$ sí está permitido. Si $q = 0$ el truco no funciona (la relación $A^2 = A$, por ejemplo, la cumple O , que no tiene inversa).

Ecuaciones con parámetro

Si las matrices dependen de un parámetro m , la matriz que hay que invertir puede tener inversa para unos valores de m y no para otros. Para una matriz 2×2 , $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa si y solo si $ad - bc \neq 0$ (es la condición de la fórmula de la inversa 2×2 ; en el tema siguiente verás que ese número es el determinante). Así que se resuelve $ad - bc = 0$, y:

- para los demás valores de m , la ecuación se despeja como siempre y tiene una única solución;
- para los valores que anulan $ad - bc$, se estudia aparte, planteando las incógnitas.

MÉTODO · RESOLVER UNA ECUACIÓN MATRICIAL

1. Pasa todos los términos con X a un miembro y los demás al otro.
2. Saca X factor común **por el lado en el que está** (los números se convierten en múltiplos de I).
3. Si hay traspuestas de X , traspón la ecuación entera usando $(AB)^t = B^t A^t$.
4. Comprueba que la matriz que acompaña a X tiene inversa (fórmula 2×2 , Gauss-Jordan o una relación dada). Si no la tiene, plantea X con incógnitas.
5. Multiplica por la inversa por el lado correcto y calcula. Si puedes, comprueba el resultado en la ecuación inicial.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

$AX=B$ frente a $XA=B$

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) Resuelve la ecuación $AX = B$.
- b) Resuelve la ecuación $XA = B$.

1. **La inversa de A .** Con la fórmula 2×2 : $ad - bc = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0$, así que A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) A está a la izquierda de X : multiplicamos por A^{-1} **por la izquierda**, $X = A^{-1}B$.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-7 & 2-2 \\ -12+14 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $AX = \begin{pmatrix} 2+2 & 0+1 \\ 3+4 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = B$.

- b) Ahora A está a la derecha de X : multiplicamos por A^{-1} **por la derecha**, $X = BA^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 & -4+2 \\ 14-6 & -7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Las dos soluciones son distintas: las ecuaciones $AX = B$ y $XA = B$ son ecuaciones diferentes, porque el producto de matrices no es conmutativo.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Sacar factor común por la derecha

Resuelve la ecuación matricial $XA - B = 2X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Agrupamos los términos con X .** $XA - 2X = B$.

2. **Factor común por la derecha.** En los dos términos X está a la izquierda, así que el factor común queda a la derecha: $XA - 2X = XA - X(2I) = X(A - 2I)$. La ecuación es

$$X(A - 2I) = B$$

3. **La matriz que hay que invertir.**

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 3 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -1 \neq 0$, es invertible:

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

4. **Despejamos por la derecha.** $X = B(A - 2I)^{-1}$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6 & 1-4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

5. **Comprobación.** $XA = \begin{pmatrix} 20-9 & 5-9 \\ 12-6 & 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ y $B + 2X = \begin{pmatrix} 1+10 & 2-6 \\ 0+6 & 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Coinciden, así que $XA - B = 2X$.

El error típico aquí es escribir $(A - 2I)X$ o despejar $X = (A - 2I)^{-1}B$: como X está a la izquierda, la inversa tiene que ir a la derecha.

EJEMPLO 3 ★★★ Dificil

Una relación que da la inversa sin cálculos

Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Halla los números reales α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
- b) Usa la relación anterior para justificar que A es invertible y calcular A^{-1} .
- c) Resuelve la ecuación $AX = X + B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) 1. **Calculamos A^2 .** Cada elemento de la diagonal es la suma de dos productos $1 \cdot 1$, y cada elemento de fuera, un solo producto $1 \cdot 1$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. **Igualemos.** $\alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Comparando con A^2 , los elementos de la diagonal dan $\beta = 2$ y los de fuera $\alpha = 1$. Todas las posiciones se cumplen con esos valores, así que

$$A^2 = A + 2I$$

- b) 1. **Dejamos I sola.** $A^2 - A = 2I$, es decir, $A(A - I) = 2I$.
2. **Dividimos entre el número 2:** $A \cdot \frac{1}{2}(A - I) = I$. Además $\frac{1}{2}(A - I)A = \frac{1}{2}(A^2 - A) = I$, así que el producto da I por los dos lados. Por la definición de inversa, A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sin la relación habría que hacer Gauss-Jordan con una matriz 3×3 ; aquí basta con restar I y dividir entre 2.

- c) 1. **Agrupamos.** $AX - X = B$, es decir, $(A - I)X = B$ (factor común por la izquierda; el X suelto es IX). Como A es 3×3 y B es 3×2 , X es 3×2 .
2. **¿Tiene inversa $A - I$?** La misma relación lo responde: $A(A - I) = 2I$ se puede leer como $(A - I) \cdot \frac{1}{2}A = I$ (y también $\frac{1}{2}A(A - I) = I$). Por tanto $A - I$ es invertible y $(A - I)^{-1} = \frac{1}{2}A$.
3. **Despejamos por la izquierda.** $X = (A - I)^{-1}B = \frac{1}{2}AB$:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Comprobación. $AX = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $X + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Para el examen: en b) no basta con escribir la fórmula de A^{-1} ; hay que mostrar el producto $A \cdot \frac{1}{2}(A - I) = I$, que es lo que justifica que existe la inversa. En c), fíjate en que la relación también da la inversa de $A - I$: aprovechar lo que el problema ya ha calculado es lo que se espera en el último apartado.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • MULTIPLICAR POR LA INVERSA POR EL LADO EQUIVOCADO

De $XA = B$ se deduce $X = BA^{-1}$, **no** $X = A^{-1}B$. Como el producto no es conmutativo, las dos matrices suelen ser distintas (en el primer ejemplo salen $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$). Tampoco se puede «dividir»: escribir $X = \frac{B}{A}$ no tiene sentido. Lo mismo en $AXB = C$: $X = A^{-1}CB^{-1}$, con cada inversa en su lado.

