

Progresiones aritméticas y geométricas

Progresiones para IB Aplicaciones e Interpretación NM: término general, sumas, interés simple y compuesto, depreciación, anualidades y amortización, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-aplicaciones-e-interpretacion-nm/progresiones-aritmeticas-y-geometricas.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

Este tema trata las **progresiones aritméticas y geométricas**: cómo se calcula un término cualquiera, cómo se suman los primeros términos y, sobre todo, cómo se aplican al dinero y al crecimiento: **interés simple y compuesto**, **depreciación**, **crecimiento de poblaciones**, **anualidades** y **amortización de préstamos**. En el examen de Aplicaciones e Interpretación casi todos los problemas de este tema se plantean con una situación real y se resuelven con la calculadora de pantalla gráfica (CPG), así que hay que saber qué datos se le dan y cómo interpretar su resultado.

Orden recomendado

Los apartados 1 a 3 son la base (término general y sumas). Los apartados 4 y 5 son las aplicaciones al dinero, que son las que más caen en el examen. Al final del tema tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

Sucesiones, progresiones y término n -ésimo

IDEA CLAVE

Una sucesión es una lista ordenada de números que sigue una regla. Las dos más importantes del curso son la progresión aritmética (se suma siempre lo mismo) y la geométrica (se multiplica siempre por lo mismo). Con la fórmula del término n -ésimo puedes calcular cualquier término sin escribir los anteriores, y es la base del interés, la depreciación y los préstamos.

Sucesiones y términos

Una **sucesión** es una lista de números colocados en un orden concreto. Cada número es un **término**, y se nombra con una letra y un subíndice que indica su posición: u_1 es el primer término, u_2 el segundo y u_n el que ocupa el lugar n , con $n \in \mathbb{Z}^+$. Lo que importa es la regla que enlaza los términos: si la conoces, puedes continuar la lista.

Una regla puede darse de dos maneras. Con una **fórmula del término general**, como $u_n = 3n - 1$, donde basta sustituir n : $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = 8$. O con una **relación de recurrencia**, que dice cómo pasar de un término al siguiente, como $u_{n+1} = u_n + 3$ junto con el valor de u_1 . En este apartado verás las dos reglas más sencillas y cómo pasar de la recurrencia a la fórmula.

Progresión aritmética

DEFINICIÓN · PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Una sucesión es una **progresión aritmética** si la diferencia entre cada término y el anterior es siempre la misma. Ese valor constante es la **diferencia común** d :

$$u_{n+1} = u_n + d$$

Si $d > 0$ los términos crecen, si $d < 0$ decrecen, y si $d = 0$ la sucesión es constante.

Por ejemplo, 20, 17, 14, 11, ... es aritmética con $u_1 = 20$ y $d = -3$. Para hallar d basta restar dos términos consecutivos cualesquiera, $d = u_2 - u_1$, y para saber si una lista es aritmética hay que comprobar que **todas** esas diferencias coinciden.

La fórmula del término general sale de contar cuántas veces se ha sumado d . Para llegar a u_n desde u_1 se dan $n - 1$ saltos de tamaño d :

PROPIEDAD · TÉRMINO N -ÉSIMO DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

La intuición es la de una escalera: el segundo escalón está un salto por encima del primero, el tercero dos saltos, y así el escalón n está $n - 1$ saltos por encima. Con $u_1 = 20$ y $d = -3$, el término 10 es $u_{10} = 20 + 9 \cdot (-3) = -7$.

Progresión geométrica

DEFINICIÓN · PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Una sucesión es una **progresión geométrica** si el cociente entre cada término y el anterior es siempre el mismo. Ese valor constante es la **razón común** r :

$$u_{n+1} = u_n \cdot r$$

La razón no puede ser 0, y puede ser negativa: entonces los términos alternan de signo. Si $|r| > 1$ los valores crecen en tamaño, y si $0 < |r| < 1$ se acercan a cero.

Por ejemplo, 5, 10, 20, 40, ... tiene $r = 2$, y 81, -27, 9, -3, ... tiene $r = -\frac{1}{3}$. La razón se calcula dividiendo dos términos consecutivos, $r = \frac{u_2}{u_1}$, y para reconocer una progresión geométrica hay que comprobar que todos los cocientes coinciden.

Ahora cada paso es una multiplicación, así que tras $n - 1$ pasos hemos multiplicado u_1 por r exactamente $n - 1$ veces:

PROPIEDAD · TÉRMINO N-ÉSIMO DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

$$u_n = u_1 r^{n-1}$$

Con $u_1 = 5$ y $r = 2$, el término 7 es $u_7 = 5 \cdot 2^6 = 320$. Observa la diferencia de naturaleza: en la aritmética n multiplica a d , y en la geométrica $n - 1$ es un **exponente**. Por eso la geométrica crece (o decrece) mucho más deprisa.

MÉTODO · CALCULAR LOS DATOS DE UNA PROGRESIÓN A PARTIR DE DOS TÉRMINOS

1. Identifica el tipo de progresión (aritmética o geométrica) y escribe la fórmula que corresponda.
2. Sustituye cada término conocido en la fórmula: obtienes dos ecuaciones con incógnitas u_1 y d (o u_1 y r).
3. Aritmética: resta las dos ecuaciones para despejar d . Geométrica: divídelas entre sí para despejar r^k , donde k es la diferencia de posiciones.
4. Calcula el otro dato sustituyendo en una de las ecuaciones.
5. Comprueba con el otro término y responde a lo que se pide.

NOTA · CON LA CPG

En las dos pruebas del examen del IB puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Para dos términos conocidos, puedes resolver el sistema de dos ecuaciones con el módulo de sistemas. Para encontrar el valor de n que cumple una condición, como $u_n = -35$ o $u_n < 10$, puedes resolver la ecuación con el solucionador o, mejor, generar una tabla de valores de u_n y buscar el primer n entero que la cumple. Recuerda que n es un número entero positivo: si el solucionador da un valor con decimales, hay que interpretarlo (redondear hacia arriba o hacia abajo según lo que pida la pregunta) y, en caso de duda, comprobarlo en la tabla. En la prueba sin calculadora basta con el método algebraico, y los números suelen estar elegidos para que salga bien.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Reconocer y calcular un término

- La sucesión 5, 9, 13, 17, ... es una progresión aritmética. Halla su diferencia común y el término 25.
- La sucesión 2, 6, 18, 54, ... es una progresión geométrica. Halla su razón común y el término 6.
- Indica si la sucesión 2, 5, 10, 17 es aritmética, geométrica o ninguna de las dos.

- $d = 9 - 5 = 4$. Con $u_1 = 5$: $u_{25} = 5 + 24 \cdot 4 = 5 + 96 = 101$.
- $r = \frac{6}{2} = 3$. Con $u_1 = 2$: $u_6 = 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$.
- Las diferencias son $5 - 2 = 3$, $10 - 5 = 5$ y $17 - 10 = 7$, que no coinciden: no es aritmética. Los cocientes son $\frac{5}{2} = 2,5$, $\frac{10}{5} = 2$ y $\frac{17}{10} = 1,7$, que tampoco coinciden: no es geométrica. Es **ninguna** de las dos.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Una progresión aritmética a partir de dos términos

En una progresión aritmética, el tercer término es 17 y el noveno es -7 .

- Halla el primer término y la diferencia común.
- Escribe una fórmula para u_n y calcula en qué posición está el término -35 .
- Halla el primer término negativo de la progresión.

- Se escribe $u_n = u_1 + (n - 1)d$ para cada dato:

$$\begin{cases} u_1 + 2d = 17 \\ u_1 + 8d = -7 \end{cases}$$

Restando la primera ecuación a la segunda, $6d = -24$, luego $d = -4$. En la primera, $u_1 - 8 = 17$, así que $u_1 = 25$. Comprobación: $u_9 = 25 + 8 \cdot (-4) = -7$.

- $u_n = 25 + (n - 1)(-4) = 29 - 4n$. Para $u_n = -35$: $29 - 4n = -35$, es decir, $-4n = -64$ y $n = 16$. El término -35 ocupa la posición 16.
- Se pide $29 - 4n < 0$, es decir, $n > \frac{29}{4} = 7,25$. Como n es entero, el primer valor es $n = 8$, y $u_8 = 29 - 32 = -3$. Comprobación: $u_7 = 1 > 0$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Los rebotes de una pelota

Una pelota se deja caer al suelo y rebota varias veces. Las alturas máximas de los sucesivos rebotes forman una progresión geométrica. El primer rebote alcanza 120 cm y cada rebote llega al 80 % de la altura del anterior.

- Calcula la altura del sexto rebote, con tres cifras significativas.
- Halla el primer rebote cuya altura es menor que 10 cm.

Otra pelota, con una progresión geométrica distinta, alcanza 60 cm en el segundo rebote y 12,96 cm en el quinto.

- Halla la razón común y la altura del primer rebote de esta segunda pelota.

- La razón es $r = 0,8$ y $u_1 = 120$. Entonces $u_6 = 120 \cdot 0,8^5 = 120 \cdot 0,32768 = 39,3216$. La altura es de **39,3 cm**.

- b) Se busca el menor n entero con $120 \cdot 0,8^{n-1} < 10$. Con la CPG se puede resolver la ecuación $120 \cdot 0,8^{x-1} = 10$, que da $x \approx 12,14$, o mirar una tabla de valores. Como n debe ser entero y la altura disminuye, hay que comprobar los enteros vecinos:

$$n = 12 : 120 \cdot 0,8^{11} \approx 10,31 > 10 \quad n = 13 : 120 \cdot 0,8^{12} \approx 8,25 < 10$$

El primer rebote por debajo de 10 cm es el **13.º**. (Redondear 12,14 al entero más cercano daría 12, que es incorrecto.)

- c) Se escribe $u_2 = u_1 r = 60$ y $u_5 = u_1 r^4 = 12,96$. Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, u_1 desaparece y queda

$$r^3 = \frac{12,96}{60} = 0,216 \Rightarrow r = \sqrt[3]{0,216} = 0,6$$

Entonces $u_1 = \frac{60}{0,6} = 100$. El primer rebote llega a **100 cm** y la razón es 0,6 (cada rebote es el 60 % del anterior). Comprobación: $100 \cdot 0,6^4 = 12,96$.

