

Trigonometría

Trigonometría para IB Aplicaciones e Interpretación NM: triángulos rectángulos, teoremas del seno y del coseno, área, elevación y depresión, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-aplicaciones-e-interpretacion-nm/trigonometria.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

La **trigonometría** sirve para calcular lados y ángulos desconocidos de un triángulo a partir de otros que sí conoces. En este tema repasas lo básico (Pitágoras, semejanza, arcos y sectores), usas **seno, coseno y tangente** en el triángulo rectángulo, resuelves **cualquier triángulo** con los **teoremas del seno y del coseno** y calculas su **área**. En el examen de Aplicaciones e Interpretación casi todos los problemas son situaciones reales (una escalera, un acantilado, una parcela, un globo, un tejado) con un dibujo, y se resuelven con la calculadora de pantalla gráfica (CPG), así que lo importante es **elegir bien la herramienta** y comprobar que la calculadora está en **grados**.

Orden recomendado

Sigue los apartados en orden: el 1 repasa lo que necesitas, el 2 es la base del tema (triángulo rectángulo, elevación y depresión), el 3 cubre los triángulos que no son rectángulos y el 4 añade el área. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

Conocimientos previos: Pitágoras, semejanza, arcos y sectores

IDEA CLAVE

Antes de usar seno, coseno y tangente necesitas cinco herramientas que ya conoces de la ESO: la suma de los ángulos de un triángulo, el teorema de Pitágoras, la semejanza, los grados con minutos y segundos, y las fórmulas del arco y del sector circular. En el examen del IB aparecen solas en problemas fáciles y casi siempre mezcladas con otros apartados de trigonometría.

Los ángulos de un triángulo

PROPIEDAD · SUMA DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

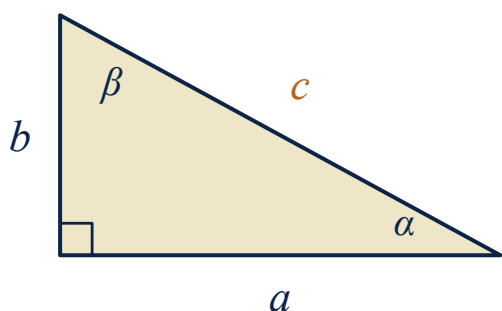
Los tres ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180° . Si conoces dos, el tercero es 180° menos la suma de los otros dos.

Una forma de verlo: si recortas las tres esquinas de un triángulo de papel y las juntas por el vértice, forman una línea recta, es decir, medio giro.

En un triángulo rectángulo uno de los ángulos mide 90° , así que los otros dos suman 90° . Dos ángulos que suman 90° se llaman **complementarios**: si uno mide α , el otro mide $90^\circ - \alpha$.

El teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto es la **hipotenusa** y siempre es el más largo. Los otros dos son los **catetos**.



TEOREMA • TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Es decir, el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos. Solo es válido si el triángulo tiene un ángulo recto.

Para hallar un cateto se despeja: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Por ejemplo, con hipotenusa 10 y un cateto 6, el otro cateto es $\sqrt{100 - 36} = 8$.

Cuando los lados dependen de x . En muchos problemas los lados se dan como expresiones como x , $x + 1$, $x + 9$. Se escribe Pitágoras con esas expresiones, se desarrollan los cuadrados y queda una ecuación cuadrática. La hipotenusa es el lado más largo, así que va sola en el miembro izquierdo.

MÉTODO • PITÁGORAS CON LADOS DESCONOCIDOS

1. Identifica la hipotenusa (la más larga, opuesta al ángulo recto).
2. Escribe $\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}_1^2 + \text{cateto}_2^2$ con las expresiones del enunciado.
3. Desarrolla con cuidado: $(x + k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$, no $x^2 + k^2$.
4. Pasa todo a un miembro y resuelve la cuadrática (factorizando, con la fórmula o con la CPG).
5. Descarta las soluciones que dan una longitud negativa o cero, y comprueba que el lado más largo es la hipotenusa.

Triángulos semejantes

Dos triángulos son **semejantes** cuando tienen la misma forma aunque distinto tamaño: uno es una ampliación o reducción del otro.

DEFINICIÓN • TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Dos triángulos son semejantes si sus tres ángulos son iguales de dos en dos. Entonces sus lados correspondientes (los que se oponen a ángulos iguales) son proporcionales:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Basta con que dos ángulos sean iguales para que el tercero también lo sea y los triángulos sean semejantes.

El cociente común de las razones es la **razón de semejanza**: si es 2, todos los lados del triángulo grande miden el doble que los del pequeño. Así se calculan alturas que no se pueden medir de forma directa: un objeto y su sombra forman con el suelo y el sol un triángulo semejante al de otro objeto y su sombra a la misma hora.

Medir ángulos: grados, minutos y segundos

El ángulo se mide en **grados sexagesimales**: una vuelta completa son 360° . Para mayor precisión cada grado se divide en 60 **minutos** y cada minuto en 60 **segundos**:

$$1^\circ = 60' \quad 1' = 60''$$

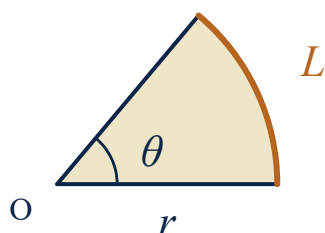
Para pasar de grados, minutos y segundos a grados decimales, divides los minutos entre 60 y los segundos entre 3600. Por ejemplo, $20^\circ 30' 18'' = 20 + \frac{30}{60} + \frac{18}{3600} = 20,505^\circ$. Para el camino inverso, la parte decimal se multiplica por 60 y da los minutos; la parte decimal de estos, por 60, da los segundos.

NOTA • CON LA CPG

Con la calculadora de pantalla gráfica (CPG) trabajas casi siempre con grados decimales. Antes de empezar, **comprueba que está en modo grados** (y no en radianes): es el error más habitual y todos los resultados trigonométricos salen mal. La CPG también tiene una función para convertir entre grados decimales y grados, minutos y segundos. Si el enunciado da el ángulo en grados y minutos, conviértelo a decimal con tantas cifras como puedas y redondea solo al final.

Longitud de arco y área de un sector

Un **arco** es un trozo de circunferencia y un **sector circular** es la región entre dos radios y su arco, como una porción de pizza.



La idea es proporcional. Un ángulo de θ° es la fracción $\frac{\theta}{360}$ de una vuelta completa, así que el arco es esa fracción de la circunferencia y el sector es esa fracción del círculo.

PROPIEDAD • ARCO Y SECTOR DE ÁNGULO CENTRAL θ (EN GRADOS)

Con radio r y ángulo central θ en grados:

$$L = \frac{\theta}{360} \cdot 2\pi r \quad A = \frac{\theta}{360} \cdot \pi r^2$$

L es la longitud del arco y A el área del sector. El **perímetro** del sector incluye también los dos radios: $P = 2r + L$.

Por ejemplo, un sector de 90° y radio 4 es un cuarto del círculo: $L = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4 = 2\pi$ y $A = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 16 = 4\pi$.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Triángulo rectángulo y ángulos

- En un triángulo, dos ángulos miden 52° y 71° . Calcula el tercero.
- Un triángulo rectángulo tiene catetos de 20 cm y 21 cm. Calcula la hipotenusa.
- Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide 37° . Calcula el otro.

- Los tres ángulos suman 180° : $180^\circ - 52^\circ - 71^\circ = 57^\circ$.
- Con Pitágoras, $c^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$, luego $c = \sqrt{841} = 29$ cm.

- c) Los ángulos agudos son complementarios: $90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Una sombra y un ángulo

Una persona de 1,8 m de altura proyecta una sombra de 2,4 m. En ese mismo momento, un árbol proyecta una sombra de 10 m.

- Calcula la altura del árbol.
- Un instrumento marca un ángulo de $35^\circ 24' 36''$. Exprésalo en grados decimales.
- Expresa $72,355^\circ$ en grados, minutos y segundos.

- a) A la misma hora los rayos del sol llegan con la misma inclinación, así que los triángulos formados por cada objeto y su sombra son semejantes (los dos tienen un ángulo recto y el mismo ángulo en el suelo). Con h la altura del árbol:

$$\frac{h}{10} = \frac{1,8}{2,4} \Rightarrow h = \frac{1,8 \cdot 10}{2,4} = 7,5 \text{ m}$$

b) $35 + \frac{24}{60} + \frac{36}{3600} = 35 + 0,4 + 0,01 = 35,41^\circ$.

- c) Los grados enteros son 72° . La parte decimal $0,355^\circ$ se multiplica por 60: $0,355 \cdot 60 = 21,3'$, es decir, $21'$ y una parte decimal $0,3'$. Se multiplica esta por 60: $0,3 \cdot 60 = 18''$. Resulta $72^\circ 21' 18''$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un parque con un triángulo y un parterre

En un parque hay una zona triangular con un ángulo recto. Sus lados miden x , $(x + 1)$ y $(x + 9)$ metros, donde x es positivo. Junto a ella se construye un parterre con forma de sector circular, de ángulo central 80° y cuyo radio es la longitud, en metros, del lado más largo del triángulo.

- Escribe una ecuación cuadrática en x y halla el valor de x .
- Calcula la longitud del arco del parterre, con dos cifras decimales.
- Calcula el área del parterre, con dos cifras decimales.

- a) El lado más largo es la hipotenusa, $x + 9$. Por Pitágoras:

$$(x + 9)^2 = x^2 + (x + 1)^2$$

Desarrollando, $x^2 + 18x + 81 = 2x^2 + 2x + 1$. Pasando todo a un miembro:

$$x^2 - 16x - 80 = 0 \Rightarrow (x - 20)(x + 4) = 0$$

Las soluciones son $x = 20$ y $x = -4$. Como una longitud es positiva, $x = 20$. Los lados miden 20, 21 y 29 metros, y se cumple $20^2 + 21^2 = 841 = 29^2$.

- b) El radio es la hipotenusa, $r = 29$ m. La longitud del arco es

$$L = \frac{80}{360} \cdot 2\pi \cdot 29 = \frac{116\pi}{9} \approx 40,49 \text{ m}$$

- c) El área del sector es

$$A = \frac{80}{360} \cdot \pi \cdot 29^2 = \frac{2}{9}\pi \cdot 841 \approx 587,13 \text{ m}^2$$

En el examen: se puntúa escribir la ecuación de Pitágoras con la hipotenusa en el lugar correcto, resolver la cuadrática y rechazar la solución negativa. Para las fórmulas del arco y del sector, escribe la sustitución antes del resultado y redondea solo al final, sin usar valores ya redondeados.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • DESARROLLAR MAL $(x+k)^2$ O PONER MAL LA HIPOTENUSA

Al aplicar Pitágoras con expresiones, muchos alumnos escriben $(x+9)^2 = x^2 + 81$, olvidando el doble producto $18x$. Otro fallo habitual es poner la hipotenusa como un cateto, por ejemplo $x^2 = (x+1)^2 + (x+9)^2$, que no tiene solución. Recuerda que la hipotenusa es el lado más largo y va sola a un lado de la igualdad. Después de resolver, comprueba con los números: la suma de los cuadrados de los catetos debe dar el cuadrado de la hipotenusa.

ERROR TÍPICO • EMPAREJAR MAL LOS LADOS DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES

En una semejanza, las razones solo son iguales entre lados **correspondientes**, los que se oponen a ángulos iguales. Si mezclas, por ejemplo, la altura de uno con la sombra del otro en el mismo cociente, el resultado sale mal. Escribe siempre la proporción con el mismo orden: altura sobre sombra en los dos miembros, o ambos al revés.

ERROR TÍPICO • GRADOS DECIMALES Y MINUTOS SON COSAS DISTINTAS

Un ángulo de $35^\circ 24'$ no es $35,24^\circ$: como $1^\circ = 60'$, los $24'$ son $0,4^\circ$ y el ángulo vale $35,4^\circ$. Otro error muy frecuente es usar la fórmula del arco o del sector con la CPG en radianes, o con un ángulo en radianes, sin dividir por 360; con θ en grados siempre aparece la fracción $\frac{\theta}{360}$. Por último, no confundas el arco L con el perímetro del sector, que además suma los dos radios.

Resumen

- Los ángulos de un triángulo suman 180° ; los dos agudos de un triángulo rectángulo suman 90° (son complementarios).
- Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$, con c la hipotenusa. Si los lados dependen de x , sale una cuadrática: desarrolla bien y descarta las soluciones negativas.
- Triángulos semejantes: ángulos iguales y razones iguales entre lados correspondientes.
- $1^\circ = 60'$ y $1' = 60''$. Para pasar a decimal: minutos entre 60 y segundos entre 3600.
- Arco: $L = \frac{\theta}{360} \cdot 2\pi r$. Área del sector: $A = \frac{\theta}{360} \cdot \pi r^2$. Perímetro del sector: $2r + L$.
- Con la CPG, comprueba siempre que está en modo grados antes de usar ángulos.

APARTADO 2

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

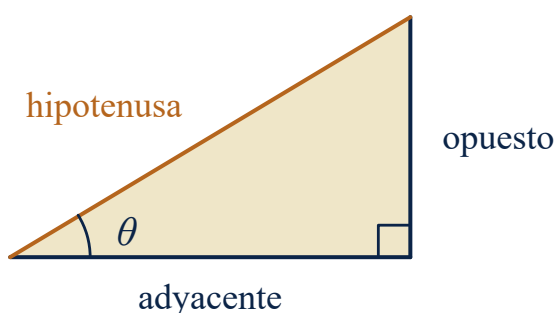
IDEA CLAVE

Seno, coseno y tangente relacionan un ángulo agudo de un triángulo rectángulo con el cociente de dos de sus lados. Con ellos puedes calcular una distancia que no puedes medir (la altura de un edificio, la longitud de una escalera) a partir de un ángulo y un lado conocidos. En el examen del IB es la herramienta de partida de casi todos los problemas con dibujo.

Los tres lados según el ángulo que mires

En un triángulo rectángulo, el lado más largo, el que está frente al ángulo recto, es la **hipotenusa**. Los otros dos son los **catetos**. Sus nombres de «opuesto» y «adyacente» dependen del ángulo agudo θ que elijas como referencia:

- el **cateto opuesto** es el que está enfrente de θ , sin tocarlo;
- el **cateto adyacente** es el que forma θ junto con la hipotenusa.



Si cambias de ángulo, los dos catetos intercambian su papel; la hipotenusa nunca cambia.

DEFINICIÓN • SENO, COSENO Y TANGENTE

Para un ángulo agudo θ de un triángulo rectángulo:

$$\sin \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \cos \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \tan \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

Estos cocientes solo dependen del ángulo, no del tamaño del triángulo: si amplías el triángulo, todos los lados se multiplican por lo mismo y el cociente no cambia. Por eso una calculadora puede guardar el valor de $\sin 30^\circ$ y servirte para cualquier triángulo con ese ángulo.

Para recordar qué lados van en cada razón, usa la regla **SOH-CAH-TOA**: *Seno = Opuesto / Hipotenusa*, *Coseno = Adyacente / Hipotenusa*, *Tangente = Opuesto / Adyacente*. Si prefieres una frase: «Sofía ordena habitaciones, cada aula huele, tomás organiza archivos».

PROPIEDAD • DOS COMPROBACIONES ÚTILES

En un triángulo rectángulo con hipotenusa c y catetos a y b , el seno y el coseno de un ángulo agudo son siempre números entre 0 y 1, porque un cateto es menor que la hipotenusa. Los dos ángulos agudos suman 90° , así que si uno mide θ el otro mide $90^\circ - \theta$. Y se cumple el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$.

Hallar un lado y hallar un ángulo

Hallar un lado. Conoces un ángulo agudo y un lado. Eliges la razón que contiene ese lado y el lado que buscas, y despejas. Si el lado buscado queda en el denominador, la ecuación se resuelve igual: multiplicas en cruz.

Hallar un ángulo. Conoces dos lados. Calculas su cociente y aplicas la función inversa. Si $\sin \theta = 0,6$, entonces $\theta = \sin^{-1}(0,6) \approx 36,9^\circ$. Las funciones $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ devuelven el ángulo agudo que tiene esa razón.

MÉTODO • ELEGIR LA RAZÓN CORRECTA

1. Haz un dibujo y marca el ángulo recto, el ángulo conocido (o el que buscas) y los datos.
2. Respecto a ese ángulo, nombra los lados: hipotenusa, opuesto, adyacente.
3. Mira qué dos lados intervienen (el dato y la incógnita) y elige la razón que los une: opuesto e hipotenusa, seno; adyacente e hipotenusa, coseno; opuesto y adyacente, tangente.
4. Plantea la ecuación y despeja. Para un ángulo, usa la función inversa.
5. Redondea a 3 cifras significativas al final, sin redondear antes, y comprueba que el resultado es razonable: un cateto debe ser menor que la hipotenusa.

Resolver un triángulo rectángulo

Resolver un triángulo es calcular todos sus lados y ángulos. En un triángulo rectángulo basta con conocer dos datos además del ángulo recto, y uno de ellos tiene que ser un lado:

- Si sabes **dos lados**, el tercero sale con Pitágoras, un ángulo agudo con una razón inversa y el otro como 90° menos el primero.
- Si sabes **un lado y un ángulo agudo**, el otro ángulo es 90° menos el dado, y los lados salen con las razones.

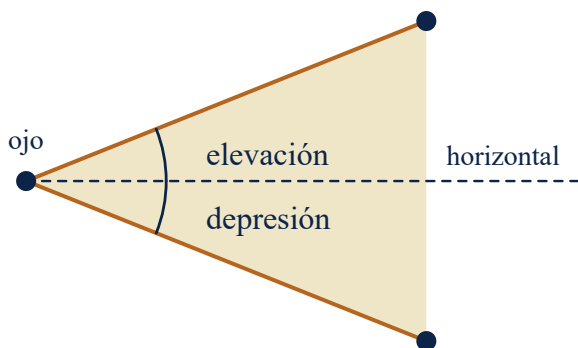
Cuando un triángulo no es rectángulo, a veces se puede dividir en dos con una altura. Esta es la idea que hay detrás de las figuras compuestas y de los problemas en 3D.

Elevación y depresión

Muchos enunciados dan ángulos medidos «mirando hacia arriba» o «hacia abajo». Siempre se miden **desde la horizontal** que pasa por el ojo del observador, nunca desde la vertical.

DEFINICIÓN • ÁNGULO DE ELEVACIÓN Y DE DEPRESIÓN

El **ángulo de elevación** es el que forma la horizontal del observador con la línea de visión cuando el objeto observado está **más alto** que él. El **ángulo de depresión** es el que forma la horizontal con la línea de visión cuando el objeto está **más bajo**.



Las horizontales por el observador y por el objeto son paralelas. Por eso, si desde lo alto de una torre ves un coche con depresión de 20° , desde el coche ves la cima de la torre con elevación de 20° (ángulos alternos internos entre paralelas). Este dato permite colocar el mismo ángulo dentro del triángulo rectángulo que dibujes.

Problemas con dibujo

La mayor parte de los problemas del IB cuentan una situación y no mencionan ningún triángulo. Tu trabajo es **encontrar el triángulo rectángulo escondido**.

- **Escalera apoyada en una pared:** la pared (vertical) y el suelo (horizontal) forman el ángulo recto; la escalera es la hipotenusa.
- **Tejado a dos aguas:** la altura de la cumbrera divide la fachada triangular en dos triángulos rectángulos iguales.
- **Sombras, torres y árboles:** la altura, la distancia horizontal y la línea de visión forman el triángulo.
- **Rumbos y distancias:** desplazarse hacia el norte y luego hacia el este forma un ángulo recto; cuando el enunciado dice «N 30° E», significa que partes del norte y giras 30° hacia el este.

Figuras en 3D sencillas. Un prisma o una caja tiene muchos triángulos rectángulos. La técnica es dibujar solo el triángulo plano que necesitas y calcular por pasos. Por ejemplo, en una caja de base 8×6 y altura 5 (en cm), la diagonal de la base es $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm. Luego la diagonal de la caja es la hipotenusa de un triángulo con catetos 10 y 5, es decir $\sqrt{125} \approx 11,2$ cm, y esa diagonal forma con la base un ángulo $\tan^{-1} \frac{5}{10} \approx 26,6^\circ$.

NOTA • CON LA CPG

En las dos pruebas del examen puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Antes de empezar, comprueba que está en **grados** (modo «degree»): si está en radianes, $\sin 30$ dará $-0,988$ en lugar de $0,5$. Para hallar un lado, calcula la razón con el ángulo en grados; para hallar un ángulo, usa la función inversa ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ o $\tan^{-1}$) con el cociente de los dos lados. Mantén en la memoria los valores sin redondear y redondea solo el resultado final. En una solución escrita, escribe siempre la ecuación que planteas (por ejemplo $\tan 35^\circ = \frac{b}{9}$) y después el valor: un número correcto sin planteamiento puede perder puntos.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Resolver un triángulo rectángulo

El triángulo ABC es rectángulo en B , con $AB = 7,5$ cm y $AC = 12$ cm.

- Calcula el ángulo A en grados.
- Calcula la longitud BC .
- Calcula el ángulo C .

La hipotenusa es $AC = 12$ (frente al ángulo recto).

- Respecto al ángulo A , el lado AB es adyacente y AC es la hipotenusa, así que se usa el coseno:

$$\cos A = \frac{7,5}{12} \Rightarrow A = \cos^{-1}\left(\frac{7,5}{12}\right) \approx 51,3^\circ$$

- Con Pitágoras, $BC^2 = 12^2 - 7,5^2 = 144 - 56,25 = 87,75$, luego $BC = \sqrt{87,75} \approx 9,37$ cm.
- Los ángulos agudos suman 90° : $C = 90^\circ - 51,3^\circ = 38,7^\circ$.

Comprobación: $\sin A = \frac{9,37}{12} \approx 0,781$ y $\sin 51,3^\circ \approx 0,781$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Una escalera apoyada

Una escalera de 5,2 m de largo se apoya en una pared vertical. Forma con el suelo horizontal un ángulo de 68° .

- Calcula a qué altura de la pared llega la escalera.
- Calcula la distancia entre el pie de la escalera y la pared.
- Para llegar a una ventana situada a 4,5 m de altura con la misma escalera, ¿qué ángulo debe formar con el suelo?

La escalera es la hipotenusa (5,2 m); la altura en la pared es el cateto opuesto al ángulo con el suelo y la distancia al pie es el cateto adyacente.

- $\sin 68^\circ = \frac{h}{5,2} \Rightarrow h = 5,2 \sin 68^\circ \approx 4,82$ m.

- $\cos 68^\circ = \frac{d}{5,2} \Rightarrow d = 5,2 \cos 68^\circ \approx 1,95$ m.

- Ahora se conocen el cateto opuesto (4,5) y la hipotenusa (5,2):

$$\sin \theta = \frac{4,5}{5,2} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{4,5}{5,2}\right) \approx 59,9^\circ$$

Comprobación de a) y b): $4,82^2 + 1,95^2 \approx 27,0 = 5,2^2$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Altura de una torre con dos observaciones

Desde un punto P del suelo horizontal, el ángulo de elevación de la cima de una torre es 32° . Al acercarte 50 m en línea recta hacia la base de la torre, hasta un punto Q , el ángulo de elevación pasa a ser 51° .

- Calcula la altura h de la torre.
- Calcula la distancia horizontal de P a la base de la torre.
- Desde la cima de la torre se ve un punto R del suelo situado al otro lado de la torre, a 80 m de su base. Calcula el ángulo de depresión de R desde la cima.

Sea x la distancia horizontal de Q a la base de la torre. Hay dos triángulos rectángulos con el mismo cateto vertical h :

- en Q : $\tan 51^\circ = \frac{h}{x}$, luego $x = \frac{h}{\tan 51^\circ}$;
- en P : $\tan 32^\circ = \frac{h}{x+50}$, luego $x+50 = \frac{h}{\tan 32^\circ}$.

- Restando las dos distancias, $50 = \frac{h}{\tan 32^\circ} - \frac{h}{\tan 51^\circ}$, de donde

$$h = \frac{50}{\frac{1}{\tan 32^\circ} - \frac{1}{\tan 51^\circ}} \approx 63,2 \text{ m}$$

- La distancia de P a la base es $\frac{h}{\tan 32^\circ} \approx 101$ m. Comprobación: la de Q es $\frac{h}{\tan 51^\circ} \approx 51,2$ m y $101,2 - 51,2 = 50$ m.

- En el triángulo formado por la torre y el suelo hasta R , el ángulo de depresión es igual al ángulo en R (alternos internos entre paralelas):

$$\tan \alpha = \frac{63,2}{80} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{63,2}{80}\right) \approx 38,3^\circ$$

En el examen: se puntúa dibujar los dos triángulos con la altura común, plantear las dos ecuaciones con la tangente, y justificar que el ángulo de depresión se mide desde la horizontal. Con la CPG puedes resolver el sistema directamente, pero escribe las ecuaciones que has planteado.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • CALCULADORA EN RADIANES

Es el fallo más frecuente con la CPG: calcular $\sin 35$ con la calculadora en modo radianes. Si el seno de un ángulo agudo te sale negativo o el resultado parece absurdo (una altura mayor que la escalera, por ejemplo), revisa el modo antes de repetir la cuenta. Haz la prueba al empezar: $\sin 30^\circ$ debe dar 0,5.

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR OPUESTO Y ADYACENTE

Los nombres «opuesto» y «adyacente» dependen del ángulo que tomes. Si usas $\tan \theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$ o cambias de ángulo a mitad del problema, el resultado sale mal. Antes de escribir la razón, marca con el dedo el ángulo y comprueba qué cateto lo toca (adyacente) y cuál queda enfrente (opuesto).

ERROR TÍPICO • MEDIR EL ÁNGULO DE DEPRESIÓN DESDE LA VERTICAL

Tanto la elevación como la depresión se miden **desde la horizontal**. Si un observador ve un barco con depresión de 12° , el ángulo con la vertical no es 12° sino 78° . Dibuja siempre la horizontal por el ojo del observador y coloca el ángulo entre ella y la línea de visión; si lo colocas sin esa línea, es fácil intercambiar seno y coseno.

Resumen

- Respecto a un ángulo agudo θ : $\sin \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$, $\cos \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$, $\tan \theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$ (regla SOH-CAH-TOA).
- Para hallar un lado, elige la razón que contiene el dato y la incógnita y despeja; para hallar un ángulo, usa $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ o $\tan^{-1}$.
- Resolver un triángulo rectángulo es hallar todos sus lados y ángulos: Pitágoras para los lados, y los dos ángulos agudos suman 90° .
- Los ángulos de elevación y de depresión se miden desde la horizontal del observador; son iguales vistos desde arriba y desde abajo.
- En los problemas con dibujo, busca el triángulo rectángulo escondido; en 3D, calcula por pasos con triángulos planos.
- Comprueba que la CPG está en grados y redondea solo al final, a 3 cifras significativas.

APARTADO 3

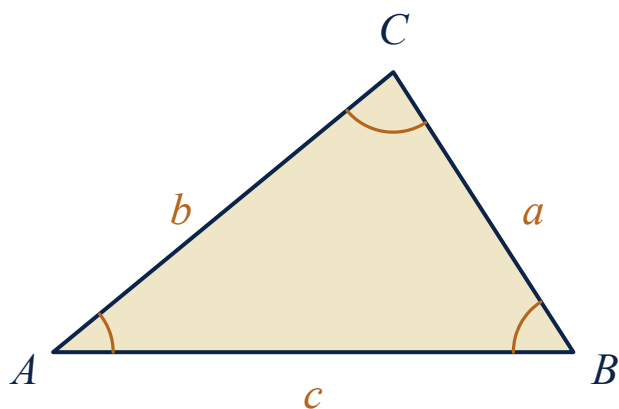
Resolución de cualquier triángulo: teoremas del seno y del coseno

IDEA CLAVE

Las razones trigonométricas del triángulo rectángulo no bastan cuando el triángulo no tiene ángulo recto. Los teoremas del seno y del coseno permiten hallar cualquier lado o ángulo desconocido de **cualquier** triángulo a partir de tres datos. En el examen del IB aparecen en mapas, distancias entre puntos, cables y terrenos, casi siempre con una figura y con la CPG.

Notación estándar de un triángulo

En un triángulo ABC se llama a al lado opuesto al vértice A , b al opuesto a B y c al opuesto a C . Las letras mayúsculas nombran vértices (y sus ángulos) y las minúsculas, longitudes. «Opuesto» significa que el lado no toca ese vértice.



Los dos teoremas relacionan estas seis medidas. Resolver un triángulo es hallar todas las que falten. Recuerda además que los tres ángulos suman 180° y que el lado mayor siempre se opone al ángulo mayor.

Teorema del seno

TEOREMA • TEOREMA DEL SENO

En cualquier triángulo ABC se cumple

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Para hallar un ángulo conviene usar la versión invertida, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

La idea es que, en un mismo triángulo, a mayor ángulo corresponde mayor lado, y el cociente entre ambos es una constante. Se demuestra trazando la altura h desde C : vale $h = b \sin A$ y también $h = a \sin B$, de donde $\frac{a}{\sin A} =$

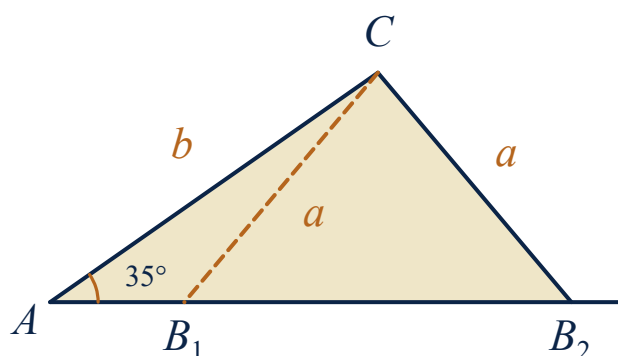
$$\frac{b}{\sin B}$$

Para usarlo hacen falta dos pares «lado y ángulo opuesto», uno completo y otro con una sola incógnita. Por eso sirve en dos situaciones:

- **Dos ángulos y un lado** (cualquiera). El tercer ángulo sale de la suma 180° y ya tienes los pares necesarios.
- **Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos**. Aquí hay que tener cuidado, porque puede haber dos triángulos.

El caso ambiguo

Supón que conoces el ángulo A y los lados b (el que toca A) y a (el opuesto a A). Imagina el lado b fijo sobre un rayo desde A , con su extremo en C . El lado a es un segmento de longitud fija que sale de C y debe llegar a la otra semirrecta que sale de A . Según su longitud, puede tocarla en ninguno, uno o dos puntos.



La altura desde C vale $h = b \sin A$ y marca el límite:

PROPIEDAD · CUÁNTOS TRIÁNGULOS SALEN CON A , a Y b

- Si $a < b \sin A$: el lado a no llega a la base. **No hay triángulo.**
- Si $a = b \sin A$: toca justo en el pie de la altura. **Un triángulo**, rectángulo en B .
- Si $b \sin A < a < b$: corta la base en dos puntos. **Dos triángulos.**
- Si $a \geq b$: solo uno de los dos cortes queda del lado correcto. **Un triángulo.**

En el caso de dos triángulos, el teorema del seno da $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, y esta ecuación tiene dos soluciones entre 0° y 180° :

$$B_1 = \sin^{-1}\left(\frac{b \sin A}{a}\right) \quad \text{y} \quad B_2 = 180^\circ - B_1$$

Ambos valen porque $\sin B_1 = \sin(180^\circ - B_1)$. La calculadora solo te da B_1 (agudo): el obtuso B_2 hay que obtenerlo tú. Después se descarta cualquier solución con la que $A + B$ sume 180° o más. Con $a \geq b$ esto ocurre siempre con B_2 , por eso solo queda una solución.

MÉTODO • TEOREMA DEL SENO CON DOS LADOS Y UN ÁNGULO OPUESTO

1. Haz un dibujo y rotula los datos con la notación estándar.
2. Escribe $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$ y despeja $\sin B$. Si sale mayor que 1, no existe triángulo.
3. Calcula $B_1 = \sin^{-1}(\dots)$ y también $B_2 = 180^\circ - B_1$.
4. Comprueba cuáles valen: $A + B < 180^\circ$. Para cada válido calcula $C = 180^\circ - A - B$.
5. Halla el lado que falta con el teorema del seno, una vez por cada triángulo.

Teorema del coseno

El teorema del seno necesita un par «lado y ángulo opuesto» completo. Cuando no lo tienes, hace falta otra herramienta.

TEOREMA • TEOREMA DEL COSENO

En cualquier triángulo ABC se cumple

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

y, de forma análoga, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ y $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

Para hallar un ángulo se despeja el coseno:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Fíjate en que el ángulo del segundo miembro es siempre el **opuesto** al lado del primer miembro, y que los otros dos lados son los que lo forman. Si $A = 90^\circ$, el término con el coseno vale 0 y queda $a^2 = b^2 + c^2$: el teorema de Pitágoras es un caso particular. El término con el coseno hace de «corrección» respecto a Pitágoras: si A es agudo se resta algo y a^2 queda menor que $b^2 + c^2$; si A es obtuso, el coseno es negativo y a^2 queda mayor.

Se usa en estas dos situaciones:

- **Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos** (el que forman). Se obtiene el tercer lado.
- **Los tres lados**. Se obtiene cualquier ángulo despejando el coseno.

Elegir entre los dos teoremas

Mira qué datos tienes y qué buscas:

Datos	Teorema	Qué se obtiene
Dos ángulos y un lado	Seno	Los otros lados
Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos	Seno (cuidado: caso ambiguo)	El otro ángulo opuesto
Dos lados y el ángulo que forman	Coseno	El tercer lado
Los tres lados	Coseno	Un ángulo

En muchos problemas se encadenan: el coseno da el primer dato que falta y después el seno completa el resto. Cuando haya que hallar un ángulo y dades, usa el **coseno**: su función inversa devuelve ángulos entre 0° y 180° , así que reconoce los obtusos sin ambigüedad. Con el seno, un resultado agudo puede esconder un obtuso.