ERROR TÍPICO • SACAR FACTOR COMÚN COMO SI X FUERA UN NÚMERO

$AX + X$ no es $(A + 1)X$, porque no se puede sumar una matriz y un número: es $(A + I)X$. Y $AX + XB$ no se puede factorizar, porque X está a la derecha en un término y a la izquierda en el otro. Otro fallo frecuente es sacar factor común por el lado contrario: $XA - 2X = X(A - 2I)$, con el paréntesis a la derecha de X .

ERROR TÍPICO • DESPEJAR SIN COMPROBAR QUE LA INVERSA EXISTE

Escribir $X = (C - A)^{-1}B$ sin comprobar que $C - A$ tiene inversa puede llevar a «resolver» una ecuación sin solución. En la PAU, la frase «como $ad - bc \neq 0$, la matriz es invertible» (o el cálculo de la inversa por Gauss-Jordan) forma parte de la puntuación. Si la matriz no es invertible, hay que plantear X con incógnitas.

Ejercicios

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

EJERCICIO 1 ★ Básico

Resuelve la ecuación matricial $XA = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Inversa de A .** $ad - bc = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0$, así que A es invertible y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Despeje.** A está a la derecha de X , así que multiplicamos por A^{-1} por la derecha: $X = BA^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -4+5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación.** $XA = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 \\ -1+1 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

EJERCICIO 2 ★ Básico

Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) ¿Qué dimensión tiene que tener una matriz X que cumpla $AX = B$?
- b) Resuelve la ecuación $AX = B$.

a) Para que exista AX , X tiene que tener tantas filas como columnas tiene A , es decir, 2. El producto AX tiene tantas columnas como X , y debe ser igual a B , que tiene 3. Por tanto X es 2×3 .

b) 1. Inversa de A . $ad - bc = 6 - 5 = 1 \neq 0$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Despeje por la izquierda. $X = A^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0-1 & 4-3 \\ -5+6 & 0+3 & -10+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Observa que aquí BA^{-1} ni siquiera se puede calcular (2×3 por 2×2): las dimensiones también avisan de cuál es el lado correcto.

EJERCICIO 3 ★ Básico

Resuelve la ecuación matricial $AXB = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. **Despeje.** Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda y por B^{-1} por la derecha: $X = A^{-1}CB^{-1}$ (si las dos inversas existen).

2. **Inversas.** Para A : $ad - bc = 1 \neq 0$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para B : $ad - bc = 2 - 1 = 1 \neq 0$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. **Primer producto.**

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Segundo producto.**

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 3-1 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

El orden de los factores en $A^{-1}CB^{-1}$ no se puede cambiar; sí se puede elegir qué producto se hace primero (propiedad asociativa).

EJERCICIO 4 ★★ Medio

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula la inversa de $A + I$ por el método de Gauss-Jordan.
b) Resuelve la ecuación matricial $AX + X = B$.

- a) $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Escribimos $(A + I | I)$ y hacemos ceros por encima de la diagonal, de abajo arriba:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

A la izquierda ha quedado I , así que $A + I$ es invertible y

$$(A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) 1. **Factor común.** $AX + X = AX + IX = (A + I)X$, así que la ecuación es $(A + I)X = B$. X es 3×2 .

2. **Despeje por la izquierda** con la inversa de a):

$$X = (A + I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 + 2 & 0 - 1 + 2 \\ 2 - 2 & 1 - 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación.** $AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $AX + X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.

EJERCICIO 5 ★★ Medio

Resuelve la ecuación matricial $(XA)^t = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **Quitamos la traspuesta.** Trasponiendo los dos miembros y usando $(M^t)^t = M$: $XA = B^t$.

2. **Despeje por la derecha.** $X = B^t A^{-1}$. La inversa existe porque $ad - bc = 2 - 1 = 1 \neq 0$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. **Cálculo.**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3-2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Comprobación.** $XA = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 \\ 2+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, y su traspuesta es $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = B$.

Un error frecuente es escribir $(XA)^t = X^t A^t$: el orden cambia, $(XA)^t = A^t X^t$. Trasponer toda la ecuación evita ese problema.

EJERCICIO 6 ★★ Medio

Para enviar mensajes cifrados, dos amigos sustituyen cada letra por su posición en el alfabeto español de 27 letras ($A = 1, B = 2, \dots, N = 14, \tilde{N} = 15, O = 16, \dots, Z = 27$). Colocan las letras de una palabra de 6 letras por columnas en una matriz M de dimensión 2×3 (la primera columna son las letras 1 y 2, la segunda las letras 3 y 4, la tercera las letras 5 y 6) y envían la matriz $C = AM$, con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula la matriz A^{-1} , que es la que usa el receptor para descifrar.
- b) El receptor recibe $C = \begin{pmatrix} 22 & 17 & 30 \\ 19 & 13 & 23 \end{pmatrix}$. Halla la matriz M y la palabra que se ha enviado.

- a) $ad - bc = 2 - 1 = 1 \neq 0$, así que A es invertible:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- b) 1. **La ecuación.** $AM = C$ con M desconocida. Multiplicando por A^{-1} por la izquierda, $M = A^{-1}C$.

2. **Cálculo.**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & 17 & 30 \\ 19 & 13 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 - 19 & 17 - 13 & 30 - 23 \\ -22 + 38 & -17 + 26 & -30 + 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 16 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

3. **Lectura por columnas.** 3, 16, 4, 9, 7, 16 corresponden a C, O, D, I, G, O . La palabra es **CODIGO**.

El cifrado funciona porque A tiene inversa: si no la tuviera, dos mensajes distintos podrían dar la misma C y el receptor no podría distinguirlos.