En el examen: puntúa escribir $u_n = u_1 r^{n-1}$ con los datos sustituidos, plantear la desigualdad o la ecuación para n y razonar que n es entero (comprobando los enteros vecinos), y dar la respuesta con las unidades y con tres cifras significativas si no se indica otra cosa. En el apartado c) divide las dos ecuaciones en lugar de intentar despejar a ciegas.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • EQUIVOCARSE CON n Y $n-1$

En $u_n = u_1 + (n-1)d$ y en $u_n = u_1 r^{n-1}$ aparece $n-1$, no n . Para el término 10 hay 9 pasos desde el primero. Si escribes $u_1 + 10d$ o $u_1 r^{10}$ te pasas de término, y el resultado es el del término 11. Una comprobación rápida es sustituir $n = 1$: debe salir u_1 .

ERROR TÍPICO • MEZCLAR DIFERENCIA Y RAZÓN

En una progresión aritmética se **restan** términos para hallar d , y en una geométrica se **dividen** para hallar r . Es frecuente calcular una razón restando o sumar una razón en vez de multiplicar. Antes de aplicar una fórmula, comprueba con dos pares de términos consecutivos que la diferencia o el cociente se mantiene constante.

ERROR TÍPICO • DAR UN VALOR DE n QUE NO ES ENTERO

La posición n es un entero positivo. Si al resolver $u_n = k$ sale, por ejemplo, $n = 7,5$, no existe un término que valga exactamente k . Y si pides «el primer término que supera un valor», no se redondea a ciegas: hay que comprobar el entero anterior y el siguiente en la desigualdad y quedarse con el que de verdad la cumple.

Resumen

- Una sucesión es una lista ordenada de términos $u_1, u_2, \dots, u_n$; se define por una fórmula del término general o por recurrencia.
- Progresión aritmética: se suma siempre la misma diferencia, $u_{n+1} = u_n + d$, y $u_n = u_1 + (n-1)d$. La diferencia se halla restando términos consecutivos.
- Progresión geométrica: se multiplica siempre por la misma razón, $u_{n+1} = u_n r$, y $u_n = u_1 r^{n-1}$. La razón se halla dividiendo términos consecutivos y puede ser negativa (los signos alternan).

- Con dos términos conocidos se plantean dos ecuaciones: en la aritmética se restan para obtener d , y en la geométrica se dividen para obtener r^k .
- La CPG sirve para resolver el sistema o la ecuación y para tablas de valores; n siempre es entero positivo y en las desigualdades se comprueban los enteros vecinos.

APARTADO 2

Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

IDEA CLAVE

Sumar uno a uno los términos de una progresión aritmética es lento y propenso a errores. Con una fórmula puedes obtener el total de n términos consecutivos en dos operaciones. Esto sirve en el examen del IB para problemas de ahorro, filas de asientos, pilas de objetos o pagos que crecen de forma constante, y también para averiguar cuántos términos hacen falta para llegar a una cantidad.

Series y notación de sumatorio

Si en lugar de listar los términos de una sucesión los sumas, obtienes una **serie**. Cuando la sucesión es una progresión aritmética, la serie se llama **serie aritmética**.

DEFINICIÓN • SUMA PARCIAL S_n

Dada una progresión aritmética de primer término u_1 y diferencia d , se llama S_n al resultado de sumar sus n primeros términos:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{r=1}^n u_r$$

El símbolo $\sum$ (sigma) significa «suma de todos los valores de u_r cuando r recorre los enteros desde 1 hasta n ».

Por ejemplo, para la progresión 2, 5, 8, 11, 14, ... se tiene $S_3 = 2 + 5 + 8 = 15$ y $S_5 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$.

De dónde sale la fórmula

La idea es la que se atribuye al joven Gauss para sumar $1 + 2 + \cdots + 100$: escribir la suma dos veces, la segunda al revés, y sumar columna a columna.

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ S_n &= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 \end{aligned}$$

En cada columna, un término sube y el otro baja la misma cantidad d , así que todas las columnas dan lo mismo: $u_1 + u_n$. Hay n columnas, luego $2S_n = n(u_1 + u_n)$. Dicho de otro modo: la suma es el número de términos multiplicado por la **media** del primero y el último.

PROPIEDAD · FÓRMULAS DE LA SUMA

Para una progresión aritmética de primer término u_1 y diferencia d :

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) \quad \text{y también} \quad S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$$

La primera se usa cuando conoces el último término; la segunda, cuando solo conoces u_1 , d y n . La segunda sale de la primera al sustituir $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Con la progresión anterior, $S_5 = \frac{5}{2}(2 + 14) = 40$, igual que al sumar a mano. Y $1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10}{2}(1 + 10) = 55$. En el formulario del IB aparecen las dos expresiones, pero conviene entender de dónde vienen para no confundirlas.

MÉTODO · CALCULAR UNA SUMA ARITMÉTICA

1. Identifica u_1 y d (la diferencia entre dos términos consecutivos) y cuántos términos hay, n .
2. Si te dan el último término, o puedes hallarlo con $u_n = u_1 + (n-1)d$, usa $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$.
3. Si no, usa $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$.
4. Escribe el resultado con sus unidades y comprueba que el orden de magnitud tiene sentido.

Sumar un tramo y hallar n

Dos situaciones aparecen a menudo en los problemas.

Sumar un tramo intermedio. Para sumar desde el término u_k hasta el u_n se calcula la suma hasta n y se resta la suma de los términos que sobran: $u_k + \dots + u_n = S_n - S_{k-1}$.

Hallar cuántos términos hacen falta. Si se pide el n para el que la suma vale una cantidad dada, se sustituye en la fórmula y queda una ecuación en n . Como $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$ contiene un término en n^2 , resulta una ecuación cuadrática. De sus soluciones solo vale un entero positivo.

NOTA · CON LA CPG

En la Prueba 1 las fórmulas se aplican a mano, pero en la Prueba 2 puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Dos opciones: construir una tabla o una hoja de cálculo con los términos y sus sumas acumuladas, y leer el valor de S_n pedido; o usar la función de suma de una secuencia, con el término general entre los límites 1 y n . Para hallar n puedes resolver la ecuación $S_n = \text{valor}$ con el módulo de ecuaciones, o dibujar $y = S_n$ junto a la recta $y = \text{valor}$ y buscar el punto de corte. Si usas la CPG, escribe qué has calculado (la suma, la tabla o la ecuación), porque un resultado sin planteamiento puede perder puntos.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Sumar los términos de una progresión

Una progresión aritmética empieza así: 7, 11, 15, ...

- a) Calcula el término u_{12} .
- b) Calcula la suma de los 12 primeros términos, S_{12} .

- a) El primer término es $u_1 = 7$ y la diferencia es $d = 11 - 7 = 4$. Entonces

$$u_{12} = 7 + (12 - 1) \cdot 4 = 7 + 44 = 51$$

b) Con el último término ya conocido, $S_{12} = \frac{12}{2}(7 + 51) = 6 \cdot 58 = 348$.

Comprobación con la otra fórmula: $S_{12} = 6(2 \cdot 7 + 11 \cdot 4) = 6 \cdot 58 = 348$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un plan de ahorro

Una persona ahorra 20 euros el primer mes y, cada mes siguiente, ingresa 15 euros más que el anterior.

- Calcula cuánto ingresa el mes 18.
- Calcula cuánto lleva ahorrado en total al terminar el mes 18.
- Halla en qué mes el total ahorrado llega exactamente a 5000 euros.

Los ingresos mensuales forman una progresión aritmética con $u_1 = 20$ y $d = 15$.

a) $u_{18} = 20 + 17 \cdot 15 = 20 + 255 = 275$ euros.

b) $S_{18} = \frac{18}{2}(20 + 275) = 9 \cdot 295 = 2655$ euros.

c) Hay que resolver $S_n = 5000$ con la segunda fórmula:

$$\frac{n}{2}(40 + 15(n - 1)) = 5000 \Rightarrow n(15n + 25) = 10000 \Rightarrow 3n^2 + 5n - 2000 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática, $\Delta = 25 + 24000 = 24025 = 155^2$, luego

$$n = \frac{-5 \pm 155}{6} \Rightarrow n = 25 \text{ o } n = -\frac{80}{3}$$

El número de meses es positivo, así que $n = 25$. Comprobación: $u_{25} = 20 + 24 \cdot 15 = 380$ y $S_{25} = \frac{25}{2}(20 + 380) = 5000$.

El total llega a 5000 euros exactamente al terminar el mes 25.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Las filas de una grada

En una grada, el número de asientos de cada fila aumenta en una cantidad constante al pasar de una fila a la siguiente. La fila 3 tiene 11 asientos y las 10 primeras filas suman en total 210 asientos.

- Halla el número de asientos de la primera fila y el aumento por fila.
- Calcula cuántos asientos hay entre las filas 6 y 10, ambas incluidas.
- Se quiere ampliar la grada con más filas siguiendo la misma regla. Halla el menor número de filas con el que se llega a un total de al menos 1000 asientos.

a) Sean u_1 y d los datos buscados. Del dato de la fila 3, $u_3 = u_1 + 2d = 11$. Del dato de la suma,

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2u_1 + 9d) = 210 \Rightarrow 2u_1 + 9d = 42$$

De la primera ecuación, $u_1 = 11 - 2d$. Sustituyendo: $22 - 4d + 9d = 42$, luego $5d = 20$ y $d = 4$. Entonces $u_1 = 11 - 8 = 3$.

La primera fila tiene 3 asientos y cada fila tiene 4 más que la anterior.

b) Las filas de la 6 a la 10 son el total de 10 filas menos el de las 5 primeras. Como $u_5 = 3 + 16 = 19$, se tiene $S_5 = \frac{5}{2}(3 + 19) = 55$. Entonces

$$S_{10} - S_5 = 210 - 55 = 155$$

c) El total de n filas es $S_n = \frac{n}{2} (6 + 4(n - 1)) = n(2n + 1) = 2n^2 + n$. Se busca el menor entero n con $2n^2 + n \geq 1000$.

Para $n = 22$: $S_{22} = 22 \cdot 45 = 990 < 1000$.