NOTA • CON LA CPG

Antes de nada, pon la calculadora en **grados**: si está en radianes, todos los resultados serán absurdos. Calcula $\sin$, $\cos$, $\sin^{-1}$ y $\cos^{-1}$ con la función correspondiente y no redondees en los pasos intermedios: guarda el valor en memoria o usa la respuesta anterior y redondea solo al final, a 3 cifras significativas salvo que el enunciado pida otra cosa. Para hallar un ángulo con el coseno, escribe la fracción completa entre paréntesis antes de aplicar $\cos^{-1}$. Si prefieres no despejar, también puedes plantear la ecuación (por ejemplo $x^2 = \dots$ o $\sin x = \dots$) y resolverla con el módulo de ecuaciones o por intersección de gráficas, pero escribe siempre la ecuación que has planteado.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Dos ángulos y un lado

En un triángulo ABC se sabe que $A = 48^\circ$, $B = 71^\circ$ y que el lado opuesto a A mide $a = 12$ cm.

- Calcula el ángulo C .
- Calcula el lado b .
- Calcula el lado c .

Da los lados con 3 cifras significativas.

a) Los ángulos suman 180° , luego $C = 180^\circ - 48^\circ - 71^\circ = 61^\circ$.

b) Se conoce el par a y A , así que sirve el teorema del seno:

$$\frac{b}{\sin 71^\circ} = \frac{12}{\sin 48^\circ} \Rightarrow b = \frac{12 \sin 71^\circ}{\sin 48^\circ} \approx 15,3 \text{ cm}$$

c) De la misma forma,

$$c = \frac{12 \sin 61^\circ}{\sin 48^\circ} \approx 14,1 \text{ cm}$$

Comprobación: el lado mayor es b , que se opone al ángulo mayor $B = 71^\circ$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Dos barcos desde un puerto

Desde un puerto A salen dos barcos. El barco B navega 7,5 km y el barco C navega 11 km. Las dos rutas forman entre sí un ángulo de 64° . Se llama BC a la distancia que los separa al final.

- Calcula la distancia BC .
- Calcula el ángulo en B del triángulo ABC .
- Calcula el ángulo en C .

Da las distancias con 3 cifras significativas y los ángulos con 3 cifras significativas.

Se conocen dos lados y el ángulo que forman, así que se empieza con el teorema del coseno.

a) Con $a = BC$, $b = 11$, $c = 7,5$ y $A = 64^\circ$:

$$a^2 = 11^2 + 7,5^2 - 2 \cdot 11 \cdot 7,5 \cos 64^\circ \approx 104,9 \Rightarrow a \approx 10,2 \text{ km}$$

- b) Ahora se conocen los tres lados y se despeja el ángulo B con el coseno (usando el valor sin redondear de a):

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx 0,2614 \Rightarrow B \approx 74,8^\circ$$

- c) $C = 180^\circ - 64^\circ - 74,8^\circ = 41,2^\circ$.

Comprobación con el seno: $\frac{\sin C}{7,5} = \frac{\sin 64^\circ}{10,24}$ da $C \approx 41,2^\circ$, y el lado mayor $b = 11$ se opone al ángulo mayor B .

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un cable que puede cerrarse de dos formas

Un cable de 14 m une el punto C de una torre con un punto B del suelo. Un observador está en un punto A del suelo, situado a 18 m de C en línea recta, y el ángulo en A entre el suelo y la visual hacia C es de 40° . El punto B está en el suelo, sobre la semirrecta que sale de A , sin que se sepa en qué lado de la altura de C cae.

- Halla los dos valores posibles del ángulo ABC .
- Halla las dos distancias posibles AB .
- Si el cable midiera 10 m en lugar de 14 m, ¿cuántos triángulos ABC serían posibles? Da el número. Da los ángulos y las longitudes con 3 cifras significativas.

Se conocen $A = 40^\circ$, $b = AC = 18$ y $a = BC = 14$: dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos. Es el caso ambiguo.

- a) Se comprueba que hay dos triángulos: la altura desde C es $h = 18 \sin 40^\circ \approx 11,57$ y se cumple $11,57 < 14 < 18$. Por el teorema del seno,

$$\sin B = \frac{18 \sin 40^\circ}{14} \approx 0,8265 \Rightarrow B_1 \approx 55,7^\circ$$

El otro ángulo es $B_2 = 180^\circ - 55,7^\circ = 124,3^\circ$. Ambos valen: $40^\circ + 124,3^\circ < 180^\circ$.

- b) En cada triángulo, $C = 180^\circ - 40^\circ - B$.

Con B_1 : $C_1 \approx 84,3^\circ$ y $AB = \frac{14 \sin 84,3^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 21,7$ m.

Con B_2 : $C_2 \approx 15,7^\circ$ y $AB = \frac{14 \sin 15,7^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 5,91$ m.

- c) Con $a = 10$ se tiene $a < 18 \sin 40^\circ \approx 11,57$: el cable no llega al suelo. Esto también se ve porque $\sin B = \frac{18 \sin 40^\circ}{10} \approx 1,157 > 1$, imposible. Hay 0 triángulos.

En el examen: cuando el enunciado dé dos lados y un ángulo no comprendido, escribe que hay dos soluciones y calcula ambas; si el contexto (o el dibujo) descarta una, di por qué. Dar solo el ángulo agudo deja el apartado incompleto.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • DAR SOLO EL ÁNGULO QUE DA LA CALCULADORA

Al calcular $\sin^{-1}$ la CPG devuelve siempre un ángulo entre 0° y 90° . Si el triángulo puede tener un ángulo obtuso (dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, con $b \sin A < a < b$), olvidar $180^\circ - B_1$ lleva a una respuesta incompleta. Comprueba siempre si el segundo ángulo cumple que la suma con el que ya conoces es menor que 180° .

ERROR TÍPICO · APLICAR EL TEOREMA DEL SENO A LADOS Y ÁNGULOS QUE NO SON OPUESTOS

Escribir $\frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin A}$ es un error muy habitual. Cada lado se empareja con el seno de **su ángulo opuesto**: a con A , b con B , c con C . Rotula la figura con las letras estándar antes de sustituir y comprueba que no hay lado con letra y ángulo distintos en la misma fracción.

ERROR TÍPICO · ERRORES AL USAR EL COSENO Y REDONDEAR

Al escribir $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ se olvida a veces el factor 2, se resta antes de multiplicar (haciendo $(b^2 + c^2 - 2bc) \cos A$) o se toma raíz de cada término por separado. Teclea la expresión con paréntesis y saca la raíz del total. Y no redondees a antes de usarlo en el siguiente paso: arrastra el valor completo de la calculadora, o el ángulo final se desviará una décima. Por último, comprueba que la CPG esté en grados.

Resumen

- Notación: el lado a es opuesto al ángulo A , el b al B y el c al C ; los tres ángulos suman 180° .
- Teorema del seno: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Se usa con dos ángulos y un lado, o con dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Caso ambiguo (dos lados y un ángulo opuesto): según a frente a $b \sin A$ y a b , salen 0, 1 o 2 triángulos; el segundo ángulo es $180^\circ - B_1$.
- Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Se usa con dos lados y el ángulo que forman, o con los tres lados; en este último caso $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
- Para hallar un ángulo, el coseno distingue agudos y obtusos; el seno no.
- Con la CPG: modo grados, no redondear en los pasos intermedios y escribir la ecuación planteada.

APARTADO 4

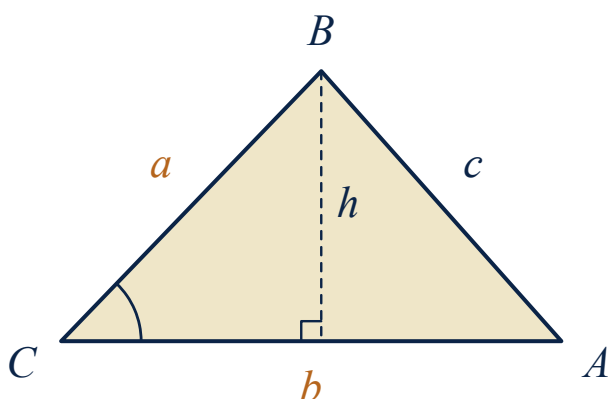
Área de un triángulo

IDEA CLAVE

La fórmula «base por altura entre dos» exige conocer una altura, y en un terreno o en un dibujo casi nunca la tienes. Si conoces dos lados y el ángulo que forman, puedes calcular el área directamente con el seno. En el examen del IB aparece en problemas de parcelas, jardines, pistas o paneles, casi siempre después de usar el teorema del coseno o del seno para obtener el dato que falta.

De «base por altura» a la fórmula con el seno

Ya conoces el área de un triángulo: la mitad de una base por su altura. El problema es la altura. Mira la figura: trazamos desde B la altura h sobre el lado b .



En el triángulo rectángulo de la izquierda, el cateto h es el opuesto al ángulo C y la hipotenusa es a , así que $\sin C = \frac{h}{a}$ y, por tanto, $h = a \sin C$. Sustituyendo en la fórmula de siempre:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} b h = \frac{1}{2} b (a \sin C)$$

TEOREMA • ÁREA CON DOS LADOS Y EL ÁNGULO COMPRENDIDO

En un triángulo, si a y b son las longitudes de dos lados y C es el ángulo **comprendido** entre ellos (el que tienen por vértice común), el área es

$$A = \frac{1}{2} a b \sin C$$

Se cumple con cualquier pareja de lados: $A = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$, siempre con el ángulo que está entre los dos lados elegidos.

Esta fórmula también vale si C es obtuso, porque $\sin(180^\circ - C) = \sin C$: el seno de un ángulo obtuso es positivo y el área sale bien. Si $C = 90^\circ$, $\sin C = 1$ y se recupera «base por altura entre dos» con los dos catetos.

Cuando falta el ángulo comprendido

La fórmula pide un ángulo concreto: el que está **entre** los dos lados. Si el enunciado da otros datos, primero hay que conseguirlo.

- Si conoces **los tres lados**, calcula el ángulo que quieras con el teorema del coseno, por ejemplo $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, y después aplica la fórmula del área con a , b y ese C .
- Si conoces **dos ángulos**, el tercero es 180° menos su suma. Con el teorema del seno puedes hallar los lados que te falten.
- Si el ángulo que te dan **no** está entre los dos lados, usa el teorema del seno o el del coseno para hallar el ángulo comprendido, o cambia de pareja de lados.

MÉTODO • CALCULAR EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO

1. Haz un dibujo y marca los datos. Elige dos lados a y b y comprueba que el ángulo C que vas a usar está **entre** ellos.
2. Si ese ángulo no lo conoces, hállalo: con el teorema del coseno si tienes los tres lados, con la suma de ángulos de 180° si tienes otros dos.
3. Calcula $A = \frac{1}{2} a b \sin C$ con la calculadora en **grados** y sin redondear antes de tiempo.
4. Redondea a 3 cifras significativas (salvo que el enunciado diga otra cosa) y escribe la unidad de área: m^2 , km^2 ...

Parcelas y figuras compuestas

Una parcela de cuatro lados o más no tiene una fórmula directa, pero se puede **dividir en triángulos**. Se traza una diagonal (o varias desde un mismo vértice), se calcula el área de cada triángulo y se suman.

Para que el reparto funcione, cada triángulo debe tener datos suficientes: dos lados y el ángulo comprendido, o los tres lados. Con frecuencia el primer triángulo se resuelve con los datos del enunciado y la diagonal que aparece (calculada con el teorema del coseno) pasa a ser un lado del segundo.

NOTA • CON LA CPG

En las dos pruebas del examen puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG), siempre en modo **grados**. Escribe la fórmula completa, $0,5 \cdot a \cdot b \cdot \sin C$, en una sola operación. Para encadenar pasos (hallar un ángulo con el coseno y usarlo en el área) guarda el valor completo del ángulo en la memoria o usa la respuesta anterior, en lugar de teclear un ángulo redondeado. También puedes hallar un ángulo con el módulo de ecuaciones, resolviendo el teorema del coseno para $\cos C$. Anota siempre la fórmula con los números sustituidos: un resultado sin planteamiento puede perder puntos.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un panel solar triangular

Un panel solar tiene forma de triángulo. Dos de sus lados miden 7,4 m y 5,2 m y el ángulo que forman es de 38° .

- Calcula el área del panel.
- Calcula la altura del triángulo respecto al lado de 7,4 m.

- El ángulo de 38° está entre los dos lados dados, así que se aplica la fórmula directamente:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7,4 \cdot 5,2 \cdot \sin 38^\circ = 11,8 \text{ m}^2$$

- Tomando el lado de 7,4 m como base, $A = \frac{1}{2} \cdot 7,4 \cdot h$. Despejando,

$$h = \frac{2A}{7,4} = \frac{2 \cdot 11,845}{7,4} = 3,20 \text{ m}$$

Coincide con $h = 5,2 \sin 38^\circ$, que es el cateto opuesto al ángulo de 38° en el triángulo rectángulo.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un solar con los tres lados conocidos

Un solar triangular tiene lados de 9,5 m, 12 m y 14 m.

- Halla el ángulo que forman los lados de 9,5 m y 12 m.
- Calcula el área del solar.

- El ángulo C que forman los lados de 9,5 m y 12 m es el opuesto al lado de 14 m. Por el teorema del coseno,

$$14^2 = 9,5^2 + 12^2 - 2 \cdot 9,5 \cdot 12 \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{9,5^2 + 12^2 - 14^2}{2 \cdot 9,5 \cdot 12} = \frac{38,25}{228}$$

Luego $C = 80,3^\circ$.

- Ya tenemos dos lados y el ángulo comprendido:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 9,5 \cdot 12 \cdot \sin 80,3^\circ = 56,2 \text{ m}^2$$

Para no arrastrar errores de redondeo, en la CPG se usa el valor completo de C (el resultado coincide con 3 cifras).

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Una parcela de cuatro lados

Una parcela tiene forma de cuadrilátero $ABCD$. Se sabe que $AB = 80$ m, $BC = 65$ m, $CD = 50$ m, $DA = 70$ m y que el ángulo $\widehat{ABC} = 72^\circ$. Se traza la diagonal AC .

- Calcula la longitud de la diagonal AC .
- Calcula el área del triángulo ABC .
- Calcula el ángulo $\widehat{ADC}$.
- Calcula el área del triángulo ACD y el área total de la parcela.

- a) En el triángulo ABC conocemos dos lados y el ángulo comprendido, así que usamos el teorema del coseno:

$$AC^2 = 80^2 + 65^2 - 2 \cdot 80 \cdot 65 \cos 72^\circ \Rightarrow AC = 86,1 \text{ m}$$

- b) Con los mismos datos, $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 65 \cdot \sin 72^\circ = 2470 \text{ m}^2$.

- c) En el triángulo ACD conocemos los tres lados: $AC = 86,1$, $CD = 50$ y $DA = 70$. El ángulo D es el opuesto a AC :

$$\cos D = \frac{50^2 + 70^2 - 86,1^2}{2 \cdot 50 \cdot 70} \Rightarrow D = 90,1^\circ$$

- d) Con CD , DA y el ángulo comprendido D :

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 70 \cdot \sin 90,1^\circ = 1750 \text{ m}^2$$

El área total es la suma de los dos triángulos: $2470 + 1750 = 4220 \text{ m}^2$.

En el examen: en un problema así se puntúa cada paso: la diagonal con el teorema del coseno, el ángulo comprendido correcto en cada triángulo y la suma final. Guarda los valores sin redondear en la CPG (la diagonal y el ángulo D) para no arrastrar error, y escribe la unidad, m^2 .

Errores típicos

ERROR TÍPICO • USAR UN ÁNGULO QUE NO ESTÁ ENTRE LOS DOS LADOS

La fórmula $\frac{1}{2}ab \sin C$ solo vale si C es el ángulo que forman a y b . Si en un triángulo conoces los lados a y b pero te dan el ángulo A (opuesto a a), no puedes escribir $\frac{1}{2}ab \sin A$: el resultado es otro número. Antes de sustituir, marca en el dibujo los dos lados y comprueba que el ángulo tiene su vértice en el punto donde se unen. Si no es así, halla el ángulo comprendido con el teorema del seno o con la suma de ángulos de 180° .

ERROR TÍPICO • LA CALCULADORA EN RADIANES

Con la CPG en modo radianes, $\sin 38$ no es el seno de 38° y el área sale mal: en el panel del primer ejemplo daría $5,70 \text{ m}^2$ en lugar de $11,8 \text{ m}^2$. Comprueba el modo al empezar el examen y, si el resultado no tiene sentido, revisa primero esto. Una buena señal de alerta es que $\sin C$ salga muy lejos de lo esperable (un ángulo de 80° debe dar un seno cercano a 1).

ERROR TÍPICO • REDONDEAR EL ÁNGULO ANTES DE CALCULAR EL ÁREA

En problemas en cadena (coseno para el ángulo y luego área) conviene usar el valor completo del ángulo. Si lo redondeas a un decimal y sigues, el área puede variar en la tercera cifra y perder la precisión que pide el enunciado. Guarda el ángulo en la memoria de la CPG y redondea solo la respuesta final.

Resumen

- Si conoces dos lados y el ángulo comprendido, $A = \frac{1}{2} a b \sin C$; es la forma «base por altura entre dos» con $h = a \sin C$.
- El ángulo debe estar **entre** los dos lados usados. Con cualquier pareja de lados se cumple: $\frac{1}{2} b c \sin A = \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{1}{2} a b \sin C$.
- Si no tienes ese ángulo, hállalo: teorema del coseno con los tres lados, o suma de ángulos de 180° y teorema del seno.
- Una figura de más de tres lados se divide en triángulos con una diagonal; se suman las áreas.
- Para tres lados: primero el ángulo con el teorema del coseno, luego la fórmula del área.
- La CPG en grados, sin redondear los valores intermedios; resultado con 3 cifras significativas y su unidad de área.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 3

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

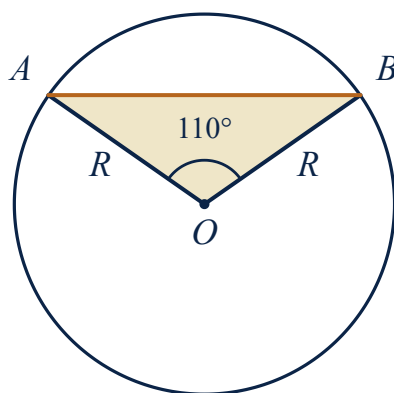
Pitágoras, semejanza, arcos y sectores

EJERCICIO 1

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2006

El siguiente diagrama muestra un círculo de radio R y centro O . Dentro del círculo se ha dibujado un triángulo AOB . Los vértices del triángulo se encuentran en el centro, O , y en los puntos A y B en la circunferencia. El ángulo AOB mide 110° .



- Sabiendo que el área del círculo es $36\pi \text{ cm}^2$, calcule la longitud del radio R .
- Calcule la longitud de AB .
- Escriba la longitud L del lado de un cuadrado que tenga un área igual a la del círculo dado.

a) El área de un círculo es πR^2 .

$$1. \pi R^2 = 36\pi, \text{ así que } R^2 = 36.$$

$$2. R = 6 \text{ cm (descartamos la raíz negativa, porque una longitud es positiva).}$$

Resultado: $R = 6 \text{ cm}$

b) El triángulo AOB es isósceles, con $OA = OB = 6 \text{ cm}$ y el ángulo entre ellos de 110° . Conocemos dos lados y el ángulo que forman: usamos el teorema del coseno.

$$1. AB^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 110^\circ = 72 - 72 \cos 110^\circ.$$

$$2. \text{Con la CPG en grados: } AB^2 \approx 72 + 24,63 \approx 96,63.$$

$$3. AB \approx 9,83 \text{ cm.}$$

Comprobación: la altura desde O divide el triángulo en dos rectángulos con ángulo 55° , y $AB = 2 \cdot 6 \sin 55^\circ \approx 9,83 \text{ cm}$.

Resultado: $AB \approx 9,83 \text{ cm}$

c) El área del cuadrado es L^2 y debe ser igual a la del círculo.

$$1. L^2 = 36\pi.$$

$$2. L = \sqrt{36\pi} = 6\sqrt{\pi} \approx 10,6 \text{ cm.}$$

Resultado: $L \approx 10,6 \text{ cm}$

Resultado: a) $R = 6 \text{ cm}$; b) $AB \approx 9,83 \text{ cm}$; c) $L \approx 10,6 \text{ cm}$

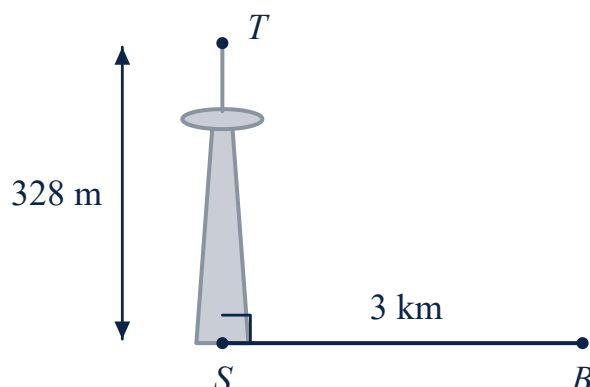
Triángulos rectángulos, elevación y depresión

EJERCICIO 2

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

Desde el punto B se ve una torre vertical. El punto B está a 3 kilómetros (medidos en horizontal) del punto S, situado en la base de la torre. La altura de la torre, TS, es igual a 328 metros.



- Escriba la altura de la torre, TS, en kilómetros.
- Sobre la figura, rotule con una x el ángulo de elevación que hay desde B hasta T.
- Halle el valor del ángulo de elevación que hay desde B hasta T.
- Halle TB, que es la distancia en **kilómetros** que hay desde la parte superior de la torre hasta el punto B.

Con la CPG en modo **grados**.

- Un kilómetro son 1000 metros.

$$1. TS = \frac{328}{1000} \text{ km.}$$

Resultado: $TS = 0,328 \text{ km}$

- El ángulo de elevación desde B hasta T es el que forma la horizontal BS con la línea de visión BT. Se rotula con x el ángulo del vértice B del triángulo TSB, entre BS y BT.

Resultado: x es el ángulo $\hat{TBS}$, en el vértice B.

- El triángulo TSB es rectángulo en S. Respecto de x , TS es el cateto opuesto y BS el cateto contiguo, así que usamos la tangente.

$$1. \tan x = \frac{TS}{BS} = \frac{0,328}{3}.$$

$$2. x = \arctan\left(\frac{0,328}{3}\right) \approx 6,24^\circ.$$

Resultado: $x \approx 6,24^\circ$

- Usamos el teorema de Pitágoras en el triángulo TSB, con TB como hipotenusa y las dos longitudes en kilómetros.

$$1. TB^2 = TS^2 + BS^2 = 0,328^2 + 3^2 = 0,107584 + 9 = 9,107584.$$

$$2. TB = \sqrt{9,107584} \approx 3,018 \text{ km.}$$

Comprobación con el seno: $TB = \frac{TS}{\sin x} = \frac{0,328}{\sin 6,24^\circ} \approx 3,02 \text{ km.}$

Resultado: $TB \approx 3,02 \text{ km}$

Resultado: a) 0,328 km; b) $x = T\hat{B}S$; c) $x \approx 6,24^\circ$; d) $TB \approx 3,02 \text{ km}$

EJERCICIO 3

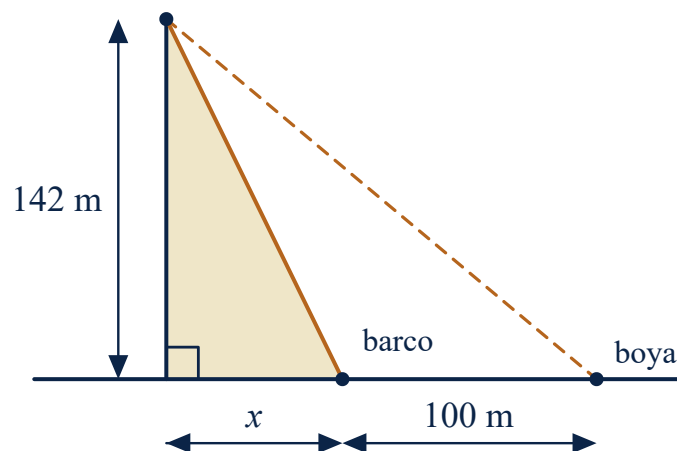
★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2019

Una boya flota en el mar y se puede ver desde lo alto de un acantilado vertical.

Un barco está viajando desde la base del acantilado directamente hacia la boya.

Actualmente el barco se encuentra a 100 metros de la boya y el ángulo de depresión desde la cima del acantilado hasta el barco es 64° .



- Dibuje y rotule el ángulo de depresión en el diagrama.
- Encuentre x , la distancia horizontal actual entre la base del acantilado y el barco.
- Halle la distancia desde la cima del acantilado hasta la boya.

a) El ángulo de depresión es el que forma la horizontal trazada desde la cima del acantilado (hacia el mar) con la línea de visión hasta el barco. Se dibuja con vértice en la cima, entre la línea horizontal de trazos y el segmento cima-barco, y se rotula 64° . Por ser ángulos alternos internos, es igual al ángulo que forma la línea de visión con el suelo en el barco.

b) En el triángulo rectángulo cima-base-barco, el ángulo en el barco es 64° , el cateto opuesto es la altura 142 m y el cateto adyacente es x .

$$1. \tan 64^\circ = \frac{142}{x}.$$

$$2. x = \frac{142}{\tan 64^\circ} \approx 69,258 \text{ m (CPG en grados).}$$

Resultado: $x \approx 69,3 \text{ m}$

c) En el triángulo rectángulo cima-base-boya, un cateto es la altura 142 m y el otro es la distancia horizontal hasta la boya, $x + 100$ (el barco está a 100 m de la boya).

$$1. x + 100 \approx 169,258 \text{ m (sin redondear).}$$

$$2. \text{Teorema de Pitágoras: } d^2 = 142^2 + 169,258^2 = 20164 + 28648,9 \approx 48813.$$

$$3. d = \sqrt{48813} \approx 220,9 \text{ m.}$$

Resultado: $d \approx 221$ m

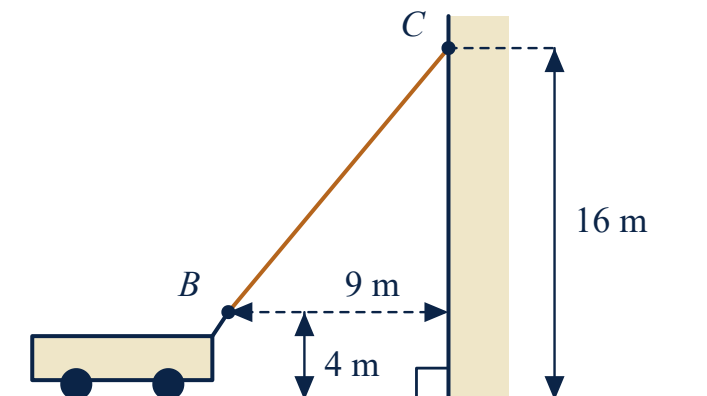
Resultado: a) ángulo de 64° entre la horizontal desde la cima y la visual al barco; b) $x \approx 69,3$ m; c) $d \approx 221$ m

EJERCICIO 4

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2019

La escalera de un camión de bomberos tiene su base en el punto B, que está situado a 4 metros del suelo. Cuando se despliega la escalera, el otro extremo se apoya en una pared vertical en el punto C, que está situado a 16 metros del suelo. La distancia horizontal que hay entre B y C es de 9 metros.



a) Halle el ángulo de elevación de C desde B.

Llega un segundo camión y su escalera, cuando está totalmente desplegada, mide 30 metros de largo. La base de esta escalera también se encuentra a 4 metros del suelo.

Por seguridad, el máximo ángulo de elevación que puede subtender la escalera es de 70°

b) Halle la máxima altura a la que se puede llegar en la pared con la escalera de este segundo camión.

a) El ángulo de elevación de C desde B es el que forma la horizontal por B con el segmento BC.

1. Desnivel entre B y C: $16 - 4 = 12$ m. Distancia horizontal: 9 m.

2. En el triángulo rectángulo, $\tan \theta = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

3. Con la CPG en grados: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53,13^\circ$.

Resultado: $\theta \approx 53,1^\circ$

b) La escalera (hipotenusa de 30 m) forma con la horizontal el ángulo máximo de 70° . La altura que sube sobre su base es el cateto opuesto a ese ángulo.

1. $\sin 70^\circ = \frac{h}{30}$, luego $h = 30 \sin 70^\circ \approx 28,19$ m.

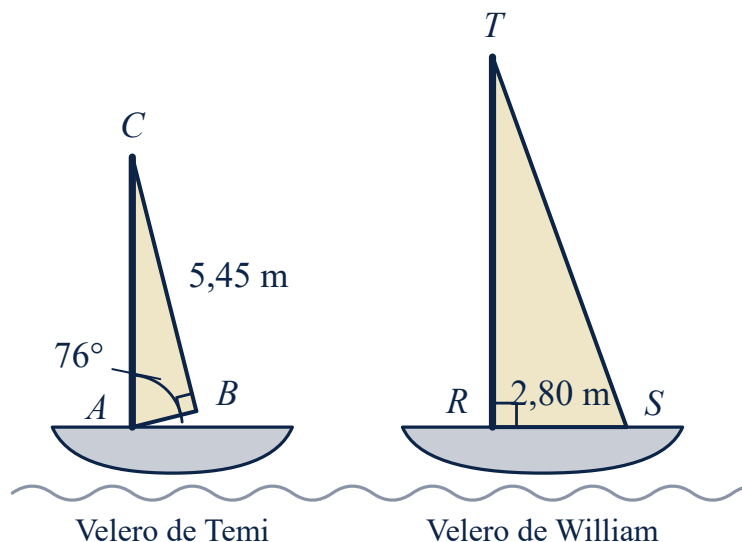
2. La base está a 4 m del suelo, así que la altura sobre el suelo es $4 + 28,19 = 32,19$ m.

Resultado: $\approx 32,2$ m

Resultado: a) $53,1^\circ$; b) 32,2 m

EJERCICIO 5 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Mayo 2016

El velero de Temi tiene una vela en forma de triángulo rectángulo, ABC. $BC = 5,45$ m, ángulo $CAB = 76^\circ$ y ángulo $ABC = 90^\circ$.



a) Calcule AC , la altura de la vela de Temi.

William también tiene un velero con una vela en forma de triángulo rectángulo, TRS. $RS = 2,80$ m. El área de la vela de William es de $10,7$ m².

b) Calcule RT , la altura de la vela de William.

c) Calcule el tamaño del ángulo RST .

Trabajamos con la calculadora en grados.

a) En el triángulo ABC, recto en B, el lado AC es la hipotenusa y $BC = 5,45$ m es el cateto opuesto al ángulo $CAB = 76^\circ$.

$$1. \sin 76^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{5,45}{AC}.$$

$$2. AC = \frac{5,45}{\sin 76^\circ} = 5,6168 \dots \approx 5,62 \text{ m.}$$

Resultado: $AC \approx 5,62$ m

b) El triángulo TRS es rectángulo en R, así que sus catetos RS y RT son base y altura.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} RS \cdot RT, \text{ es decir, } 10,7 = \frac{1}{2} \cdot 2,80 \cdot RT = 1,4 RT.$$

$$2. RT = \frac{10,7}{1,4} = 7,6428 \dots \approx 7,64 \text{ m.}$$

Resultado: $RT \approx 7,64$ m

c) En el triángulo TRS, RT es el cateto opuesto al ángulo $\widehat{RST}$ y RS el adyacente.

$$1. \tan \widehat{RST} = \frac{RT}{RS} = \frac{7,6428 \dots}{2,80} = 2,7295 \dots$$

$$2. \widehat{RST} = \tan^{-1}(2,7295 \dots) = 69,879 \dots^\circ \approx 69,9^\circ.$$

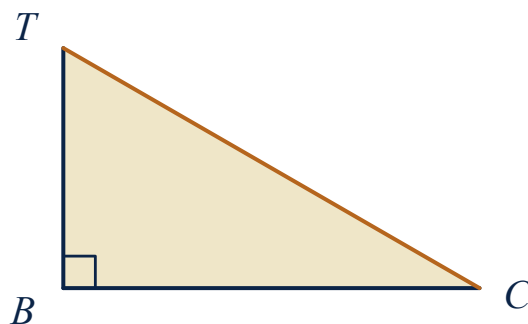
Resultado: $\widehat{RST} \approx 69,9^\circ$

Resultado: a) $\approx 5,62$ m; b) $\approx 7,64$ m; c) $\approx 69,9^\circ$

EJERCICIO 6 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2015

Fabián está parado en la azotea de un edificio, T , que está en una calle horizontal. Observa un automóvil, C , en la calle, con un ángulo de depresión de 30° . La base del edificio está en B . La altura del edificio es de 80 metros.

El siguiente diagrama muestra las posiciones de T , B y C .



- a) Muestre, en el lugar apropiado del diagrama,
 - (i) la altura del edificio;
 - (ii) el ángulo de depresión.
- b) Encuentre la distancia entre la base del edificio y el automóvil.
- c) Fabián estima que la distancia entre la base del edificio y el automóvil es 150 metros. Calcule el error porcentual en la estimación de Fabián.

a) (i) La altura del edificio es el lado vertical TB : se escribe «80 m» junto a TB .

(ii) El ángulo de depresión es el que forma la línea de visión con la horizontal que sale de T , por debajo de esa horizontal. Se dibuja en T una recta horizontal hacia la derecha (paralela a BC) y se marca 30° entre esa horizontal y el segmento TC . Por ser ángulos alternos internos entre paralelas, también $\angle TCB = 30^\circ$.