EJERCICIO 7 ★★ Medio

Halla todas las matrices triangulares superiores $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, con a, b, c reales, que cumplen

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

1. **No se puede despejar** (no existe la «raíz cuadrada» de una matriz como operación), así que operamos con las incógnitas:

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

2. **Igualamos elemento a elemento:** $a^2 = 4$, $c^2 = 9$ y $b(a+c) = 5$.

3. **Casos.** $a = \pm 2$ y $c = \pm 3$. En los cuatro casos $a+c \neq 0$, así que $b = \frac{5}{a+c}$:

a	c	$a+c$	b
2	3	5	1
2	-3	-1	-5
-2	3	1	5
-2	-3	-5	-1

Hay **cuatro** matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Una ecuación con X^2 puede tener varias soluciones, igual que $x^2 = 4$ tiene dos; quedarse solo con la de números positivos es dejar el ejercicio incompleto.

EJERCICIO 8 ★★★ Difícil

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y la ecuación matricial $(AX)^t = B + X^t$.

- a) Indica qué dimensión debe tener X y demuestra que la ecuación es equivalente a $(A - I)X = B^t$.
b) Resuelve la ecuación.

- a) 1. **Dimensión.** Para que exista AX con A de dimensión 2×2 , X tiene 2 filas; digamos que es $2 \times p$. Entonces AX es $2 \times p$ y $(AX)^t$ es $p \times 2$, que debe tener la dimensión de B , 3×2 . Así que $p = 3$ y X es 2×3 (y X^t , 3×2 , se puede sumar con B).

2. **Equivalencia.** Trasponemos los dos miembros, usando $((AX)^t)^t = AX$ y $(B + X^t)^t = B^t + X$:

$$AX = B^t + X \iff AX - X = B^t \iff (A - I)X = B^t$$

Como transponer es reversible (transponiendo otra vez se vuelve a la ecuación inicial), las dos ecuaciones tienen exactamente las mismas soluciones.

- b) 1. **La matriz que hay que invertir.** $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, con $ad - bc = 4 - 3 = 1 \neq 0$, luego es invertible:

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. **Despeje por la izquierda.** $X = (A - I)^{-1}B^t$, con $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4-1 & -3 \\ -3 & -6+2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación.** $AX = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ y $B^t + X = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. Coinciden, así que también se cumple la ecuación traspuesta.

Para el examen: transponer la ecuación entera al principio es el paso clave; si se intenta despejar X^t directamente hay que usar $(AX)^t = X^t A^t$ y al final volver a transponer, con muchas más ocasiones de equivocarse. Justificar la dimensión de X y que $A - I$ es invertible suele puntuar por separado.

EJERCICIO 9 ★★★ **Difícil**

Sea A una matriz cuadrada que cumple $A^2 - 2A + I = O$.

- a) Demuestra que A es invertible y que $A^{-1} = 2I - A$.
- b) Comprueba que la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ cumple esa relación y calcula M^{-1} usando el apartado a).
- c) Resuelve la ecuación $M^2 X = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, expresando antes $(M^2)^{-1}$ como $\lambda I + \mu M$.

- a) De $A^2 - 2A + I = O$ se obtiene $2A - A^2 = I$. Sacando A factor común por la izquierda y por la derecha:

$$A(2I - A) = 2A - A^2 = I, \quad (2I - A)A = 2A - A^2 = I$$

El producto de A por $2I - A$ da I en los dos órdenes, así que, por la definición de inversa, A es invertible y $A^{-1} = 2I - A$.

- b) 1. **La relación.** $M^2 = \begin{pmatrix} 9-4 & -12+4 \\ 3-1 & -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y

$$M^2 - 2M + I = \begin{pmatrix} 5-6+1 & -8+8+0 \\ 2-2+0 & -3+2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **La inversa.** Por a), $M^{-1} = 2I - M = \begin{pmatrix} 2-3 & 4 \\ -1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. (Se puede comprobar con la fórmula 2×2 : $ad - bc = -3 + 4 = 1$ y sale lo mismo.)

- c) 1. **Inversa de M^2 .** $(M^2)^{-1} = (M^{-1})^2 = (2I - M)^2$. Como I y M conmutan, se puede desarrollar como un binomio:

$$(2I - M)^2 = 4I - 4M + M^2$$

y usando la relación, $M^2 = 2M - I$:

$$(M^2)^{-1} = 4I - 4M + 2M - I = 3I - 2M = \begin{pmatrix} 3-6 & 8 \\ -2 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es decir, $\lambda = 3$ y $\mu = -2$.

2. **Despeje por la izquierda.** $X = (M^2)^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6+8 \\ -2 & -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Comprobación.** $M^2 X = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15+16 & 10-8 \\ -6+6 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Para el examen: en a) hay que escribir el producto que da I ; decir «despejando, $A^{-1} = 2I - A$ » sin mostrarlo no es una demostración. El desarrollo $(2I - M)^2 = 4I - 4M + M^2$ es válido porque I conmuta con cualquier matriz; con dos matrices cualesquiera no lo sería.

EJERCICIO 10

★★★ Dificil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 1 & m+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

donde m es un parámetro real, y el sistema de ecuaciones matriciales

$$\begin{cases} X + Y = B \\ AX + Y = C \end{cases}$$

con incógnitas las matrices X e Y de dimensión 2×2 .

- a) Halla los valores de m para los que la matriz $A - I$ no tiene inversa. (0,75 puntos)
- b) Resuelve el sistema para $m = 0$. (1 punto)
- c) Justifica que para $m = 2$ el sistema no tiene solución. (0,75 puntos)

- a) $A - I = \begin{pmatrix} m-1 & 2 \\ 1 & m \end{pmatrix}$. Una matriz 2×2 tiene inversa si y solo si $ad - bc \neq 0$:

$$(m-1)m - 2 \cdot 1 = m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1)$$

Se anula para $m = 2$ y $m = -1$. Por tanto $A - I$ **no tiene inversa** para $m = 2$ y para $m = -1$, y la tiene para cualquier otro valor.