Para $n = 23$: $S_{23} = 23 \cdot 47 = 1081 \geq 1000$.

Como S_n crece con n , el menor valor es $n = 23$ filas.

En el examen: en un problema como este se puntúa plantear las dos ecuaciones a partir de los datos, resolver el sistema, y en el último apartado justificar el valor entero (comparando S_{22} y S_{23} o resolviendo la ecuación con la CPG y redondeando hacia arriba, porque no existen fracciones de fila).

Errores típicos

ERROR TÍPICO · MEZCLAR u_n CON S_n

u_n es un término (por ejemplo, lo que ingresas el mes n) y S_n es la suma de los n primeros. Un fallo muy común es usar el último término en lugar de la suma como respuesta, o escribir $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + d)$, sustituyendo u_n por d . Calcula siempre primero u_n si no lo conoces, y lee el enunciado para saber si pide un término o un total.

ERROR TÍPICO · CONFUNDIR EL NÚMERO DE TÉRMINOS

En la suma de un tramo, desde el término u_k hasta u_n , hay $n - k + 1$ términos, no $n - k$. Por eso es más seguro calcular $S_n - S_{k-1}$: de la fila 6 a la 10 hay 5 filas, y la resta correcta es $S_{10} - S_5$, no $S_{10} - S_6$.

ERROR TÍPICO · DAR UN VALOR DE n QUE NO ES ENTERO POSITIVO

Al resolver $S_n = \text{valor}$ salen dos soluciones de la cuadrática, y una puede ser negativa o fraccionaria. El número de términos es un entero positivo, así que se descarta la que no sirve. Si el enunciado pide «al menos» o «más de» una cantidad, redondea hacia el entero que cumple la condición: $n = 22,4$ obliga a tomar $n = 23$, no 22. Comprueba el resultado calculando S_n para el entero elegido y el anterior.

Resumen

- Una serie aritmética es la suma de los términos de una progresión aritmética; $S_n = u_1 + \dots + u_n = \sum_{r=1}^n u_r$.
- Si conoces el último término: $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$, es decir, n por la media del primero y el último.
- Si conoces u_1 , d y n : $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d)$.
- Un tramo desde u_k hasta u_n se suma como $S_n - S_{k-1}$ (hay $n - k + 1$ términos).
- Para hallar n a partir de una suma resulta una ecuación cuadrática; solo vale un entero positivo.
- En la Prueba 2, la CPG (tabla, suma de secuencia o ecuación) acelera el cálculo, pero escribe qué has calculado.

APARTADO 3

Suma de una progresión geométrica

IDEA CLAVE

Sumar los términos de una progresión geométrica uno a uno es lento cuando hay muchos, y una fórmula lo resuelve en un paso. En este apartado la deduces, la usas con la razón distinta de 1 y con razón 1, y aprendes a averiguar cuántos términos hacen falta para llegar a un total dado, con logaritmos o con la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Es el cálculo que hay detrás del ahorro mensual creciente, de los salarios con subida porcentual y de muchos problemas de la Prueba 2.

Qué se suma

Recuerda que en una progresión geométrica cada término se obtiene multiplicando el anterior por la **razón** r , de modo que $u_n = u_1 r^{n-1}$. La suma de los n primeros términos se escribe S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \dots + u_1 r^{n-1}$$

A una suma de este tipo se la llama **serie geométrica**. Fíjate en que hay n sumandos, y que el último lleva el exponente $n - 1$, no n .

La fórmula

TEOREMA · SUMA DE LOS n PRIMEROS TÉRMINOS

Si $r \neq 1$, la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de primer término u_1 y razón r es

$$S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Las dos expresiones son iguales; usa la que deje números positivos: la primera cuando $r > 1$ y la segunda cuando $0 < r < 1$.

La idea de la demostración es un truco: multiplica la suma por r y réstale la original. Casi todo se cancela.

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \dots + u_1 r^{n-1} \\ rS_n &= u_1 r + u_1 r^2 + \dots + u_1 r^{n-1} + u_1 r^n \end{aligned}$$

Al restar, solo sobreviven el primer sumando de arriba y el último de abajo: $rS_n - S_n = u_1 r^n - u_1$. Sacando factor común, $S_n(r - 1) = u_1(r^n - 1)$, y al dividir entre $r - 1$ (por eso hace falta $r \neq 1$) sale la fórmula.

Cuando la razón es 1

Si $r = 1$ todos los términos son iguales a u_1 y no hay nada que deducir: sumar n veces el mismo número es multiplicar. En ese caso la fórmula anterior no se puede usar, porque tendría un 0 en el denominador.

PROPIEDAD · RAZÓN IGUAL A 1

Si $r = 1$, la progresión es constante y $S_n = n u_1$.

Por ejemplo, la progresión 4, 4, 4, ... suma $4n$ al tomar n términos. En la práctica este caso casi no aparece, porque una progresión de razón 1 no crece ni decrece.

Cómo se aplica

MÉTODO · CALCULAR LA SUMA DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

1. Identifica u_1 y la razón r . Si te dan dos términos, halla r dividiendo; si te dan un porcentaje de subida o bajada, convierte ese porcentaje en razón (un 6 % de aumento es $r = 1,06$; un 6 % de descuento es $r = 0,94$).
2. Cuenta cuántos términos hay: ese es el valor de n (con los años del primero al décimo, $n = 10$).
3. Elige la fórmula y sustituye. Con una calculadora, no redondees hasta el resultado final.
4. Da la respuesta con las unidades y con la precisión que pida el enunciado (si no dice nada, tres cifras significativas).

Hallar el número de términos

A veces se da el total y se pregunta cuántos términos hacen falta para alcanzarlo o superarlo. Entonces n está en un **exponente** y hay dos caminos.

Con logaritmos. Se despeja la potencia r^n y se aplica un logaritmo a los dos miembros. Para $r > 1$, de $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$ se llega a $r^n = 1 + \frac{S_n(r - 1)}{u_1}$, y de ahí $n = \frac{\ln\left(1 + \frac{S_n(r - 1)}{u_1}\right)}{\ln r}$. Es una Prueba 1 típica si los números son sencillos.

NOTA · CON LA CPG

En la Prueba 2 puedes evitar los logaritmos. Una forma es resolver la ecuación $S_n = \text{total}$ con el módulo de ecuaciones de la CPG, tomando n como incógnita. Otra es dibujar la función $y = \frac{u_1(r^x - 1)}{r - 1}$ y la recta horizontal $y = \text{total}$, y leer la coordenada x del punto de corte. Una tercera es crear una tabla de valores de S_n y mirar entre qué dos valores de n se pasa del total. La CPG también calcula directamente una suma de términos de la progresión cuando n es conocido, lo que sirve para comprobar el resultado a mano. Ten presente que n cuenta términos, así que debe ser un **entero**: la solución que da la CPG suele ser decimal y hay que redondear al entero adecuado. Si pide «cuándo se supera» el total, se redondea hacia arriba; comprueba siempre calculando S_n con ese entero y con el anterior.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1

★ Básico

Sumar los primeros términos

Una progresión geométrica tiene primer término $u_1 = 5$ y razón $r = 3$.

- Halla el sexto término.
- Calcula la suma de los seis primeros términos.
- Otra progresión es 7, 7, 7, ... Calcula la suma de sus 20 primeros términos.

a) $u_6 = 5 \cdot 3^5 = 5 \cdot 243 = 1215$.

- b) Como $r > 1$, usamos la primera forma de la fórmula:

$$S_6 = \frac{5(3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{5 \cdot 728}{2} = 1820$$

Comprobación sumando: $5 + 15 + 45 + 135 + 405 + 1215 = 1820$.

- c) La razón es $r = 1$, así que la fórmula general no sirve y la suma es $S_{20} = 20 \cdot 7 = 140$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Descargas de una aplicación

Una aplicación se lanza y el primer día se descarga 200 veces. Cada día siguiente se descarga un 20 % más veces que el día anterior.

- Indica la razón de la progresión que forman las descargas diarias.
- Calcula cuántas descargas hay el séptimo día, redondeando a la unidad.
- Calcula cuántas descargas hay en total durante los 10 primeros días, redondeando a la unidad.

- a) Aumentar un 20 % es multiplicar por $1 + 0,20 = 1,2$, así que $r = \frac{6}{5} = 1,2$ y $u_1 = 200$.

- b) $u_7 = 200 \cdot 1,2^6 = 200 \cdot 2,985984 = 597,1968$, es decir, unas **597 descargas**.

- c) Usamos S_{10} con $r > 1$:

$$S_{10} = \frac{200(1,2^{10} - 1)}{1,2 - 1} = \frac{200 \cdot 5,917364 \dots}{0,2} = 5917,364 \dots$$

En total, unas **5192 descargas** en los 10 primeros días.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

¿Cuántos años hasta superar el objetivo?

Un ayuntamiento recicla 500 toneladas de vidrio el primer año de un programa, y cada año recicla un 10 % más que el anterior.

- Calcula las toneladas recicladas en total durante los 8 primeros años, redondeando a la unidad.
- El objetivo es acumular más de 10 000 toneladas. Halla, usando logaritmos, el número mínimo de años necesarios.
- Comprueba el resultado de b) calculando el total acumulado con el número de años obtenido y con el anterior.

Es una progresión geométrica con $u_1 = 500$ y $r = 1,1$.

a)

$$S_8 = \frac{500(1,1^8 - 1)}{0,1} = 5000(2,14358881 - 1) = 5717,94... \approx 5718 \text{ toneladas}$$

b) Se necesita $S_n > 10\,000$:

$$\frac{500(1,1^n - 1)}{0,1} > 10\,000 \Rightarrow 5000(1,1^n - 1) > 10\,000 \Rightarrow 1,1^n > 3$$

Aplicando logaritmos neperianos (como $\ln 1,1 > 0$, el sentido de la desigualdad se mantiene): $n \ln 1,1 > \ln 3$, luego

$$n > \frac{\ln 3}{\ln 1,1} = \frac{1,0986...}{0,09531...} = 11,527...$$

Como n es un entero, el mínimo es $n = 12$ años.

c) Con $n = 11$: $S_{11} = 5000(1,1^{11} - 1) = 5000 \cdot 1,853117... = 9265,6... < 10\,000$. Con $n = 12$: $S_{12} = 5000(3,138428... - 1) = 10\,692,1... > 10\,000$. Confirmado: se supera el objetivo por primera vez al cabo de 12 años.