Resultado: $TB = 80$ m; ángulo de depresión de 30° entre la horizontal por T y TC

b) En el triángulo rectángulo TBC (recto en B), $TB = 80$ m es el cateto opuesto al ángulo $\angle TCB = 30^\circ$ y BC es el cateto adyacente. Usamos la tangente.

$$1. \tan 30^\circ = \frac{TB}{BC} = \frac{80}{BC}$$

$$2. BC = \frac{80}{\tan 30^\circ}$$

$$3. \text{Con la CPG en grados: } BC \approx 138,56 \text{ m.}$$

Resultado: $BC \approx 139$ m

c) El valor real es 138,56 m y la estimación de Fabián es 150 m.

$$1. \text{Error absoluto: } 150 - 138,56 = 11,44 \text{ m.}$$

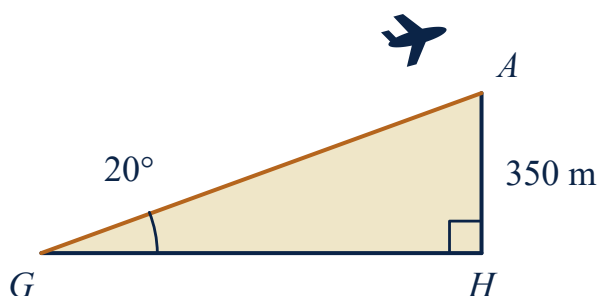
$$2. \text{Error porcentual: } \frac{11,44}{138,56} \cdot 100 \approx 8,25 \%$$

Resultado: error $\approx 8,25 \%$

Resultado: a) $TB = 80$ m y ángulo de depresión 30° marcados; b) $BC \approx 139$ m; c) $\approx 8,25 \%$

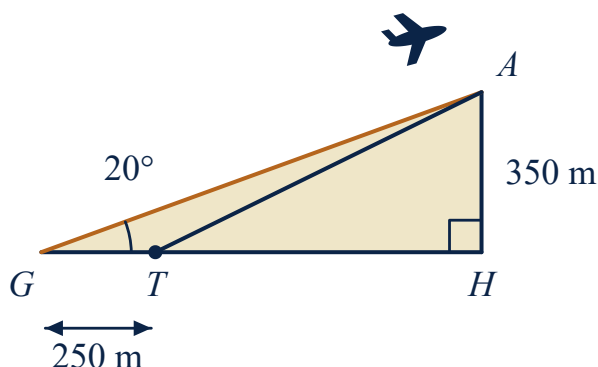
EJERCICIO 7 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2014

Günter está en el Aeropuerto de Berlín-Tegel viendo cómo despegan los aviones. Günter observa un avión que tiene un ángulo de elevación de 20° desde el punto G donde él se encuentra. El avión está a una altura de 350 metros. Esta información se muestra en el siguiente diagrama.



- a) Calcule la distancia horizontal, GH , desde Günter hasta el avión. Dé la respuesta redondeando al número entero de metros más próximo.

Se sabe que el avión ha despegado desde un punto T situado a 250 metros de donde Günter se encuentra, tal y como se muestra en el siguiente diagrama.



- b) Utilizando la respuesta obtenida en el apartado (a), calcule el ángulo ATH que es el ángulo de despegue del avión.

Con la CPG en modo **grados**.

a) En el triángulo rectángulo GAH , respecto del ángulo de 20° en G , $AH = 350$ es el cateto opuesto y GH el cateto contiguo. Usamos la tangente.

$$1. \tan 20^\circ = \frac{350}{GH}.$$

$$2. GH = \frac{350}{\tan 20^\circ} \approx 961,6 \text{ m.}$$

3. Redondeamos al metro: $GH = 962 \text{ m.}$

Resultado: $GH = 962 \text{ m}$

b) El punto T está en GH con $GT = 250$ m.

$$1. TH = GH - GT = 962 - 250 = 712 \text{ m.}$$

2. En el triángulo rectángulo ATH , $AH = 350$ es el cateto opuesto al ángulo $\hat{A}TH$ y $TH = 712$ es el contiguo: $\tan \hat{A}TH = \frac{350}{712}$.

$$3. \hat{A}TH = \arctan\left(\frac{350}{712}\right) \approx 26,2^\circ.$$

Resultado: $\hat{A}TH \approx 26,2^\circ$

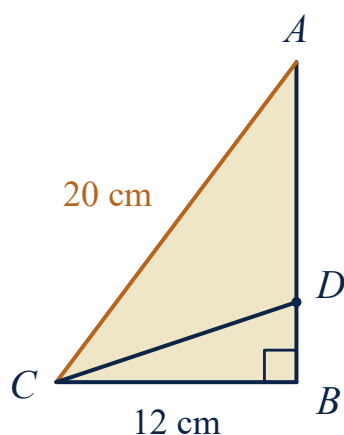
Resultado: a) $GH = 962$ m; b) $\hat{A}TH \approx 26,2^\circ$

EJERCICIO 8

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2013

En el triángulo ABC , $AC = 20$ cm, $BC = 12$ cm y $\hat{A}BC = 90^\circ$.



a) Halle la longitud de AB .

El punto D está situado sobre AB , de modo tal que $\tan \hat{D}CB = 0,6$.

b) Halle la longitud de DB .

c) Halle el área del triángulo ADC .

a) El triángulo ABC es rectángulo en B , con hipotenusa $AC = 20$ y cateto $BC = 12$. Usamos Pitágoras.

$$1. AB^2 = AC^2 - BC^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256.$$

$$2. AB = \sqrt{256} = 16 \text{ cm.}$$

Resultado: $AB = 16$ cm

b) El triángulo DBC es rectángulo en B . En el ángulo $\angle DCB$, el cateto opuesto es DB y el adyacente es $BC = 12$.

$$1. \tan \angle DCB = \frac{DB}{BC} = 0,6.$$

$$2. DB = 0,6 \cdot 12 = 7,2 \text{ cm.}$$

Resultado: $DB = 7,2$ cm

c) El triángulo ADC tiene como base AD y como altura $CB = 12$ (perpendicular a AB , que contiene a AD).

$$1. AD = AB - DB = 16 - 7,2 = 8,8 \text{ cm.}$$

$$2. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 8,8 \cdot 12 = 52,8 \text{ cm}^2.$$

Resultado: área = $52,8 \text{ cm}^2$

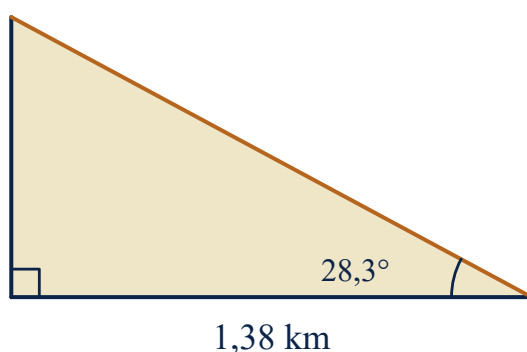
Resultado: a) 16 cm; b) 7,2 cm; c) 52,8 cm²

EJERCICIO 9 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2010

José se encuentra a una distancia de 1,38 kilómetros de un precipicio.

a) Exprese esta distancia en metros.

José estima que el ángulo que hay entre la horizontal y la parte superior del precipicio es 28,3°, y utiliza este valor para hallar la altura del precipicio.



b) Halle la altura del precipicio, partiendo de los cálculos realizados por José.

Exprese su respuesta en metros, redondeando al número entero de metros más cercano.

c) La altura real del precipicio es de 718 metros. Calcule el porcentaje de error que ha cometido José al calcular la altura del precipicio.

a) 1 km = 1000 m.

$$1. 1,38 \cdot 1000 = 1380 \text{ m.}$$

Resultado: 1380 m

b) En el triángulo rectángulo, la base (1380 m) es el cateto adyacente al ángulo de 28,3° y la altura h del precipicio es el cateto opuesto. Usamos la tangente, con la calculadora en grados.

$$1. \tan 28,3^\circ = \frac{h}{1380}.$$

$$2. h = 1380 \cdot \tan 28,3^\circ = 743,05 \dots \text{ m.}$$

$$3. \text{Redondeamos al metro: } h = 743 \text{ m.}$$

Resultado: $h \approx 743 \text{ m}$

c) El porcentaje de error compara la diferencia con el valor real.

$$1. \text{Error} = \frac{|743 - 718|}{718} \cdot 100.$$

$$2. = \frac{25}{718} \cdot 100 = 3,48 \dots \%$$

Resultado: 3,48 %

Resultado: a) 1380 m; b) 743 m; c) 3,48 %

EJERCICIO 10

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2008

El triángulo ABC se dibuja de manera que el ángulo ABC sea de 90° , el ángulo ACB sea de 60° y AB sea de 7,3 cm.

a) (i) Dibuje un diagrama para ilustrar esta información. Rotula los puntos A, B, C. Muestra los ángulos de 90° , 60° y la longitud de 7,3 cm en su diagrama.

(ii) Encuentre la longitud de BC.

El punto D está en la línea recta AC extendida y es tal que el ángulo CDB es de 20° .

b) (i) Muestre el punto D y el ángulo de 20° en su diagrama.

(ii) Encuentre el tamaño del ángulo CBD.

a) (i) Diagrama.

1. Dibujamos un triángulo rectángulo: ponemos B abajo a la izquierda, A justo encima de B y C a la derecha de B , en la misma horizontal.
2. Marcamos el ángulo recto de 90° en B , el ángulo de 60° en C y rotulamos el lado AB con 7,3 cm.

(ii) El triángulo ABC es rectángulo en B . Respecto al ángulo $C = 60^\circ$, AB es el cateto opuesto y BC el cateto adyacente.

$$1. \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{7,3}{BC}.$$

$$2. \text{Despejamos: } BC = \frac{7,3}{\tan 60^\circ} \approx 4,21 \text{ cm.}$$

Resultado: $BC \approx 4,21$ cm

b) (i) Diagrama.

1. Prolongamos la recta AC más allá de C , hacia abajo y a la derecha, y marcamos el punto D en esa prolongación.
2. Unimos B con D y marcamos en D el ángulo de 20° entre DC y DB .

(ii) En el triángulo BCD , el ángulo $\hat{ACB} = 60^\circ$ es un ángulo exterior, porque D está en la prolongación de AC . Un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

$$1. \hat{ACB} = \hat{CDB} + \hat{CBD}, \text{ es decir, } 60^\circ = 20^\circ + \hat{CBD}.$$

$$2. \hat{CBD} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$

Comprobación: el ángulo interior en C del triángulo BCD es $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, y $120^\circ + 20^\circ + 40^\circ = 180^\circ$.

Resultado: $\hat{CBD} = 40^\circ$

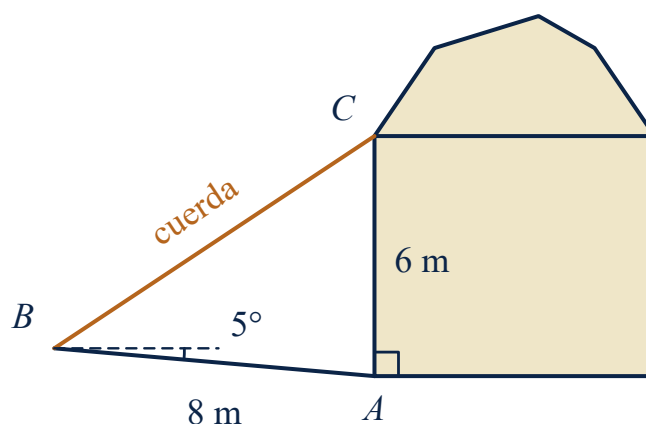
Resultado: a) (ii) $BC \approx 4,21$ cm; b) (ii) $\hat{CBD} = 40^\circ$

EJERCICIO 11

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2004

La siguiente figura muestra la vista lateral de una carpa. El lado AC de la carpa tiene una altura de 6 m. Entre A y B , el suelo tiene una inclinación hacia arriba desde la base de la carpa en el punto A , formando un ángulo de 5° con la horizontal. La carpa está sujeta al suelo mediante una cuerda en el punto B , a una distancia de 8 m de su base.



- Calcule el ángulo $\widehat{BAC}$.
- Calcule la longitud de la cuerda, BC .
- Calcule el ángulo $\widehat{CBA}$ que forma la cuerda con el suelo inclinado.

a) AC es vertical y AB forma 5° con la horizontal (el suelo horizontal pasa por A).

1. La vertical y la horizontal forman 90° .

2. $\widehat{BAC} = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Resultado: $\widehat{BAC} = 85^\circ$

b) En el triángulo ABC conocemos $AB = 8$ m, $AC = 6$ m y el ángulo entre ellos, 85° . Usamos el teorema del coseno.

1. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 85^\circ$.

2. $BC^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 85^\circ = 100 - 96 \cos 85^\circ \approx 91,633$.

3. $BC \approx 9,5725$ m $\approx 9,57$ m.

Resultado: $BC \approx 9,57$ m

c) Usamos el teorema del seno en el triángulo ABC . El lado $AC = 6$ es opuesto al ángulo $\widehat{CBA}$ y el lado $BC = 9,5725$ es opuesto al ángulo de 85° .

1. $\frac{\sin \widehat{CBA}}{AC} = \frac{\sin 85^\circ}{BC}$, es decir, $\sin \widehat{CBA} = \frac{6 \sin 85^\circ}{9,5725} \approx 0,6244$.

2. Con la CPG en grados: $\widehat{CBA} = \sin^{-1}(0,6244) \approx 38,64^\circ$.

3. Como $\widehat{CBA}$ es opuesto al lado menor ($6 < 9,57$), es agudo y no hay ambigüedad.

4. Con 3 cifras significativas, $\widehat{CBA} \approx 38,6^\circ$.

Resultado: $\widehat{CBA} \approx 38,6^\circ$

Resultado: a) 85° ; b) $BC \approx 9,57$ m; c) $\widehat{CBA} \approx 38,6^\circ$

Teoremas del seno y del coseno

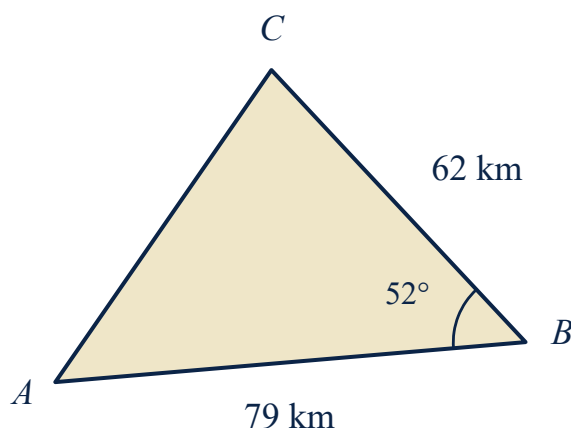
EJERCICIO 12

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2018

En la siguiente figura se muestra un parque nacional que tiene forma de triángulo ABC.

AB mide 79 km y BC mide 62 km. El ángulo ABC mide 52° .



- Calcule la longitud del lado AC en km.
- Calcule el área de este parque nacional.

a) Conocemos dos lados (AB y BC) y el ángulo comprendido entre ellos ($\widehat{ABC} = 52^\circ$), así que usamos el teorema del coseno para el lado opuesto AC.

- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos 52^\circ = 79^2 + 62^2 - 2 \cdot 79 \cdot 62 \cos 52^\circ$.
- $AC^2 = 6241 + 3844 - 9796 \cos 52^\circ = 10085 - 6031,1 \dots \approx 4053,9$.
- Con la CPG (en grados): $AC = \sqrt{4053,9} \approx 63,67$ km.

Resultado: $AC \approx 63,7$ km

b) Área con dos lados y el ángulo comprendido: $A = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \widehat{ABC}$.

- $A = \frac{1}{2} \cdot 79 \cdot 62 \cdot \sin 52^\circ = 2449 \sin 52^\circ$.
- $A \approx 1929,8$ km².

Resultado: $A \approx 1930$ km²

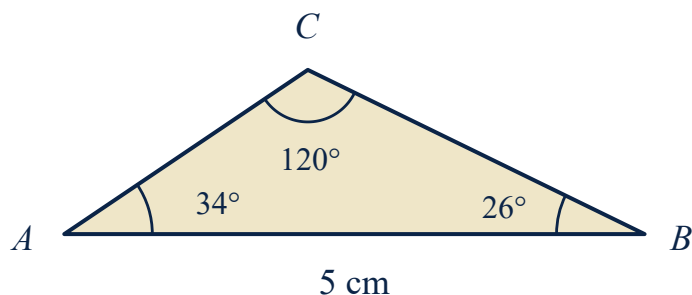
Resultado: a) $AC \approx 63,7$ km; b) $A \approx 1930$ km²

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

En el siguiente diagrama se muestra un sello postal triangular, ABC, tal que $AB = 5$ cm, $\widehat{BAC} = 34^\circ$, $\widehat{ABC} = 26^\circ$ y $\widehat{ACB} = 120^\circ$.



- Encuentre la longitud de BC.
- Encuentre el área del sello postal.

Trabajamos con la calculadora en grados.

a) Conocemos el lado $AB = 5$ cm, opuesto al ángulo $\widehat{ACB} = 120^\circ$, y queremos BC , opuesto al ángulo $\widehat{BAC} = 34^\circ$. Usamos el teorema del seno.

$$1. \frac{BC}{\sin 34^\circ} = \frac{5}{\sin 120^\circ}.$$

$$2. BC = \frac{5 \sin 34^\circ}{\sin 120^\circ} = 3,2285 \dots \approx 3,23 \text{ cm}.$$

Resultado: $BC \approx 3,23$ cm

b) Usamos el área con dos lados y el ángulo comprendido. Los lados AB y BC forman el ángulo $\widehat{ABC} = 26^\circ$.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 26^\circ.$$

$$2. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3,2285 \dots \cdot \sin 26^\circ = 3,538 \dots \approx 3,54 \text{ cm}^2.$$

Resultado: área $\approx 3,54 \text{ cm}^2$

Resultado: a) $BC \approx 3,23$ cm; b) $\approx 3,54 \text{ cm}^2$

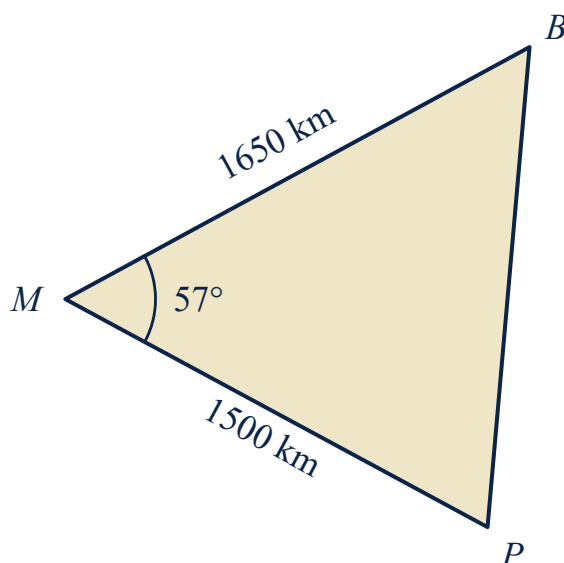
EJERCICIO 14

★★ Medio

IB · P1 T22 Mayo 2016

Cuando Bermudas (B), Puerto Rico (P), y Miami (M) se unen en un mapa utilizando líneas rectas se forma un triángulo. A este triángulo se le conoce con el nombre de Triángulo de las Bermudas.

Según el mapa, la distancia MB es igual a 1650 km, la distancia MP es igual a 1500 km y el ángulo BMP mide 57° .



- Calcule la distancia que hay entre Bermudas y Puerto Rico, BP.
- Calcule el área del Triángulo de las Bermudas.

Trabajamos con la calculadora en grados.

a) Conocemos dos lados, $MB = 1650$ km y $MP = 1500$ km, y el ángulo comprendido $\widehat{BMP} = 57^\circ$. Usamos el teorema del coseno.

$$1. BP^2 = MB^2 + MP^2 - 2 \cdot MB \cdot MP \cdot \cos 57^\circ.$$

$$2. BP^2 = 1650^2 + 1500^2 - 2 \cdot 1650 \cdot 1500 \cdot \cos 57^\circ = 2\,276\,536,8 \dots$$

$$3. BP = \sqrt{2\,276\,536,8 \dots} = 1508,8 \dots \approx 1510 \text{ km.}$$

Resultado: $BP \approx 1510$ km

b) Área con dos lados y el ángulo comprendido:

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} MB \cdot MP \cdot \sin 57^\circ.$$

$$2. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 1650 \cdot 1500 \cdot \sin 57^\circ = 1\,037\,854,8 \dots \approx 1\,040\,000 \text{ km}^2.$$

Resultado: área $\approx 1\,040\,000 \text{ km}^2$

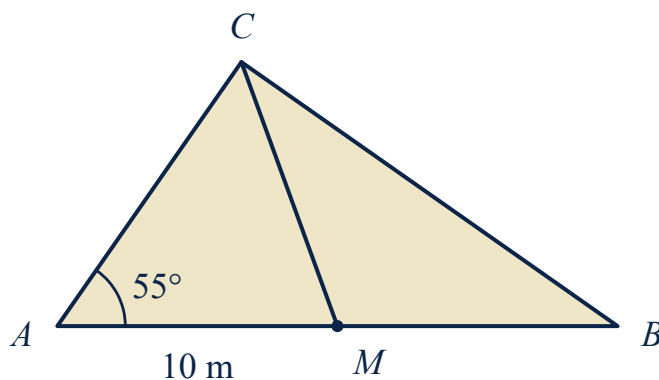
Resultado: a) ≈ 1510 km; b) $\approx 1\,040\,000 \text{ km}^2$

EJERCICIO 15

★★ Medio

IB · P1 T22 Mayo 2015

El diagrama muestra un triángulo ABC. La medida del ángulo $\hat{CAB}$ es 55° y la longitud de AM es 10 m, donde M es el punto medio de AB. El triángulo CMB es isósceles con $CM = MB$.



- Escriba la longitud de MB.
- Encuentre la medida del ángulo $\hat{CMB}$.
- Encuentre la longitud de CB.

a) M es el punto medio de AB, así que $MB = AM$.

- $AM = 10$ m.
- Por tanto $MB = 10$ m.

Resultado: $MB = 10$ m

b) Los triángulos de la figura:

- $CM = MB = 10$ m (dato) y $AM = 10$ m, luego $CM = AM$: el triángulo ACM es isósceles con $CM = AM$.
- En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales: $\hat{ACM} = \hat{CAM} = 55^\circ$.
- Los ángulos de ACM suman 180° : $\hat{AMC} = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ = 70^\circ$.
- A, M y B están alineados, así que $\hat{AMC} + \hat{CMB} = 180^\circ$: $\hat{CMB} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Resultado: $\hat{CMB} = 110^\circ$

c) En el triángulo CMB conocemos dos lados, $CM = MB = 10$ m, y el ángulo comprendido entre ellos, 110° . Usamos el teorema del coseno.

- $CB^2 = CM^2 + MB^2 - 2 \cdot CM \cdot MB \cdot \cos 110^\circ$.
- $CB^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 110^\circ = 200 - 200 \cos 110^\circ \approx 268,4$.
- $CB = \sqrt{268,4} \approx 16,38$ m.

Con la CPG en grados, $\cos 110^\circ \approx -0,3420$.

Resultado: $CB \approx 16,4$ m

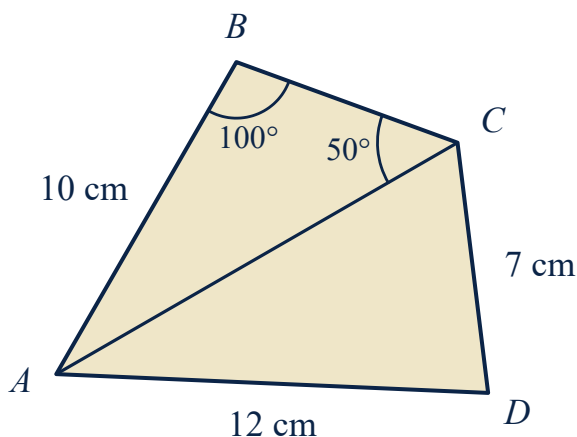
Resultado: a) $MB = 10$ m; b) $\hat{CMB} = 110^\circ$; c) $CB \approx 16,4$ m

EJERCICIO 16

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2013

El cuadrilátero ABCD tiene las siguientes dimensiones: $AB = 10$, $AD = 12$ cm y $CD = 7$ cm. El ángulo ABC es igual a 100° y el ángulo ACB es igual a 50° .



- Halle la longitud de AC en centímetros.
- Halle el valor del ángulo ADC.

a) En el triángulo ABC conocemos $AB = 10$ cm y los ángulos $\hat{A}BC = 100^\circ$ y $\hat{A}CB = 50^\circ$. Queremos AC , que es el lado opuesto al ángulo en B , mientras que AB es el lado opuesto al ángulo en C . Usamos el teorema del seno.

$$1. \frac{AC}{\sin 100^\circ} = \frac{AB}{\sin 50^\circ}.$$

$$2. AC = \frac{10 \cdot \sin 100^\circ}{\sin 50^\circ}.$$

$$3. \text{Con la CPG en grados: } AC = \frac{10 \cdot 0,98481}{0,76604} \approx 12,86 \text{ cm.}$$

Resultado: $AC \approx 12,9$ cm

b) En el triángulo ACD conocemos los tres lados: $AC \approx 12,856$ cm (sin redondear), $AD = 12$ cm y $CD = 7$ cm. El ángulo $\hat{A}DC$ es el opuesto a AC , así que usamos el teorema del coseno.

$$1. AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \hat{A}DC.$$

$$2. \cos \hat{A}DC = \frac{12^2 + 7^2 - AC^2}{2 \cdot 12 \cdot 7} = \frac{144 + 49 - 165,27}{168} \approx 0,1650.$$

$$3. \hat{A}DC = \cos^{-1}(0,1650) \approx 80,5^\circ.$$

Resultado: $\hat{A}DC \approx 80,5^\circ$

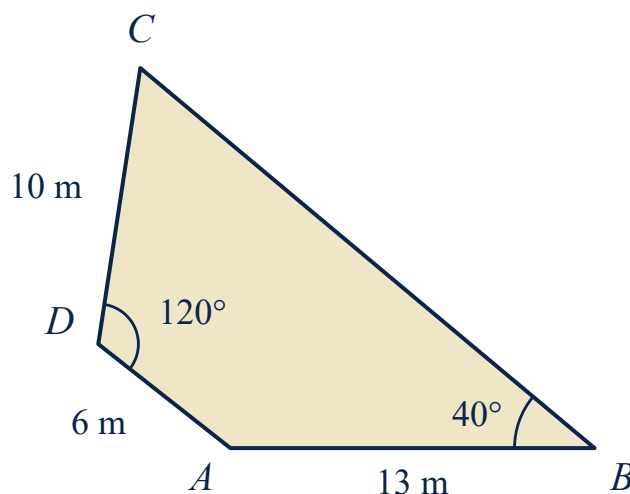
Resultado: a) $AC \approx 12,9$ cm; b) $\hat{A}DC \approx 80,5^\circ$

EJERCICIO 17

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

El diagrama muestra el cuadrilátero ABCD en el que $AB = 13$ m, $AD = 6$ m y $DC = 10$ m. Ángulo $ADC = 120^\circ$ y ángulo $ABC = 40^\circ$.



- Calcule la longitud de AC.
- Calcule el tamaño del ángulo ACB.

a) En el triángulo ADC conocemos $AD = 6$ m, $DC = 10$ m y el ángulo comprendido $\hat{ADC} = 120^\circ$. Teorema del coseno:

- $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos 120^\circ$.
- $AC^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot (-0,5) = 136 + 60 = 196$.
- $AC = \sqrt{196} = 14$ m.

Resultado: $AC = 14$ m

b) En el triángulo ABC conocemos $AC = 14$ m (opuesto a B , que mide 40°) y $AB = 13$ m (opuesto a C). Teorema del seno:

- $\frac{\sin \hat{ACB}}{AB} = \frac{\sin \hat{ABC}}{AC}$, es decir, $\frac{\sin \hat{ACB}}{13} = \frac{\sin 40^\circ}{14}$.
- $\sin \hat{ACB} = \frac{13 \cdot \sin 40^\circ}{14} \approx 0,5969$.
- Con la CPG en grados: $\hat{ACB} = \sin^{-1}(0,5969) \approx 36,6^\circ$.
- La otra solución de la ecuación sería $180^\circ - 36,6^\circ = 143,4^\circ$, pero $143,4^\circ + 40^\circ > 180^\circ$, imposible en un triángulo. Solo vale $36,6^\circ$.

Resultado: $\hat{ACB} \approx 36,6^\circ$

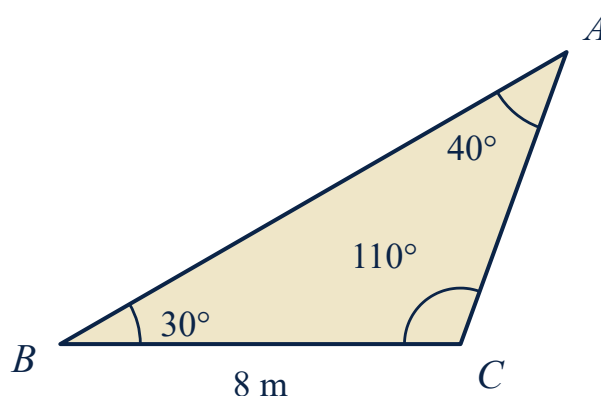
Resultado: a) $AC = 14$ m; b) $\hat{ACB} \approx 36,6^\circ$

EJERCICIO 18

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

En el triángulo ABC, $BC = 8$ m, ángulo $ACB = 110^\circ$, ángulo $CAB = 40^\circ$ y ángulo $ABC = 30^\circ$.



- Encuentre la longitud de AC.
- Encuentre el área del triángulo ABC.

a) En el triángulo ABC el lado $BC = 8$ m es opuesto al ángulo $A = 40^\circ$ y AC es opuesto al ángulo $B = 30^\circ$.

Teorema del seno:

$$1. \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 40^\circ}.$$

$$2. AC = \frac{8 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{4}{0,6428}.$$

3. Con la CPG en grados: $AC \approx 6,223$ m.

Resultado: $AC \approx 6,22$ m

b) Conocemos los lados $BC = 8$ m y $AC \approx 6,223$ m con el ángulo comprendido $\hat{ACB} = 110^\circ$.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin 110^\circ.$$

$$2. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6,223 \cdot 0,9397 \approx 23,39 \text{ m}^2.$$

Resultado: área $\approx 23,4 \text{ m}^2$

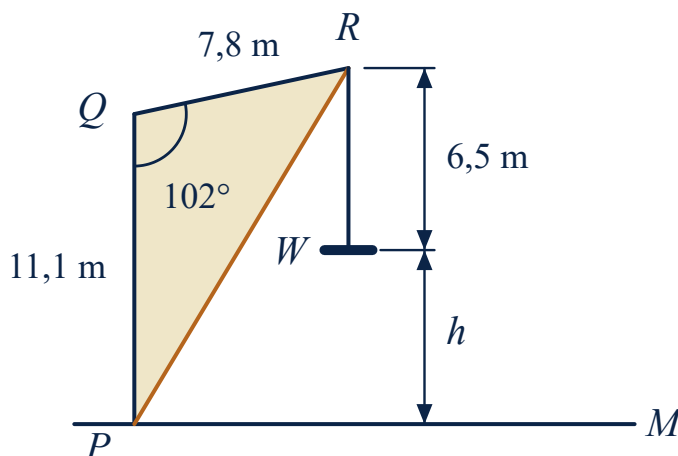
Resultado: a) $AC \approx 6,22$ m; b) $\approx 23,4 \text{ m}^2$

EJERCICIO 19

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2001

El siguiente diagrama muestra una grúa PQR que lleva una caja plana W. (PQ) es vertical y el piso (PM) es horizontal.



Sabiendo que $PQ = 11,1$ m, $QR = 7,8$ m, $\angle PQR = 102^\circ$ y $RW = 6,5$ m, calcule

- PR;
- ángulo PRQ;
- la altura, h , de W.

Con la CPG en modo **grados**.

a) En el triángulo PQR conocemos dos lados, PQ y QR, y el ángulo comprendido entre ellos, $\angle PQR = 102^\circ$. Usamos el teorema del coseno.

- $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2 \cdot PQ \cdot QR \cdot \cos 102^\circ$.
- Sustituimos: $PR^2 = 11,1^2 + 7,8^2 - 2 \cdot 11,1 \cdot 7,8 \cdot \cos 102^\circ$.
- Como $\cos 102^\circ < 0$, el último término suma: $PR^2 \approx 123,21 + 60,84 + 36,00 \approx 220,05$.
- $PR = \sqrt{220,05} \approx 14,834$.

Resultado: $PR \approx 14,8$ m

b) Usamos el teorema del seno en PQR. El lado PQ es opuesto al ángulo $\angle PRQ$ y PR es opuesto al ángulo de 102° .

- $\frac{\sin \angle PRQ}{PQ} = \frac{\sin 102^\circ}{PR}$.
- $\sin \angle PRQ = \frac{11,1 \cdot \sin 102^\circ}{14,834 \dots} \approx 0,7319$.
- $\angle PRQ = \arcsin(0,7319) \approx 47,05^\circ$.
- No hay caso ambiguo: el triángulo ya tiene un ángulo obtuso (102°), así que los otros dos son agudos.

Comprobación: el otro ángulo es $\angle QPR = \arcsin\left(\frac{7,8 \sin 102^\circ}{14,834}\right) \approx 30,95^\circ$ y $102^\circ + 47,05^\circ + 30,95^\circ = 180^\circ$.

Resultado: $\angle PRQ \approx 47,0^\circ$

c) PQ es vertical y el ángulo entre QP (hacia abajo) y QR es 102° . Entonces QR forma con la vertical hacia arriba un ángulo de $180^\circ - 102^\circ = 78^\circ$.

- La altura de R sobre Q es $QR \cdot \cos 78^\circ = 7,8 \cos 78^\circ \approx 1,622$ m.
- La altura de R sobre el suelo es $11,1 + 1,622 \approx 12,722$ m.

3. La caja W cuelga 6,5 m por debajo de R : $h = 12,722 - 6,5 \approx 6,22$ m.

Resultado: $h \approx 6,22$ m

Resultado: a) $PR \approx 14,8$ m; b) $\hat{P}RQ \approx 47,0^\circ$; c) $h \approx 6,22$ m

EJERCICIO 20

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2008

El triángulo ABC es tal que AC mide 7 cm, el ángulo ABC es 65° y el ángulo ACB es 30° .

- Dibuja el triángulo escribiendo la longitud de los lados y los ángulos.
- Calcule la longitud de AB .
- Encuentre el área del triángulo ABC .

a) Primero hallamos el tercer ángulo: la suma de los ángulos de un triángulo es 180° .

$$1. \angle BAC = 180^\circ - 65^\circ - 30^\circ = 85^\circ.$$

2. Dibujamos el triángulo ABC con $AC = 7$ cm, y colocamos los ángulos $A = 85^\circ$, $B = 65^\circ$ y $C = 30^\circ$. El lado AB está frente a C y el lado BC frente a A .