- b) 1. **Reducción.** Restando la primera ecuación a la segunda se elimina Y :

$$AX - X = C - B \iff (A - I)X = C - B, \quad C - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Para $m = 0$, $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que es invertible por a) ($ad - bc = -2 \neq 0$):

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. **Despejamos X por la izquierda.**

$$X = (A - I)^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Despejamos Y de la primera ecuación:**

$$Y = B - X = \begin{pmatrix} 2-1 & 0+1 \\ 1-1 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. **Comprobación.** $X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = B$ y, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $AX + Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = C$.

- c) Para $m = 2$, $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no tiene inversa y no se puede despejar. El sistema sigue siendo equivalente a $(A - I)X = C - B$ junto con $Y = B - X$. Con $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ x + 2z & y + 2t \end{pmatrix}$$

Las dos filas de $(A - I)X$ son **iguales** para cualquier X , mientras que las de $C - B$ son $(1, 3)$ y $(1, -1)$, distintas. Igualando, $y + 2t = 3$ y $y + 2t = -1$ a la vez, que es imposible. No existe ninguna X y, por tanto, el sistema no tiene solución.

Para el examen: en a) hay que factorizar y dar los dos valores; en b), escribir el paso $(A - I)X = C - B$ y justificar que la matriz es invertible antes de usar su inversa. En c) no basta con decir « $A - I$ no tiene inversa»: eso solo impide despejar, no prueba que no haya solución. Hay que plantear las incógnitas y llegar a una contradicción.

Resumen

- Con matrices no se divide: se multiplica por la inversa **en el mismo lado** en que estaba la matriz. $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$; $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$; $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$.
- Para agrupar, se saca X factor común por su lado y los números se convierten en múltiplos de I : $AX + X = (A + I)X$, $XA - 2X = X(A - 2I)$. $AX + XB$ no se factoriza.
- Antes de usar una inversa hay que justificar que existe ($ad - bc \neq 0$ en 2×2 , o Gauss-Jordan).
- Con traspuestas, traspón la ecuación entera usando $(AB)^t = B^t A^t$ y $(A^t)^t = A$.
- Si la matriz no es invertible, o aparece X^2 o $AX = XB$, se plantea X con incógnitas y se resuelve el sistema: puede haber una, varias, infinitas o ninguna solución.
- Sistemas con X e Y : reducción o sustitución respetando el orden de los productos.
- Si $A^2 + pA + qI = O$ con $q \neq 0$, entonces $A^{-1} = -\frac{1}{q}(A + pI)$; por ejemplo, $A^2 - 2A + I = O \Rightarrow A^{-1} = 2I - A$.

- Con parámetro: busca los valores que impiden invertir y estúdialos aparte.

Problemas de síntesis: álgebra de matrices

IDEA CLAVE

Estos 12 problemas mezclan todo el tema (producto, potencias, traspuesta, inversa y ecuaciones matriciales) como en la PAU, donde cada apartado aprovecha el anterior. Intenta cada uno sin mirar la solución y, si te atascas, vuelve al apartado del tema que trabaja esa idea.

Problemas de síntesis

Intenta cada ejercicio por tu cuenta antes de abrir la solución. Van de menos a más difícil.

PROBLEMA 1 ★★ Medio

Un comedor universitario ofrece tres menús. La matriz M da las raciones de cada alimento que lleva cada menú (filas: menú 1, 2 y 3; columnas: arroz, pollo y verdura, en este orden) y la matriz T , los nutrientes de una ración de cada alimento (filas: proteínas en gramos y energía en kcal; columnas: arroz, pollo y verdura):

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 25 & 2 \\ 130 & 160 & 30 \end{pmatrix}$$

- Explica por qué el producto MT no se puede calcular. Calcula MT^t e interpreta sus elementos.
- Una estudiante come en una semana 3 veces el menú 1, 2 veces el menú 2 y x veces el menú 3. Escribe esas cantidades como una matriz fila s y calcula sMT^t en función de x .
- Halla x sabiendo que esa semana tomó en total 360 gramos de proteínas.
- Con ese valor de x , ¿cuántas kcal tomó esa semana en total?

- M es 3×3 y T es 2×3 : para multiplicar MT haría falta que T tuviera 3 filas, y tiene 2. Además, las columnas de M son alimentos y las filas de T son nutrientes: no «encajan». En T^t (dimensión 3×2) las filas pasan a ser los alimentos, que es lo que hace falta:

$$MT^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 130 \\ 25 & 160 \\ 2 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 25 + 2 & 260 + 160 + 30 \\ 3 + 50 & 130 + 320 \\ 25 + 6 & 160 + 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 450 \\ 53 & 450 \\ 31 & 250 \end{pmatrix}$$

El elemento $(i, 1)$ son los gramos de proteínas del menú i y el $(i, 2)$, sus kcal. Por ejemplo, el menú 2 aporta 53 g de proteínas y 450 kcal.

- $s = (3 \quad 2 \quad x)$ (una columna por menú). Como MT^t ya está calculada:

$$sMT^t = (3 \quad 2 \quad x) \begin{pmatrix} 33 & 450 \\ 53 & 450 \\ 31 & 250 \end{pmatrix} = (205 + 31x \quad 2250 + 250x)$$

El primer elemento son los gramos de proteínas de toda la semana y el segundo, las kcal.

- $205 + 31x = 360 \iff 31x = 155 \iff x = 5$. Comió 5 veces el menú 3.
- $2250 + 250 \cdot 5 = 3500$ kcal.

PROBLEMA 2 ★★ Medio

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcula AA^t y A^tA , y comprueba que las dos son simétricas.
- Justifica, con el método de Gauss, que A^tA no tiene inversa, y calcula la inversa de AA^t .
- Resuelve la ecuación matricial $(AA^t)X = A$ y calcula XA^t .

- a) A es 2×3 , así que AA^t es 2×2 y A^tA es 3×3 :

$$AA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las dos son simétricas, y no por casualidad: $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$, y lo mismo con A^tA .