En el examen: en una pregunta de este tipo se puntúa la fórmula correcta con $r = 1,1$ (no $0,1$), el despeje de la potencia, el uso del logaritmo y, sobre todo, redondear n hacia arriba a un entero. Con la CPG, escribe la ecuación o la gráfica que has usado.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR EL EXPONENTE DEL TÉRMINO CON EL DE LA SUMA

El término general lleva r^{n-1} , pero la suma lleva r^n . Quien escribe $S_n = \frac{u_1(r^{n-1} - 1)}{r - 1}$ calcula la suma de un término menos. Una comprobación rápida: con $n = 1$ la suma debe ser u_1 , y la fórmula correcta da $\frac{u_1(r - 1)}{r - 1} = u_1$.

ERROR TÍPICO • USAR MAL EL PORCENTAJE COMO RAZÓN

Un aumento del 8 % no da $r = 0,08$, sino $r = 1,08$. Una bajada del 8 % da $r = 0,92$. Con $r = 0,08$ la suma sale mucho más pequeña de lo razonable, y eso es una señal de alarma: si los valores deberían crecer, la razón tiene que ser mayor que 1.

ERROR TÍPICO • REDONDEAR ANTES DE TIEMPO O USAR LA FÓRMULA CON $r = 1$

Si redondeas r^n a pocas cifras antes de seguir, el error se amplifica, sobre todo al restar $r^n - 1$. Guarda el valor completo en la calculadora y redondea solo al final. Y si la razón es 1, no sustituyas en la fórmula (daría división entre cero): la suma es $n u_1$.

Resumen

- Serie geométrica: $S_n = u_1 + u_1 r + \dots + u_1 r^{n-1}$, con n sumandos.
- Si $r \neq 1$: $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}$. La fórmula sale de restar S_n a $r S_n$.
- Si $r = 1$: $S_n = n u_1$.
- Un porcentaje de subida o bajada se convierte en razón: $+p\%$ da $r = 1 + \frac{p}{100}$ y $-p\%$ da $r = 1 - \frac{p}{100}$.
- Para hallar n : despeja r^n y aplica logaritmos, o usa la CPG (ecuación, gráfica o tabla). Redondea n a un entero y comprueba con S_n .

- Calcula con todas las cifras y redondea al final, con tres cifras significativas si no se indica otra cosa.

APARTADO 4

Interés simple y compuesto, depreciación y crecimiento

IDEA CLAVE

El dinero que se invierte, el valor de un coche que envejece o una población que crece siguen el mismo patrón: cada año se multiplica por un factor fijo, o se le suma una cantidad fija. Son progresiones geométricas y aritméticas disfrazadas de problema real, y aparecen casi siempre en el examen del IB con una fórmula que debes saber leer y despejar.

Interés simple

Cuando depositas un capital en un banco, este te paga unos **intereses**. Hay dos maneras de calcularlos. En el interés simple, los intereses de cada año se calculan siempre sobre la cantidad con la que empezaste, y no se reinvierten.

DEFINICIÓN · INTERÉS SIMPLE

Si se invierte un capital inicial PV (valor presente) a un tipo de interés simple nominal anual de $r\%$ durante n años, el valor final FV es

$$FV = PV \left(1 + \frac{nr}{100} \right)$$

Los intereses ganados son $FV - PV = PV \cdot \frac{nr}{100}$.

La razón es sencilla: cada año se añade la misma cantidad, $PV \cdot \frac{r}{100}$. Los valores del capital año tras año forman una **progresión aritmética** con diferencia $PV \cdot \frac{r}{100}$, es decir, crecen en línea recta.

Por ejemplo, 1 000 euros al 5 % simple ganan 50 euros cada año: 1 050, 1 100, 1 150...

Interés compuesto

En el interés compuesto, al terminar cada periodo los intereses se suman al capital y, desde entonces, también generan intereses. Por eso el crecimiento es cada vez más rápido.

DEFINICIÓN · INTERÉS COMPUESTO

Un capital inicial PV con un tipo de interés nominal anual de $r\%$, capitalizado k veces al año durante n años, se convierte en

$$FV = PV \left(1 + \frac{r}{100k} \right)^{kn}$$

donde k es el número de periodos de capitalización por año y kn es el número total de periodos.

Esta fórmula está en el cuadernillo de fórmulas del IB, pero conviene entenderla. En cada periodo el capital se multiplica por $1 + \frac{r}{100k}$, de modo que los valores sucesivos forman una **progresión geométrica** de razón $1 + \frac{r}{100k}$. Tras kn periodos, el capital inicial queda multiplicado por esa razón elevada a kn .

Periodos de capitalización

El tipo $r\%$ es siempre el **nominal anual**. Si los intereses se abonan varias veces al año, el tipo de cada periodo es solo una parte:

Capitalización k Tipo por periodo Periodos en n años

Anual	1	$r\%$	n
Semestral	2	$\frac{r}{2}\%$	$2n$
Trimestral	4	$\frac{r}{4}\%$	$4n$
Mensual	12	$\frac{r}{12}\%$	$12n$

Cuanto mayor es k , algo más crece el capital al cabo del año, porque los intereses empiezan antes a generar más intereses. La diferencia es pequeña, pero se nota en cantidades grandes o en plazos largos.

MÉTODO · RESOLVER UN PROBLEMA DE INTERÉS

1. Identifica si el interés es **simple** o **compuesto**, y lee con cuidado cuántas veces se capitaliza al año para fijar k .
2. Anota los datos: PV , FV , r , n y k . Distingue qué es lo que falta.
3. Escribe la fórmula con los datos sustituidos. Mantén r en tanto por ciento y n en **años**.
4. Si falta FV , calcula directamente. Si falta otra variable, despégala (en simple se resuelve a mano) o usa la CPG.
5. Redondea solo al final y responde con la unidad y la precisión que pide el enunciado. Si te piden los **intereses**, resta $FV - PV$.

Depreciación e inflación

La **inflación** es una subida generalizada de los precios y la **depreciación** es la pérdida de valor de un bien con el paso del tiempo. Ambas se modelan como el interés compuesto anual: el factor es mayor que 1 cuando el valor sube y menor que 1 cuando baja.

PROPIEDAD · DEPRECIACIÓN ANUAL

Un bien que vale PV y se deprecia un $r\%$ cada año vale, al cabo de n años,

$$FV = PV \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

Es la fórmula del interés compuesto con un tipo **negativo**. La razón de la progresión geométrica es $1 - \frac{r}{100}$, menor que 1.

Observa que cada año se pierde el $r\%$ del valor **de ese momento**, no del valor inicial. Por eso un bien nunca llega a valer cero y las pérdidas anuales, en dinero, son cada vez menores.

Crecimiento demográfico

Las poblaciones (de personas, de animales, de bacterias) suelen modelarse con un porcentaje de crecimiento anual constante. Si hoy hay P_0 individuos y la población crece un $r\%$ cada año, dentro de n años habrá

$$P_n = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

Es otra vez una progresión geométrica. Por ejemplo, una ciudad de 50 000 habitantes que crece un 2% anual tendrá, dentro de 3 años, $50\,000 \cdot 1,02^3 \approx 53\,060$ habitantes.

Si el enunciado numera los términos de la progresión, con el primero como u_1 , ten cuidado: el valor de «hoy» es u_1 y el de dentro de n años es u_{n+1} , con $u_{n+1} = u_1 r^n$. Es la misma fórmula escrita con la notación de sucesiones y término n -ésimo.

NOTA • LA CPG EN LOS PROBLEMAS FINANCIEROS

En la Prueba 1 se evalúan expresiones sencillas sin calculadora. En la Prueba 2 puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG), y estos problemas son un caso típico:

- Casi todas las CPG tienen una **herramienta financiera** (a veces llamada TVM) en la que introduces el número de periodos o de años, el tipo de interés anual, el capital inicial, el pago periódico (aquí cero), el valor final y el número de pagos y de capitalizaciones por año. Dejas **una** incógnita y la calculadora la resuelve. El capital inicial y el valor final tienen signos opuestos (lo que se invierte frente a lo que se recibe); si te sale un resultado negativo, probablemente sea esto.
- Cuando la incógnita es el tiempo, el tipo de interés o el capital en el exponente, la herramienta financiera o el **solucionador de ecuaciones** (o la intersección de dos gráficas) evita despejar con logaritmos.
- Escribe siempre la fórmula con los datos sustituidos o los valores introducidos, aunque uses la herramienta: aporta puntos de método si el resultado final falla.
- Fíjate bien en el número de capitalizaciones por año que introduces, que es el fallo más habitual con la herramienta.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un depósito a interés simple

Marta deposita 3 200 euros en una cuenta que paga un interés simple del 2,5 % nominal anual.

- ¿Cuánto dinero tendrá en la cuenta al cabo de 6 años?
- ¿Cuántos años han de pasar para que los intereses ganados sean de 1 600 euros?

- Se aplica la fórmula del interés simple con $PV = 3\,200$, $r = 2,5$ y $n = 6$:

$$FV = 3\,200 \left(1 + \frac{6 \cdot 2,5}{100} \right) = 3\,200 \cdot 1,15 = 3\,680 \text{ euros}$$

- Cada año se ganan $3\,200 \cdot \frac{2,5}{100} = 80$ euros. Se plantea cuántos años hacen falta para acumular 1 600:

$$80n = 1\,600 \Rightarrow n = 20 \text{ años}$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Capitalización mensual

Se invierten 2 500 libras (GBP) en una cuenta que ofrece un interés compuesto del 4,8 % nominal anual, con capitalización mensual. Da los resultados con dos cifras decimales.

- ¿Cuánto vale la inversión después de 5 años?
- ¿Qué intereses se han generado en ese tiempo?