3. Las longitudes de AB y BC se calculan con el teorema del seno (apartado b), así que quedan escritas en el dibujo: $AB \approx 3,86$ cm y $BC \approx 7,69$ cm.

$$\text{Para } BC: \frac{BC}{\sin 85^\circ} = \frac{7}{\sin 65^\circ}, \text{ luego } BC = \frac{7 \sin 85^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 7,69 \text{ cm.}$$

Resultado: triángulo con $AC = 7$ cm, $AB \approx 3,86$ cm, $BC \approx 7,69$ cm, $A = 85^\circ$, $B = 65^\circ$, $C = 30^\circ$

b) El lado AC (7 cm) está frente al ángulo $B = 65^\circ$ y el lado AB está frente al ángulo $C = 30^\circ$. Usamos el teorema del seno.

$$1. \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 65^\circ}.$$

$$2. AB = \frac{7 \sin 30^\circ}{\sin 65^\circ}.$$

3. Con la CPG en grados: $AB \approx 3,86$ cm.

Resultado: $AB \approx 3,86$ cm

c) Conocemos dos lados, AB y AC , y el ángulo que forman, $A = 85^\circ$. Usamos $\text{Área} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 3,8618 \cdot 7 \cdot \sin 85^\circ \text{ (usamos el valor de } AB \text{ sin redondear).}$$

$$2. \text{Área} \approx 13,5 \text{ cm}^2.$$

Resultado: área $\approx 13,5 \text{ cm}^2$

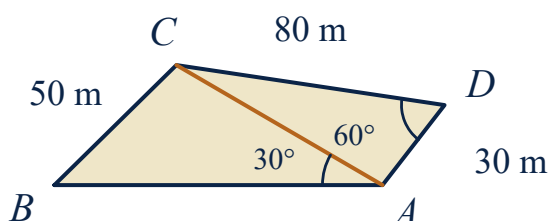
Resultado: a) triángulo con $A = 85^\circ$, $AB \approx 3,86$ cm, $BC \approx 7,69$ cm; b) $AB \approx 3,86$ cm; c) $13,5 \text{ cm}^2$

EJERCICIO 21

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2003

En la figura aparecen dos campos triangulares adyacentes ABC y ACD , en los cuales $AD = 30$ m, $CD = 80$ m, $BC = 50$ m, $\hat{ADC} = 60^\circ$ y $\hat{BAC} = 30^\circ$.



- Usando el triángulo ACD , calcule la longitud AC .
- Calcule la magnitud de $\hat{ABC}$.

a) En el triángulo ACD conocemos $AD = 30$, $CD = 80$ y el ángulo $D = 60^\circ$ comprendido entre ellos. Usamos el teorema del coseno.

- $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cos 60^\circ$.
- $AC^2 = 30^2 + 80^2 - 2 \cdot 30 \cdot 80 \cdot 0,5 = 900 + 6400 - 2400 = 4900$.
- $AC = \sqrt{4900} = 70$ m.

Resultado: $AC = 70$ m

b) En el triángulo ABC conocemos $AC = 70$ m, $BC = 50$ m y $\angle BAC = 30^\circ$. El lado BC está frente a A y el lado AC está frente a B . Usamos el teorema del seno.

- $\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin A}{BC}$.
- $\sin B = \frac{70 \sin 30^\circ}{50} = 0,7$.
- $B = \sin^{-1}(0,7) \approx 44,4^\circ$ (con la CPG en grados).
- Matemáticamente existe otro ángulo con seno 0,7, que es $180^\circ - 44,4^\circ = 135,6^\circ$. Sin embargo, en la figura el ángulo en B es agudo, así que nos quedamos con $44,4^\circ$.

Resultado: $\angle ABC \approx 44,4^\circ$

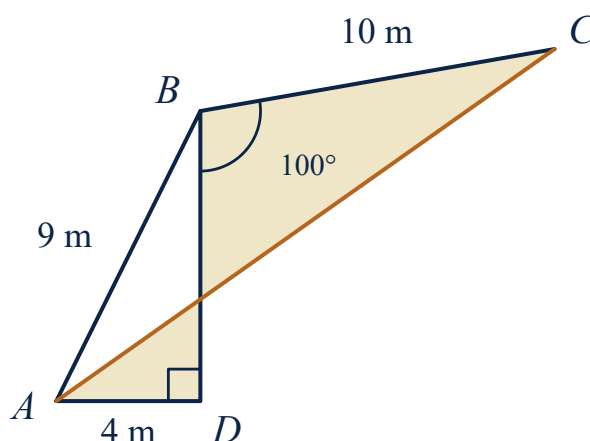
Resultado: a) $AC = 70$ m; b) $\angle ABC \approx 44,4^\circ$

EJERCICIO 22

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2011

En el diagrama, $AD = 4$ m, $AB = 9$ m, $BC = 10$ m, $\hat{BDA} = 90^\circ$ y $\hat{DBC} = 100^\circ$.



- Calcule el tamaño de $\hat{ABC}$.
- Calcule la longitud de AC .

Trabajamos con la calculadora en grados.

a) El segmento BD separa los ángulos $\hat{ABD}$ y $\hat{DBC}$, de modo que $\hat{ABC} = \hat{ABD} + \hat{DBC}$.

- El triángulo ABD es rectángulo en D . La hipotenusa es $AB = 9$ y el cateto opuesto a B es $AD = 4$.
- Por la razón seno: $\sin \hat{ABD} = \frac{AD}{AB} = \frac{4}{9}$.
- Con la CPG: $\hat{ABD} = \sin^{-1}\left(\frac{4}{9}\right) = 26,388\dots^\circ$.
- Sumamos el ángulo dado: $\hat{ABC} = 26,388\dots^\circ + 100^\circ = 126,388\dots^\circ$.

Resultado: $\hat{ABC} \approx 126^\circ$

b) En el triángulo ABC conocemos dos lados, $AB = 9$ y $BC = 10$, y el ángulo comprendido entre ellos, $\hat{ABC}$. Usamos el teorema del coseno.

- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \hat{ABC}$.
- $AC^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos(126,388\dots^\circ) = 181 + 180 \cdot 0,59325 = 287,78$.
- $AC = \sqrt{287,78} = 16,96\dots$ m.

Resultado: $AC \approx 17,0$ m

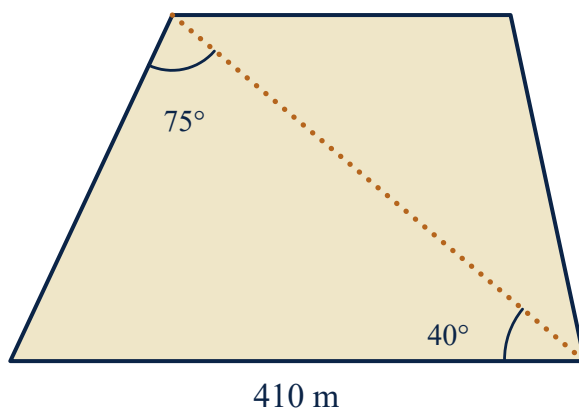
Resultado: a) $\hat{ABC} \approx 126^\circ$; b) $AC \approx 17,0$ m

EJERCICIO 23

★★ Medio

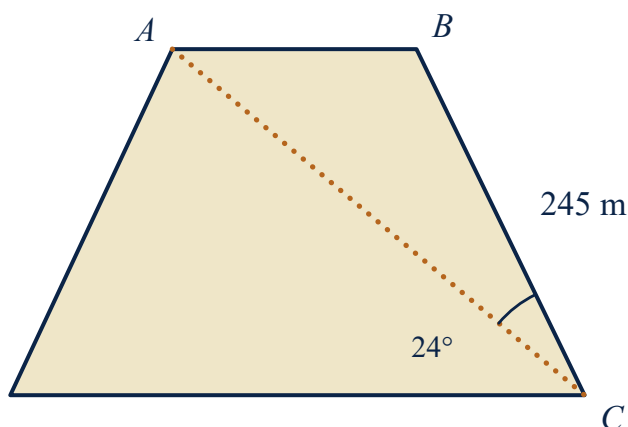
IB · P2 TZ0 Mayo 2005

- a) Un agricultor quiere construir una nueva cerca en un campo. El plan se muestra a continuación. La nueva valla se indica con una línea de puntos.



Calcule la longitud de la cerca.

- b) La cerca crea dos secciones de tierra. Encuentra el área de la sección más pequeña de tierra ABC , dada la información adicional mostrada a continuación.



- a) La cerca es un lado de un triángulo cuyos otros dos vértices son el vértice inferior izquierdo del campo y el extremo del lado de 410 m. Sus ángulos son 75° (entre el lado izquierdo y la cerca) y 40° (entre el lado de 410 m y la cerca).

1. El tercer ángulo, en el vértice inferior izquierdo, es $180^\circ - 75^\circ - 40^\circ = 65^\circ$.

2. La cerca es el lado opuesto a ese ángulo de 65° , y el lado de 410 m es el opuesto al de 75° . Teorema del

$$\text{seno: } \frac{\text{cerca}}{\sin 65^\circ} = \frac{410}{\sin 75^\circ}.$$

$$3. \text{ cerca} = \frac{410 \cdot \sin 65^\circ}{\sin 75^\circ}.$$

4. Con la CPG en grados: cerca $\approx 384,7$ m, es decir, 385 m.

Resultado: la cerca mide aproximadamente 385 m

- b) El triángulo ABC tiene lados AC (la cerca, de la parte a) y $BC = 245$ m, con el ángulo entre ambos $\hat{ACB} = 24^\circ$. Usamos la fórmula del área con dos lados y el ángulo que forman.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin 24^\circ = \frac{1}{2} \cdot 384,69 \cdot 245 \cdot \sin 24^\circ.$$

$$2. \text{Con la CPG en grados: } \text{Área} \approx 19\,168 \text{ m}^2.$$

$$3. \text{Con 3 cifras significativas: } 19\,200 \text{ m}^2.$$

Resultado: área $\approx 19\,200 \text{ m}^2$

Resultado: a) 385 m; b) 19 200 m²

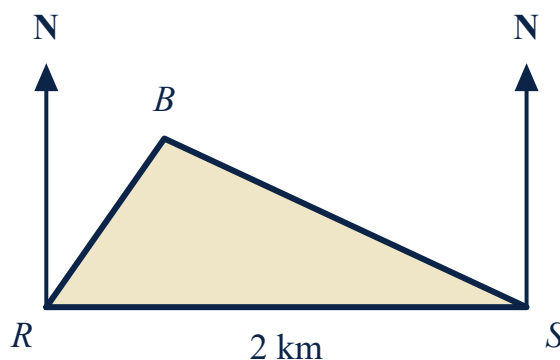
EJERCICIO 24

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2003

Raúl, en la casa R, está justo al otro lado del lago de Sylvia, en la casa S. Las casas distan dos kilómetros entre sí. Cuando tanto Raúl como Sylvia están mirando hacia el norte, ven una lancha de carreras B en el lago, entre las dos casas. Raúl, en la casa R, ve la lancha a 35° al este de adonde está mirando. Sylvia, en la casa S, ve la misma lancha a 65° al oeste de adonde está mirando.

- a) Copie y complete el diagrama a continuación, indicando cuál es el ángulo de 35° y cuál es el ángulo de 65° .



- b) (i) Calcule la magnitud de $\widehat{RBS}$.
(ii) En este momento, ¿a qué distancia está la lancha (B) de la casa de Raúl (R)? Exprese su respuesta redondeada a los 100 m más próximos.
c) Luego, Raúl y Sylvia ven el lago un bote a vela, en el punto Q, el cual está a 2,6 km de Raúl (R) y a 3,5 km de Sylvia (S). Calcule la magnitud de $\widehat{RQS}$ en ese momento, expresando su respuesta redondeada al grado más próximo.

- a) Los ángulos se miden desde la dirección norte, que en el diagrama es la flecha vertical N de cada casa.
1. En R , el ángulo de 35° está entre la flecha N de R y el segmento RB (la lancha está al este de la dirección norte, es decir, a la derecha).
2. En S , el ángulo de 65° está entre la flecha N de S y el segmento SB (la lancha está al oeste, es decir, a la izquierda).

Resultado: 35° entre N y RB en R ; 65° entre N y SB en S .

- b) (i) Calculamos los ángulos interiores del triángulo RBS en R y en S . Las flechas N son perpendiculares a RS .

$$1. \widehat{BRS} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

$$2. \widehat{BSR} = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ.$$

$$3. \text{Los ángulos de un triángulo suman } 180^\circ: \widehat{RBS} = 180^\circ - 55^\circ - 25^\circ = 100^\circ.$$

Resultado: $\widehat{RBS} = 100^\circ$

(ii) Teorema del seno en RBS : el lado RB es opuesto a $\widehat{BSR} = 25^\circ$ y el lado $RS = 2$ km es opuesto a $\widehat{RBS} = 100^\circ$.

1. $\frac{RB}{\sin 25^\circ} = \frac{2}{\sin 100^\circ}$.
2. $RB = \frac{2 \sin 25^\circ}{\sin 100^\circ} \approx 0,858 \text{ km} = 858 \text{ m}$.
3. Redondeado a los 100 m más próximos: 900 m.

Resultado: $RB \approx 900 \text{ m}$

c) En el triángulo RQS conocemos los tres lados: $RQ = 2,6$ km, $QS = 3,5$ km y $RS = 2$ km. El lado opuesto a $\widehat{RQS}$ es $RS = 2$. Usamos el teorema del coseno.

1. $RS^2 = RQ^2 + QS^2 - 2 \cdot RQ \cdot QS \cdot \cos \widehat{RQS}$.
2. $\cos \widehat{RQS} = \frac{2,6^2 + 3,5^2 - 2^2}{2 \cdot 2,6 \cdot 3,5} = \frac{15,01}{18,2} \approx 0,8247$.
3. Con la CPG en grados: $\widehat{RQS} = \cos^{-1}(0,8247) \approx 34,44^\circ$.
4. Al grado más próximo: 34° .

Resultado: $\widehat{RQS} \approx 34^\circ$

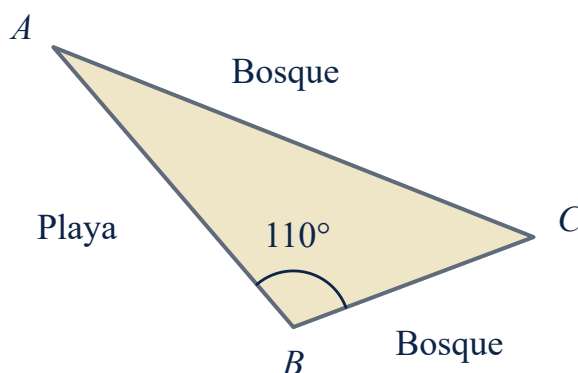
Resultado: a) ver diagrama; b) (i) 100° , (ii) 900 m; c) 34°

EJERCICIO 25

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2014

Una carrera de cross consta de una sección de playa y de una sección de bosque. Los participantes corren desde A hasta B, luego desde B hasta C y, por último, desde C vuelven a A. El recorrido de la carrera desde A hasta B va por la playa, mientras que el recorrido desde B hasta C y vuelta a A va por el bosque. El recorrido se muestra en la siguiente figura.



El ángulo ABC mide 110° .

Sara tarda 5 minutos y 20 segundos en correr desde A hasta B a una velocidad de $3,8 \text{ m s}^{-1}$.

- a) Utilizando la fórmula de «distancia = velocidad $\times$ tiempo», muestre que la distancia que hay desde A hasta B es igual a 1220 metros, redondeando a 3 cifras significativas.

La distancia que hay desde B hasta C es igual a 850 metros.

Sara tarda 5 minutos y 3 segundos en correr esa parte del recorrido.

- b) Calcule a qué velocidad, en m s^{-1} , corre Sara desde B hasta C.
c) Calcule la distancia que hay desde C hasta A.
d) Calcule la distancia total, en metros, que se recorre en esta carrera de cross.
e) Halle el valor del ángulo BCA .
f) Calcule el área del recorrido de esta carrera de cross, delimitado por las rectas AB , BC y CA .

- a) El tiempo, en segundos, es $5 \cdot 60 + 20 = 320 \text{ s}$.

1. distancia = velocidad $\times$ tiempo = $3,8 \cdot 320 = 1216 \text{ m}$.

2. Redondeando a 3 cifras significativas: 1220 m.

Queda demostrado.

Resultado: $AB = 1216 \text{ m} \approx 1220 \text{ m}$

- b) El tiempo, en segundos, es $5 \cdot 60 + 3 = 303 \text{ s}$.

1. velocidad = $\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{850}{303}$.

2. velocidad $\approx 2,81 \text{ m s}^{-1}$.

Resultado: $2,81 \text{ m s}^{-1}$

- c) Conocemos dos lados, AB y BC , y el ángulo que forman, $B = 110^\circ$. Usamos el teorema del coseno en el triángulo ABC (con $AB = 1216 \text{ m}$ sin redondear).

1. $CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos 110^\circ$.

2. $CA^2 = 1216^2 + 850^2 - 2 \cdot 1216 \cdot 850 \cdot \cos 110^\circ \approx 2908180$.

3. $CA = \sqrt{2908180} \approx 1705 \text{ m.}$

Resultado: $CA \approx 1710 \text{ m}$

d) La distancia total es la suma de los tres lados.

1. $AB + BC + CA = 1216 + 850 + 1705,34 = 3771,3 \text{ m.}$

2. Redondeando a 3 cifras significativas: 3770 m.

Resultado: $\approx 3770 \text{ m}$

e) Usamos el teorema del seno en el triángulo ABC : el lado AB está frente al ángulo C .

1. $\frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin 110^\circ}{CA}.$

2. $\sin C = \frac{1216 \sin 110^\circ}{1705,34} \approx 0,6700.$

3. $C = \sin^{-1}(0,6700) \approx 42,1^\circ$. El ángulo B es obtuso, así que C es agudo y esta es la única solución.

Resultado: $\angle BCA \approx 42,1^\circ$

f) El área del triángulo ABC es $\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$.

1. Área = $\frac{1}{2} \cdot 1216 \cdot 850 \cdot \sin 110^\circ$.

2. Área $\approx 485\,633 \text{ m}^2 \approx 486\,000 \text{ m}^2$.

Resultado: área $\approx 486\,000 \text{ m}^2$

Resultado: a) demostrado; b) $2,81 \text{ m s}^{-1}$; c) $\approx 1710 \text{ m}$; d) $\approx 3770 \text{ m}$; e) $42,1^\circ$; f) $\approx 486\,000 \text{ m}^2$

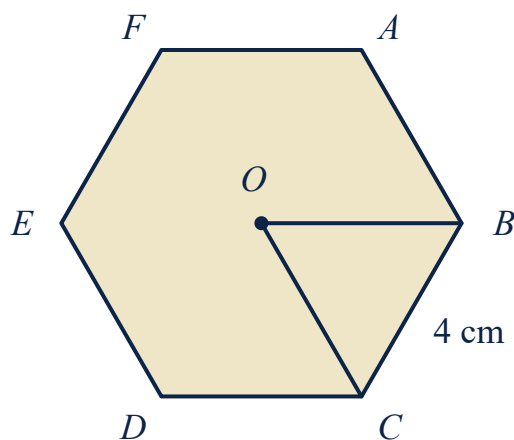
Área de un triángulo

EJERCICIO 26

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2003

La figura a continuación muestra un hexágono, cuyos lados tienen todos longitud 4 cm y de centro en O . Los ángulos interiores del hexágono son todos iguales.



Los ángulos interiores de un polígono de n lados iguales y n ángulos iguales (polígono regular) suman $(n - 2) \times 180^\circ$.

- Calcule la magnitud del ángulo $\hat{ABC}$.
- Dado que $OB = OC$, halle el área del triángulo OBC .
- Halle el área de todo el hexágono.

Con la CPG en modo **grados**.

a) Un hexágono tiene $n = 6$ lados, así que la suma de sus ángulos interiores es $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$.

1. Los seis ángulos son iguales: $\hat{A}\hat{B}C = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$.

Resultado: $\hat{A}\hat{B}C = 120^\circ$

b) Como el hexágono es regular, O está a la misma distancia de todos los vértices y OB divide por la mitad el ángulo interior de B .

1. $\hat{O}\hat{B}C = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

2. Como $OB = OC$, el triángulo OBC es isósceles y $\hat{O}\hat{C}B = \hat{O}\hat{B}C = 60^\circ$.

3. Entonces $\hat{B}\hat{O}C = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$: el triángulo es equilátero, de lado $OB = OC = BC = 4$ cm.

4. Área = $\frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6,93$ cm².

Resultado: área de $OBC \approx 6,93$ cm²

c) El hexágono se descompone en 6 triángulos iguales al OBC con vértice en O .

1. Área del hexágono = $6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \approx 41,57$ cm².

Resultado: área del hexágono $\approx 41,6$ cm²

Resultado: a) 120° ; b) $\approx 6,93$ cm²; c) $\approx 41,6$ cm²

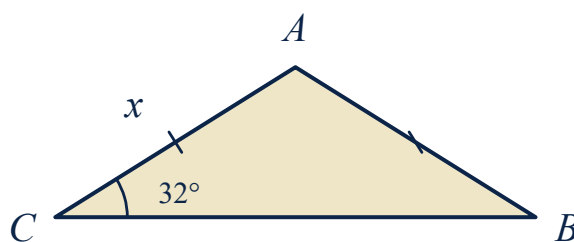
EJERCICIO 27

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2012

El triángulo ABC que aparece en la figura es isósceles.

$AB = AC$ y el ángulo ACB es igual a 32° . El lado AC mide x cm.



a) Escriba el valor del ángulo CBA .

b) Escriba el valor del ángulo CAB .

c) El área del triángulo ABC es igual a 360 cm². Calcule la longitud del lado AC .

Exprese la respuesta en milímetros.

a) El triángulo es isósceles con $AB = AC$, así que los ángulos opuestos a esos lados son iguales: $\angle CBA = \angle ACB$.

1. $\angle CBA = 32^\circ$.

Resultado: $\angle CBA = 32^\circ$

b) Los ángulos de un triángulo suman 180° .

$$1. \angle CAB = 180^\circ - 32^\circ - 32^\circ = 116^\circ.$$

Resultado: $\angle CAB = 116^\circ$

c) Los lados AC y AB miden x y forman el ángulo $A = 116^\circ$. Usamos $\text{Área} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

$$1. 360 = \frac{1}{2} x \cdot x \cdot \sin 116^\circ, \text{ es decir, } x^2 = \frac{720}{\sin 116^\circ}.$$

$$2. x^2 \approx 801,08, \text{ luego } x = \sqrt{801,08} \approx 28,30 \text{ cm.}$$

3. Pasamos a milímetros ($1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$): $AC \approx 283 \text{ mm}$.

Resultado: $AC \approx 283 \text{ mm}$

Resultado: a) 32° ; b) 116° ; c) 283 mm

EJERCICIO 28

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2008

Amir necesita construir un triángulo isósceles ABC cuya área sea 100 cm^2 .

Los lados iguales, AB y BC , miden 20 cm de largo.

a) El ángulo ABC es agudo. Muestre que el ángulo ABC es 30° .

b) Encuentre la longitud de AC .

Trabajamos con la calculadora en grados.

a) El área de un triángulo con dos lados y el ángulo comprendido es $\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \hat{A}BC$.

$$1. \text{Igualamos al área dada: } \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \sin \hat{A}BC = 100.$$

$$2. \text{Simplificamos: } 200 \sin \hat{A}BC = 100, \text{ luego } \sin \hat{A}BC = 0,5.$$

3. Las soluciones entre 0° y 180° son 30° y 150° . Como el ángulo es agudo, $\hat{A}BC = 30^\circ$.

Queda demostrado.

b) En el triángulo ABC conocemos $AB = BC = 20$ y el ángulo comprendido $\hat{A}BC = 30^\circ$. Usamos el teorema del coseno.

$$1. AC^2 = 20^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot \cos 30^\circ = 800 - 800 \cdot 0,8660 \dots$$

$$2. AC^2 = 107,18 \dots$$

$$3. AC = \sqrt{107,18 \dots} = 10,35 \dots \text{ cm.}$$

Resultado: $AC \approx 10,4 \text{ cm}$

Resultado: a) demostrado ($\hat{A}BC = 30^\circ$); b) $AC \approx 10,4 \text{ cm}$

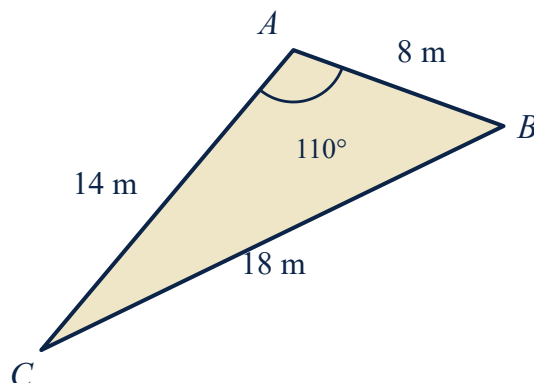
EJERCICIO 29

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2001

El siguiente diagrama muestra un triángulo ABC.

$AB = 8$ m, $AC = 14$ m, $BC = 18$ m, y $\widehat{BAC} = 110^\circ$.



Calcular

- el área del triángulo ABC;
- el tamaño del ángulo $\widehat{ACB}$.

a) Conocemos dos lados, $AB = 8$ m y $AC = 14$ m, y el ángulo que forman, 110° . Usamos la fórmula del área con dos lados y el ángulo comprendido.

- Área = $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 110^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 14 \cdot \sin 110^\circ$.
- Con la CPG en grados: Área = $56 \cdot 0,9397 \approx 52,6$ m².

Resultado: área $\approx 52,6$ m²

b) El lado $BC = 18$ m es opuesto al ángulo $A = 110^\circ$, y el lado $AB = 8$ m es opuesto al ángulo C . Usamos el teorema del seno.

- $\frac{\sin \hat{ACB}}{AB} = \frac{\sin 110^\circ}{BC}$, es decir, $\sin \hat{ACB} = \frac{8 \cdot \sin 110^\circ}{18} \approx 0,4177$.
- Con la CPG en grados: $\hat{ACB} \approx 24,7^\circ$. El ángulo A ya es obtuso, así que C debe ser agudo y no hay otra solución.

Resultado: $\hat{ACB} \approx 24,7^\circ$

Resultado: a) 52,6 m²; b) 24,7°

Problemas combinados: varios triángulos, figuras compuestas y 3D

EJERCICIO 30

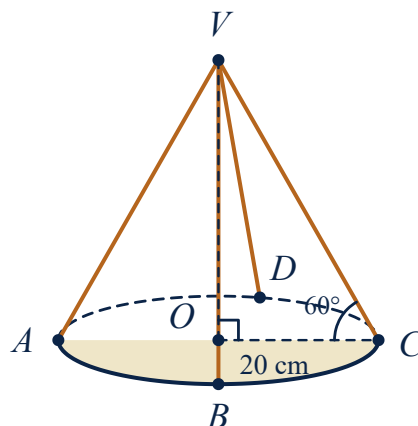
★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2017

La pantalla de una lámpara tiene forma de cono. Su estructura de alambre consta de un anillo circular y cuatro piezas rectas de igual longitud que van unidas al anillo en los puntos A, B, C y D.

El anillo tiene su centro en el punto O y un radio de 20 centímetros. Las piezas rectas se encuentran en el punto V, que está sobre la vertical del punto O, y el ángulo que forman con la base de la pantalla de la lámpara es igual a 60° .

Toda esta información se muestra en la siguiente figura.



- Halle la longitud de una de estas piezas rectas que tiene la estructura de alambre.
 - Halle la longitud total de alambre que se necesita para construir esta estructura de alambre.
- Dé la respuesta en centímetros, redondeando al número de milímetros más cercano.

Trabajamos con la calculadora en grados.

- Cada pieza recta es la hipotenusa CV del triángulo rectángulo VOC (recto en O), con el cateto $OC = 20$ cm (el radio) adyacente al ángulo de 60° .

$$1. \cos 60^\circ = \frac{OC}{CV} = \frac{20}{CV}.$$

$$2. CV = \frac{20}{\cos 60^\circ} = \frac{20}{0,5} = 40 \text{ cm.}$$

Resultado: cada pieza mide 40 cm

- El alambre se usa en las cuatro piezas rectas y en el anillo circular.

- Cuatro piezas: $4 \cdot 40 = 160$ cm.
- Anillo, circunferencia de radio 20 cm: $2\pi \cdot 20 = 40\pi = 125,66 \dots$ cm.
- Total: $160 + 125,66 \dots = 285,66 \dots$ cm.
- Redondeamos al milímetro más cercano, es decir, a una cifra decimal en centímetros: 285,7 cm (2857 mm).

Resultado: 285,7 cm

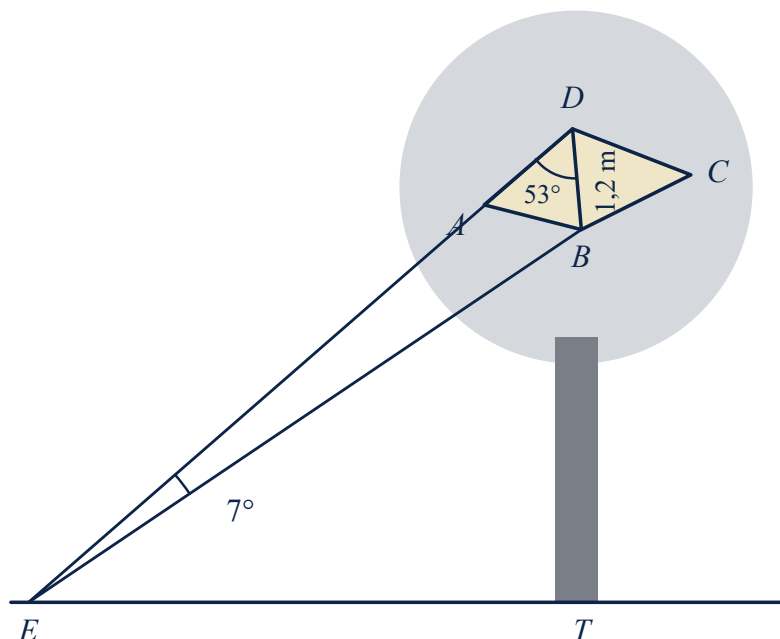
Resultado: a) 40 cm; b) 285,7 cm

EJERCICIO 31

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

Emily tiene una cometa ABCD que está colgada de un árbol. El plano ABCDE es vertical. Emily se encuentra en el punto E situado a una cierta distancia del árbol, de modo tal que EAD es una línea recta y el ángulo $BED = 7^\circ$. Emily sabe que $BD = 1,2$ metros y que el ángulo $BDA = 53^\circ$, tal y como se muestra en la figura.



- a) Halle la longitud de EB.

T es un punto situado en la base del árbol. ET es una recta horizontal. El ángulo de elevación de A visto desde E es igual a 41° .

- b) Escriba el ángulo de elevación de B visto desde E.
c) Halle a qué altura vertical sobre el nivel del suelo se encuentra B.

Trabajamos con la calculadora en grados.

- a) Consideramos el triángulo EBD. Conocemos $BD = 1,2$ m, que es opuesto al ángulo $\widehat{BED} = 7^\circ$, y el ángulo $\widehat{BDA} = \widehat{BDE} = 53^\circ$ (E, A y D están alineados), opuesto al lado EB. Teorema del seno:

$$\begin{aligned} 1. \frac{EB}{\sin 53^\circ} &= \frac{1,2}{\sin 7^\circ} \\ 2. EB &= \frac{1,2 \sin 53^\circ}{\sin 7^\circ} = 7,8638 \dots \approx 7,86 \text{ m.} \end{aligned}$$

Resultado: $EB \approx 7,86$ m

- b) El ángulo entre las dos rectas que salen de E es 7° . La recta EAD, que llega a A, forma 41° con el suelo y es la más empinada. La recta EB es menos empinada, así que forma 7° menos: $41^\circ - 7^\circ = 34^\circ$.

Resultado: 34°

- c) Sea h la altura de B sobre el suelo. Es el cateto opuesto al ángulo de elevación de 34° en el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es EB.

$$\begin{aligned} 1. \sin 34^\circ &= \frac{h}{EB} \\ 2. h &= 7,8638 \dots \cdot \sin 34^\circ = 4,397 \dots \approx 4,40 \text{ m.} \end{aligned}$$

Resultado: B está a $\approx 4,40$ m de altura

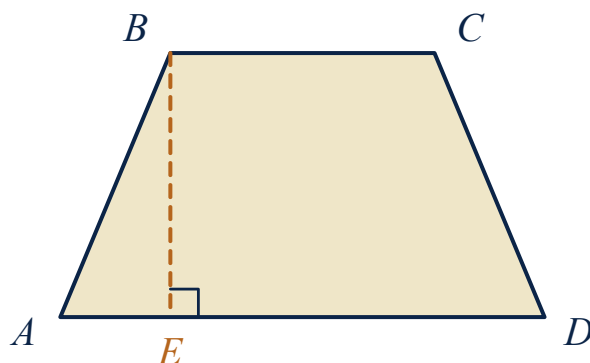
Resultado: a) $\approx 7,86$ m; b) 34° ; c) $\approx 4,40$ m

EJERCICIO 32

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2001

$ABCD$ es un trapecio con $AB = CD$ y $[BC]$ paralelo a $[AD]$. $AD = 22$ cm, $BC = 12$ cm, $AB = 13$ cm.



- Muestre que $AE = 5$ cm.
- Calcule la altura BE del trapecio.
- Calcule
 - $\hat{BAE}$
 - $\hat{BCD}$.
- Calcule la longitud de la diagonal $[CA]$.

Con la CPG en modo **grados**.

a) El trapecio es isósceles ($AB = CD$) y BE es perpendicular a AD . Si trazamos también la altura desde C hasta AD , el trapecio queda dividido en un rectángulo central de base $BC = 12$ cm y dos triángulos rectángulos iguales a los lados.

- Los dos triángulos de los lados son iguales, así que la parte de AD que no está bajo BC se reparte a partes iguales: $AD - BC = 22 - 12 = 10$ cm.
- Cada triángulo lateral tiene base $\frac{10}{2} = 5$ cm.

Por tanto, $AE = 5$ cm.

Queda demostrado.

b) El triángulo ABE es rectángulo en E , con hipotenusa $AB = 13$ y cateto $AE = 5$. Usamos el teorema de Pitágoras.

- $BE^2 = AB^2 - AE^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$.
- $BE = \sqrt{144} = 12$ cm.

Resultado: $BE = 12$ cm

c) i) En el triángulo rectángulo ABE , $\cos \hat{BAE} = \frac{AE}{AB} = \frac{5}{13}$ (cateto contiguo entre hipotenusa).