- b) En A^tA la fila 3 es igual a la fila 1. Con $F_3 - F_1$ aparece una fila de ceros, así que por Gauss nunca se llega a la identidad: A^tA **no tiene inversa**.

Para $AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $ad - bc = 6 - 4 = 2 \neq 0$, luego es invertible:

$$(AA^t)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) 1. **Despeje por la izquierda.** $X = (AA^t)^{-1}A$, de dimensión 2×3 :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **El producto XA^t .** Sin hacer cuentas: $XA^t = (AA^t)^{-1}(AA^t) = I$. Comprobándolo:

$$XA^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A no es cuadrada y no tiene inversa, pero la matriz X^t cumple $AX^t = (XA^t)^t = I$: hace de «inversa por la derecha» de A .

PROBLEMA 3 ★★ Medio

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Halla las matrices X e Y que cumplen

$$\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = A^t \end{cases}$$

- b) Comprueba que X es simétrica e Y es antisimétrica.

- c) Calcula Y^2 y, a partir de ella, Y^{10} e Y^{11} .

- a) Sumando las dos ecuaciones, $2X = A + A^t$; restándolas, $2Y = A - A^t$. Con $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$:

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) $x_{12} = x_{21} = 2$, así que $X^t = X$: es simétrica. En Y la diagonal es nula e $y_{21} = -y_{12}$, así que $Y^t = -Y$: es antisimétrica. Es la descomposición de A en parte simétrica más parte antisimétrica.

- c) 1. El cuadrado.

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$$

2. Potencias pares. $Y^{10} = (Y^2)^5 = (-4I)^5 = (-4)^5 I = -1024 I = \begin{pmatrix} -1024 & 0 \\ 0 & -1024 \end{pmatrix}$.

3. Potencias impares. $Y^{11} = Y^{10}Y = -1024 Y = \begin{pmatrix} 0 & -2048 \\ 2048 & 0 \end{pmatrix}$.

PROBLEMA 4 ★★ Medio

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y sea $N = A - I$.

- a) Comprueba que $N^2 = O$ y deduce una fórmula para A^n , con $n \geq 1$.
- b) Comprueba que $A(I - N) = I$ y escribe A^{-1} .
- c) Resuelve la ecuación matricial $XA^3 = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) 1. $N = A - I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4-4 & -4+4 \\ 4-4 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $A = I + N$, e I conmuta con N , así que vale el binomio de Newton. Como $N^2 = O$, todos los términos con N^2 o potencias mayores se anulan:

$$A^n = (I + N)^n = I + nN = \begin{pmatrix} 1+2n & -2n \\ 2n & 1-2n \end{pmatrix}$$

- b) $A(I - N) = (I + N)(I - N) = I - N^2 = I$ (de nuevo porque I y N conmutan), y del mismo modo $(I - N)A = I$. Por tanto

$$A^{-1} = I - N = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobación con la fórmula 2×2 : $ad - bc = -3 + 4 = 1$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

- c) 1. **Despeje por la derecha.** $X = B(A^3)^{-1} = B(A^{-1})^3$.

2. **La inversa de A^3 .** $(A^{-1})^3 = (I - N)^3 = I - 3N$ (los demás términos llevan $N^2 = O$):

$$I - 3N = \begin{pmatrix} 1-6 & 6 \\ -6 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

3. **Producto.**

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -10-6 & 12+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -16 & 19 \end{pmatrix}$$

4. **Comprobación.** Por a), $A^3 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ y $XA^3 = \begin{pmatrix} -35+36 & 30-30 \\ -112+114 & 96-95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = B$.

PROBLEMA 5 ★★★ Dificil

Una economía tiene dos sectores: agricultura (1) e industria (2). Para producir 1 euro de producto agrícola se consumen 0,30 euros de productos agrícolas y 0,10 euros de productos industriales; para producir 1 euro de producto industrial se consumen 0,20 euros de productos agrícolas y 0,40 euros de productos industriales. Sea A la matriz 2×2 cuyo elemento a_{ij} son los euros del sector i que se consumen para producir 1 euro del sector j .

- Escribe la matriz A .
- Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es la producción de cada sector y $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ la demanda de los consumidores (lo que sobra después de abastecer a los propios sectores), se cumple $x = Ax + d$. Despeja x y calcula la matriz $(I - A)^{-1}$.
- Halla la producción de cada sector, en millones de euros, para atender una demanda de 40 millones de productos agrícolas y 80 millones de productos industriales.
- Si la demanda de productos industriales sube en 20 millones (y la agrícola no cambia), ¿cuánto tiene que aumentar la producción de cada sector?

- La columna j recoge lo que consume el sector j . Columna 1 (agricultura): 0,30 y 0,10. Columna 2 (industria): 0,20 y 0,40.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

- Despeje.** $x - Ax = d \iff (I - A)x = d$ (factor común por la izquierda; $x = Ix$). Si $I - A$ es invertible, $x = (I - A)^{-1}d$.

2. **La matriz.** $I - A = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, con $ad - bc = \frac{21}{50} - \frac{1}{50} = \frac{2}{5} \neq 0$. Con la fórmula 2×2 :

$$(I - A)^{-1} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

- Con $d = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \end{pmatrix}$:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 + 40 \\ 10 + 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix}$$

La agricultura debe producir 100 millones y la industria 150. Comprobación: $Ax = \begin{pmatrix} 30 + 30 \\ 10 + 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$ y $x - Ax = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \end{pmatrix} = d$.

- Como $x = (I - A)^{-1}d$ es lineal en d , el aumento de producción es $(I - A)^{-1}$ por el aumento de demanda:

$$(I - A)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \end{pmatrix}$$

La agricultura tiene que producir 10 millones más y la industria 35 millones más. Aunque la demanda agrícola no cambia, su producción sube, porque la industria consume productos agrícolas.