- a) La capitalización es mensual, así que $k = 12$. Hay $kn = 12 \cdot 5 = 60$ periodos y el tipo de cada periodo es $\frac{4,8}{12} = 0,4\%$:

$$FV = 2\,500 \left(1 + \frac{4,8}{100 \cdot 12}\right)^{60} = 2\,500 \cdot 1,004^{60} \approx 3\,176,60 \text{ GBP}$$

- b) Los intereses son la diferencia entre el valor final y el inicial:

$$3\,176,60 - 2\,500 = 676,60 \text{ GBP}$$

Con la CPG se introducen $n = 5$, $I\% = 4,8$, $PV = -2\,500$, pago cero y 12 capitalizaciones por año, y se obtiene el valor final.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Una máquina que pierde valor

Una empresa compra una máquina por 18 000 euros. Su valor se deprecia un 12 % cada año.

- Calcula su valor al cabo de 4 años, con dos cifras decimales.
- ¿Cuántos años completos han de pasar para que valga menos de la mitad de su precio de compra?
- Otra máquina costó 16 000 euros y, tras 3 años, vale 11 664 euros. Si la depreciación anual es constante, ¿cuál es su tasa en porcentaje?

- a) El factor anual es $1 - \frac{12}{100} = 0,88$:

$$FV = 18\,000 \cdot 0,88^4 = 18\,000 \cdot 0,59969536 \approx 10\,794,52 \text{ euros}$$

- b) Se busca el menor entero n con $18\,000 \cdot 0,88^n < 9\,000$, es decir, $0,88^n < 0,5$. Se compara con la CPG (tabla de valores) o con logaritmos:

$$n > \frac{\ln 0,5}{\ln 0,88} \approx 5,42$$

Se comprueba: $0,88^5 \approx 0,528 > 0,5$ (aún vale más de la mitad) y $0,88^6 \approx 0,464 < 0,5$. Hacen falta **6 años completos**.

- c) Se plantea la ecuación con la tasa r como incógnita:

$$16\,000 \left(1 - \frac{r}{100}\right)^3 = 11\,664 \Rightarrow \left(1 - \frac{r}{100}\right)^3 = 0,729$$

Como $0,9^3 = 0,729$, resulta $1 - \frac{r}{100} = 0,9$ y $r = 10$. La tasa es del 10 % anual. La CPG da el mismo resultado con su herramienta financiera (con signo negativo para la tasa, porque el valor baja) o con el solucionador.

En el examen: escribe la fórmula con los datos sustituidos antes de calcular. En las partes con incógnita en el exponente, muestra la desigualdad o la tabla que has usado y responde con un número **entero** de años cuando te lo piden, no con un decimal.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · OLVIDAR DIVIDIR EL TIPO ENTRE K

Con capitalización mensual o trimestral, el tipo del enunciado es **anual**. Meter r entero en la base y multiplicar solo el exponente por k da un resultado enorme. Si el interés es del 6 % nominal anual con capitalización trimestral, la base es $1 + \frac{6}{400} = 1,015$ y el exponente es $4n$; no 1,06 ni $1 + \frac{6}{100} \cdot 4$.

ERROR TÍPICO · MEZCLAR INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

En el interés simple se **suma** la misma cantidad cada año, y la fórmula no tiene exponente. En el compuesto se **multiplica** por un factor y el exponente es el tiempo. Si un enunciado no dice «compuesto» pero habla de intereses «sobre el capital inicial», es simple. Aplicar la fórmula equivocada da un valor muy parecido en plazos cortos y claramente distinto en plazos largos.

ERROR TÍPICO · DEPRECIAR CON EL FACTOR EQUIVOCADO O RESTANDO DE GOLPE

Una depreciación del 12 % anual significa multiplicar por 0,88 cada año, no por 0,12 ni por 1,12. Tampoco es correcto restar el 12 % del valor inicial en cada año: $18\,000 - 4 \cdot 2\,160$ da un valor menor que el real, porque cada año se pierde el 12 % del valor que ya ha disminuido. Si el resultado de una depreciación es mayor que el valor inicial, hay un error de factor.

Resumen

- Interés simple: $FV = PV \left(1 + \frac{nr}{100}\right)$. Los intereses salen siempre del capital inicial y el valor crece en progresión aritmética.
- Interés compuesto: $FV = PV \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn}$, con k capitalizaciones al año y r el tipo nominal anual. Es una progresión geométrica.
- Capitalización semestral, trimestral y mensual: $k = 2, 4, 12$. El tipo por periodo es $\frac{r}{k}$ y hay kn periodos.
- Depreciación anual: $FV = PV \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$. Crecimiento de una población: $P_n = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$. La inflación se trata como un interés compuesto.
- Si te piden los intereses, calcula $FV - PV$.
- En la Prueba 2, la herramienta financiera o el solucionador de la CPG resuelven cualquier incógnita; escribe siempre la fórmula con los datos y no redondees los pasos intermedios.

APARTADO 5

Anualidades y amortización

IDEA CLAVE

Una anualidad es una serie de pagos iguales a intervalos regulares: ahorrar cada mes la misma cantidad o devolver un préstamo con una cuota fija. Aprenderás a calcular lo que se acumula, la cuota de un préstamo y cómo se reparte cada pago entre intereses y deuda. Son problemas típicos del examen del IB, y se resuelven con la CPG apoyándose en una progresión geométrica.

Qué es una anualidad

DEFINICIÓN • ANUALIDAD

Una **anualidad** es una sucesión de pagos de **igual cantidad** P hechos a intervalos **iguales** de tiempo (cada mes, cada trimestre, cada año...). Si los pagos sirven para ahorrar, se habla de ahorro periódico; si sirven para devolver una deuda, de **amortización**.

Hay que fijar tres datos antes de calcular nada:

- El **tipo por periodo** i . Si el interés nominal anual es $r\%$ y se capitaliza k veces al año (con un pago por cada capitalización), entonces $i = \frac{r}{100k}$. Con un 6% anual capitalizado cada mes, $i = 0,005$.
- El **número de pagos** n . Es el total, no los años: 4 años con pagos mensuales son $n = 48$.
- El **momento del pago**. Salvo que el enunciado diga lo contrario, cada pago se hace **al final** del periodo.

Valor futuro de una anualidad

Imagina que ingresas P al final de cada periodo. El último ingreso no llega a producir intereses; el penúltimo genera uno, el anterior dos, y así hasta el primero, que trabaja durante $n - 1$ periodos. Lo acumulado es

$$P + P(1+i) + P(1+i)^2 + \dots + P(1+i)^{n-1}$$

Es la suma de n términos de una progresión geométrica de primer término P y razón $1+i$. Aplicando la fórmula de esa suma se obtiene el resultado.

PROPIEDAD · VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD

Con pagos iguales P al final de cada periodo, tipo i por periodo y n pagos, el capital acumulado justo tras el último pago es

$$FV = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Si se quiere alcanzar una cantidad objetivo FV , el pago necesario es $P = \frac{FV \cdot i}{(1+i)^n - 1}$. Para saber **cuántos pagos** hacen falta, se resuelve la ecuación en n con la CPG o con logaritmos:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{FV \cdot i}{P}\right)}{\ln(1+i)}$$

El número de pagos debe ser entero: se redondea hacia arriba para llegar al objetivo.

Amortización de un préstamo

DEFINICIÓN · AMORTIZACIÓN

Amortizar un préstamo es devolverlo mediante pagos periódicos iguales, llamados **cuotas**. Cada cuota contiene dos partes: los **intereses** del periodo, que se calculan sobre la deuda que aún queda, y el **capital amortizado**, que reduce esa deuda.

Cada periodo la deuda crece por los intereses y baja por la cuota. Si la cuota es la adecuada, tras el pago número n la deuda es exactamente cero. Escribir eso para un préstamo PV conduce, de nuevo, a una suma geométrica, y de ella se despeja la cuota.

PROPIEDAD · CUOTA DE UN PRÉSTAMO

Para un préstamo de PV a tipo i por periodo, devuelto con n cuotas iguales al final de cada periodo, la cuota es

$$P = PV \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{PV \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

Las dos expresiones son equivalentes. Observa que cuanto más largo es el plazo, menor es la cuota, pero más intereses se pagan en total.

La tabla de amortización

Para ver en qué se va el dinero se construye una tabla con una fila por cuota. Con $d_0 = PV$ como deuda inicial, en cada fila se calcula:

MÉTODO · CONSTRUIR UNA TABLA DE AMORTIZACIÓN

1. Calcula la cuota P y redondéala a céntimos.
2. **Intereses** de la fila: $I_k = i \cdot d_{k-1}$, es decir, el tipo por periodo multiplicado por la deuda pendiente al **empezar** el periodo.
3. **Capital amortizado**: $P - I_k$.
4. **Deuda pendiente al final**: $d_k = d_{k-1} - (P - I_k)$.
5. Repite hasta la última fila. Como la cuota está redondeada, la deuda final puede no salir exactamente 0 : se ajusta la **última cuota** para saldar la deuda (diferirá en unos céntimos).

El esquema de la tabla es siempre el mismo:

Periodo	Deuda inicial	Intereses	Capital amortizado	Deuda final
1	PV	$i \cdot PV$	$P - i \cdot PV$	$PV - (P - i \cdot PV)$
2	deuda final anterior	$i \cdot (\text{deuda inicial})$	$P - \text{intereses}$	deuda inicial – capital

Dos regularidades sirven para comprobar la tabla: los **intereses decrecen** de una fila a otra (porque la deuda baja) y el **capital amortizado crece** (porque la cuota es fija). El total de intereses es la suma de las cuotas menos el préstamo.

Con la CPG

NOTA • HERRAMIENTA FINANCIERA DE LA CPG

En el examen del IB (Prueba 2, con CPG) este tipo de problemas se resuelve con la herramienta financiera, que trabaja con estas variables:

- **N**: número total de pagos.
- **I%**: interés nominal **anual**, en porcentaje.
- **PV**: valor presente (lo que se recibe o se entrega al principio, por ejemplo el préstamo).
- **PMT**: pago de cada periodo (la cuota o el ahorro periódico).
- **FV**: valor futuro (lo que queda o se acumula al final; en un préstamo totalmente pagado es 0).
- **P/Y**: número de pagos por año.
- **C/Y**: número de capitalizaciones por año. En estos problemas suele coincidir con P/Y.