- $\hat{BAE} = \arccos \frac{5}{13} \approx 67,38^\circ$.

Resultado: $\hat{BAE} \approx 67,4^\circ$

ii) Como BC es paralelo a AD , los ángulos $\hat{BCD}$ y $\hat{CDA}$ son suplementarios (ángulos interiores del mismo lado de la transversal CD).

- Por ser el trapecio isósceles, $\hat{CDA} = \hat{BAE} \approx 67,38^\circ$.

$$2. \hat{BCD} = 180^\circ - 67,38^\circ \approx 112,62^\circ.$$

Resultado: $\hat{BCD} \approx 113^\circ$

d) Situamos la proyección de C sobre AD , llamémosla F . Entonces $AF = AE + EF = 5 + 12 = 17$ cm y $CF = BE = 12$ cm. El triángulo AFC es rectángulo en F .

$$1. CA^2 = AF^2 + CF^2 = 17^2 + 12^2 = 289 + 144 = 433.$$

$$2. CA = \sqrt{433} \approx 20,81 \text{ cm.}$$

Resultado: $CA \approx 20,8$ cm

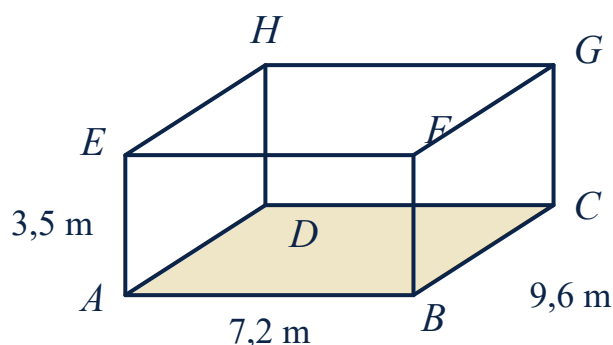
Resultado: a) $AE = 5$ cm; b) $BE = 12$ cm; c) i) $\hat{BAE} \approx 67,4^\circ$, ii) $\hat{BCD} \approx 113^\circ$; d) $CA \approx 20,8$ cm

EJERCICIO 33

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2011

Una habitación tiene forma de cuboide. Su piso mide 7,2 m por 9,6 m y su altura es de 3,5 m.



- Calcule la longitud de AC .
- Calcule la longitud de AG .
- Calcule el ángulo que AG forma con el piso.

a) AC es la diagonal del piso rectangular $ABCD$. El triángulo ABC es rectángulo en B , así que usamos el teorema de Pitágoras.

$$1. AC^2 = AB^2 + BC^2 = 7,2^2 + 9,6^2 = 51,84 + 92,16 = 144.$$

$$2. AC = \sqrt{144} = 12 \text{ m.}$$

Resultado: $AC = 12$ m

b) AG es la diagonal del cuboide. El triángulo ACG es rectángulo en C , porque la arista vertical CG es perpendicular al piso. Sus catetos son $AC = 12$ m y $CG = 3,5$ m.

$$1. AG^2 = AC^2 + CG^2 = 12^2 + 3,5^2 = 144 + 12,25 = 156,25.$$

$$2. AG = \sqrt{156,25} = 12,5 \text{ m.}$$

Resultado: $AG = 12,5$ m

c) El ángulo que forma AG con el piso es el ángulo $\angle GAC$, porque AC es la proyección de AG sobre el piso. En el triángulo ACG , CG es el cateto opuesto y AC el adyacente.

$$1. \tan \theta = \frac{CG}{AC} = \frac{3,5}{12}.$$

$$2. \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3,5}{12}\right) \approx 16,3^\circ.$$

Comprobación con el seno: $\sin \theta = \frac{3,5}{12,5} = 0,28$ y $\sin^{-1}(0,28) \approx 16,3^\circ$.

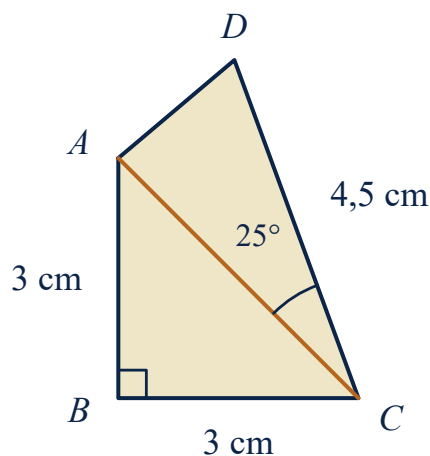
Resultado: $\approx 16,3^\circ$

Resultado: a) 12 m; b) 12,5 m; c) $16,3^\circ$

EJERCICIO 34

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005



En el diagrama, $AB = BC = 3$ cm; $DC = 4,5$ cm; el ángulo $ABC = 90^\circ$ y el ángulo $ACD = 25^\circ$.

- Calcule la longitud de AC .
- Calcule el área del triángulo ACD .
- Calcule el área del cuadrilátero $ABCD$.

Trabajamos con la calculadora en grados.

a) El triángulo ABC es rectángulo en B con catetos $AB = BC = 3$ cm. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$1. AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18.$$

$$2. AC = \sqrt{18} = 4,2426 \dots \text{ cm.}$$

Resultado: $AC \approx 4,24$ cm

b) En el triángulo ACD conocemos $AC = \sqrt{18}$, $DC = 4,5$ y el ángulo comprendido $\hat{ACD} = 25^\circ$.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DC \cdot \sin \hat{ACD}.$$

$$2. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot 4,5 \cdot \sin 25^\circ = 4,0343 \dots \text{ cm}^2.$$

Resultado: área de $ACD \approx 4,03 \text{ cm}^2$

c) El cuadrilátero $ABCD$ se descompone en los triángulos ABC y ACD (la diagonal AC los separa).

$$1. \text{Área de } ABC, \text{ triángulo rectángulo: } \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5 \text{ cm}^2.$$

$$2. \text{Área total} = 4,5 + 4,0343 \dots = 8,5343 \dots \text{ cm}^2.$$

Resultado: área de $ABCD \approx 8,53 \text{ cm}^2$

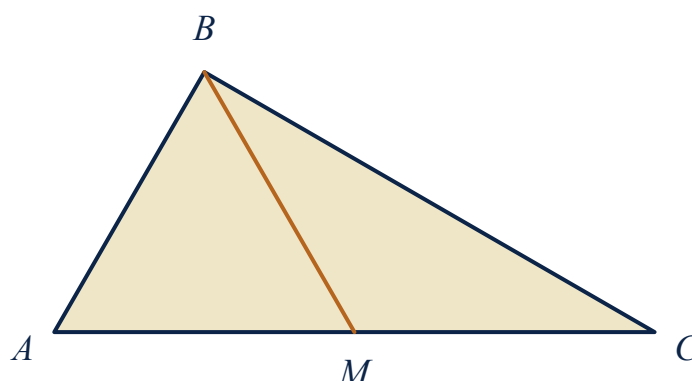
Resultado: a) $AC \approx 4,24$ cm; b) $\approx 4,03 \text{ cm}^2$; c) $\approx 8,53 \text{ cm}^2$

EJERCICIO 35

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2010

El diagrama muestra un triángulo ABC en el que $AC = 17$ cm. M es el punto medio de AC .
El triángulo ABM es equilátero.



- a) Escriba
- (i) la longitud de BM en cm;
 - (ii) el tamaño del ángulo BMC ;
 - (iii) el tamaño del ángulo MCB .
- b) Calcule la longitud de BC en cm.

- a) El triángulo ABM es equilátero: sus tres lados son iguales y sus tres ángulos miden 60° .
- (i) M es el punto medio de $AC = 17$, luego $AM = MC = 8,5$ cm. Como ABM es equilátero, $BM = AM = 8,5$ cm.
 - (ii) A, M y C están alineados, así que $\hat{BMC} = 180^\circ - \hat{AMB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
 - (iii) Los lados BM y MC miden ambos $8,5$ cm, así que el triángulo BMC es isósceles y sus ángulos en B y en C son iguales. Cada uno vale $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Resultado: i) $BM = 8,5$ cm; ii) $\hat{BMC} = 120^\circ$; iii) $\hat{MCB} = 30^\circ$

b) En el triángulo BMC conocemos $BM = MC = 8,5$ y el ángulo comprendido $\hat{BMC} = 120^\circ$. Usamos el teorema del coseno (calculadora en grados).

1. $BC^2 = BM^2 + MC^2 - 2 \cdot BM \cdot MC \cdot \cos 120^\circ$.
2. $BC^2 = 8,5^2 + 8,5^2 - 2 \cdot 8,5 \cdot 8,5 \cdot (-0,5) = 3 \cdot 8,5^2 = 216,75$.
3. $BC = \sqrt{216,75} = 14,72 \dots$ cm.

Comprobación con el teorema del seno: $\frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{8,5}{\sin 30^\circ}$ da $BC = 17 \cdot \sin 120^\circ = 14,72 \dots$ cm.

Resultado: $BC \approx 14,7$ cm

Resultado: a) i) $8,5$ cm; ii) 120° ; iii) 30° ; b) $BC \approx 14,7$ cm

EJERCICIO 36

★★ Medio

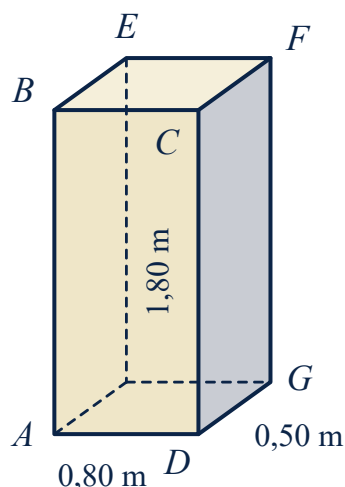
IB · P1 T22 Mayo 2010

Un ortoedro tiene las siguientes dimensiones.

Largo 0,80 metros (AD)

Ancho 0,50 metros (DG)

Alto 1,80 metros (DC)



- Calcule la longitud de AG .
- Calcule la longitud de AF .
- Halle el valor del ángulo que hay entre AF y AG .

a) AG es la diagonal de la base del ortoedro. Los puntos A , D y G están en la base y el ángulo en D es recto, así que ADG es un triángulo rectángulo con catetos $AD = 0,80$ m y $DG = 0,50$ m.

- Aplicamos el teorema de Pitágoras: $AG^2 = AD^2 + DG^2 = 0,80^2 + 0,50^2 = 0,64 + 0,25 = 0,89$.
- Extraemos la raíz: $AG = \sqrt{0,89} \approx 0,943$ m.

Resultado: $AG \approx 0,943$ m

b) La arista GF es vertical, paralela a DC , así que $GF = 1,80$ m y es perpendicular a la base. Por tanto, el triángulo AGF es rectángulo en G , con catetos AG y GF e hipotenusa AF .

- Aplicamos Pitágoras sin redondear AG : $AF^2 = AG^2 + GF^2 = 0,89 + 1,80^2 = 0,89 + 3,24 = 4,13$.
- $AF = \sqrt{4,13} \approx 2,03$ m.

Resultado: $AF \approx 2,03$ m

c) El ángulo entre AF y AG es el ángulo $F\hat{A}G$ del triángulo rectángulo AGF . Respecto a ese ángulo, GF es el cateto opuesto y AG el cateto adyacente.

- $\tan(F\hat{A}G) = \frac{GF}{AG} = \frac{1,80}{\sqrt{0,89}} \approx 1,908$.
- Con la CPG en grados: $F\hat{A}G = \tan^{-1}(1,908) \approx 62,3^\circ$.

Comprobación con el seno: $\sin(F\hat{A}G) = \frac{1,80}{\sqrt{4,13}} \approx 0,886$, que da el mismo ángulo.

Resultado: $F\hat{A}G \approx 62,3^\circ$

Resultado: a) $AG \approx 0,943$ m; b) $AF \approx 2,03$ m; c) $62,3^\circ$

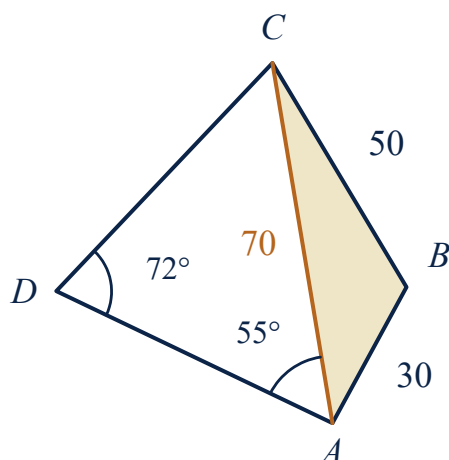
EJERCICIO 37

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2019

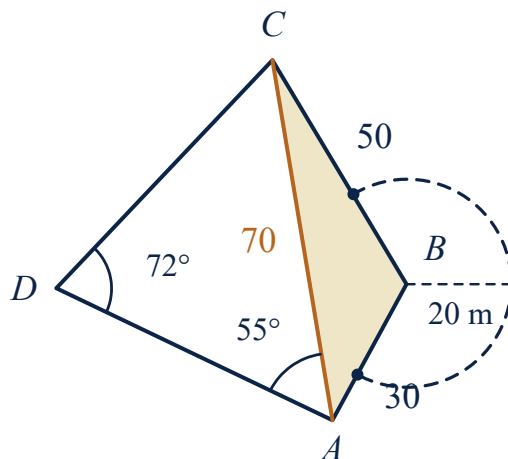
Haraya posee dos terrenos que tienen forma triangular: ABC y ACD. AB mide 30 m de longitud, BC mide 50 m y AC mide 70 m. El ángulo $\widehat{DAC}$ mide 55° y $\widehat{ADC}$ mide 72° .

La siguiente figura muestra toda esta información.



- Halle la longitud de AD.
- Halle el valor de $\widehat{ABC}$.
- Calcule el área del terreno triangular ABC.

Haraya ata una cuerda de 20 m de largo a un poste vertical que se encuentra en el punto B.



- Determine si la cuerda llega hasta el interior del terreno triangular ACD. Justifique su respuesta.

a) En el triángulo ACD conocemos dos ángulos, así que hallamos el tercero y usamos el teorema del seno.

$$1. \widehat{ACD} = 180^\circ - 55^\circ - 72^\circ = 53^\circ.$$

2. El lado AD es opuesto al ángulo en C (53°) y el lado AC (70 m) es opuesto al ángulo en D (72°):

$$\frac{AD}{\sin 53^\circ} = \frac{70}{\sin 72^\circ}.$$

$$3. \text{Despejamos: } AD = \frac{70 \sin 53^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 58,8 \text{ m.}$$

Resultado: $AD \approx 58,8$ m

b) En el triángulo ABC conocemos los tres lados. El ángulo $\widehat{ABC}$ es opuesto a $AC = 70$ m, así que usamos el teorema del coseno:

$$1. AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos \widehat{ABC}, \text{ es decir, } 70^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cos \widehat{ABC}.$$

$$2. 4900 = 3400 - 3000 \cos \widehat{ABC}, \text{ luego } \cos \widehat{ABC} = \frac{3400 - 4900}{3000} = -0,5.$$

$$3. \text{ Con la CPG (en grados): } \widehat{ABC} = \cos^{-1}(-0,5) = 120^\circ.$$

Resultado: $\widehat{ABC} = 120^\circ$

c) Área del triángulo con dos lados y el ángulo comprendido: $A = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \widehat{ABC}$.

$$1. A = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 50 \cdot \sin 120^\circ = 750 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2. A \approx 649,5 \text{ m}^2.$$

Resultado: $A \approx 650 \text{ m}^2$

d) La cuerda es un radio de 20 m con centro en B. Llega al interior del terreno ACD si B está a menos de 20 m del lado AC (que separa los dos terrenos), y además el punto más cercano de AC cae dentro del segmento AC.

1. La distancia de B a la recta AC es la altura h del triángulo ABC sobre la base AC. Como el área es $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot h$:

$$649,52 = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot h \Rightarrow h = \frac{649,52}{35} \approx 18,56 \text{ m}.$$

2. Comprobamos que el pie de esa altura está en el segmento AC. Los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{BCA}$ son agudos, porque el ángulo obtuso del triángulo está en B (120°); por tanto el pie de la altura cae entre A y C.

3. Como $18,56 < 20$, la cuerda sobrepasa el lado AC en unos $20 - 18,56 \approx 1,44$ m.

Sí, la cuerda llega al interior del terreno ACD, porque la distancia de B al lado AC (18,56 m) es menor que la longitud de la cuerda (20 m).

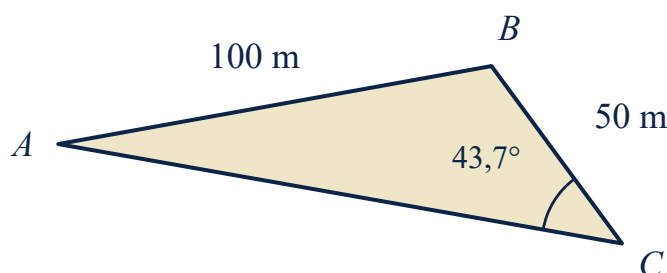
Resultado: a) $AD \approx 58,8$ m; b) $\widehat{ABC} = 120^\circ$; c) $A \approx 650 \text{ m}^2$; d) sí llega, pues $18,56 \text{ m} < 20 \text{ m}$

EJERCICIO 38

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2018

La superficie plana y horizontal ABC es tal que $AB = 100$ m, $BC = 50$ m y el ángulo $\widehat{ACB} = 43,7^\circ$ tal y como se muestra en la figura.



- Muestre que el valor del ángulo $\widehat{BAC}$ es $20,2^\circ$, redondeado a 3 cifras significativas.
- Calcule el área de triángulo ABC.
- Halle la longitud de AC.

El poste vertical TB se coloca en el punto B y tiene una altura de 25 m.

- Calcule el ángulo de elevación de T visto desde M, el punto medio del lado AC.

Trabajamos con la calculadora en grados.

- Conocemos dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos, así que usamos el teorema del seno.

1. El lado $BC = 50$ m es opuesto al ángulo $\widehat{BAC}$ y el lado $AB = 100$ m es opuesto al ángulo $\widehat{ACB} = 43,7^\circ$:

$$\frac{\sin \widehat{BAC}}{50} = \frac{\sin 43,7^\circ}{100}.$$

2. Despejamos: $\sin \widehat{BAC} = \frac{50 \sin 43,7^\circ}{100} = 0,34552 \dots$

3. Con la CPG: $\widehat{BAC} = \sin^{-1}(0,34552 \dots) = 20,2087 \dots^\circ \approx 20,2^\circ$.

4. Como $AB > BC$, el ángulo opuesto a AB (en C, de $43,7^\circ$) es mayor que el opuesto a BC (en A): el ángulo agudo hallado es la única solución posible.

Queda demostrado.

- Necesitamos el ángulo en B.

1. Los ángulos de un triángulo suman 180° : $\widehat{ABC} = 180^\circ - 43,7^\circ - 20,2087^\circ = 116,0913^\circ$.

2. Área con dos lados y el ángulo comprendido: $\text{Área} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC}$.

3. $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 50 \cdot \sin 116,0913^\circ = 2245,2 \dots \approx 2250 \text{ m}^2$.

Resultado: $\text{área} \approx 2250 \text{ m}^2$

- Usamos otra vez el teorema del seno, ahora con el ángulo en B (opuesto a AC).

$$1. \frac{AC}{\sin 116,0913^\circ} = \frac{100}{\sin 43,7^\circ}.$$

$$2. AC = \frac{100 \sin 116,0913^\circ}{\sin 43,7^\circ} = 129,99 \dots \approx 130 \text{ m}.$$

Resultado: $AC \approx 130 \text{ m}$

- El ángulo de elevación de T visto desde M es el ángulo $\widehat{TMB}$ del triángulo rectángulo TBM (recto en B, porque TB es vertical y BM está en el suelo). Hace falta la longitud BM.

1. M es el punto medio de AC: $AM = \frac{129,99 \dots}{2} = 64,996 \dots$ m.
2. En el triángulo ABM conocemos $AB = 100$, $AM = 64,996 \dots$ y el ángulo comprendido $\widehat{BAM} = \widehat{BAC} = 20,2087^\circ$. Teorema del coseno:

$$BM^2 = 100^2 + 64,996^2 - 2 \cdot 100 \cdot 64,996 \cdot \cos 20,2087^\circ = 2025,5 \dots$$
3. $BM = 45,005 \dots$ m.
4. En el triángulo TBM: $\tan \widehat{TMB} = \frac{TB}{BM} = \frac{25}{45,005 \dots}$.
5. $\widehat{TMB} = \tan^{-1} \left(\frac{25}{45,005 \dots} \right) = 29,05 \dots^\circ \approx 29,1^\circ$.

Resultado: ángulo de elevación $\approx 29,1^\circ$

Resultado: a) demostrado, $\widehat{BAC} \approx 20,2^\circ$; b) $\approx 2250 \text{ m}^2$; c) $\approx 130 \text{ m}$; d) $\approx 29,1^\circ$

EJERCICIO 39

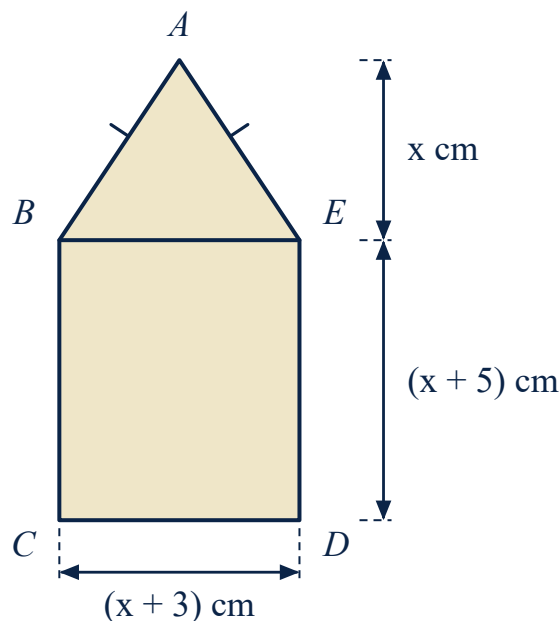
★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2017

La base de una plancha eléctrica se puede modelar como un pentágono ABCDE, donde:

BCDE es un rectángulo con lados de longitud $(x + 3)$ cm y $(x + 5)$ cm;

ABE es un triángulo isósceles, con $AB = AE$ y una altura de x cm; el área de ABCDE es 222 cm^2 .



- (i) Escriba una ecuación para el área de ABCDE usando la información anterior.
- (ii) Muestre que la ecuación del apartado (a) (i) se simplifica a $3x^2 + 19x - 414 = 0$.
- b) Encuentre la longitud de CD.
- c) Muestre que el ángulo $\widehat{BAE} = 67,4^\circ$, aproximado a un lugar decimal.

La cinta aislante se envuelve alrededor del perímetro de la base de la plancha, ABCDE.

- d) Encuentre la longitud del perímetro de ABCDE.

F es el punto en AB tal que $BF = 8$ cm. Un elemento calefactor en la plancha corre en línea recta, de C a F.

- e) Calcule la longitud de CF.

- a) (i) El pentágono se descompone en el rectángulo BCDE y el triángulo ABE.

1. Área del rectángulo: $(x + 3)(x + 5)$.

- El triángulo ABE tiene base $BE = CD = x + 3$ (lados opuestos del rectángulo) y altura x , así que su área es $\frac{1}{2}(x + 3)x$.
- El área total es 222 cm^2 :

$$222 = (x + 3)(x + 5) + \frac{1}{2}(x + 3)x.$$

Resultado: $222 = (x + 3)(x + 5) + \frac{1}{2}(x + 3)x$

(ii) Simplificamos.

- Desarrollamos: $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 8x + 15$ y $\frac{1}{2}(x + 3)x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$.
- Sustituimos: $222 = x^2 + 8x + 15 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$.
- Multiplicamos por 2: $444 = 2x^2 + 16x + 30 + x^2 + 3x$.
- Pasamos todo a un lado: $3x^2 + 19x - 414 = 0$.

Queda demostrado.

b) El lado CD mide $x + 3$, así que resolvemos la ecuación.

- Con la CPG (o con la fórmula, $x = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 + 4 \cdot 3 \cdot 414}}{6} = \frac{-19 \pm 73}{6}$): $x = 9$ o $x = -\frac{46}{3}$.
- Una longitud no puede ser negativa, así que $x = 9$.
- $CD = x + 3 = 12 \text{ cm}$.

Resultado: $CD = 12 \text{ cm}$

c) Con $x = 9$, $BE = 12 \text{ cm}$ y la altura del triángulo es 9 cm .

- La altura desde A divide el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos iguales. La mitad del ángulo en A, $\frac{\widehat{BAE}}{2}$, tiene cateto opuesto $\frac{BE}{2} = 6 \text{ cm}$ y cateto adyacente 9 cm .
- $\tan \frac{\widehat{BAE}}{2} = \frac{6}{9}$.
- $\frac{\widehat{BAE}}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{6}{9}\right) = 33,690 \dots^\circ$.
- $\widehat{BAE} = 2 \cdot 33,690 \dots^\circ = 67,380 \dots^\circ \approx 67,4^\circ$.

Queda demostrado.

d) El perímetro consta de AB , BC , CD , DE y EA .

- $BC = DE = x + 5 = 14 \text{ cm}$ y $CD = 12 \text{ cm}$.
- En el triángulo rectángulo formado por la altura, $AB = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117} = 10,8166 \dots \text{ cm}$, y por ser isósceles $AE = AB$.
- Perímetro: $14 + 12 + 14 + 2 \cdot 10,8166 \dots = 61,633 \dots \approx 61,6 \text{ cm}$.

Resultado: perímetro $\approx 61,6 \text{ cm}$

e) Aplicamos el teorema del coseno en el triángulo BCF, con $BC = 14 \text{ cm}$, $BF = 8 \text{ cm}$ y el ángulo $\widehat{CBF}$.

- El ángulo $\widehat{ABE}$ del triángulo isósceles vale $\frac{180^\circ - 67,380^\circ}{2} = 56,310^\circ$.
- El ángulo $\widehat{EBC}$ del rectángulo es 90° , y F está sobre AB, al otro lado de BE respecto de C, así que $\widehat{CBF} = 90^\circ + 56,310^\circ = 146,310^\circ$.
- $CF^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8 \cdot \cos 146,310^\circ = 260 + 186,67 \dots = 446,67 \dots$
- $CF = \sqrt{446,67 \dots} = 21,13 \dots \approx 21,1 \text{ cm}$.

Resultado: $CF \approx 21,1 \text{ cm}$

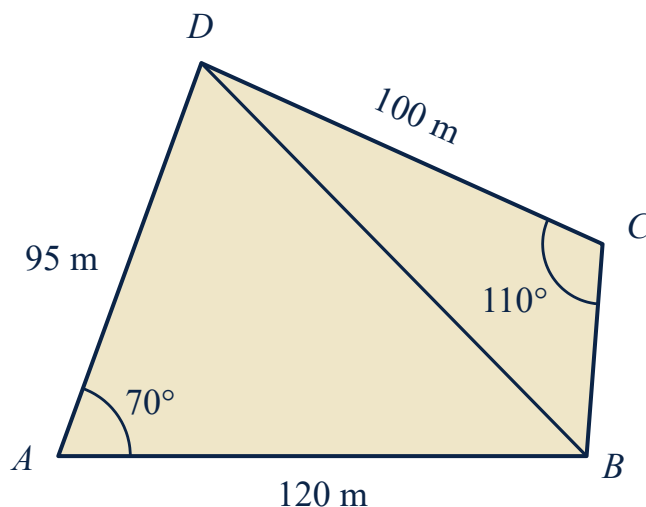
Resultado: a) (i) $222 = (x + 3)(x + 5) + \frac{1}{2}(x + 3)x$, (ii) demostrado; b) 12 cm ; c) demostrado; d) $\approx 61,6 \text{ cm}$; e) $\approx 21,1 \text{ cm}$

EJERCICIO 40

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2017

El cuadrilátero ABCD representa un parque, donde $AB = 120$ m, $AD = 95$ m y $DC = 100$ m. El ángulo DAB mide 70° y el ángulo DCB mide 110° . Toda esta información se muestra en la siguiente figura.



Hay un camino recto que atraviesa el parque y que une los puntos B y D.

- Halle la longitud del camino BD.
- Muestre que el ángulo DBC mide $48,7^\circ$, redondeando a tres cifras significativas.
- Halle el área del parque.

Se va a construir un camino nuevo, CE, de modo tal que E sea el punto de BD que está más próximo a C.

- Halle la longitud del camino CE.

La zona del parque representada por el triángulo DCE se va a utilizar para una carrera solidaria. Para ello, se va a marcar un recorrido que vaya por los lados de esta zona.

- Calcule la longitud total de dicho recorrido.

Trabajamos con la calculadora en grados.

- En el triángulo ABD conocemos $AB = 120$ m, $AD = 95$ m y el ángulo comprendido $\widehat{DAB} = 70^\circ$. Usamos el teorema del coseno.

$$1. BD^2 = 120^2 + 95^2 - 2 \cdot 120 \cdot 95 \cdot \cos 70^\circ = 15\,626,9 \dots$$

$$2. BD = \sqrt{15\,626,9 \dots} = 125,007 \dots \approx 125 \text{ m.}$$

Resultado: $BD \approx 125$ m

- En el triángulo BCD conocemos $DC = 100$ m (opuesto al ángulo $\widehat{DBC}$), $BD = 125,007 \dots$ m (opuesto al ángulo $\widehat{DCB} = 110^\circ$). Teorema del seno:

$$1. \frac{\sin \widehat{DBC}}{100} = \frac{\sin 110^\circ}{125,007 \dots}$$

$$2. \sin \widehat{DBC} = \frac{100 \sin 110^\circ}{125,007 \dots} = 0,75170 \dots$$

$$3. \widehat{DBC} = \sin^{-1}(0,75170 \dots) = 48,738 \dots^\circ \approx 48,7^\circ.$$

4. El ángulo en C ya es obtuso (110°), así que $\widehat{DBC}$ debe ser agudo: no hay otra solución.

Queda demostrado.

- El parque se divide en los triángulos ABD y BCD.

1. Triángulo ABD: $\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 95 \cdot \sin 70^\circ = 5356,2 \dots \text{m}^2$.
2. En el triángulo BCD: $\widehat{BDC} = 180^\circ - 110^\circ - 48,738 \dots^\circ = 21,261 \dots^\circ$.
3. Triángulo BCD, con los lados DC y BD y el ángulo comprendido en D: $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 125,007 \dots \cdot \sin 21,261 \dots^\circ = 2266,5 \dots \text{m}^2$.
4. Área total: $5356,2 \dots + 2266,5 \dots = 7622,8 \dots \approx 7620 \text{ m}^2$.

Resultado: área $\approx 7620 \text{ m}^2$

d) E es el pie de la perpendicular desde C a la recta BD, así que $CE \perp BD$ y el triángulo DCE es rectángulo en E.

1. En el triángulo DCE: $\sin \widehat{CDE} = \frac{CE}{DC}$, con $\widehat{CDE} = \widehat{BDC} = 21,261 \dots^\circ$.
2. $CE = 100 \sin 21,261 \dots^\circ = 36,26 \dots \approx 36,3 \text{ m}$.

Resultado: $CE \approx 36,3 \text{ m}$

e) El recorrido es el perímetro del triángulo DCE: $DC + CE + DE$.

1. $DC = 100 \text{ m}$ y $CE = 36,26 \dots \text{m}$.
2. $DE = DC \cos 21,261 \dots^\circ = 93,19 \dots \text{m}$.
3. Longitud: $100 + 36,26 \dots + 93,19 \dots = 229,45 \dots \approx 229 \text{ m}$.

Resultado: $\approx 229 \text{ m}$

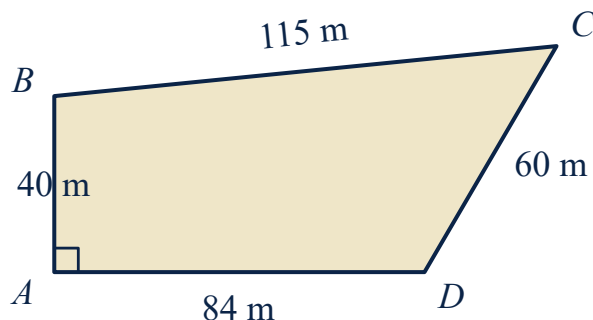
Resultado: a) $\approx 125 \text{ m}$; b) demostrado; c) $\approx 7620 \text{ m}^2$; d) $\approx 36,3 \text{ m}$; e) $\approx 229 \text{ m}$

EJERCICIO 41

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2017

Abdallah es el propietario de un terreno que está cerca del río Nilo y que tiene forma de cuadrilátero ABCD. La longitud de los lados es $AB = 40$ m, $BC = 115$ m, $CD = 60$ m, $AD = 84$ m y el ángulo $\hat{B}AD = 90^\circ$. Esta información se muestra en el diagrama.



- Muestre que $BD = 93$ m redondeando al número entero de metros más próximo.
- Calcule el ángulo $\hat{B}CD$.
- Halle el área de ABCD.

La fórmula que utilizaban los antiguos egipcios para estimar el área de un cuadrilátero ABCD era

$$\text{área} = \frac{(AB + CD)(AD + BC)}{4}.$$

Abdallah utiliza esta fórmula para estimar el área de su terreno.

- Calcule la estimación del área que obtiene Abdallah.
 - Halle el porcentaje de error en la estimación de Abdallah.

a) El triángulo ABD es rectángulo en A , así que aplicamos el teorema de Pitágoras.

- $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 40^2 + 84^2 = 1600 + 7056 = 8656$.
- $BD = \sqrt{8656} \approx 93,04$ m.
- Redondeando al metro entero, $BD = 93$ m.

Queda demostrado.

b) En el triángulo BCD conocemos los tres lados: $BC = 115$ m, $CD = 60$ m y $BD = \sqrt{8656}$ m. Usamos el teorema del coseno para el ángulo $\hat{B}CD$ (opuesto a BD). Conservamos $BD^2 = 8656$ sin redondear.

- $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \hat{B}CD$.
- Despejamos: $\cos \hat{B}CD = \frac{115^2 + 60^2 - 8656}{2 \cdot 115 \cdot 60} = \frac{13225 + 3600 - 8656}{13800} = \frac{8169}{13800} \approx 0,5920$.
- Con la CPG en grados: $\hat{B}CD = \cos^{-1}(0,5920) \approx 53,70^\circ$.