Para el examen: en los problemas de contexto, escribe qué significa cada fila y cada columna antes de montar la matriz (aquí, poner los consumos por filas en lugar de por columnas da otra matriz y todo sale mal). Y

justifica que $I - A$ es invertible antes de usar su inversa.

PROBLEMA 6 ★★★ Difícil

Cuatro pueblos, numerados del 1 al 4, están unidos por carreteras de doble sentido: 1-2, 1-3, 2-3, 2-4 y 3-4. Sea M la matriz de adyacencia ($m_{ij} = 1$ si hay carretera directa entre i y j , y $m_{ij} = 0$ si no la hay; $m_{ii} = 0$). Un **recorrido de longitud k** es una sucesión de k tramos de carretera consecutivos (puede repetir pueblos y tramos). Se sabe que el elemento (i, j) de M^k es el número de recorridos de longitud k de i a j .

- Escribe M y calcula M^2 . ¿Qué significan los elementos de la diagonal de M^2 ?
- ¿Cuántos recorridos de longitud 2 hay del pueblo 1 al pueblo 4?
- Calcula M^3 . ¿Cuántos recorridos de longitud 3 hay del pueblo 2 al pueblo 3? Escríbelos.
- Calcula la traza de M^3 y explica por qué el número de triángulos de carreteras (tres pueblos unidos dos a dos) es $\frac{1}{6} \text{tr}(M^3)$. ¿Cuántos hay?

- a) Cada carretera pone un 1 en (i, j) y en (j, i) , así que M es simétrica:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El elemento (i, i) de M^2 es $\sum_k m_{ik}m_{ki} = \sum_k m_{ik}^2$, el número de unos de la fila i : el **número de carreteras que salen del pueblo i** (cada recorrido $i \rightarrow k \rightarrow i$ es ir a un vecino y volver). M^2 también es simétrica, porque $(M^2)^t = (M^t)^2 = M^2$.

- Es el elemento $(1, 4)$ de M^2 : 2 recorridos (1-2-4 y 1-3-4).
- $M^3 = M^2M$:

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

El elemento $(2, 3)$ es 5. Los recorridos son de la forma $2 \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow 3$, con a vecino de 2 y b vecino de a y de 3 (los vecinos de 3 son 1, 2 y 4):

- $a = 1$: $b = 2$, recorrido 2-1-2-3.
- $a = 3$: $b = 1$, 2 o 4, recorridos 2-3-1-3, 2-3-2-3 y 2-3-4-3.
- $a = 4$: $b = 2$, recorrido 2-4-2-3.

Son 5, como dice M^3 .

- $\text{tr}(M^3) = 2 + 4 + 4 + 2 = 12$. Un recorrido de longitud 3 que empieza y acaba en el mismo pueblo no puede volver por el mismo tramo (no hay carreteras de un pueblo a sí mismo), así que recorre un triángulo. Cada triángulo da 6 recorridos cerrados: se puede empezar en cualquiera de sus 3 pueblos y recorrerlo en 2 sentidos. Por tanto el número de triángulos es $\frac{12}{6} = 2$ (los formados por los pueblos 1, 2, 3 y por 2, 3, 4).

Para el examen: las potencias de la matriz de adyacencia cuentan recorridos, no caminos sin repetir: por eso en c) aparecen 2-3-2-3 y 2-1-2-3. Justifica siempre la interpretación con la fórmula del producto, $\sum_k m_{ik} m_{kj}$.

PROBLEMA 7 ★★★ Difícil

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula A^2 y A^3 .
- b) Deduce A^{-1} sin usar la fórmula de la inversa.
- c) Calcula A^{2027} .
- d) Comprueba que $I + A + A^2 = O$ y úsalo para resolver la ecuación $A^{2026}X + X = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0+1 & 1-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

- b) $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3 = I$, así que por la definición de inversa

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- c) Las potencias se repiten de 3 en 3. Como $2027 = 3 \cdot 675 + 2$:

$$A^{2027} = (A^3)^{675} A^2 = I \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- d) 1. **La relación.** $I + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1+0-1 & 0-1+1 \\ 0+1-1 & 1-1+0 \end{pmatrix} = O$.

2. **Simplificar la ecuación.** $2026 = 3 \cdot 675 + 1$, así que $A^{2026} = A$ y la ecuación es $AX + X = B$, es decir, $(A + I)X = B$.

3. **Inversa de $A + I$.** De la relación, $A + I = -A^2$. Entonces $(A + I)(-A) = A^3 = I$ y $(-A)(A + I) = I$, luego $(A + I)^{-1} = -A$.

4. **Despeje por la izquierda.**

$$X = (A + I)^{-1}B = -AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. **Comprobación.** $(A + I)X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Para el examen: en potencias grandes escribe la división ($2027 = 3 \cdot 675 + 2$) y la igualdad $(A^3)^{675} = I$; dar solo el resultado no puntúa. En d), reducir A^{2026} a A antes de nada convierte una ecuación de aspecto imposible en una de las básicas.

PROBLEMA 8
★★★ Difícil
Tipo PAU · 2,5 puntos

Sea J la matriz cuadrada de orden 3 con todos sus elementos iguales a 1 ($j_{ik} = 1$ para todos los i, k), e I la identidad de orden 3.

- a) Comprueba que $J^2 = 3J$ y demuestra por inducción que $J^n = 3^{n-1}J$ para todo $n \geq 1$. (0,5 puntos)
- b) Halla el número real α para el que $I + \alpha J$ es la inversa de $A = I + J$. (0,5 puntos)
- c) Halla el único valor de k para el que la matriz $I + kJ$ no tiene inversa, y para los demás valores de k escribe su inversa en la forma $I + \alpha J$, dando α en función de k . (0,75 puntos)
- d) Resuelve la ecuación $AX = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, con $A = I + J$. (0,75 puntos)

- a) 1. **El cuadrado.** Cada elemento de J^2 es una fila de unos por una columna de unos: $1 + 1 + 1 = 3$. Así que todos valen 3 y $J^2 = 3J$.
2. **Inducción.** Para $n = 1$, $3^0 J = J$. Si $J^n = 3^{n-1}J$, entonces $J^{n+1} = J^n J = 3^{n-1}J^2 = 3^{n-1} \cdot 3J = 3^n J$, que es la fórmula para $n + 1$. Por tanto $J^n = 3^{n-1}J$ para todo $n \geq 1$.