Se introducen todos los datos conocidos y se pide a la calculadora la variable que falta. Regla de signos: el dinero que **sale** de tu bolsillo se escribe con signo negativo y el que **entra**, con signo positivo. Por eso, en un préstamo, PV es positivo (lo recibes) y PMT negativo (lo pagas); en un ahorro, PMT es negativo (lo ingresas) y FV positivo (lo recuperas). Si omites el signo, la CPG da un error o un resultado de signo contrario.

En la Prueba 1 no hay CPG: se espera que escribas la fórmula y sustituyas, y los cálculos serán asequibles. En cualquier caso, escribe los datos que has introducido (N, I%, PV, PMT, FV, P/Y, C/Y): si el resultado final falla, esa información permite puntuar.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Ahorrar cada año

Marta ingresa 2000 EUR al final de cada año en una cuenta que da un 5 % de interés anual compuesto anualmente. Lo hace durante 10 años.

- ¿Cuánto dinero tendrá justo después del último ingreso? Redondea a dos cifras decimales.
- ¿Cuántos euros de ese total son intereses?

- Es una anualidad con $P = 2000$, $i = 0,05$ y $n = 10$. Se aplica la fórmula del valor futuro:

$$FV = 2000 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{0,05} = 2000 \cdot \frac{0,628894 \dots}{0,05} \approx 25\,155,79 \text{ EUR}$$

Con la CPG: $N = 10$, $I\% = 5$, $PV = 0$, $PMT = -2000$, $P/Y = C/Y = 1$, y se pide FV.

- Ha ingresado $10 \cdot 2000 = 20\,000$ EUR en total. Los intereses son la diferencia:

$$25\,155,79 - 20\,000 = 5\,155,79 \text{ EUR}$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Cuota de un préstamo

Un taller pide un préstamo de 12 000 GBP, con un interés nominal anual del 6 % capitalizado mensualmente, para devolverlo en 3 años con cuotas mensuales iguales al final de cada mes.

- Calcula la cuota mensual. Redondea a dos cifras decimales.
- Con la cuota redondeada del apartado a), ¿cuántas libras se pagan de intereses en total?
- ¿Cuánto se debe todavía justo después de pagar la primera cuota?

- a) Los datos son $PV = 12\,000$, $n = 3 \cdot 12 = 36$ y $i = \frac{6}{100 \cdot 12} = 0,005$ por mes. Se usa la fórmula de la cuota:

$$P = \frac{12\,000 \cdot 0,005}{1 - 1,005^{-36}} = \frac{60}{1 - 0,835645 \dots} \approx 365,06 \text{ GBP}$$

Con la CPG: $N = 36$, $I\% = 6$, $PV = 12\,000$, $FV = 0$, $P/Y = C/Y = 12$, y se pide PMT (sale $-365,06$: es dinero que paga el taller).

- b) Total pagado con la cuota redondeada: $36 \cdot 365,06 = 13\,142,16$ GBP. Los intereses son lo pagado menos lo prestado:

$$13\,142,16 - 12\,000 = 1\,142,16 \text{ GBP}$$

- c) Durante el primer mes los intereses son $12\,000 \cdot 0,005 = 60$ GBP. La deuda pasa a ser 12 060 y se le resta la cuota:

$$12\,060 - 365,06 = 11\,694,94 \text{ GBP}$$

Es decir, de la primera cuota solo $365,06 - 60 = 305,06$ GBP reducen la deuda.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Tabla de amortización completa

Una cooperativa recibe un préstamo de 2400 EUR con un interés nominal anual del 12 % capitalizado mensualmente, que devolverá en 6 cuotas mensuales iguales, pagadas al final de cada mes. Todos los importes se redondean a céntimos.

- Calcula la cuota mensual.
- Construye la tabla de amortización. La última cuota se ajusta para dejar la deuda en cero.
- ¿Cuál es la deuda pendiente justo después del tercer pago, y cuántos euros se pagan de intereses en total?

- a) Se tiene $PV = 2400$, $n = 6$ y $i = \frac{12}{100 \cdot 12} = 0,01$ por mes:

$$P = \frac{2400 \cdot 0,01}{1 - 1,01^{-6}} = \frac{24}{1 - 0,942045 \dots} = \frac{24}{0,057955 \dots} \approx 414,12 \text{ EUR}$$

- b) En cada fila, los intereses son el 1 % de la deuda inicial; el capital amortizado es la cuota menos los intereses; la deuda final es la inicial menos el capital amortizado.

Mes Deuda inicial (EUR) Intereses (EUR) Cuota (EUR) Capital amortizado (EUR) Deuda final (EUR)

1	2400,00	24,00	414,12	390,12	2009,88
2	2009,88	20,10	414,12	394,02	1615,86
3	1615,86	16,16	414,12	397,96	1217,90
4	1217,90	12,18	414,12	401,94	815,96
5	815,96	8,16	414,12	405,96	410,00
6	410,00	4,10	414,10	410,00	0,00

En el último mes los intereses son $410,00 \cdot 0,01 = 4,10$, así que, para dejar la deuda en cero, la cuota es $410,00 + 4,10 = 414,10$ EUR (dos céntimos menos que las demás por el redondeo). Comprobación: los intereses bajan y el capital amortizado sube en cada fila.

- c) Tras el tercer pago la deuda es la de la última columna de la fila 3: 1217,90 EUR. Los intereses totales son la suma de la columna correspondiente:

$$24,00 + 20,10 + 16,16 + 12,18 + 8,16 + 4,10 = 84,70 \text{ EUR}$$

Se confirma con las cuotas: $5 \cdot 414,12 + 414,10 = 2484,70$ EUR pagados, y $2484,70 - 2400 = 84,70$.

En el examen: en una tabla se puntúa el método: calcular los intereses sobre la deuda **inicial** de cada periodo, restarlos de la cuota y actualizar la deuda. Si te piden solo una fila, no hace falta completar toda la tabla: encadena los cálculos hasta esa fila y, si el enunciado lo permite, comprueba con la CPG. Indica siempre la unidad y no mezcles cuotas redondeadas con cuotas sin redondear.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · USAR LA TASA ANUAL COMO TASA POR PERIODO

Con pagos mensuales y un interés nominal del 6% anual, el tipo de cada mes es 0,005, no 0,06. Usar $i = 0,06$ con $n = 36$ cuotas mensuales dispara los intereses y da una cuota absurda. Antes de aplicar cualquier fórmula, calcula $i = \frac{r}{100k}$ y $n = (\text{años}) \cdot k$ con el mismo k . En la CPG, esto se cumple al escribir bien P/Y y C/Y.

ERROR TÍPICO · CALCULAR LOS INTERESES SOBRE EL PRÉSTAMO INICIAL

En una tabla de amortización los intereses de cada fila se calculan sobre la **deuda pendiente** de ese momento, no sobre el préstamo original. Si usas siempre $i \cdot PV$, los intereses salen constantes y la deuda no llega a cero. Además, la cuota no es la cantidad que se resta de la deuda: solo se resta la parte que queda tras pagar los intereses.

ERROR TÍPICO · OLVIDAR LOS SIGNOS EN LA CPG

En la herramienta financiera, PV y PMT deben tener signos contrarios: lo que recibes y lo que pagas. Si escribes ambos positivos, la CPG devuelve un error o un resultado negativo que no tiene sentido. Interpreta siempre el signo: un PMT de $-365,06$ significa que pagas 365,06, y en tu respuesta debes dar la cuota como cantidad positiva. Recuerda también que en un préstamo que se devuelve del todo, FV es 0.

Resumen

- Anualidad: pagos iguales P a intervalos iguales. Se necesitan $i = \frac{r}{100k}$ por periodo y $n = (\text{años}) \cdot k$ pagos; salvo indicación, los pagos son al final del periodo.
- Valor futuro: $FV = P \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$, la suma de una progresión geométrica de razón $1 + i$.

- Cuota de un préstamo PV : $P = \frac{PV \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$. Más plazo implica menos cuota y más intereses totales.
- Tabla de amortización: intereses = $i \cdot$ (deuda inicial), capital amortizado = $P -$ intereses, deuda final = deuda inicial – capital. Los intereses bajan y el capital sube; la última cuota se ajusta.
- Intereses totales = suma de las cuotas – préstamo.
- En la CPG: N , $I\%$ (anual), PV , PMT , FV , P/Y y C/Y ; dinero que sale con signo negativo y dinero que entra con signo positivo. En el examen del IB escribe los datos que introduces.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 2

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Término general y propiedades de las progresiones

EJERCICIO 1

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

a) El primer término de una progresión aritmética es -16 y el término undécimo es 39 .

Calcule el valor de la diferencia común de la progresión.

b) El tercer término de una progresión geométrica es 12 y el quinto término es $\frac{16}{3}$.

Todos los términos de la progresión son positivos. Calcule el valor de la razón común de la progresión.

a) Progresión aritmética con $u_1 = -16$ y $u_{11} = 39$.

1. $u_{11} = u_1 + 10d$, es decir, $39 = -16 + 10d$.

2. $10d = 55$, luego $d = 5,5$.

b) Progresión geométrica con $u_3 = 12$ y $u_5 = \frac{16}{3}$.

1. $u_5 = u_3 r^2$, ya que hay dos pasos entre el tercer y el quinto término.

2. $\frac{16}{3} = 12 r^2$, luego $r^2 = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

3. Así $r = \pm \frac{2}{3}$; como todos los términos son positivos, $r > 0$ y $r = \frac{2}{3}$.

Resultado: a) $d = 5,5$; b) $r = \frac{2}{3}$

EJERCICIO 2

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2015

Solo una de las siguientes cuatro progresiones es aritmética y solo una de ellas es geométrica.

$$a_n = 1; 2; 3; 5; \dots$$

$$b_n = 1; \frac{3}{2}; \frac{9}{4}; \frac{27}{8}; \dots$$

$$c_n = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$$

$$d_n = 1; 0,95; 0,90; 0,85; \dots$$

a) Indique qué progresión es

(i) aritmética;

(ii) geométrica.

b) Para otra progresión geométrica $e_n = -6; -3; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \dots$

(i) escriba la razón;

(ii) encuentre el valor exacto del décimo término.

Dé su respuesta en forma de fracción.

a) Una progresión es aritmética si la diferencia entre términos consecutivos es constante, y geométrica si el cociente entre términos consecutivos es constante.