Resultado: $\hat{B}CD \approx 53,7^\circ$

c) Dividimos el cuadrilátero con la diagonal BD en dos triángulos y sumamos sus áreas.

- Área de ABD (rectángulo en A): $\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 84 = 1680$ m².
- Área de BCD , con dos lados y el ángulo comprendido: $\frac{1}{2} \cdot 115 \cdot 60 \cdot \sin 53,704^\circ \approx 3450 \cdot 0,8060 \approx 2780,6$ m².

3. Área total: $1680 + 2780,6 \approx 4460,6 \text{ m}^2$.

Resultado: área de $ABCD \approx 4460 \text{ m}^2$

d) (i) Aplicamos la fórmula egipcia:

$$\text{área} = \frac{(AB + CD)(AD + BC)}{4} = \frac{(40 + 60)(84 + 115)}{4} = \frac{100 \cdot 199}{4} = 4975 \text{ m}^2.$$

(ii) El valor real es $4460,6 \text{ m}^2$ y la estimación es 4975 m^2 .

1. Error absoluto: $4975 - 4460,6 = 514,4 \text{ m}^2$.

2. Porcentaje de error: $\frac{514,4}{4460,6} \cdot 100 \approx 11,5 \%$.

Resultado: d) (i) 4975 m^2 ; (ii) $11,5 \%$

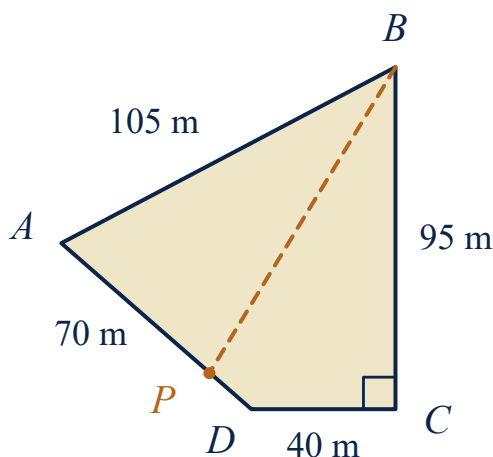
Resultado: a) $BD \approx 93 \text{ m}$ (demostrado); b) $\hat{BCD} \approx 53,7^\circ$; c) $\approx 4460 \text{ m}^2$; d) (i) 4975 m^2 , (ii) $11,5 \%$

EJERCICIO 42

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2016

Un agricultor posee un terreno que tiene la forma del cuadrilátero $ABCD$. $AB = 105 \text{ m}$, $BC = 95 \text{ m}$, $CD = 40 \text{ m}$, $DA = 70 \text{ m}$ y el ángulo $DCB = 90^\circ$.



El agricultor quiere dividir el terreno en dos partes que tengan el mismo área. Para ello construye una valla que va en línea recta desde el punto B al punto P que pertenece a AD , de modo que el área de PAB sea igual al área de $PBCD$.

Calcule

- la longitud de BD ;
- el valor del ángulo DAB ;
- el área del triángulo ABD ;
- el área del cuadrilátero $ABCD$;
- la longitud de AP ;
- la longitud de la valla, BP .

a) El triángulo BCD es rectángulo en C , con catetos $BC = 95 \text{ m}$ y $CD = 40 \text{ m}$. Aplicamos Pitágoras.

$$1. BD^2 = 95^2 + 40^2 = 9025 + 1600 = 10625.$$

$$2. BD = \sqrt{10625} \approx 103,08 \text{ m}.$$

Resultado: $BD \approx 103 \text{ m}$

b) En el triángulo ABD conocemos los tres lados: $AB = 105$ m, $AD = 70$ m y $BD = \sqrt{10625}$ m. El ángulo $\hat{DAB}$ es opuesto a BD . Teorema del coseno:

$$1. BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \hat{DAB}.$$

$$2. \cos \hat{DAB} = \frac{105^2 + 70^2 - 10625}{2 \cdot 105 \cdot 70} = \frac{11025 + 4900 - 10625}{14700} = \frac{5300}{14700} \approx 0,3605.$$

$$3. \hat{DAB} = \cos^{-1}(0,3605) \approx 68,87^\circ.$$

Resultado: $\hat{DAB} \approx 68,9^\circ$

c) Área del triángulo ABD con dos lados y el ángulo comprendido (A):

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \hat{DAB} = \frac{1}{2} \cdot 105 \cdot 70 \cdot \sin 68,87^\circ.$$

$$2. = 3675 \cdot 0,9327 \approx 3428 \text{ m}^2.$$

Resultado: área de $ABD \approx 3430 \text{ m}^2$

d) Sumamos las áreas de ABD y BCD .

$$1. \text{Área de } BCD \text{ (rectángulo en } C): \frac{1}{2} \cdot 95 \cdot 40 = 1900 \text{ m}^2.$$

$$2. \text{Área de } ABCD: 3428 + 1900 \approx 5328 \text{ m}^2.$$

Resultado: área de $ABCD \approx 5330 \text{ m}^2$

e) La valla BP divide el terreno en dos partes iguales, así que el área de PAB es la mitad del área total.

$$1. \text{Área de } PAB = \frac{5328}{2} = 2664 \text{ m}^2.$$

$$2. P \text{ está sobre } AD, \text{ de modo que el ángulo de } PAB \text{ en } A \text{ es } \hat{DAB} = 68,87^\circ. \text{ Entonces } \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AP \cdot \sin 68,87^\circ = 2664.$$

$$3. AP = \frac{2 \cdot 2664}{105 \cdot \sin 68,87^\circ} = \frac{5328}{97,93} \approx 54,4 \text{ m}.$$

$$4. \text{Comprobación: } 54,4 < 70 = AD, \text{ así que } P \text{ está de verdad dentro del lado } AD.$$

Resultado: $AP \approx 54,4 \text{ m}$

f) En el triángulo PAB conocemos $AB = 105$ m, $AP = 54,40$ m y el ángulo $68,87^\circ$ entre ellos. Teorema del coseno:

$$1. BP^2 = 105^2 + 54,40^2 - 2 \cdot 105 \cdot 54,40 \cdot \cos 68,87^\circ.$$

$$2. BP^2 \approx 11025 + 2959 - 4118 \approx 9866.$$

$$3. BP \approx 99,3 \text{ m}.$$

Resultado: $BP \approx 99,3 \text{ m}$

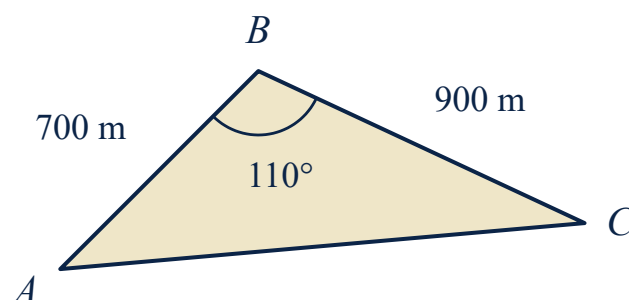
Resultado: a) $BD \approx 103$ m; b) $\hat{DAB} \approx 68,9^\circ$; c) $\approx 3430 \text{ m}^2$; d) $\approx 5330 \text{ m}^2$; e) $AP \approx 54,4$ m; f) $BP \approx 99,3$ m

EJERCICIO 43

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2015

Una regata tiene lugar alrededor de un recorrido triangular, ABC, con $AB = 700$ m, $BC = 900$ m y ángulo $ABC = 110^\circ$. La carrera comienza y termina en el punto A.



- a) Calcule la longitud total del recorrido.

Se estima que el barco más rápido de la regata puede viajar a una velocidad media de $1,5 \text{ m s}^{-1}$.

- b) Calcule una estimación del tiempo ganador de la carrera. Dé su respuesta al minuto más cercano.
c) Encuentre el tamaño del ángulo ACB.

Para cumplir con las normas de seguridad, el área dentro del recorrido triangular debe mantenerse libre de otros barcos, y la distancia más corta de B a AC debe ser superior a 375 metros.

- d) Calcule el área que debe mantenerse libre de barcos.
e) Determinar, dando una razón, si el recorrido cumple con las normas de seguridad.

La carrera está filmada desde un helicóptero, H, que vuela verticalmente sobre el punto A. El ángulo de elevación de H desde B es 15° .

- f) Calcule la altura vertical, AH, del helicóptero sobre A.
g) Calcule la distancia máxima posible desde el helicóptero a un barco en el recorrido.

a) El recorrido es $AB + BC + CA$. Calculamos AC con el teorema del coseno en ABC (ángulo comprendido 110° en B).

1. $AC^2 = 700^2 + 900^2 - 2 \cdot 700 \cdot 900 \cdot \cos 110^\circ$.
2. $AC^2 = 490000 + 810000 - 1260000 \cdot (-0,3420) \approx 1\,730\,900$.
3. $AC \approx 1315,7$ m.
4. Longitud total: $700 + 900 + 1315,7 \approx 2915,7$ m.

Resultado: longitud del recorrido ≈ 2920 m

b) Tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$.

1. $t = \frac{2915,7}{1,5} \approx 1943,8$ s.
2. En minutos: $\frac{1943,8}{60} \approx 32,4$ min.
3. Al minuto más cercano: 32 min.

Resultado: $t \approx 32$ minutos

c) Teorema del seno en ABC : el lado $AB = 700$ m es opuesto al ángulo $\hat{ACB}$ y AC es opuesto al ángulo de 110° .

1. $\frac{\sin \hat{A}CB}{700} = \frac{\sin 110^\circ}{1315,7}$.
2. $\sin \hat{A}CB = \frac{700 \cdot 0,9397}{1315,7} \approx 0,4998$.
3. $\hat{A}CB = \sin^{-1}(0,4998) \approx 30,0^\circ$.
4. La solución $180^\circ - 30,0^\circ = 150^\circ$ no es posible, porque con el ángulo de 110° sumaría más de 180° .

Resultado: $\hat{A}CB \approx 30,0^\circ$

d) Área del triángulo con dos lados y el ángulo comprendido (B):

1. Área = $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 110^\circ = \frac{1}{2} \cdot 700 \cdot 900 \cdot \sin 110^\circ$.
2. $= 315000 \cdot 0,9397 \approx 296\,003 \text{ m}^2$.

Resultado: área $\approx 296\,000 \text{ m}^2$

e) La distancia más corta de B a AC es la altura h del triángulo sobre la base AC .

1. Área = $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot h$, así que $h = \frac{2 \cdot 296\,003}{1315,7} \approx 450 \text{ m}$.
2. Como $450 > 375$, el recorrido **sí** cumple la norma de seguridad.

Resultado: sí cumple, porque la distancia mínima de B a AC es $\approx 450 \text{ m}$, mayor que 375 m

f) H está sobre A en vertical, así que el triángulo HAB es rectángulo en A , con $AB = 700 \text{ m}$ (cateto adyacente al ángulo de elevación 15° en B) y AH el cateto opuesto.

1. $\tan 15^\circ = \frac{AH}{700}$.
2. $AH = 700 \cdot \tan 15^\circ \approx 187,6 \text{ m}$.

Resultado: $AH \approx 188 \text{ m}$

g) La distancia desde H a un punto del recorrido es mayor cuanto más lejos está ese punto de A , porque H está sobre A . El punto del recorrido más alejado de A es C , ya que $AC \approx 1315,7 \text{ m}$ es mayor que $AB = 700 \text{ m}$. Por tanto la distancia máxima es HC , en el triángulo HAC rectángulo en A :

1. $HC^2 = AH^2 + AC^2 = 187,6^2 + 1315,7^2 \approx 35\,180 + 1\,730\,900 \approx 1\,766\,100$.
2. $HC \approx 1329 \text{ m}$.

Resultado: $HC \approx 1330 \text{ m}$

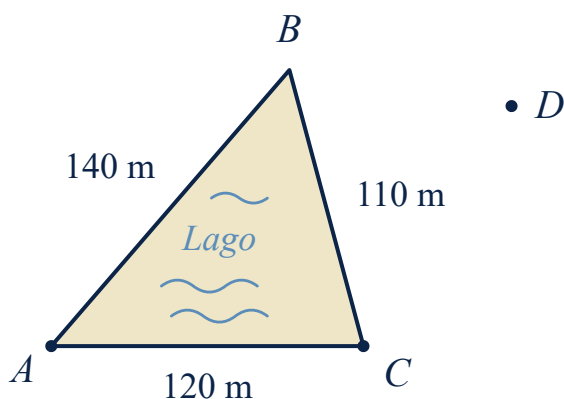
Resultado: a) $\approx 2920 \text{ m}$; b) 32 minutos; c) $30,0^\circ$; d) $\approx 296\,000 \text{ m}^2$; e) sí cumple ($\approx 450 \text{ m} > 375 \text{ m}$); f) $AH \approx 188 \text{ m}$; g) $HC \approx 1330 \text{ m}$

EJERCICIO 44

★★★ Difícil

IB · P2 T20 Noviembre 2015

Un lago tiene forma de triángulo, ABC , donde AB , BC y CA son caminos que rodean al lago. Las longitudes de estos caminos son las siguientes: $AB = 140$ m, $BC = 110$ m y $CA = 120$ m.



a) Halle el valor del ángulo $B\hat{A}C$.

b) Halle el área del lago.

Una granja se encuentra a una cierta distancia del lago, en el punto D , de modo tal que el ángulo $D\hat{B}C$ mide 80° y el ángulo $B\hat{C}D$ mide 40° . La granjera ha construido dos caminos rectos que van desde la granja, D , hasta los puntos B y C , respectivamente.

c) Muestre que el ángulo $B\hat{D}C = 60^\circ$.

d) Halle la distancia que hay entre C y D .

El tractor de la granjera se encuentra en el punto A , en la orilla opuesta del lago. La granjera va andando por los caminos rectos que salen de su granja, D , y que, rodeando el lago, llegan hasta el tractor en A .

e) Muestre que la ruta más corta posible que puede elegir la granjera pasa por el punto B .

Con la CPG en modo **grados**.

a) Conocemos los tres lados del triángulo ABC . Para hallar $B\hat{A}C$ usamos el teorema del coseno; el lado opuesto a A es $BC = 110$.

$$1. BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos B\hat{A}C.$$

$$2. \cos B\hat{A}C = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{140^2 + 120^2 - 110^2}{2 \cdot 140 \cdot 120} = \frac{21\,900}{33\,600} \approx 0,6518.$$

$$3. B\hat{A}C = \arccos(0,6518) \approx 49,32^\circ.$$

Resultado: $B\hat{A}C \approx 49,3^\circ$

b) El área del lago es el área del triángulo ABC . Usamos $\text{Área} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin B\hat{A}C$.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 140 \cdot 120 \cdot \sin 49,32^\circ.$$

$$2. \text{Área} \approx 8400 \cdot 0,7584 \approx 6371 \text{ m}^2.$$

Resultado: área $\approx 6370 \text{ m}^2$

c) En el triángulo BDC los tres ángulos suman 180° .

$$1. B\hat{D}C = 180^\circ - D\hat{B}C - B\hat{C}D = 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ.$$

Queda demostrado.

d) En el triángulo BDC conocemos $BC = 110$ m y los tres ángulos. El lado CD es opuesto al ángulo $\hat{DBC} = 80^\circ$, y BC es opuesto al ángulo $\hat{BDC} = 60^\circ$. Usamos el teorema del seno.

$$1. \frac{CD}{\sin 80^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}.$$

$$2. CD = \frac{110 \cdot \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 125,09 \text{ m.}$$

Resultado: $CD \approx 125$ m

e) Hay dos rutas para llegar de D a A rodeando el lago: pasando por B ($D \rightarrow B \rightarrow A$) o pasando por C ($D \rightarrow C \rightarrow A$). Calculamos ambas.

1. Necesitamos DB . Es opuesto al ángulo $\hat{BCD} = 40^\circ$: $DB = \frac{110 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 81,64$ m.
2. Ruta por B : $DB + BA \approx 81,64 + 140 = 221,64$ m.
3. Ruta por C : $DC + CA \approx 125,09 + 120 = 245,09$ m.
4. Como $221,64 < 245,09$, la ruta por B es la más corta.

Queda demostrado.

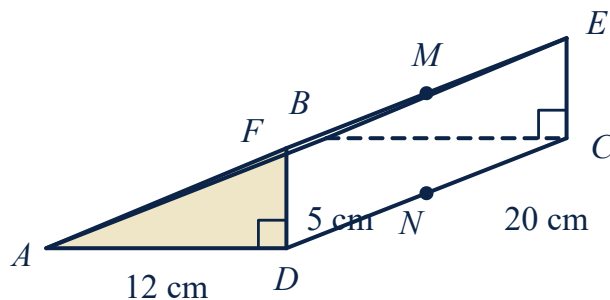
Resultado: a) $\hat{BAC} \approx 49,3^\circ$; b) área $\approx 6370 \text{ m}^2$; c) $\hat{BDC} = 60^\circ$; d) $CD \approx 125$ m; e) por B : 221,6 m frente a 245,1 m por C

EJERCICIO 45

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2003

En la figura dada a continuación, $ABEF$, $ABCD$ y $CDFE$ son todos rectángulos. $AD = 12$ cm, $DC = 20$ cm y $DF = 5$ cm. M es el punto medio de EF y N es el punto medio de CD .



- Calcule
 - la longitud de AF ;
 - la longitud de AM .
- Calcule el ángulo entre AM y la cara $ABCD$.

Con la CPG en modo **grados**.

Primero justificamos los ángulos rectos. DF es perpendicular a AD (ángulo recto marcado en D) y a DC (porque $CDFE$ es un rectángulo). Además DC es perpendicular a AD (porque $ABCD$ es un rectángulo). Por tanto, DC es perpendicular al plano ADF y DF es perpendicular al plano $ABCD$.

a) i) El triángulo ADF es rectángulo en D , con $AD = 12$ y $DF = 5$. Usamos Pitágoras.

$$1. AF^2 = AD^2 + DF^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169.$$

$$2. AF = \sqrt{169} = 13 \text{ cm.}$$

Resultado: $AF = 13 \text{ cm}$

ii) FE es paralelo a DC y mide 20 cm. Como M es el punto medio de EF , $FM = 10 \text{ cm}$. Como DC es perpendicular al plano ADF , FE también lo es, y por tanto $AF \perp FM$. El triángulo AFM es rectángulo en F .

$$1. AM^2 = AF^2 + FM^2 = 13^2 + 10^2 = 169 + 100 = 269.$$

$$2. AM = \sqrt{269} \approx 16,40 \text{ cm.}$$

Resultado: $AM \approx 16,4 \text{ cm}$

b) Buscamos el ángulo entre la recta AM y el plano $ABCD$: es el ángulo entre AM y su proyección sobre ese plano.

1. DF es perpendicular al plano $ABCD$. En el rectángulo $CDFE$, M está sobre FE y N sobre DC , a 10 cm de D y F respectivamente. Por tanto MN es paralelo a FD , es perpendicular al plano $ABCD$ y $MN = DF = 5 \text{ cm}$.

2. La proyección de AM sobre el plano es AN . El triángulo AND es rectángulo en D , con $AD = 12$ y $DN = 10$: $AN = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} \approx 15,62 \text{ cm}$.

3. El triángulo ANM es rectángulo en N . El ángulo buscado es $\hat{MAN}$ y $\tan \hat{MAN} = \frac{MN}{AN} = \frac{5}{\sqrt{244}}$.

$$4. \hat{MAN} = \arctan \frac{5}{15,62} \approx 17,76^\circ.$$

Comprobación con el seno: $\sin \hat{MAN} = \frac{MN}{AM} = \frac{5}{\sqrt{269}} \approx 0,3049$, que da $17,8^\circ$.

Resultado: $\approx 17,8^\circ$

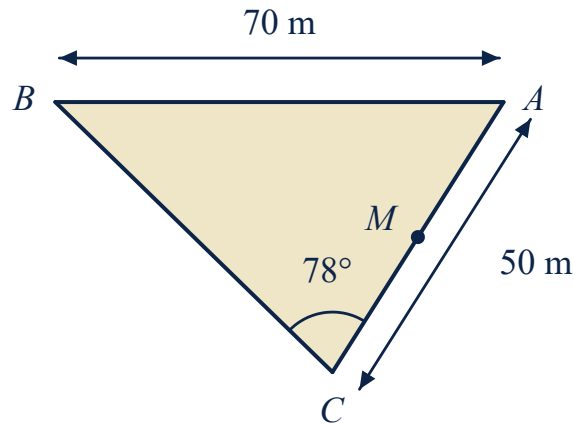
Resultado: a) i) $AF = 13 \text{ cm}$, ii) $AM \approx 16,4 \text{ cm}$; b) $\approx 17,8^\circ$

EJERCICIO 46

★★★ Difícil

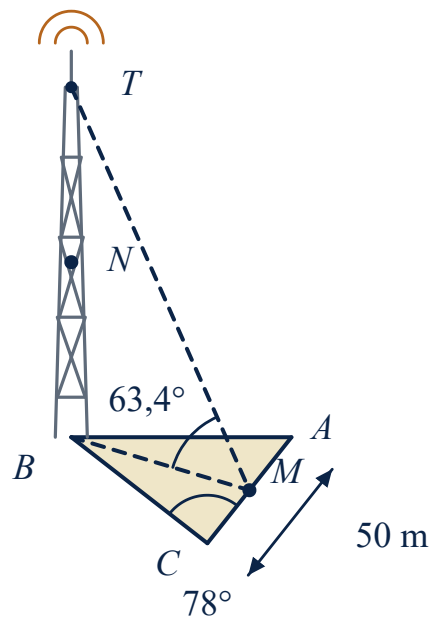
IB · P2 TZ1 Mayo 2014

ABC es un campo triangular sobre terreno horizontal. Las longitudes de AB y AC son 70 m y 50 m respectivamente. El tamaño del ángulo BCA es 78° .



- a) Calcular el tamaño del ángulo ABC .
 - b) Encuentre el área del campo triangular.
- M es el punto medio de AC .
- c) Calcule la longitud de BM .

Un mástil de teléfono móvil vertical, TB , está construido junto al campo con su base en B . El ángulo de elevación de T desde M es $63,4^\circ$. N es el punto medio del mástil.



- d) Calcule el ángulo de elevación de N a partir de M .

Con la CPG en modo **grados**.

a) En el triángulo ABC , el lado $AB = 70$ es opuesto al ángulo $C = 78^\circ$ y el lado $AC = 50$ es opuesto al ángulo B . Usamos el teorema del seno.

$$1. \frac{\sin \hat{ABC}}{AC} = \frac{\sin 78^\circ}{AB}.$$

$$2. \sin \hat{A}BC = \frac{50 \cdot \sin 78^\circ}{70} \approx 0,6987.$$

$$3. \hat{A}BC = \arcsin(0,6987) \approx 44,32^\circ.$$

4. No hay caso ambiguo: como $AC < AB$, el ángulo opuesto a AC es menor que el opuesto a AB (78°), así que $\hat{A}BC$ es agudo.

Resultado: $\hat{A}BC \approx 44,3^\circ$

b) Necesitamos el ángulo comprendido entre AB y AC .

$$1. \hat{B}AC = 180^\circ - 78^\circ - 44,32^\circ = 57,68^\circ.$$

$$2. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \hat{B}AC = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 50 \cdot \sin 57,68^\circ.$$

$$3. \text{Área} \approx 1750 \cdot 0,8451 \approx 1479 \text{ m}^2.$$

Resultado: área $\approx 1480 \text{ m}^2$

c) M es el punto medio de AC , así que $AM = 25 \text{ m}$. En el triángulo ABM conocemos $AB = 70$, $AM = 25$ y el ángulo comprendido $\hat{B}AM = \hat{B}AC = 57,68^\circ$. Usamos el teorema del coseno.

$$1. BM^2 = 70^2 + 25^2 - 2 \cdot 70 \cdot 25 \cdot \cos 57,68^\circ.$$

$$2. BM^2 \approx 4900 + 625 - 3500 \cdot 0,5348 \approx 3653.$$

$$3. BM = \sqrt{3653} \approx 60,4 \text{ m}.$$

Resultado: $BM \approx 60,4 \text{ m}$

d) El mástil TB es vertical, así que el triángulo TBM es rectángulo en B , con el ángulo de elevación de T desde M igual a $63,4^\circ$.

$$1. \text{Altura del mástil: } TB = BM \cdot \tan 63,4^\circ \approx 60,45 \cdot 1,9969 \approx 120,7 \text{ m}.$$

$$2. N \text{ es el punto medio de } TB: NB = \frac{TB}{2} \approx 60,35 \text{ m}.$$

$$3. \text{El ángulo de elevación de } N \text{ desde } M \text{ es } \tan \theta = \frac{NB}{BM} = \frac{60,35}{60,45} \approx 0,9985.$$

$$4. \theta = \arctan(0,9985) \approx 44,96^\circ.$$

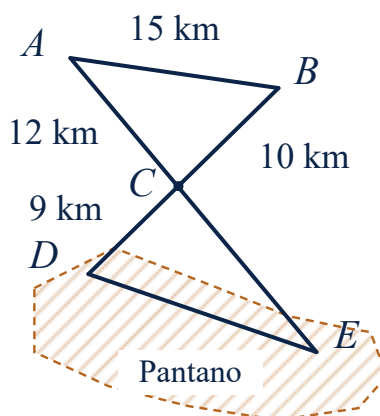
Resultado: ángulo de elevación de $N \approx 45,0^\circ$

EJERCICIO 47

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2014

Un topógrafo tiene que calcular el área de un terreno triangular, DCE. Las longitudes de CE y DE no se pueden medir directamente porque atraviesan un pantano. AB, DE, BD y AE son caminos rectos. Los caminos AE y DB se cruzan en el punto C. La longitud de AB es de 15 km, BC es de 10 km, AC es de 12 km y DC es de 9 km. El siguiente diagrama muestra la información del topógrafo.



- a) i) Encuentre el tamaño del ángulo ACB .
(ii) Muestre que el tamaño del ángulo DCE es $85,5^\circ$, aproximado con un decimal.
El topógrafo mide el tamaño del ángulo CDE para que sea el doble que el del ángulo DEC .
b) i) Usando el ángulo $DCE = 85,5^\circ$, encuentre el tamaño del ángulo DEC .
(ii) Encuentre la longitud de DE .
c) Calcule el área del triángulo DEC .

a) i) Los tres lados del triángulo ABC son $AB = 15$, $BC = 10$ y $AC = 12$. Usamos el teorema del coseno para el ángulo C , que está frente a AB .

$$1. AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cos C.$$

$$2. \cos C = \frac{12^2 + 10^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot 10} = \frac{19}{240}.$$

$$3. C = \cos^{-1}\left(\frac{19}{240}\right) \approx 85,459^\circ \approx 85,5^\circ.$$

Resultado: $\angle ACB \approx 85,5^\circ$

(ii) Las rectas AE y BD se cruzan en C , así que $\angle DCE$ y $\angle ACB$ son ángulos opuestos por el vértice y miden lo mismo.

$$1. \angle DCE = \angle ACB \approx 85,459^\circ.$$

$$2. \text{Con un decimal: } 85,5^\circ.$$

Queda demostrado.

b) i) En el triángulo DEC los ángulos suman 180° , con $\angle CDE = 2\angle DEC$. Llamamos $x = \angle DEC$.

$$1. x + 2x + 85,5^\circ = 180^\circ.$$

$$2. 3x = 94,5^\circ, \text{ luego } x = 31,5^\circ.$$

Resultado: $\angle DEC = 31,5^\circ$

(ii) El lado DE está frente al ángulo $C = 85,5^\circ$ y el lado $CD = 9$ está frente al ángulo $E = 31,5^\circ$. Usamos el teorema del seno.

$$1. \frac{DE}{\sin 85,5^\circ} = \frac{9}{\sin 31,5^\circ}.$$

$$2. DE = \frac{9 \sin 85,5^\circ}{\sin 31,5^\circ} \approx 17,2 \text{ km}.$$

Resultado: $DE \approx 17,2 \text{ km}$

c) El ángulo D mide $2 \cdot 31,5^\circ = 63^\circ$. Necesitamos dos lados y el ángulo comprendido: usamos $CD = 9$, $DE = 17,17$ (sin redondear) y el ángulo $D = 63^\circ$.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin D = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 17,1718 \cdot \sin 63^\circ.$$

$$2. \text{Área} \approx 68,9 \text{ km}^2.$$

Resultado: área $\approx 68,9 \text{ km}^2$

Resultado: a) i) $85,5^\circ$; ii) demostrado; b) i) $31,5^\circ$; ii) $17,2 \text{ km}$; c) $68,9 \text{ km}^2$

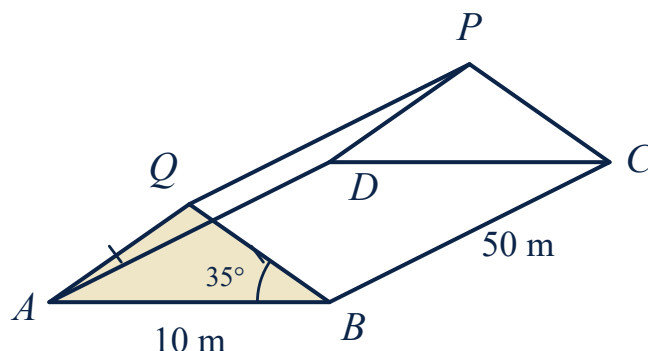
EJERCICIO 48

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2013

Un invernadero $ABCDPQ$ se construye sobre una base de hormigón rectangular $ABCD$ y está hecho de vidrio. Su forma es un prisma recto, con sección transversal, ABQ , triángulo isósceles.

La longitud de BC es de 50 m, la longitud de AB es de 10 m y el tamaño del ángulo QBA es de 35° .



- Escriba el tamaño del ángulo AQB .
- Calcule la longitud de AQ .
- Calcule la longitud de AC .
- Muestre que la longitud de CQ es 50,37 m, redondeado a 4 cifras significativas.
- Encuentre el tamaño del ángulo AQC .
- Calcule el área total del vidrio necesaria para construir
 - las dos caras rectangulares del invernadero;
 - las dos caras triangulares del invernadero.

El costo del vidrio utilizado para construir el invernadero es de 4,80 USD por metro cuadrado.

- Calcule el costo del vidrio para hacer el invernadero.

Dé su respuesta correcta a los 100 USD más cercanos.

- El triángulo ABQ es isósceles con $AQ = BQ$, así que los ángulos en A y en B son iguales: $\angle QAB = \angle QBA = 35^\circ$.

$$1. \angle AQB = 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ.$$

Resultado: $\angle AQB = 110^\circ$

b) Usamos el teorema del seno en el triángulo ABQ . El lado AQ está frente al ángulo $B = 35^\circ$ y el lado $AB = 10$ está frente al ángulo $Q = 110^\circ$.

$$1. \frac{AQ}{\sin 35^\circ} = \frac{10}{\sin 110^\circ}.$$

$$2. AQ = \frac{10 \sin 35^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 6,10 \text{ m}.$$

Resultado: $AQ \approx 6,10 \text{ m}$

c) $ABCD$ es un rectángulo, así que el triángulo ABC es rectángulo en B . Usamos Pitágoras.

$$1. AC^2 = AB^2 + BC^2 = 10^2 + 50^2 = 2600.$$

$$2. AC = \sqrt{2600} \approx 51,0 \text{ m}.$$

Resultado: $AC \approx 51,0 \text{ m}$

d) El prisma es recto, así que BC es perpendicular a la cara ABQ . Por tanto, $BC \perp BQ$ y el triángulo QBC es rectángulo en B , con $QB = AQ$ (triángulo isósceles) y $BC = 50$.

$$1. CQ^2 = QB^2 + BC^2 = 6,1039^2 + 50^2 = 37,257 + 2500 = 2537,26.$$

$$2. CQ = \sqrt{2537,26} \approx 50,37 \text{ m (4 cifras significativas)}.$$

Queda demostrado.

e) Conocemos los tres lados del triángulo AQC : $AQ = 6,1039$, $CQ = 50,3712$ y $AC = 50,9902$. El ángulo AQC está frente a AC . Usamos el teorema del coseno.

$$1. \cos \angle AQC = \frac{AQ^2 + CQ^2 - AC^2}{2 \cdot AQ \cdot CQ} = \frac{37,257 + 2537,26 - 2600}{2 \cdot 6,1039 \cdot 50,3712} \approx \frac{-25,48}{615,0} \approx -0,0414.$$

$$2. \angle AQC = \cos^{-1}(-0,0414) \approx 92,4^\circ.$$

Resultado: $\angle AQC \approx 92,4^\circ$

f) i) Las dos caras rectangulares son $AQPD$ y $QBCP$, cada una de lados $AQ = QB = 6,1039 \text{ m}$ y 50 m .

$$1. \text{Área de una cara: } 6,1039 \cdot 50 = 305,19 \text{ m}^2.$$

$$2. \text{Las dos caras: } 2 \cdot 305,19 \approx 610 \text{ m}^2.$$

Resultado: $\approx 610 \text{ m}^2$

(ii) Las dos caras triangulares son iguales a ABQ . Área de ABQ : $\frac{1}{2} AQ \cdot QB \cdot \sin 110^\circ$.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 6,1039 \cdot 6,1039 \cdot \sin 110^\circ \approx 17,51 \text{ m}^2.$$

$$2. \text{Las dos caras: } 2 \cdot 17,51 \approx 35,0 \text{ m}^2.$$

Resultado: $\approx 35,0 \text{ m}^2$

g) Superficie total de vidrio: $610,39 + 35,01 = 645,40 \text{ m}^2$.

$$1. \text{Coste: } 645,40 \cdot 4,80 \approx 3098 \text{ USD}.$$

$$2. \text{Redondeando a los 100 USD más cercanos: } 3100 \text{ USD}.$$

Resultado: 3100 USD

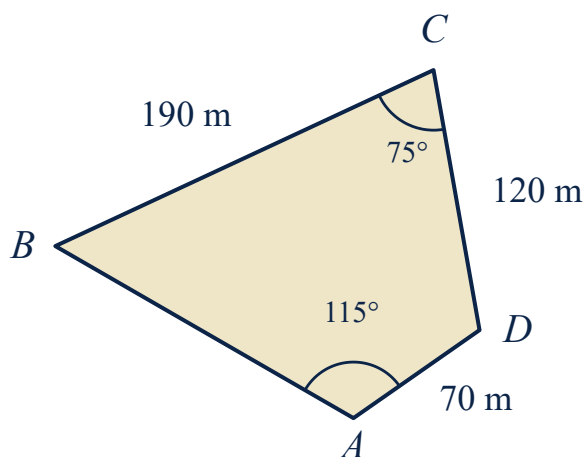
Resultado: a) 110° ; b) $6,10 \text{ m}$; c) $51,0 \text{ m}$; d) demostrado; e) $92,4^\circ$; f) i) 610 m^2 , ii) $35,0 \text{ m}^2$; g) 3100 USD

EJERCICIO 49

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2011

Pauline es propietaria de un terreno $ABCD$ en forma de cuadrilátero. La longitud de BC es de 190 m, la longitud de CD es de 120 m, la longitud de AD es de 70 m, el tamaño de el ángulo BCD es de 75° y el tamaño del ángulo BAD es de 115° .