- b) Como I y J conmutan:

$$(I + J)(I + \alpha J) = I + \alpha J + J + \alpha J^2 = I + (1 + \alpha + 3\alpha)J = I + (1 + 4\alpha)J$$

Esto es I si $1 + 4\alpha = 0$, es decir, $\alpha = -\frac{1}{4}$ (el producto en el otro orden da lo mismo). Así

$$A^{-1} = I - \frac{1}{4}J = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

- c) 1. **Buscamos la inversa con la misma forma.** $(I + kJ)(I + \alpha J) = I + (k + \alpha + 3k\alpha)J$, que es I si y solo si $\alpha(1 + 3k) = -k$.

2. Si $k \neq -\frac{1}{3}$, basta tomar $\alpha = -\frac{k}{1 + 3k}$, y $I + kJ$ es invertible con inversa $I - \frac{k}{1 + 3k}J$ (para $k = 1$ sale el $-\frac{1}{4}$ de b).

3. Si $k = -\frac{1}{3}$: $(I - \frac{1}{3}J)J = J - \frac{1}{3}J^2 = J - J = O$. Si $I - \frac{1}{3}J$ tuviera inversa P , multiplicando por la izquierda se obtendría $J = P \cdot O = O$, lo que es falso. Por tanto, $I + kJ$ **no tiene inversa** solo para $k = -\frac{1}{3}$.

- d) X es 3×1 y $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Con $A^{-1} = I - \frac{1}{4}J$, y como $J \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ (cada fila suma los tres elementos):

$$X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $AX = X + JX = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Para el examen: en c) hay que justificar las dos cosas: que para $k \neq -\frac{1}{3}$ la inversa existe (se da explícitamente) y que para $k = -\frac{1}{3}$ no existe (el argumento de $(I - \frac{1}{3}J)J = O$ con $J \neq O$). Sin determinantes, esa es la forma correcta de probar que una matriz no es invertible.

PROBLEMA 9

★★★ Difícil

Tipo PAU · 2,5 puntos

Sean las matrices columna $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Halla la matriz A de orden 2 que cumple $Au = u$ y $Aw = 2w$. Para ello, escribe las dos condiciones como una sola igualdad $AP = PD$, con $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y D diagonal. (0,75 puntos)
- b) Demuestra por inducción que $A^n = PD^n P^{-1}$ para todo $n \geq 1$. (0,5 puntos)
- c) Calcula A^n en función de n . (0,75 puntos)
- d) Halla n para que el elemento $(1, 2)$ de A^n valga 1023. (0,5 puntos)

a) 1. **Una sola igualdad.** Las columnas de AP son Au y Aw ; las de PD , con $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, son $1 \cdot u$ y $2 \cdot w$. Por tanto las dos condiciones equivalen a $AP = PD$.

2. **Despeje.** P es invertible ($ad - bc = 2 - 1 = 1 \neq 0$), con $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Multiplicando por P^{-1} por la derecha, $A = PDP^{-1}$:

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $Au = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u$ y $Aw = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2w$.

b) Para $n = 1$ es la igualdad de a). Si $A^n = PD^n P^{-1}$, entonces

$$A^{n+1} = A^n A = PD^n P^{-1} PDP^{-1} = PD^n (P^{-1}P)DP^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$$

porque $P^{-1}P = I$. Queda demostrado para todo $n \geq 1$.

c) D es diagonal, así que $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Entonces $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$ y

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación con $n = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = A$.

d) $2^n - 1 = 1023 \iff 2^n = 1024 = 2^{10} \iff n = 10$.

Para el examen: la clave de a) es ver que AP tiene por columnas Au y Aw . En b), el paso $P^{-1}P = I$ en el centro es lo que hace que se «peguen» las D : escríbelo. Calcular A^n multiplicando A por sí misma y adivinando el patrón también vale, pero exige demostrarlo.

PROBLEMA 10
★★★ Difícil
Tipo PAU · 2,5 puntos

Se consideran las matrices, que dependen del parámetro real m ,

$$A = \begin{pmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$$

y la ecuación matricial $(AX)^t + X^t = B$.

- a) Indica la dimensión de X y demuestra que la ecuación es equivalente a $(A + I)X = B^t$. (0,5 puntos)
- b) Halla los valores de m para los que $A + I$ no tiene inversa. (0,5 puntos)
- c) Resuelve la ecuación para $m = 0$. (0,5 puntos)
- d) Resuelve la ecuación para $m = 1$. (0,5 puntos)
- e) Resuelve la ecuación para $m = -3$. (0,5 puntos)

a) **1. Dimensión.** Para que exista AX , X tiene 2 filas: es $2 \times p$. Entonces $(AX)^t$ es $p \times 2$, y tiene que ser como B , 1×2 . Luego $p = 1$ y X es 2×1 .