1. a_n : $2 - 1 = 1$ y $3 - 2 = 1$, pero $5 - 3 = 2$. No es aritmética. Cocientes: 2, 1,5, 1,67, tampoco geométrica.

2. b_n : $\frac{3/2}{1} = \frac{3}{2}$, $\frac{9/4}{3/2} = \frac{3}{2}$, $\frac{27/8}{9/4} = \frac{3}{2}$. Cociente constante: geométrica.

3. c_n : diferencias $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{6}$, no constantes; cocientes $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, no constantes. Ninguna de las dos.

4. d_n : $0,95 - 1 = -0,05$, $0,90 - 0,95 = -0,05$, $0,85 - 0,90 = -0,05$. Diferencia constante: aritmética.

(i) aritmética: d_n . (ii) geométrica: b_n .

b)

1. (i) Razón: $r = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$. Comprobación: $\frac{-3/2}{-3} = \frac{1}{2}$.

2. (ii) Término general $e_n = u_1 r^{n-1}$, con $u_1 = -6$:

$$e_{10} = -6 \left(\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{6}{512} = -\frac{3}{256}$$

Resultado: a) (i) d_n ; (ii) b_n . b) (i) $r = \frac{1}{2}$; (ii) $e_{10} = -\frac{3}{256}$.

EJERCICIO 3

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

La siguiente tabla muestra los cinco primeros términos de tres progresiones: u_n , v_n , y w_n .

n	1	2	3	4	5
u_n	10	20	40	80	160
v_n	10	20	30	60	100
w_n	10	20	30	40	50

- a) Indique cuál de estas progresiones es
- (i) aritmética;
- (ii) geométrica.
- b) Halle el valor exacto del 11.º término de la progresión geométrica.
- c) Halle la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética.

a)

1. u_n : cocientes $\frac{20}{10} = \frac{40}{20} = \frac{80}{40} = \frac{160}{80} = 2$. Es geométrica con $r = 2$.
2. v_n : diferencias 10, 10, 30, 40 y cocientes 2, 1,5, 2; no es ninguna de las dos.
3. w_n : diferencias todas iguales a 10. Es aritmética con $d = 10$.

(i) aritmética: w_n . (ii) geométrica: u_n .

b) Con $u_1 = 10$ y $r = 2$: $u_n = 10 \cdot 2^{n-1}$, luego

$$u_{11} = 10 \cdot 2^{10} = 10 \cdot 1024 = 10240$$

c) Con $w_1 = 10$ y $d = 10$ usamos $S_n = \frac{n}{2}(2w_1 + (n-1)d)$:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \cdot 10 + 19 \cdot 10) = 10 \cdot 210 = 2100$$

Resultado: a) (i) w_n ; (ii) u_n . b) $u_{11} = 10240$. c) $S_{20} = 2100$.

EJERCICIO 4

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2014

Considere la progresión $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ donde $u_1 = 600$, $u_2 = 617$, $u_3 = 634$, $u_4 = 651$.

La progresión continúa de la misma manera.

- a) Encuentre el valor de u_{20} .
- b) Encuentre la suma de los primeros 10 términos de la progresión.

Ahora considere la progresión $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$ donde $v_1 = 3$, $v_2 = 6$, $v_3 = 12$, $v_4 = 24$

Esta progresión continúa de la misma manera.

- c) Encuentre el valor exacto de v_{10} .
- d) Encuentre la suma de los primeros 8 términos de esta progresión.

k es el valor más pequeño de n para el cual v_n es mayor que u_n

e) Calcule el valor de k .

Primera progresión: las diferencias son $617 - 600 = 17$, $634 - 617 = 17$, $651 - 634 = 17$; es aritmética con $u_1 = 600$ y $d = 17$.

a) $u_{20} = u_1 + 19d = 600 + 19 \cdot 17 = 600 + 323 = 923$.

b) $S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 600 + 9 \cdot 17) = 5(1200 + 153) = 5 \cdot 1353 = 6765$.

Segunda progresión: los cocientes son $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2$; es geométrica con $v_1 = 3$ y $r = 2$.

c) $v_{10} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$.

d) $S_8 = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 255 = 765$.

e)

1. Buscamos el menor n con $v_n > u_n$, es decir $3 \cdot 2^{n-1} > 600 + 17(n - 1)$. Se puede resolver con la CPG comparando las dos sucesiones en una tabla.
2. $n = 8$: $v_8 = 3 \cdot 128 = 384$ y $u_8 = 600 + 7 \cdot 17 = 719$. Todavía $v_8 < u_8$.
3. $n = 9$: $v_9 = 3 \cdot 256 = 768$ y $u_9 = 600 + 8 \cdot 17 = 736$. Ya $v_9 > u_9$.
4. Como v_n crece más rápido y antes no se cumple, $k = 9$.

Resultado: a) $u_{20} = 923$. b) $S_{10} = 6765$. c) $v_{10} = 1536$. d) $S_8 = 765$. e) $k = 9$.

EJERCICIO 5 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2008

El primer término de una progresión aritmética es 0 y la diferencia común es 12.

a) Encuentre el valor del término 96 de la progresión.

El primer término de una progresión geométrica es 6. El sexto término de la progresión geométrica es igual al 17.º término de la progresión aritmética dada arriba.

b) Escriba una ecuación usando esta información.

c) Calcule la razón común de la progresión geométrica.

a) 1. $u_n = u_1 + (n - 1)d$ con $u_1 = 0$ y $d = 12$. 2. $u_{96} = 0 + 95 \cdot 12 = 1140$.

Resultado a): $u_{96} = 1140$.

b) 1. El término 17 de la progresión aritmética es $u_{17} = 16 \cdot 12 = 192$. 2. En la progresión geométrica $v_n = v_1 r^{n-1}$, con $v_1 = 6$, el sexto término es $6r^5$. 3. Igualando: $6r^5 = 192$.

Resultado b): $6r^5 = 192$.

c) 1. Despejamos: $r^5 = \frac{192}{6} = 32$. 2. $r = \sqrt[5]{32} = 2$ (porque $2^5 = 32$).

Resultado c): $r = 2$.

Resultado: $u_{96} = 1140$; ecuación $6r^5 = 192$; $r = 2$.

EJERCICIO 6 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2015

El segundo término de una progresión aritmética es 30. El quinto término es 90.

a) Calcule

- i) la diferencia común de la progresión;
- ii) el primer término de la progresión.

El primero, segundo y quinto términos de esta progresión aritmética son los primeros tres términos de una progresión geométrica.

b) Calcule el séptimo término de la progresión geométrica.

a) Con $u_2 = u_1 + d = 30$ y $u_5 = u_1 + 4d = 90$:

1. Restamos: $3d = 60$, luego $d = 20$.
2. $u_1 = 30 - 20 = 10$.

Resultado a): (i) $d = 20$; (ii) $u_1 = 10$.

b) 1. Los tres primeros términos de la progresión geométrica son 10, 30, 90. 2. Razón: $r = \frac{30}{10} = 3$ (y $\frac{90}{30} = 3$, coherente). 3. Séptimo término: $v_7 = 10 \cdot 3^6 = 10 \cdot 729 = 7290$.

Resultado b): $v_7 = 7290$.

Resultado: $d = 20$; $u_1 = 10$; $v_7 = 7290$.

EJERCICIO 7

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2003

Ana y Juan van a nadar a la piscina.

Ambos hacen el primer largo de la piscina en 2 minutos.

Por cada largo que Juan nada, tarda 6 segundos más que el anterior.

Por cada largo que Ana nada, tarda 1,05 veces el tiempo que tardó en hacer el anterior.

- a)** (i) Calcule el tiempo que tarda Juan en hacer el tercer largo.
(ii) Compruebe que Ana tarda 2,205 minutos en hacer el tercer largo.
b) Calcule el tiempo que tarda Ana en hacer un total de 10 largos de piscina.

a) (i) Los tiempos de Juan forman una progresión aritmética con $u_1 = 2$ min y $d = 6$ s = 0,1 min.

$$1. u_3 = 2 + 2 \cdot 0,1 = 2,2 \text{ min.}$$

2. 2,2 min son 2 min y 12 s.

(ii) Los tiempos de Ana forman una progresión geométrica con $u_1 = 2$ y $r = 1,05$.

$$1. u_3 = 2 \cdot 1,05^2 = 2 \cdot 1,1025 = 2,205 \text{ min.}$$

Queda demostrado.

Resultado a): (i) Juan tarda 2 min 12 s en el tercer largo; (ii) Ana tarda 2,205 min.

b) 1. Suma geométrica: $S_{10} = \frac{2(1,05^{10} - 1)}{1,05 - 1}$. 2. $S_{10} = \frac{2 \cdot 0,628895}{0,05} \approx 25,16$ min.

Resultado b): Ana tarda aproximadamente 25,2 minutos.

Resultado: Juan: 2 min 12 s; Ana: 2,205 min; total de Ana $\approx 25,2$ min.

EJERCICIO 8

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2012

Parte A

El Anfiteatro Green Park fue construido en forma de herradura y tiene 20 filas.

El número de asientos en cada fila aumenta en una cantidad fija, d , en comparación con el número de asientos en la fila anterior. El número de asientos en la sexta fila, u_6 , es 100, y el número de asientos en la décima fila, u_{10} , es 124.

u_1 representa el número de asientos en la primera fila.

a) (i) Escriba una ecuación para u_6 en función de d y u_1 .

(ii) Escriba una ecuación para u_{10} en función de d y u_1 .

b) Escriba el valor de

(i) d ;

(ii) u_1 .

c) Encuentre el número total de asientos en el anfiteatro.

Unos años más tarde, se agregó un segundo nivel para aumentar la capacidad del anfiteatro en otros 1600 asientos. Cada fila tiene cuatro asientos más que la fila anterior.

La primera fila en este nivel tiene 70 asientos.

d) Encuentre el número de filas en el segundo nivel del anfiteatro.

Parte B

Frank está en el anfiteatro y recibe un mensaje de texto a las 12:00. Cinco minutos después reenvía el mensaje de texto a tres personas. Cinco minutos después, esas tres personas reenvían el mensaje de texto a tres personas nuevas. Suponga que este patrón continúa y cada vez se envía el mensaje de texto a personas que no lo han recibido antes.