Pauline decide vender la porción triangular de terreno ABD . Ella primero construye una valla recta de B a D .

a) Calcule la longitud de la valla.

La valla cuesta 17 USD por metro construido.

b) Calcule el costo de construir la valla. Dé su respuesta aproximada al USD más próximo.

c) Muestre que el tamaño del ángulo ABD es $18,8^\circ$, redondeado a tres cifras significativas.

d) Calcule el área del triángulo ABD .

Ella vende el terreno a 120 dólares el metro cuadrado.

e) Calcule el valor de la tierra que vende Pauline. Dé su respuesta aproximada al dólar estadounidense más cercano.

Pauline invierte 300.000 USD de la venta del terreno en un banco que paga interés compuesto anualmente.

f) Encuentre la tasa de interés que paga el banco para que la inversión se duplique su valor en 15 años.

Trabajamos con la calculadora en grados.

a) En el triángulo BCD conocemos $BC = 190$, $CD = 120$ y el ángulo comprendido $\hat{BCD} = 75^\circ$. Usamos el teorema del coseno.

$$1. BD^2 = 190^2 + 120^2 - 2 \cdot 190 \cdot 120 \cdot \cos 75^\circ.$$

$$2. BD^2 = 36\,100 + 14\,400 - 45\,600 \cdot 0,258819 = 38\,697,8.$$

$$3. BD = \sqrt{38\,697,8} = 196,72 \dots \text{ m.}$$

Resultado: la valla mide $BD \approx 197$ m

b) El coste es la longitud por el precio por metro.

$$1. \text{Coste} = 17 \cdot 196,72 \dots = 3344,2 \dots \text{ USD.}$$

2. Redondeamos al USD más próximo.

Resultado: 3344 USD

c) En el triángulo ABD conocemos $AD = 70$, $BD = 196,72 \dots$ y el ángulo $\hat{BAD} = 115^\circ$, opuesto al lado BD . Usamos el teorema del seno.

$$1. \frac{\sin \hat{A}BD}{AD} = \frac{\sin \hat{B}AD}{BD}, \text{ es decir, } \frac{\sin \hat{A}BD}{70} = \frac{\sin 115^\circ}{196,72 \dots}$$

$$2. \text{Despejamos: } \sin \hat{A}BD = \frac{70 \cdot \sin 115^\circ}{196,72 \dots} = 0,32250 \dots$$

3. $\hat{A}BD = \sin^{-1}(0,32250 \dots) = 18,81 \dots^\circ$. No hay caso ambiguo: el ángulo en A ya es obtuso, así que $\hat{A}BD$ debe ser agudo.

4. Redondeado a tres cifras significativas: $18,8^\circ$.

Queda demostrado.

d) Necesitamos el ángulo $\hat{A}DB$ y el teorema del área con dos lados y el ángulo comprendido.

1. Los ángulos de un triángulo suman 180° : $\hat{A}DB = 180^\circ - 115^\circ - 18,814 \dots^\circ = 46,186 \dots^\circ$.

2. Los lados que forman ese ángulo son $AD = 70$ y $BD = 196,72 \dots$.

$$3. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD \cdot \sin \hat{A}DB = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot 196,72 \dots \cdot \sin(46,186 \dots^\circ) = 4968,2 \dots \text{ m}^2.$$

Resultado: área $\approx 4970 \text{ m}^2$

e) El valor es el área por el precio por metro cuadrado.

1. Valor = $120 \cdot 4968,2 \dots = 596\,187, \dots \text{ USD}$.

2. Redondeamos al dólar más cercano.

Resultado: 596 187 USD

f) Con interés compuesto anual a tasa $r\%$, el capital tras 15 años es $300\,000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{15}$. Debe valer el doble, 600 000.

$$1. \text{Planteamos: } 300\,000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{15} = 600\,000.$$

$$2. \text{Dividimos entre } 300\,000: \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{15} = 2.$$

$$3. \text{Extraemos la raíz } 15: 1 + \frac{r}{100} = 2^{1/15} = 1,04729 \dots$$

$$4. \text{Por tanto } r = 4,729 \dots$$

Comprobación: $300\,000 \cdot 1,0473^{15} \approx 600\,000$.

Resultado: $r \approx 4,73\%$ anual

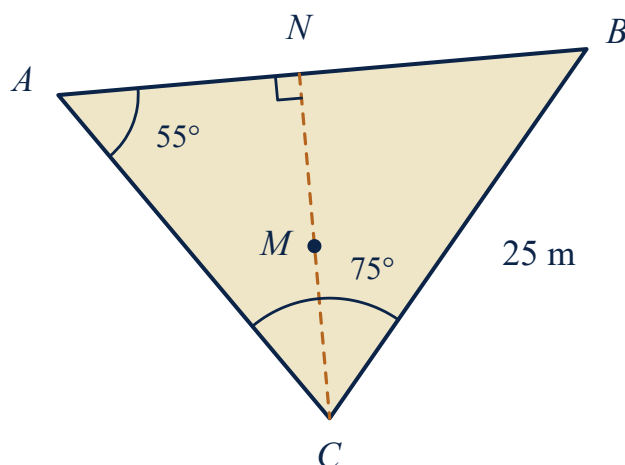
Resultado: a) $BD \approx 197 \text{ m}$; b) 3344 USD; c) demostrado; d) $\approx 4970 \text{ m}^2$; e) 596 187 USD; f) $r \approx 4,73\%$

EJERCICIO 50

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2011

El diagrama representa un pequeño campo triangular, ABC , con $BC = 25$ m, ángulo $BAC = 55^\circ$ y ángulo $ACB = 75^\circ$.



a) Escriba el tamaño del ángulo ABC .

b) Calcule la longitud de AC .

c) Calcule el área del campo ABC .

N es el punto en AB tal que CN es perpendicular a AB . M es el punto medio de CN .

d) Calcule la longitud de NM .

Una cabra está atada a un extremo de una cuerda de 7 m de longitud. El otro extremo de la cuerda es el punto M .

e) Decida si la cabra puede alcanzar el punto P , el punto medio de CB . Justifique su respuesta.

Trabajamos con la calculadora en grados.

a) Los ángulos de un triángulo suman 180° .

$$1. \hat{ABC} = 180^\circ - 55^\circ - 75^\circ = 50^\circ.$$

Resultado: $\hat{ABC} = 50^\circ$

b) Conocemos el lado $BC = 25$, opuesto al ángulo $A = 55^\circ$, y buscamos AC , opuesto al ángulo $B = 50^\circ$. Usamos el teorema del seno.

$$1. \frac{AC}{\sin 50^\circ} = \frac{BC}{\sin 55^\circ} = \frac{25}{\sin 55^\circ}.$$

$$2. AC = \frac{25 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 55^\circ} = 23,38 \dots \text{ m.}$$

Resultado: $AC \approx 23,4$ m

c) Conocemos AC , BC y el ángulo comprendido $\hat{ACB} = 75^\circ$.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin 75^\circ.$$

$$2. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 23,38 \dots \cdot 25 \cdot \sin 75^\circ = 282,3 \dots \text{ m}^2.$$

Resultado: área ≈ 282 m²

d) El triángulo ANC es rectángulo en N , con hipotenusa AC y ángulo $A = 55^\circ$. El cateto CN es opuesto a A .

$$1. CN = AC \cdot \sin 55^\circ = 23,38 \dots \cdot \sin 55^\circ = 19,15 \dots \text{ m.}$$

2. M es el punto medio de CN , luego $NM = \frac{CN}{2} = 9,57 \dots \text{ m}$.

Resultado: $NM \approx 9,58 \text{ m}$

e) La cabra alcanza los puntos cuya distancia a M es como mucho 7 m. Calculamos MP .

1. P es el punto medio de CB y M es el punto medio de CN . En el triángulo CNB , el segmento MP une los puntos medios de dos lados, así que es paralelo a NB y mide la mitad: $MP = \frac{NB}{2}$.
2. El triángulo NBC es rectángulo en N , con hipotenusa $BC = 25$ y ángulo $B = 50^\circ$: $NB = 25 \cos 50^\circ = 16,07 \dots \text{ m}$.
3. $MP = \frac{16,07 \dots}{2} = 8,03 \dots \text{ m}$.
4. Como $8,03 \dots > 7$, la cuerda no llega.

Resultado: no, la cabra no puede alcanzar P , porque $MP \approx 8,03 \text{ m}$ es mayor que la cuerda de 7 m.

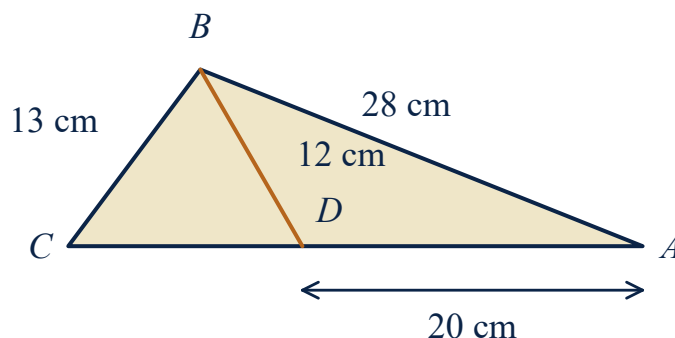
Resultado: a) 50° ; b) $AC \approx 23,4 \text{ m}$; c) $\approx 282 \text{ m}^2$; d) $NM \approx 9,58 \text{ m}$; e) no puede alcanzar P ($MP \approx 8,03 \text{ m} > 7 \text{ m}$)

EJERCICIO 51

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2011

El diagrama muestra el triángulo ABC en el que $AB = 28 \text{ cm}$, $BC = 13 \text{ cm}$, $BD = 12 \text{ cm}$ y $AD = 20 \text{ cm}$.



- a) Calcule el tamaño del ángulo ADB .
- b) Encuentre el área del triángulo ADB .
- c) Calcule el tamaño del ángulo BCD .
- d) Muestre que el triángulo ABC no tiene un ángulo recto.

Trabajamos con la calculadora en grados.

a) En el triángulo ABD conocemos los tres lados: $AB = 28$, $BD = 12$, $AD = 20$. El ángulo $\hat{A}DB$ es opuesto a AB . Usamos el teorema del coseno.

1. $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \hat{A}DB$.
2. $28^2 = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos \hat{A}DB$, es decir, $784 = 544 - 480 \cos \hat{A}DB$.
3. $\cos \hat{A}DB = \frac{544 - 784}{480} = -0,5$.
4. $\hat{A}DB = \cos^{-1}(-0,5) = 120^\circ$.

Resultado: $\hat{A}DB = 120^\circ$

b) Conocemos $AD = 20$, $BD = 12$ y el ángulo comprendido $\hat{ADB} = 120^\circ$.

$$1. \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD \cdot \sin \hat{ADB} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12 \cdot \sin 120^\circ.$$

$$2. \text{Área} = 120 \cdot 0,8660 \dots = 103,92 \dots \text{ cm}^2.$$

Resultado: área de $ADB \approx 104 \text{ cm}^2$

c) C , D y A están alineados, así que $\hat{BDC}$ y $\hat{ADB}$ son suplementarios.

$$1. \hat{BDC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

$$2. \text{En el triángulo } BCD, \text{ el teorema del seno da } \frac{\sin \hat{BCD}}{BD} = \frac{\sin \hat{BDC}}{BC}, \text{ es decir, } \frac{\sin \hat{BCD}}{12} = \frac{\sin 60^\circ}{13}.$$

$$3. \sin \hat{BCD} = \frac{12 \cdot \sin 60^\circ}{13} = 0,79941 \dots$$

$$4. \hat{BCD} = \sin^{-1}(0,79941 \dots) = 53,07 \dots^\circ. \text{ Es agudo, porque } BD < BC \text{ implica que el ángulo opuesto a } BD \text{ es menor que el opuesto a } BC (60^\circ).$$

Resultado: $\hat{BCD} \approx 53,1^\circ$

d) Tomamos el lado más largo de ABC , que es $CA = CD + 20$, y comprobamos si se cumple el teorema de Pitágoras. Si el triángulo tuviera un ángulo recto, sería el opuesto al lado más largo, es decir, el ángulo en B .

$$1. \text{Hallamos } CD \text{ con el teorema del coseno en } BCD \text{ (ángulo en } D \text{ de } 60^\circ): 13^2 = 12^2 + CD^2 - 2 \cdot 12 \cdot CD \cdot \cos 60^\circ.$$

$$2. \text{Queda } 169 = 144 + CD^2 - 12CD, \text{ es decir, } CD^2 - 12CD - 25 = 0.$$

$$3. \text{La solución positiva es } CD = 6 + \sqrt{61} = 13,81 \dots \text{ cm}.$$

$$4. \text{Entonces } CA = 13,81 \dots + 20 = 33,81 \dots \text{ cm y } CA^2 = 1143,1 \dots$$

$$5. \text{Por otro lado, } AB^2 + BC^2 = 28^2 + 13^2 = 784 + 169 = 953.$$

$$6. \text{Como } 1143,1 \dots \neq 953, \text{ no se cumple Pitágoras, y el ángulo en } B \text{ no es recto. Los otros dos ángulos son agudos } (\hat{BCD} \approx 53,1^\circ \text{ y } \hat{BAD} = \sin^{-1}\left(\frac{12 \sin 120^\circ}{28}\right) \approx 21,8^\circ), \text{ así que el triángulo } ABC \text{ no tiene ningún ángulo recto.}$$

Queda demostrado.

Resultado: a) 120° ; b) $\approx 104 \text{ cm}^2$; c) $\approx 53,1^\circ$; d) demostrado

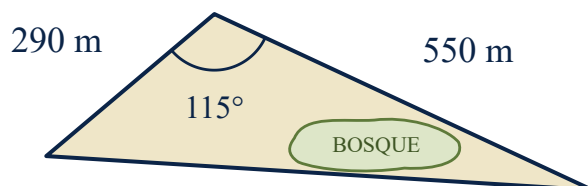
EJERCICIO 52

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2009

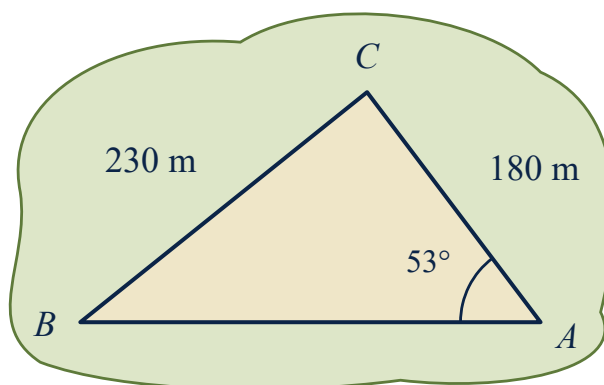
Un camino rodea a un bosque, de modo que conforma los tres lados de un triángulo.

Dos de los lados de este triángulo miden 550 m y 290 m. Estos dos lados se encuentran formando un ángulo de 115° . Se muestra a continuación la correspondiente figura.



- Calcule la longitud del tercer lado del triángulo. Dé la respuesta redondeando a la decena más próxima.
- Calcule el área delimitada por el camino que rodea el bosque.

Dentro del bosque, un segundo camino conforma los tres lados de otro triángulo, denominado ABC . El ángulo BAC es igual a 53° , AC mide 180 m y BC mide 230 m.



- Calcule el valor del ángulo $\hat{ACB}$.

a) Conocemos dos lados y el ángulo que forman, así que usamos el teorema del coseno.

- Llamamos c al tercer lado: $c^2 = 550^2 + 290^2 - 2 \cdot 550 \cdot 290 \cdot \cos 115^\circ$.
- Con la CPG en grados: $\cos 115^\circ \approx -0,4226$, luego $c^2 \approx 302\,500 + 84\,100 + 134\,812 \approx 521\,412$.
- $c \approx 722,09$ m.
- Redondeamos a la decena más próxima: 720 m.

Resultado: el tercer lado mide aproximadamente 720 m

b) El área de un triángulo con dos lados y el ángulo que forman es $\frac{1}{2}ab \sin C$.

1. $\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 550 \cdot 290 \cdot \sin 115^\circ$.
2. Con la CPG: $\text{Área} \approx 72\,278 \text{ m}^2 \approx 72\,300 \text{ m}^2$.

Resultado: $\text{área} \approx 72\,300 \text{ m}^2$

c) Conocemos $\hat{A} = 53^\circ$, el lado $BC = 230 \text{ m}$ opuesto a A y el lado $AC = 180 \text{ m}$ opuesto a B . Usamos el teorema del seno para hallar $\hat{B}$ y después $\hat{C}$.

1. $\frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{A}}{BC}$, es decir, $\sin \hat{B} = \frac{180 \cdot \sin 53^\circ}{230} \approx 0,6250$.
2. Con la CPG: $\hat{B} \approx 38,7^\circ$. La otra solución, $180^\circ - 38,7^\circ = 141,3^\circ$, no es válida: sumada a 53° superaría 180° . Como $BC > AC$, no hay caso ambiguo.
3. Los ángulos de un triángulo suman 180° : $\hat{C} = 180^\circ - 53^\circ - 38,7^\circ \approx 88,3^\circ$.

Resultado: $\hat{C} \approx 88,3^\circ$

Resultado: a) 720 m ; b) $72\,300 \text{ m}^2$; c) $88,3^\circ$

EJERCICIO 53

★★★ Difícil

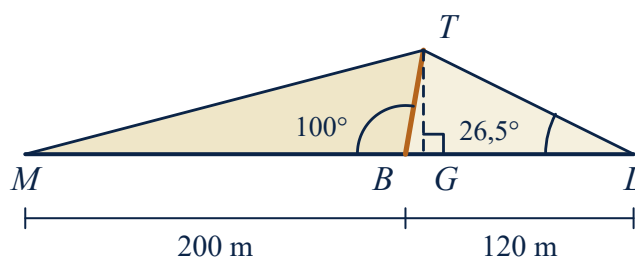
IB · P2 TZ0 Mayo 2007

Una vieja torre (BT) está inclinada 10° con respecto a la vertical (representada por la recta TG).

La base de la torre se encuentra en B, de tal manera que $\widehat{MBT} = 100^\circ$.

Leonardo está de pie en L, en terreno llano y está a una distancia de 120 m de B, del lado hacia el cual se inclina la torre.

Mide el ángulo que hay entre el suelo y la parte superior de la torre, obteniendo como resultado $\widehat{BLT} = 26,5^\circ$.



- (i) Halle el valor del ángulo $\widehat{BTL}$.
- (ii) Utilice el triángulo BTL para calcular la distancia BT desde la base, B, hasta la parte superior de la torre, T.
- b) Calcule TG, la altura en vertical de la parte superior de la torre.
- c) En este momento, Leonardo camina hasta el punto M, situado a 200 m de B al otro lado de la torre. calcule la distancia entre M y la parte superior de la torre T.

a) (i) M, B, G y L están en el suelo, en una misma recta, así que $\widehat{MBT}$ y $\widehat{TBL}$ son suplementarios.

1. $\widehat{TBL} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.
2. En el triángulo BTL los ángulos suman 180° : $\widehat{BTL} = 180^\circ - 80^\circ - 26,5^\circ = 73,5^\circ$.

Resultado: $\widehat{BTL} = 73,5^\circ$

(ii) En el triángulo BTL conocemos $BL = 120$ m (opuesto a T) y queremos BT (opuesto a L). Usamos el teorema del seno.

$$1. \frac{BT}{\sin 26,5^\circ} = \frac{BL}{\sin 73,5^\circ}.$$

$$2. BT = \frac{120 \cdot \sin 26,5^\circ}{\sin 73,5^\circ}.$$

3. Con la CPG en grados: $BT \approx 55,8$ m.

Resultado: $BT \approx 55,8$ m

b) TG es vertical, así que el triángulo BGT es rectángulo en G . La torre forma 10° con la vertical, es decir, $\hat{BTG} = 10^\circ$. Respecto a ese ángulo, TG es el cateto adyacente y BT la hipotenusa.

$$1. \cos 10^\circ = \frac{TG}{BT}, \text{ luego } TG = BT \cos 10^\circ.$$

$$2. TG = 55,843 \cdot \cos 10^\circ \approx 55,0 \text{ m}.$$

Comprobación: en B , el ángulo $\hat{TBG}$ vale $90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$, y $BT \sin 80^\circ \approx 55,0$ m da lo mismo.

Resultado: $TG \approx 55,0$ m

c) En el triángulo MBT conocemos $MB = 200$ m, $BT \approx 55,843$ m y el ángulo entre ambos, $\hat{MBT} = 100^\circ$. Usamos el teorema del coseno.

$$1. MT^2 = MB^2 + BT^2 - 2 \cdot MB \cdot BT \cos 100^\circ.$$

$$2. MT^2 = 200^2 + 55,843^2 - 2 \cdot 200 \cdot 55,843 \cdot \cos 100^\circ \approx 40\,000 + 3\,118,4 + 3\,879,0 \approx 46\,997.$$

$$3. MT \approx 216,8 \text{ m, es decir, } 217 \text{ m con 3 cifras significativas.}$$

Resultado: $MT \approx 217$ m

Resultado: a) (i) $73,5^\circ$, (ii) $BT \approx 55,8$ m; b) $TG \approx 55,0$ m; c) $MT \approx 217$ m

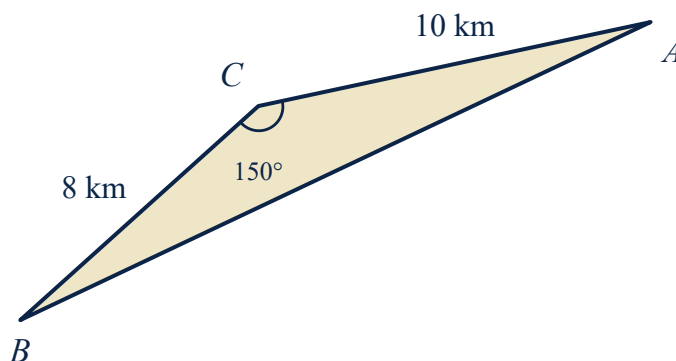
EJERCICIO 54

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2010

En la figura que se muestra a continuación, A, B y C representan tres pueblos, y los segmentos de recta AB, BC y CA representan las carreteras que los unen.

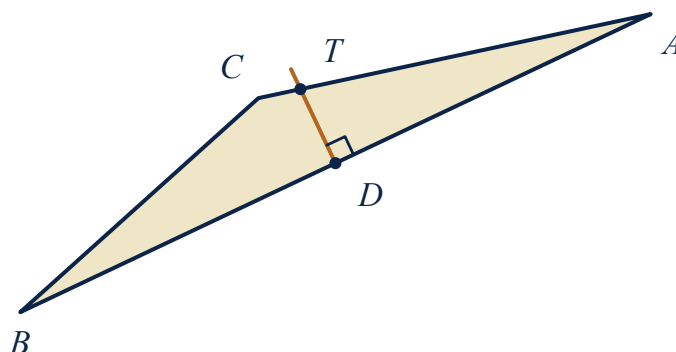
Las longitudes de AC y CB son 10 km y 8 km respectivamente, y el ángulo que forman es igual a 150°



- Halle la longitud de la carretera AB.
- Halle el valor del ángulo CAB.

El pueblo D está a medio camino entre A y B. Se construye una carretera nueva, que es perpendicular a AB y pasa por D. Sea T el punto donde esta carretera corta a AC.

Esta información se muestra en el diagrama que aparece a continuación.



- Escriba la distancia que hay entre A y D.
- Compruebe que la distancia entre D y T es igual a 2,06 km (redondeando a tres cifras significativas).

Un autobús comienza y termina su viaje en A, haciendo la ruta AD a DT y volviendo por TA.

- Halle la distancia total recorrida en este viaje.

La velocidad media del autobús en carretera mientras está en movimiento es de 70 km h^{-1} .

El autobús hace una parada de 5 minutos tanto en D como en T.

- Estime cuánto tiempo tarda el autobús en completar el viaje. Dé la respuesta redondeando al número de minutos más cercano.

a) Conocemos $AC = 10 \text{ km}$, $CB = 8 \text{ km}$ y el ángulo entre ellos, $\hat{C} = 150^\circ$. Usamos el teorema del coseno.

$$1. AB^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 150^\circ = 164 - 160 \cos 150^\circ.$$

$$2. \text{Con la CPG en grados: } \cos 150^\circ \approx -0,8660, \text{ luego } AB^2 \approx 164 + 138,56 = 302,56.$$

$$3. AB \approx 17,4 \text{ km}.$$

Resultado: $AB \approx 17,4 \text{ km}$

b) Usamos el teorema del seno con el lado $CB = 8$ km, opuesto a A , y el lado AB , opuesto a C .

$$1. \frac{\sin \hat{C}AB}{CB} = \frac{\sin 150^\circ}{AB}, \text{ es decir, } \sin \hat{C}AB = \frac{8 \cdot \sin 150^\circ}{17,394} \approx 0,2300.$$

2. Con la CPG: $\hat{C}AB \approx 13,3^\circ$. Como $\hat{C} = 150^\circ$ ya es obtuso, el ángulo A debe ser agudo: no hay otra solución.

Resultado: $\hat{C}AB \approx 13,3^\circ$

c) D es el punto medio de AB .

$$1. AD = \frac{AB}{2} = \frac{17,394}{2} \approx 8,70 \text{ km.}$$

Resultado: $AD \approx 8,70$ km

d) La carretera DT es perpendicular a AB , así que ADT es un triángulo rectángulo en D , con $\hat{A} = 13,29^\circ$. Respecto a $\hat{A}$, DT es el cateto opuesto y AD el adyacente.

$$1. \tan \hat{A} = \frac{DT}{AD}, \text{ luego } DT = AD \tan \hat{A}.$$

$$2. DT = 8,697 \cdot \tan 13,29^\circ \approx 2,055 \text{ km.}$$

3. Con 3 cifras significativas: $DT \approx 2,06$ km.

Queda comprobado.

e) El recorrido es $AD + DT + TA$. Falta TA , la hipotenusa del triángulo ADT .

$$1. \cos \hat{A} = \frac{AD}{TA}, \text{ luego } TA = \frac{8,697}{\cos 13,29^\circ} \approx 8,94 \text{ km.}$$

2. Distancia total: $8,697 + 2,055 + 8,937 \approx 19,7$ km.

Resultado: distancia total $\approx 19,7$ km

f) El tiempo se divide en el tiempo en movimiento y las dos paradas.

$$1. \text{ Tiempo en movimiento: } t = \frac{d}{v} = \frac{19,69}{70} \approx 0,2813 \text{ h} \approx 16,9 \text{ min.}$$

$$2. \text{ Paradas: } 2 \cdot 5 = 10 \text{ min.}$$

3. Tiempo total: $16,9 + 10 \approx 26,9$ min, es decir, 27 minutos.

Resultado: el viaje dura aproximadamente 27 minutos

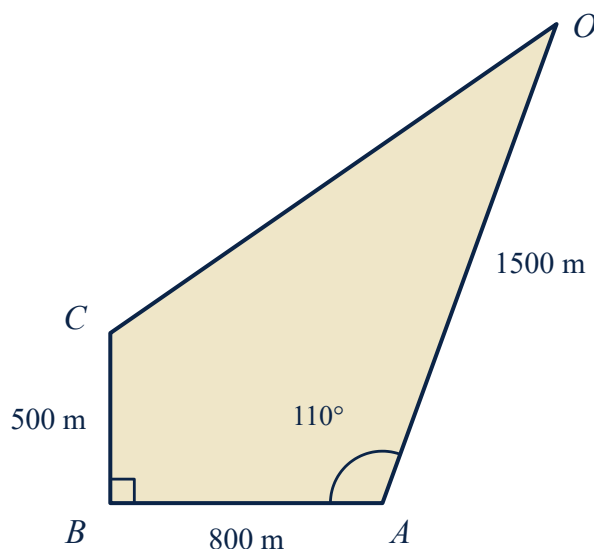
Resultado: a) 17,4 km; b) $13,3^\circ$; c) 8,70 km; d) $DT \approx 2,06$ km; e) 19,7 km; f) 27 min

EJERCICIO 55

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2004

El siguiente diagrama muestra el recorrido de una carrera. La salida y la llegada de los corredores se encuentran en el punto O.



- Compruebe que la distancia CA es, aproximada a 3 c.f., 943 m.
- Compruebe que el ángulo BCA es, aproximado a 3 c.f., $58,0^\circ$.
- (i) Calcule el ángulo CAO.
(ii) Calcule la distancia CO.
- Calcule el área encerrada por el recorrido OABC.
- González corre a una velocidad de 4 ms^{-1} . Calcule el tiempo, en minutos, que invierte en realizar el recorrido.

a) El triángulo ABC es rectángulo en B, con catetos $BA = 800 \text{ m}$ y $BC = 500 \text{ m}$. CA es la hipotenusa.

- Aplicamos el teorema de Pitágoras: $CA^2 = 800^2 + 500^2 = 640\,000 + 250\,000 = 890\,000$.
- Entonces $CA = \sqrt{890\,000} \approx 943,398 \text{ m}$.
- Con 3 cifras significativas, $CA \approx 943 \text{ m}$.

Resultado: $CA \approx 943 \text{ m}$. Queda comprobado.

b) En el triángulo rectángulo ABC, respecto del ángulo $\widehat{BCA}$ el cateto opuesto es $BA = 800$ y el adyacente es $BC = 500$.

- $\tan \widehat{BCA} = \frac{800}{500} = 1,6$.
- Con la CPG en grados: $\widehat{BCA} = \tan^{-1}(1,6) \approx 57,9946^\circ$.
- Con 3 cifras significativas, $\widehat{BCA} \approx 58,0^\circ$.

Resultado: $\widehat{BCA} \approx 58,0^\circ$. Queda comprobado.

c) (i) El ángulo $\widehat{BAO} = 110^\circ$ se descompone en $\widehat{BAC} + \widehat{CAO}$, porque la diagonal CA queda dentro de ese ángulo.

- En el triángulo rectángulo ABC: $\widehat{BAC} = 90^\circ - 57,9946^\circ = 32,0054^\circ$.
- $\widehat{CAO} = 110^\circ - 32,0054^\circ = 77,9946^\circ \approx 78,0^\circ$.

Resultado: $\widehat{CAO} \approx 78,0^\circ$

(ii) En el triángulo CAO conocemos dos lados, $CA = 943,398$ m y $AO = 1500$ m, y el ángulo entre ellos, $\widehat{CAO} = 77,9946^\circ$. Usamos el teorema del coseno.

1. $CO^2 = CA^2 + AO^2 - 2 \cdot CA \cdot AO \cdot \cos \widehat{CAO}$.
2. $CO^2 = 943,398^2 + 1500^2 - 2 \cdot 943,398 \cdot 1500 \cdot \cos 77,9946^\circ \approx 2\,551\,000$.
3. $CO \approx 1597,3$ m. Con 3 cifras significativas, $CO \approx 1600$ m.

Resultado: $CO \approx 1600$ m

d) Dividimos el recorrido por la diagonal CA en dos triángulos: ABC y CAO .

1. Triángulo ABC (rectángulo): área = $\frac{1}{2} \cdot 800 \cdot 500 = 200\,000$ m².
2. Triángulo CAO : área = $\frac{1}{2} \cdot CA \cdot AO \cdot \sin \widehat{CAO} = \frac{1}{2} \cdot 943,398 \cdot 1500 \cdot \sin 77,9946^\circ \approx 692\,073$ m².
3. Área total: $200\,000 + 692\,073 \approx 892\,073$ m².
4. Con 3 cifras significativas: $892\,000$ m².

Resultado: área $\approx 892\,000$ m²

e) El recorrido completo es el perímetro de $OABC$.

1. Longitud: $OA + AB + BC + CO = 1500 + 800 + 500 + 1597,28 \approx 4397,28$ m.
2. Tiempo: $t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{4397,28}{4} \approx 1099,3$ s.
3. En minutos: $\frac{1099,3}{60} \approx 18,3$ min.

Resultado: $t \approx 18,3$ minutos

Resultado: a) $CA \approx 943$ m; b) $\widehat{BCA} \approx 58,0^\circ$; c) (i) $\widehat{CAO} \approx 78,0^\circ$, (ii) $CO \approx 1600$ m; d) $892\,000$ m²; e) $18,3$ min

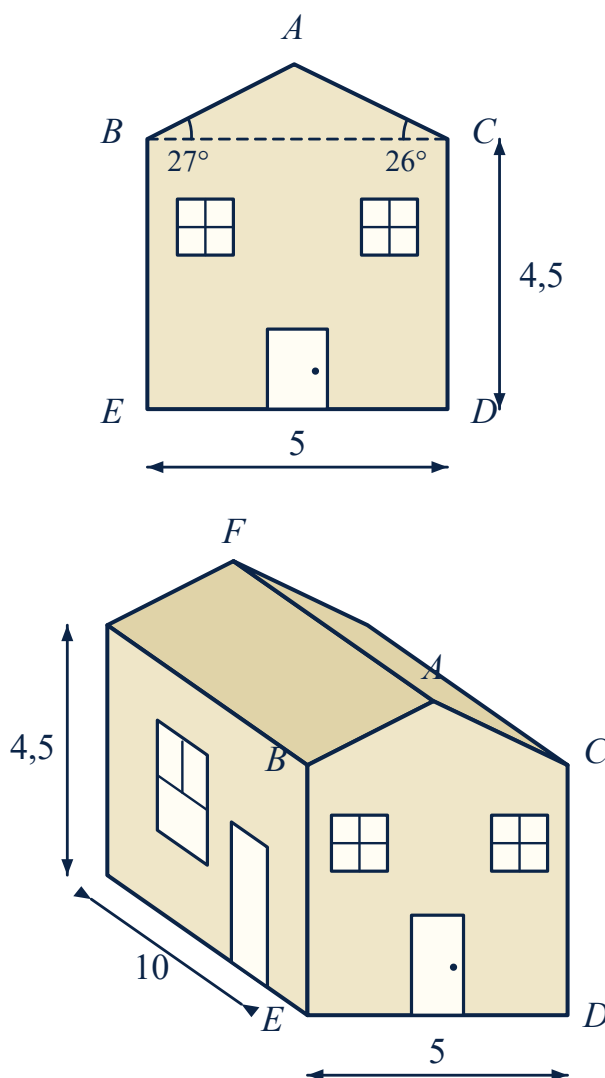
EJERCICIO 56

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2019

La casa de Olivia consta de cuatro paredes verticales y un techo inclinado hecho de dos rectángulos. La altura, CD , desde el suelo hasta la base del techo es de 4,5 m.