2. Equivalencia. Usando $(M + N)^t = M^t + N^t$: $(AX)^t + X^t = (AX + X)^t = ((A + I)X)^t$. Trasponiendo los dos miembros, la ecuación equivale a $(A + I)X = B^t$, con $B^t = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) $A + I = \begin{pmatrix} m+1 & 4 \\ 1 & m+1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa si y solo si $ad - bc = 0$:

$$(m+1)^2 - 4 = 0 \iff m+1 = \pm 2 \iff m = 1 \text{ o } m = -3$$

c) Para $m = 0$, $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $ad - bc = -3 \neq 0$:

$$X = (A + I)^{-1}B^t = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $AX = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $(AX)^t + X^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} = B$.

d) Para $m = 1$ no se puede despejar. Con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

La primera ecuación es el doble de la segunda: queda solo $x + 2y = 3$. Hay **infinitas soluciones**: tomando $y = t$, $X = \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ t \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$.

e) Para $m = -3$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Multiplicando la segunda por -2 queda $-2x + 4y = -6$, incompatible con $-2x + 4y = 6$. **No hay solución.**

Para el examen: que $A + I$ no tenga inversa solo dice que no se puede despejar; hay que plantear las incógnitas y ver si el sistema tiene infinitas soluciones ($m = 1$) o ninguna ($m = -3$). Es justo lo que distingue un 1,5 de un 2,5 en este tipo de problema.

PROBLEMA 11 ★★★ Dificil

- a) Halla todas las matrices simétricas $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, con a, b, c reales, que cumplen $X^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
- b) Sea $X_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Demuestra por inducción que, para todo $n \geq 1$,

$$X_0^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

- c) Calcula X_0^{-1} y comprueba que coincide con lo que da la fórmula de b) para $n = -1$.
- d) Calcula, en función de n , la suma de todos los elementos de X_0^n .

a) 1. Operamos.

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2 + c^2 \end{pmatrix}$$

2. Ecuaciones. $a^2 + b^2 = 5$, $b^2 + c^2 = 5$ y $b(a+c) = 4$.

3. Restando las dos primeras, $a^2 = c^2$, luego $c = a$ o $c = -a$. Si $c = -a$, la tercera da $b \cdot 0 = 4$, imposible. Por tanto $c = a$.

4. Con $c = a$: $2ab = 4$, es decir, $ab = 2$, y $a^2 + b^2 = 5$. Entonces $(a+b)^2 = 5 + 4 = 9$ y $(a-b)^2 = 5 - 4 = 1$, así que $a+b = \pm 3$ y $a-b = \pm 1$. Las cuatro combinaciones dan $(a, b) = (2, 1), (1, 2), (-1, -2), (-2, -1)$, y todas cumplen $ab = 2$.

Hay cuatro matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- b) Para $n = 1$: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = X_0$. Si la fórmula vale para n :

$$X_0^{n+1} = X_0^n X_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cdot 3^n + 1 & 3 \cdot 3^n - 1 \\ 3 \cdot 3^n - 1 & 3 \cdot 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

porque, por ejemplo, $2(3^n + 1) + (3^n - 1) = 3 \cdot 3^n + 1$ y $(3^n + 1) + 2(3^n - 1) = 3 \cdot 3^n - 1$. Como $3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$, es la fórmula para $n + 1$.

- c) $ad - bc = 4 - 1 = 3 \neq 0$:

$$X_0^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Con $n = -1$ en la fórmula: $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + 1 & \frac{1}{3} - 1 \\ \frac{1}{3} - 1 & \frac{1}{3} + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, que es la misma matriz.

- d) Sumando los cuatro elementos: $\frac{1}{2}(2(3^n + 1) + 2(3^n - 1)) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^n = 2 \cdot 3^n$.

Para el examen: en a), una ecuación con X^2 no se despeja: se plantean las incógnitas, y hay que descartar el caso $c = -a$ con una frase y no perder ninguna de las cuatro soluciones. En b), escribe al menos un elemento del producto con detalle para que se vea de dónde sale 3^{n+1} .

PROBLEMA 12 ★★★ Dificil

Sean

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula N^2 y N^3 y, con el binomio de Newton, A^n en función de n .
- b) Halla todas las matrices X de orden 3 que conmutan con A . Exprésalas en función de $a = x_{11}$, $b = x_{12}$ y $c = x_{13}$.
- c) Justifica que si una matriz X cumple $X^2 = A$, entonces X conmuta con A .
- d) Halla todas las matrices X de orden 3 tales que $X^2 = A$.

- a) 1. **Potencias de N .** Multiplicar por N por la izquierda «sube» las filas una posición:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = O$$

2. **Binomio.** I y N conmutan y $N^k = O$ para $k \geq 3$, así que solo quedan tres términos:

$$A^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) $XA = AX \iff X + XN = X + NX \iff XN = NX$. Con $X = (x_{ij})$:

$$NX = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad XN = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{21} & x_{22} \\ 0 & x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$$

Igualando: la primera columna da $x_{21} = 0$, $x_{31} = 0$; la tercera fila da $x_{31} = x_{32} = 0$ y $x_{33} = x_{22}$; el resto da $x_{22} = x_{11}$ y $x_{23} = x_{12}$. Así

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + bN + cN^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

- c) Si $X^2 = A$, entonces $XA = X \cdot X^2 = X^3 = X^2 \cdot X = AX$ (propiedad asociativa).
- d) 1. **Forma de X .** Por c), toda solución conmuta con A , y por b) es $X = aI + bN + cN^2$.

2. **Cuadrado.** Como I , N y N^2 conmutan entre sí y $N^3 = N^4 = O$:

$$X^2 = a^2I + 2abN + (b^2 + 2ac)N^2$$

3. **Igualamos con $A = I + N$** (comparando los elementos $(1, 1)$, $(1, 2)$ y $(1, 3)$): $a^2 = 1$, $2ab = 1$, $b^2 + 2ac = 0$.

4. **Casos.** Si $a = 1$: $b = \frac{1}{2}$ y $c = -\frac{b^2}{2a} = -\frac{1}{8}$. Si $a = -1$: $b = -\frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{8}$.

Hay dos soluciones, una opuesta de la otra:

$$X = \pm \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación (para el signo +): $\left(I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2\right)^2 = I + N + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)N^2 = I + N = A$.

Para el examen: el apartado c) es lo que permite resolver d) con 3 incógnitas en lugar de 9; sin él habría que plantear un sistema no lineal enorme. Fíjate en que para afirmar que **no hay más** soluciones hace falta justamente ese argumento.