Los ángulos de la base del techo son $\widehat{ABC} = 27^\circ$ y $\widehat{ACB} = 26^\circ$.



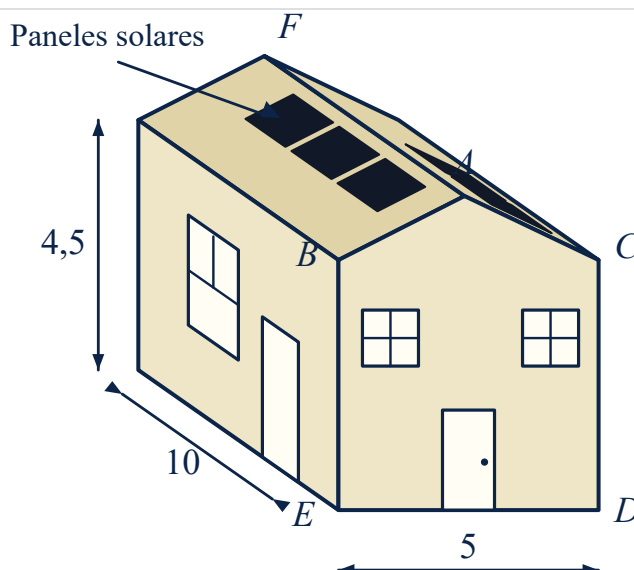
La casa tiene 10 m de largo y 5 m de ancho.

a) Encuentre la longitud AB , dando su respuesta con cuatro cifras significativas.

La longitud AC es de aproximadamente 2,84 m.

b) Encuentre el área total de los dos rectángulos que forman el techo.

Olivia decide colocar paneles solares en el techo. Los paneles solares están instalados en ambos lados del techo.



Cada panel tiene 1,6 m de largo y 0,95 m de ancho. Todos los paneles deben estar dispuestos en filas uniformes, con el borde más corto de cada panel paralelo a AB o AC. Cada panel debe tener al menos 0,3 m desde el borde del techo y la parte superior del techo, AF.

c) Encuentre el número máximo de paneles completos que se pueden instalar en todo el techo.

Olivia estima que los paneles solares cubrirán un área de 29 m².

d) Encuentre el error porcentual en su estimación.

Olivia investiga la disposición de los paneles, de modo que el borde más largo de cada panel sea paralelo a AB o AC.

e) Indique si este nuevo arreglo permitirá a Olivia instalar más paneles solares en el techo. Justifique su respuesta.

a) En el triángulo ABC conocemos $BC = 5$ m (el ancho de la casa), $\widehat{ABC} = 27^\circ$ y $\widehat{ACB} = 26^\circ$.

1. El tercer ángulo es $\widehat{BAC} = 180^\circ - 27^\circ - 26^\circ = 127^\circ$.

2. AB es el lado opuesto a $\widehat{ACB} = 26^\circ$ y BC es el opuesto a $\widehat{BAC} = 127^\circ$. Teorema del seno: $\frac{AB}{\sin 26^\circ} = \frac{5}{\sin 127^\circ}$.

3. $AB = \frac{5 \sin 26^\circ}{\sin 127^\circ} \approx 2,7445$ m.

4. Con 4 cifras significativas: $AB \approx 2,745$ m.

Resultado: $AB \approx 2,745$ m

b) Cada vertiente del techo es un rectángulo de 10 m de largo. Sus anchos son AB y AC.

1. Con el teorema del seno, $AC = \frac{5 \sin 27^\circ}{\sin 127^\circ} \approx 2,842$ m (coincide con el dato dado).

2. Área total: $10 \cdot AB + 10 \cdot AC = 10 (2,7445 + 2,8423) \approx 55,87$ m².

3. Con 3 cifras significativas: 55,9 m².

Resultado: área del techo $\approx 55,9$ m²

c) Dejamos un margen de 0,3 m en todos los bordes de cada vertiente. El borde corto del panel (0,95 m) va en la dirección de la pendiente (AB o AC) y el borde largo (1,6 m) a lo largo de los 10 m de la casa.

1. Largo disponible en cada vertiente: $10 - 2 \cdot 0,3 = 9,4$ m. Paneles por fila: $\frac{9,4}{1,6} \approx 5,875$, es decir, 5 paneles.

2. Vertiente AB : ancho disponible $2,7445 - 0,6 = 2,1445$ m. Filas: $\frac{2,1445}{0,95} \approx 2,26$, es decir, 2 filas. Paneles: $2 \cdot 5 = 10$.
3. Vertiente AC : ancho disponible $2,8423 - 0,6 = 2,2423$ m. Filas: $\frac{2,2423}{0,95} \approx 2,36$, es decir, 2 filas. Paneles: $2 \cdot 5 = 10$.
4. Total: $10 + 10 = 20$ paneles.

Resultado: 20 paneles

d) Área real cubierta por los paneles.

1. Área de un panel: $1,6 \cdot 0,95 = 1,52 \text{ m}^2$. Con 20 paneles: $20 \cdot 1,52 = 30,4 \text{ m}^2$.
2. Error porcentual: $\frac{|29 - 30,4|}{30,4} \cdot 100 = \frac{1,4}{30,4} \cdot 100 \approx 4,605\%$.
3. Con 3 cifras significativas: 4,61%.

Resultado: error $\approx 4,61\%$

e) Ahora el borde largo (1,6 m) va en la dirección de la pendiente y el corto (0,95 m) a lo largo de los 10 m.

1. Paneles por fila a lo largo: $\frac{9,4}{0,95} \approx 9,89$, es decir, 9 paneles.
2. Vertiente AB : $\frac{2,1445}{1,6} \approx 1,34$, es decir, 1 fila. Paneles: 9.
3. Vertiente AC : $\frac{2,2423}{1,6} \approx 1,40$, es decir, 1 fila. Paneles: 9.
4. Total: $9 + 9 = 18$ paneles, menos que los 20 de antes.

Resultado: No. Con el nuevo arreglo caben solo 18 paneles, menos que los 20 de la primera disposición.

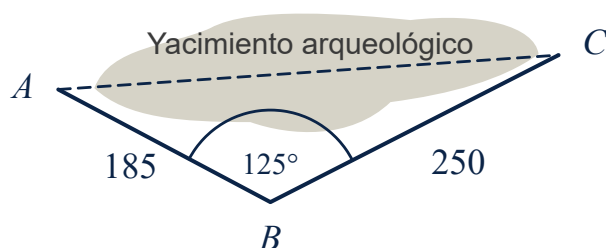
Resultado: a) 2,745 m; b) 55,9 m²; c) 20 paneles; d) 4,61%; e) no, entran 18 paneles

EJERCICIO 57

★★★ Difícil

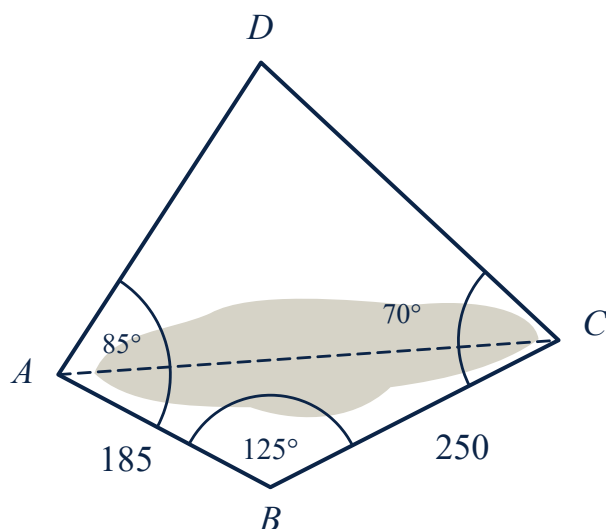
IB · P2 TZ2 Mayo 2019

Un yacimiento arqueológico se quiere hacer accesible para poder abrirlo al público. Para ello, los arqueólogos han hecho dos caminos rectos que van desde el punto A al punto B y desde el punto B al punto C, tal y como se muestra en la siguiente figura. El camino AB tiene una longitud de 185 m, el camino BC tiene una longitud de 250 m y el ángulo $\widehat{ABC}$ mide 125° .



a) Halle la distancia que hay entre A y C.

Los arqueólogos tienen previsto hacer otros dos caminos rectos: AD y DC. Para que los caminos rodeen a yacimiento, el ángulo $\widehat{BAD}$ se va a hacer igual a 85° y el ángulo $\widehat{BCD}$ se va a hacer igual a 70° , tal y como se muestra en la siguiente figura.



b) Halle el valor de

(i) el ángulo $\widehat{BAC}$;

(ii) el ángulo $\widehat{CAD}$.

c) Halle el valor del ángulo $\widehat{ACD}$.

La longitud del camino AD es igual a 287 m.

d) Halle el área de la región ABCD.

a) En el triángulo ABC conocemos dos lados, $AB = 185$ m y $BC = 250$ m, y el ángulo entre ellos, $\widehat{ABC} = 125^\circ$.

Usamos el teorema del coseno.

1. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 125^\circ$.
2. $AC^2 = 185^2 + 250^2 - 2 \cdot 185 \cdot 250 \cdot \cos 125^\circ \approx 149\,781$.
3. $AC \approx 387,0$ m. Con 3 cifras significativas, $AC \approx 387$ m.

Resultado: $AC \approx 387$ m

b) (i) Teorema del seno en ABC : el lado $BC = 250$ es opuesto a $\widehat{BAC}$ y el lado AC es opuesto a $\widehat{ABC} = 125^\circ$.

1. $\frac{\sin \widehat{BAC}}{250} = \frac{\sin 125^\circ}{387,015}$.
2. $\sin \widehat{BAC} = \frac{250 \sin 125^\circ}{387,015} \approx 0,5292$.
3. $\widehat{BAC} \approx 31,95^\circ$. Es agudo, porque $\widehat{ABC}$ ya es obtuso y no puede haber otro ángulo obtuso en el triángulo.
4. Con 3 cifras significativas, $\widehat{BAC} \approx 31,9^\circ$.

Resultado: $\widehat{BAC} \approx 31,9^\circ$

(ii) La diagonal AC está dentro del ángulo $\widehat{BAD} = 85^\circ$, luego $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$.

1. $\widehat{CAD} = 85^\circ - 31,948^\circ = 53,05^\circ$.
2. Con 3 cifras significativas, $\widehat{CAD} \approx 53,1^\circ$.

Resultado: $\widehat{CAD} \approx 53,1^\circ$

c) De forma análoga, $\widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD}$.

1. En el triángulo ABC : $\widehat{BCA} = 180^\circ - 125^\circ - 31,948^\circ = 23,052^\circ$.
2. $\widehat{ACD} = 70^\circ - 23,052^\circ = 46,95^\circ$.
3. Con 3 cifras significativas, $\widehat{ACD} \approx 46,9^\circ$.

Resultado: $\widehat{ACD} \approx 46,9^\circ$

d) Dividimos $ABCD$ por la diagonal AC en los triángulos ABC y ACD .

1. Triángulo ABC : área = $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 125^\circ = \frac{1}{2} \cdot 185 \cdot 250 \cdot \sin 125^\circ \approx 18\,943$ m².
2. Triángulo ACD : conocemos $AC = 387,015$ m, $AD = 287$ m y el ángulo entre ellos, $\widehat{CAD} = 53,05^\circ$.
área = $\frac{1}{2} \cdot 287 \cdot 387,015 \cdot \sin 53,05^\circ \approx 44\,384$ m².
3. Área total: $18\,943 + 44\,384 \approx 63\,327$ m².
4. Con 3 cifras significativas: $63\,300$ m².

Resultado: área de $ABCD \approx 63\,300$ m²

Resultado: a) 387 m; b) (i) $31,9^\circ$, (ii) $53,1^\circ$; c) $46,9^\circ$; d) $63\,300$ m²

EJERCICIO 58

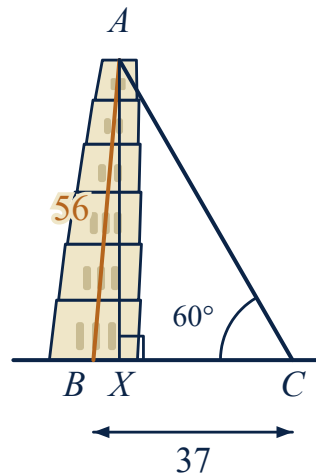
★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2018

La torre de Pisa es muy famosa en todo el mundo porque está inclinada.

Giovanni va a ver la torre y quiere averiguar qué inclinación tiene. Para ello, dibuja una figura donde se incluya el triángulo no rectángulo ABC.

En la figura de Giovanni AB mide 56 m, BC mide 37 m, y el ángulo ACB son 60° . AX indica la altura del triángulo y es perpendicular a BC.



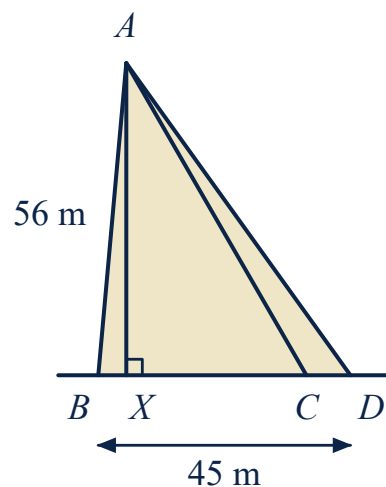
a) Utilice la figura de Giovanni para

- (i) mostrar que el ángulo $\widehat{ABC}$ —que es el ángulo que la torre, debido a su inclinación, forma con la horizontal— es igual a 85° , redondeado al grado más próximo;
- (ii) calcule la longitud de AX;
- (iii) halle la longitud de BX, que representa el desplazamiento horizontal de la torre.

La guía turística que tiene Giovanni dice que el desplazamiento horizontal real de la torre, BX, son 3,9 metros.

b) Halle el porcentaje de error de la figura de Giovanni.

Giovanni añade un punto D a su figura, de modo tal que $BD = 45$ m. Con ello se forma otro triángulo.



c) Halle el ángulo de elevación de A visto desde D.

a) (i) En el triángulo ABC conocemos $AB = 56$, $BC = 37$ y $\widehat{ACB} = 60^\circ$. El lado AB es opuesto a $\widehat{ACB}$ y el lado BC es opuesto a $\widehat{BAC}$. Teorema del seno:

1. $\frac{\sin \widehat{BAC}}{37} = \frac{\sin 60^\circ}{56}$.
2. $\sin \widehat{BAC} = \frac{37 \sin 60^\circ}{56} \approx 0,5722$.
3. $\widehat{BAC} \approx 34,9^\circ$. La otra solución, $145,1^\circ$, no es posible porque con 60° sumaría más de 180° .
4. $\widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ - 34,9^\circ = 85,1^\circ \approx 85^\circ$ al grado más próximo.

Queda demostrado.

(ii) AX es la altura sobre BC . En el triángulo rectángulo ABX , AX es el cateto opuesto al ángulo $\widehat{ABX} = 85^\circ$ y $AB = 56$ es la hipotenusa.

1. $\sin 85^\circ = \frac{AX}{56}$.
2. $AX = 56 \sin 85^\circ \approx 55,79$ m.
3. Con 3 cifras significativas: 55,8 m.

Resultado: $AX \approx 55,8$ m

(iii) En el mismo triángulo rectángulo ABX , BX es el cateto adyacente a 85° .

1. $\cos 85^\circ = \frac{BX}{56}$.
2. $BX = 56 \cos 85^\circ \approx 4,881$ m.
3. Con 3 cifras significativas: 4,88 m.

Resultado: $BX \approx 4,88$ m

b) El porcentaje de error compara el valor de Giovanni con el valor real.

1. Valor aproximado: 4,88 m. Valor real: 3,9 m.
2. Error porcentual: $\frac{|4,88 - 3,9|}{3,9} \cdot 100 = \frac{0,98}{3,9} \cdot 100 \approx 25,1\%$.

Resultado: error $\approx 25,1\%$

c) El ángulo de elevación de A visto desde D es el ángulo $\widehat{ADX}$ del triángulo rectángulo AXD .

1. $XD = BD - BX = 45 - 4,881 = 40,12$ m.
2. $\tan \widehat{ADX} = \frac{AX}{XD} = \frac{55,79}{40,12} \approx 1,391$.
3. Con la CPG en grados: $\widehat{ADX} = \tan^{-1}(1,391) \approx 54,3^\circ$.

Resultado: ángulo de elevación $\approx 54,3^\circ$

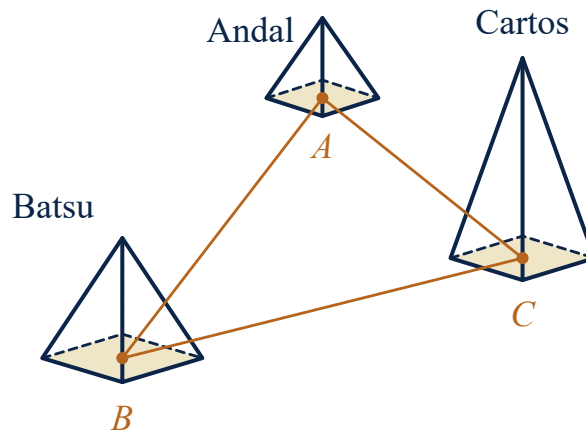
Resultado: a) (i) demostrado, (ii) 55,8 m, (iii) 4,88 m; b) 25,1%; c) $54,3^\circ$

EJERCICIO 59

★★★ Difícil

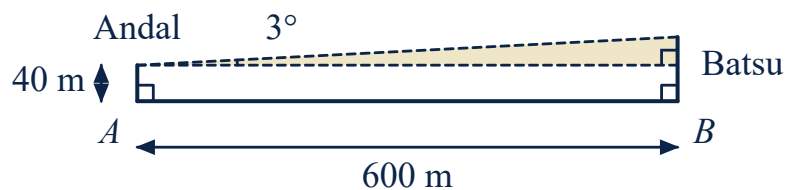
IB · P2 TZ0 Mayo 2002

Tres pirámides rectas Andal, Batsu y Cartos fueron descubiertas en la densa selva de Marhartmasol. Cada pirámide tiene una base cuadrada con centros A, B y C respectivamente.

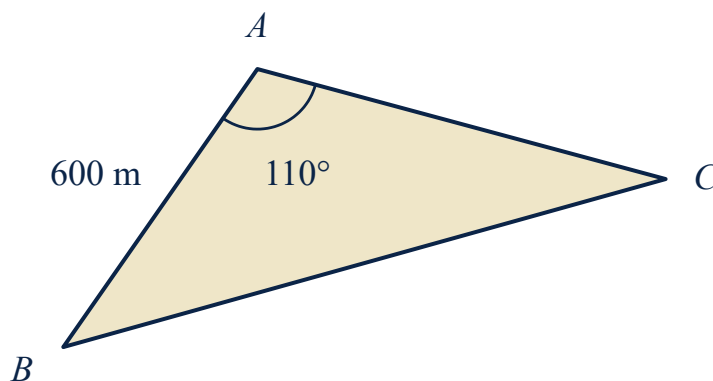


Un equipo de agrimensores fue bajado de un helicóptero a la cima de Andal para tomar medidas de la zona. Andal tiene 40 metros de altura. El ángulo de elevación desde la cima de Andal a la cima de Batsu es de 3° . La distancia horizontal desde A, el centro de la base de Andal, hacia B, el centro de la base de Batsu, está a 600 metros.

- a) Use el diagrama a continuación para encontrar la altura de Batsu.



- b) Cartos tiene 92 metros de altura y el ángulo de elevación desde la cima de Andal a la cima de Cartos es 4° .
- (i) Dibuje un diagrama similar al diagrama del apartado (a) para mostrar la relación entre Andal y Cartos.
- (ii) ¿Cuál es la distancia horizontal de A a C?
- c) El siguiente diagrama representa las medidas relativas a los centros de las bases de las pirámides. Los topógrafos determinaron que el ángulo en A era de 110° , y la distancia AB de 600 m.



- (i) ¿Cuál es la distancia entre B y C? Dé su respuesta al metro más cercano.
 (ii) ¿Cuál es el tamaño del ángulo ACB?
 (iii) ¿Cuál es el área de la tierra dentro del triángulo ABC?

a) Trazamos desde la cima de Andal una horizontal hasta la vertical de B. Se forma un triángulo rectángulo con cateto horizontal 600 m y ángulo de 3° .

1. La altura que Batsu supera a Andal es el cateto opuesto: $\tan 3^\circ = \frac{h}{600}$.
2. $h = 600 \tan 3^\circ \approx 31,44$ m.
3. Altura de Batsu: $40 + 31,44 = 71,44$ m. Con 3 cifras significativas, 71,4 m.

Resultado: altura de Batsu $\approx 71,4$ m

b) (i) Diagrama: un segmento horizontal AC en la base, de longitud x (la incógnita). En A, una vertical de 40 m (Andal) y en C, una vertical más alta de 92 m (Cartos), ambas con ángulo recto en la base. Desde la cima de Andal, una horizontal punteada hasta la vertical de C (ángulo recto) y una línea punteada hasta la cima de Cartos que forma 4° con la horizontal. El tramo vertical de la cima de Cartos por encima de la horizontal mide $92 - 40 = 52$ m.

(ii) En el triángulo rectángulo formado, el cateto vertical es 52 m y el cateto horizontal es x.

1. $\tan 4^\circ = \frac{52}{x}$.
2. $x = \frac{52}{\tan 4^\circ} \approx 743,6$ m.
3. Con 3 cifras significativas: 744 m.

Resultado: distancia horizontal de A a C ≈ 744 m

c) (i) En el triángulo ABC conocemos $AB = 600$ m, $AC = 743,63$ m y el ángulo entre ellos, $\widehat{BAC} = 110^\circ$. Teorema del coseno:

1. $BC^2 = 600^2 + 743,63^2 - 2 \cdot 600 \cdot 743,63 \cdot \cos 110^\circ \approx 1\,218\,200$.
2. $BC \approx 1103,7$ m.
3. Al metro más cercano: 1104 m.

Resultado: $BC \approx 1104$ m

(ii) Teorema del seno: el lado $AB = 600$ es opuesto a $\widehat{ACB}$ y el lado BC es opuesto a 110° .

1. $\sin \widehat{ACB} = \frac{600 \sin 110^\circ}{1103,72} \approx 0,5110$.
2. $\widehat{ACB} \approx 30,7^\circ$. Es agudo, porque el ángulo de 110° ya es obtuso.

Resultado: $\widehat{ACB} \approx 30,7^\circ$

(iii) Área con dos lados y el ángulo que forman:

$$1. \text{área} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 110^\circ = \frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 743,63 \cdot \sin 110^\circ \approx 209\,636 \text{ m}^2.$$

2. Con 3 cifras significativas: 210 000 m².

Resultado: área $\approx 210\,000 \text{ m}^2$

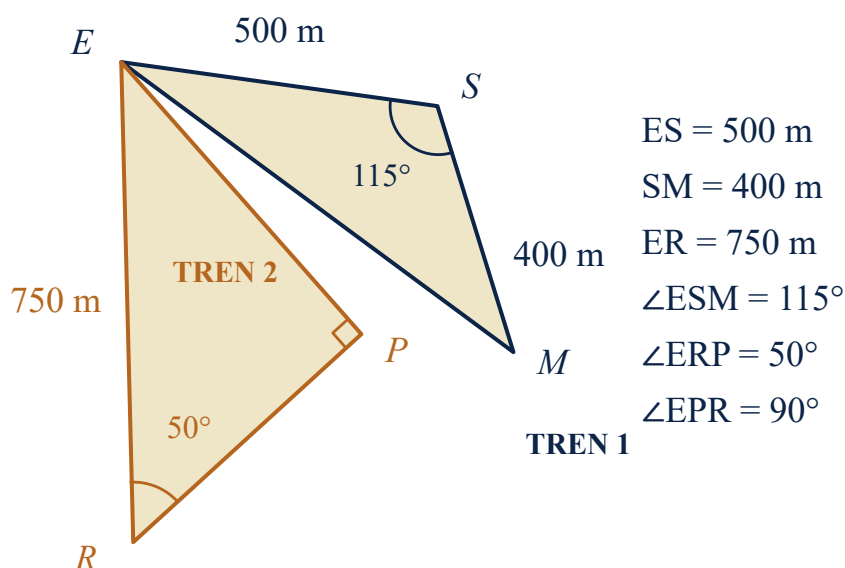
Resultado: a) 71,4 m; b) (i) diagrama, (ii) 744 m; c) (i) 1104 m, (ii) 30,7°, (iii) 210 000 m²

EJERCICIO 60

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2003

Un parque de recreo tiene dos trenes. El tren 1 lleva a los visitantes desde la entrada (E) a la piscina (S), al mini golf (M) y de vuelta a la entrada. El tren 2 lleva a los visitantes desde la entrada (E) a la zona de juegos (P), a la pista de carreras (R) y de vuelta a la entrada. Esta información se muestra en el siguiente diagrama.



- Calcule la distancia total que recorre el tren 2 en un viaje de E a P a R y a E.
- (i) Compruebe que aproximado a 3 cifras significativas, $EM = 761 \text{ m}$.
(ii) Si los trenes viajan a 2 m s^{-1} , calcule el tiempo que tarda el tren 1 en realizar un viaje de E a S a M y a E. Aproxime su respuesta al segundo más cercano.

a) En el triángulo EPR , rectángulo en P , la hipotenusa es $ER = 750 \text{ m}$ y $\widehat{ERP} = 50^\circ$.

- EP es el cateto opuesto a 50° : $EP = 750 \sin 50^\circ \approx 574,53 \text{ m}$.
- RP es el cateto adyacente a 50° : $RP = 750 \cos 50^\circ \approx 482,09 \text{ m}$.
- Distancia total del tren 2: $ER + EP + RP = 750 + 574,53 + 482,09 \approx 1806,6 \text{ m}$.
- Con 3 cifras significativas: 1810 m.

Resultado: $\approx 1810 \text{ m}$

b) (i) En el triángulo ESM conocemos $ES = 500$, $SM = 400$ y el ángulo entre ellos, $\widehat{ESM} = 115^\circ$. Teorema del coseno:

- $EM^2 = ES^2 + SM^2 - 2 \cdot ES \cdot SM \cdot \cos 115^\circ$.
- $EM^2 = 500^2 + 400^2 - 2 \cdot 500 \cdot 400 \cdot \cos 115^\circ \approx 579\,046$.
- $EM \approx 760,95 \text{ m}$. Con 3 cifras significativas, $EM \approx 761 \text{ m}$.

Resultado: $EM \approx 761 \text{ m}$. Queda comprobado.

(ii) El recorrido del tren 1 es $ES + SM + ME$.

- Distancia: $500 + 400 + 760,95 = 1660,95 \text{ m}$.

2. Tiempo: $t = \frac{1660,95}{2} \approx 830,48$ s.

3. Al segundo más cercano: 830 s.

Resultado: $t \approx 830$ s

Resultado: a) 1810 m; b) (i) $EM \approx 761$ m, (ii) 830 s

Otros problemas de trigonometría

EJERCICIO 61

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

Sea $p = \frac{\cos x + \sin y}{\sqrt{w^2 - z}}$, donde $x = 36^\circ$, $y = 18^\circ$, $w = 29$ y $z = 21,8$.

- Calcule el valor de p . Escriba el valor completo que aparece en la pantalla de su calculadora.
- Escriba la respuesta que dio en el apartado (a)
 - redondeando a dos lugares decimales,
 - redondeando a tres cifras significativas.
- Escriba la respuesta que dio en el apartado (b)(ii) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Comprobamos que la CPG está en **grados** y calculamos por partes.

1. Numerador: $\cos 36^\circ + \sin 18^\circ \approx 0,80902 + 0,30902 = 1,11803$.

2. Radicando: $w^2 - z = 29^2 - 21,8 = 841 - 21,8 = 819,2$, y $\sqrt{819,2} \approx 28,6217$.

3. Cociente: $p = \frac{1,11803}{28,6217}$.

Con la CPG, escribiendo la expresión completa de una vez (sin redondear pasos intermedios), se obtiene $p = 0,0390625$.

Resultado: $p = 0,0390625$

b)

1. (i) A dos lugares decimales: la tercera cifra decimal es 9, así que se redondea hacia arriba: 0,04.

2. (ii) A tres cifras significativas: la primera cifra significativa es el 3 (en 0,0390625), así que las tres cifras son 3, 9, 0 y la siguiente cifra es 6, que redondea hacia arriba: 0,0391.

Resultado: (i) 0,04; (ii) 0,0391

c) Escribimos 0,0391 en notación científica: movemos la coma dos lugares a la derecha para obtener 3,91, que cumple $1 \leq a < 10$. Por tanto hay que multiplicar por 10^{-2} .

$$0,0391 = 3,91 \times 10^{-2}.$$

Resultado: $3,91 \times 10^{-2}$

Resultado: a) $p = 0,0390625$; b) (i) 0,04, (ii) 0,0391; c) $3,91 \times 10^{-2}$

EJERCICIO 62

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2014

Sea $p = \frac{2 \cos x - \tan x}{\sqrt{y} - z}$.

- a) Calcule el valor de p cuando $x = 45^\circ$, $y = 8192$ y $z = 64$. Escriba el resultado de la pantalla de su calculadora.
- b) Escriba su respuesta al apartado (a)
- (i) aproximado hasta dos lugares decimales;
- (ii) aproximado a cuatro cifras significativas;
- (iii) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Con la CPG en **grados**:

- Numerador: $2 \cos 45^\circ - \tan 45^\circ = 2 \cdot 0,70711 - 1 \approx 0,41421$.
- Denominador: $\sqrt{8192} - 64 \approx 90,50967 - 64 = 26,50967$.
- Cociente (introduciendo la expresión completa de una vez): $p = \frac{0,41421 \dots}{26,50967 \dots} = 0,015625$.

Resultado: $p = 0,015625$

b)

- (i) A dos lugares decimales: 0,02 (la tercera cifra decimal es 5, se redondea hacia arriba).
- (ii) A cuatro cifras significativas: las cifras son 1, 5, 6, 2 y la siguiente es 5, así que se redondea hacia arriba: 0,01563.
- (iii) En notación científica movemos la coma dos lugares a la derecha: $1,5625 \times 10^{-2}$.

Resultado: (i) 0,02; (ii) 0,01563; (iii) $1,5625 \times 10^{-2}$

Resultado: a) $p = 0,015625$; b) (i) 0,02, (ii) 0,01563, (iii) $1,5625 \times 10^{-2}$

EJERCICIO 63

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

Sabiendo que $z = \frac{12 \cos(A)}{4q + r}$ y que $A = 60^\circ$, $q = 8$ y $r = 32$:

- a) encuentre el valor exacto de z .
- b) Escriba su respuesta al apartado (a)
- (i) aproximada hasta 2 decimales;
- (ii) redondeada a 3 cifras significativas;
- (iii) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Como $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ (valor exacto), sustituimos:

- Numerador: $12 \cos 60^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$.
- Denominador: $4q + r = 4 \cdot 8 + 32 = 64$.
- Cociente: $z = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$.

Resultado: $z = \frac{3}{32}$

b) El valor decimal es $z = 0,09375$.

- (i) A 2 decimales: la tercera cifra decimal es 3, así que se queda 0,09.
- (ii) A 3 cifras significativas: las cifras son 9, 3, 7 y la siguiente es 5, que redondea hacia arriba: 0,0938.

3. (iii) En notación científica movemos la coma dos lugares a la derecha: $9,375 \times 10^{-2}$.

Resultado: (i) 0,09; (ii) 0,0938; (iii) $9,375 \times 10^{-2}$

Resultado: a) $z = \frac{3}{32}$; b) (i) 0,09, (ii) 0,0938, (iii) $9,375 \times 10^{-2}$

EJERCICIO 64

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2004

Arthur intenta calcular un valor a partir de una fórmula trigonométrica. Utiliza la calculadora para hallar el valor de r , dado por $r = \frac{1}{\sin(86^\circ) - \sin(85^\circ)}$.

- Calcule el valor de r , expresando el resultado con tres cifras significativas.
- Arthur comete el error de redondear el valor de los dos senos a tres cifras significativas antes de efectuar la diferencia entre ellos. Halle el valor de r que Arthur ha calculado. Llame a ese valor r_A .
- Halle el porcentaje de error E en el cálculo de Arthur, dado por la fórmula $E = \frac{100(r - r_A)}{r}$.

a) Con la CPG en **grados** y sin redondear los pasos intermedios:

- $\sin 86^\circ \approx 0,997564$ y $\sin 85^\circ \approx 0,996195$.
- Diferencia: $0,997564 - 0,996195 \approx 0,001370$.
- $r = \frac{1}{0,001370 \dots} \approx 730,27$.

Resultado: $r \approx 730$

b) Arthur redondea cada seno a tres cifras significativas: $\sin 86^\circ \approx 0,998$ y $\sin 85^\circ \approx 0,996$.

- Diferencia: $0,998 - 0,996 = 0,002$.
- $r_A = \frac{1}{0,002} = 500$.

Resultado: $r_A = 500$

c) Usamos la fórmula del enunciado con el valor sin redondear de r (730,27...):

$$E = \frac{100(r - r_A)}{r} = \frac{100(730,27 - 500)}{730,27} \approx 31,5.$$

El error de Arthur es de aproximadamente el 31,5 %: redondear antes de restar dos números casi iguales hace perder mucha precisión.

Resultado: $E \approx 31,5 \%$

Resultado: a) $r \approx 730$; b) $r_A = 500$; c) $E \approx 31,5 \%$