El número de personas nuevas que reciben el mensaje de texto forma una progresión geométrica.

1, 3, ...

a) Escriba los siguientes dos términos de esta progresión geométrica.

b) Escriba la razón común de esta progresión geométrica.

c) Calcule el número de personas que recibirán el mensaje de texto a las 12:30.

d) Calcule el número total de personas que habrán recibido el mensaje de texto a las 12:30.

e) Calcule la hora exacta en la que un total de 29524 personas habrán recibido el mensaje de texto.

Parte A

a) El término general es $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

(i) $u_6 = u_1 + 5d$, y vale 100: $u_1 + 5d = 100$.

(ii) $u_{10} = u_1 + 9d$, y vale 124: $u_1 + 9d = 124$.

b) Restamos las dos ecuaciones: $(u_1 + 9d) - (u_1 + 5d) = 124 - 100$, es decir, $4d = 24$.

(i) $d = 6$.

(ii) De $u_1 + 5 \cdot 6 = 100$ se obtiene $u_1 = 70$.

c) Hay 20 filas. Usamos $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d)$:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2 \cdot 70 + 19 \cdot 6) = 10(140 + 114) = 10 \cdot 254 = 2540.$$

El anfiteatro tiene 2540 asientos.

d) En el segundo nivel $u_1 = 70$, $d = 4$ y la suma debe ser 1600:

- $\frac{n}{2}(2 \cdot 70 + (n-1) \cdot 4) = 1600$
- $n(70 + 2(n-1)) = 1600 \Rightarrow n(2n + 68) = 1600 \Rightarrow 2n^2 + 68n - 1600 = 0 \Rightarrow n^2 + 34n - 800 = 0$.
- Factorizando, $(n-16)(n+50) = 0$, luego $n = 16$ (la solución $n = -50$ no es válida).

El segundo nivel tiene 16 filas.

Parte B

a) Cada término se obtiene multiplicando por 3: 1, 3, 9, 27, ... Los dos siguientes son 9 y 27.

b) $r = \frac{3}{1} = 3$.

c) Los mensajes se envían cada 5 minutos: a las 12:00 corresponde el término 1, a las 12:05 el término 2, etc. Las 12:30 son $30/5 = 6$ intervalos después, es decir, el término $n = 7$:

$$u_7 = 1 \cdot 3^6 = 729.$$

d) Total hasta las 12:30 = suma de los 7 primeros términos:

$$S_7 = \frac{1 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = \frac{2187 - 1}{2} = 1093.$$

e) Buscamos n con $S_n = \frac{3^n - 1}{2} = 29524$:

$$1. 3^n - 1 = 59048 \Rightarrow 3^n = 59049.$$

$$2. \text{ Como } 59049 = 3^{10}, n = 10.$$

3. El término 10 corresponde a 9 intervalos de 5 minutos después de las 12:00, es decir, 45 minutos: las 12:45.

Resultado: A: a) (i) $u_1 + 5d = 100$; (ii) $u_1 + 9d = 124$; b) $d = 6$, $u_1 = 70$; c) 2540 asientos; d) 16 filas. B: a) 9, 27; b) $r = 3$; c) 729 personas; d) 1093 personas; e) a las 12:45.

EJERCICIO 9

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2011

Parte A

Una progresión geométrica tiene 1024 como primer término y 128 como cuarto término.

- Demuestre que la razón común es $\frac{1}{2}$.
- Encuentre el valor del undécimo término.
- Encuentre la suma de los primeros ocho términos.
- Encuentre el número de términos en la progresión para los cuales la suma de los primeros términos excede 2047,968.

Parte B

Considere la progresión aritmética 1, 4, 7, 10, 13, ...

- Encuentre el valor del undécimo término.
- La suma de los primeros n términos de esta progresión es $\frac{n}{2}(3n - 1)$.
 - Encuentre la suma de los primeros 100 términos en esta progresión aritmética.
 - La suma de los primeros n términos es 477.
- Muestre que $3n^2 - n - 954 = 0$.
- Usando su calculadora de pantalla gráfica o de otra manera, encuentre el número de términos, n .

Parte A

a) $u_4 = u_1 r^3$, luego $128 = 1024 r^3$ y $r^3 = \frac{128}{1024} = \frac{1}{8}$. Por tanto $r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$. Queda demostrado.

b) $u_{11} = 1024 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1024}{1024} = 1.$

c) $S_8 = \frac{1024 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2048 \left(1 - \frac{1}{256}\right) = 2048 - 8 = 2040.$

d) $S_n = 2048 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) > 2047,968:$

1. $2048 \left(\frac{1}{2}\right)^n < 2048 - 2047,968 = 0,032.$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{0,032}{2048} = \frac{1}{64\,000},$ es decir, $2^n > 64\,000.$

3. Como $2^{15} = 32\,768 < 64\,000$ y $2^{16} = 65\,536 > 64\,000,$ el menor n es 16 (se comprueba también con una tabla de la CPG).

El número de términos es 16.

Parte B

a) $d = 3$ y $u_1 = 1: u_{11} = 1 + 10 \cdot 3 = 31.$

b) (i) $S_{100} = \frac{100}{2} (3 \cdot 100 - 1) = 50 \cdot 299 = 14\,950.$

(ii) (a) Igualamos $\frac{n}{2}(3n - 1) = 477:$

1. $n(3n - 1) = 954$

2. $3n^2 - n = 954$

3. $3n^2 - n - 954 = 0.$ **Queda demostrado.**

b) Resolvemos la ecuación con la CPG (o con la fórmula): $n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 954}}{6} = \frac{1 \pm 107}{6},$ que da $n = 18$ o $n = -\frac{53}{3}.$ Como n debe ser un entero positivo, $n = 18.$

Resultado: A: b) $u_{11} = 1;$ c) $S_8 = 2040;$ d) 16 términos. B: a) 31; b) (i) 14 950; (ii) $n = 18.$

EJERCICIO 10

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2019

El primer día que está en el hospital, a Kiri le dan u_1 miligramos (mg) de un medicamento determinado.

La cantidad de medicamento que le dan a Kiri va aumentando cada día, siempre en la misma cantidad (d). El séptimo día le dan 21 mg de medicamento y el undécimo día le dan 29 mg.

- a) Escriba una ecuación, en función de u_1 y d , que represente la cantidad de medicamento que le dan
- (i) el séptimo día;
 - (ii) el undécimo día.
- b) Escriba el valor de d y el valor de u_1 .

Kiri toma este medicamento durante 30 días.

- c) Calcule la cantidad total del medicamento (en mg) que habrá tomado.

Ted también está ingresado en el hospital y el primer día le ponen una inyección de 20 mg de antibiótico. La cantidad de antibiótico que le dan a Ted va disminuyendo un 50 % cada día.

Es decir, el segundo día a Ted le ponen una inyección de 10 mg de antibiótico, el tercer día le ponen 5 mg, y así sucesivamente.

- d) (i) Halle la cantidad de antibiótico (en mg) que le ponen a Ted el quinto día.
- (ii) La cantidad diaria de antibiótico que le ponen a Ted será por primera vez inferior a 0,06 mg el k .º día. Halle el valor de k .
- (iii) A partir de lo anterior, halle la cantidad total de antibiótico (en mg) que le habrán dado a Ted durante esos k primeros días.

- a) Los aumentos diarios son constantes, así que $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

- (i) Séptimo día: $u_1 + 6d = 21$.

- (ii) Undécimo día: $u_1 + 10d = 29$.

Resultado a): $u_1 + 6d = 21$ y $u_1 + 10d = 29$.

- b) 1. Restamos las dos ecuaciones: $4d = 8$, luego $d = 2$. 2. $u_1 + 12 = 21$, por lo que $u_1 = 9$.

Resultado b): $d = 2$ mg; $u_1 = 9$ mg.

- c) 1. $S_{30} = \frac{30}{2}(2 \cdot 9 + 29 \cdot 2)$. 2. $S_{30} = 15(18 + 58) = 15 \cdot 76 = 1140$ mg.

Resultado c): 1140 mg.

- d) Las dosis de Ted forman una progresión geométrica con $v_1 = 20$ y $r = 0,5$.

- (i) $v_5 = 20 \cdot 0,5^4 = 20 \cdot 0,0625 = 1,25$ mg.

- (ii) 1. Imponemos $20 \cdot 0,5^{k-1} < 0,06$, es decir, $0,5^{k-1} < 0,003$. 2. Con la CPG (tabla de valores o resolviendo la desigualdad) o con logaritmos: $k - 1 > \frac{\ln 0,003}{\ln 0,5} \approx 8,38$. 3. El menor entero es $k - 1 = 9$, luego $k = 10$.

Comprobación: $v_9 = 0,078 > 0,06$ y $v_{10} = 0,039 < 0,06$.

- (iii) 1. $S_{10} = \frac{20(1 - 0,5^{10})}{1 - 0,5} = 40 \left(1 - \frac{1}{1024}\right)$. 2. $S_{10} \approx 39,96 \approx 40,0$ mg.

Resultado d): (i) 1,25 mg; (ii) $k = 10$ (décimo día); (iii) $\approx 40,0$ mg.

Resultado: $d = 2$, $u_1 = 9$; Kiri toma 1140 mg; Ted: 1,25 mg el quinto día, $k = 10$ y $\approx 40,0$ mg en total.

EJERCICIO 11

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2016

Prachi está de vacaciones en Estados Unidos. Está visitando el Gran Cañón.

Cuando llega a la parte más alta del cañón deja caer una moneda por un precipicio.

La moneda, en su caída, recorre una distancia de 5 metros en el primer segundo, de 15 metros en el siguiente segundo, de 25 metros en el tercer segundo y sigue cayendo de esta manera.

Estas distancias que la moneda va recorriendo en cada segundo forman una progresión aritmética.

- (i) Escriba la diferencia común, d , de esta progresión aritmética.
- (ii) Escriba la distancia que recorre la moneda en el cuarto segundo.
- Calcule la distancia que recorre la moneda en el segundo número 15.
- Calcule la distancia total que recorre la moneda en los 15 primeros segundos de caída.

Dé la respuesta en kilómetros.

Prachi deja caer la moneda desde una altura de 1800 metros sobre el suelo.

- Calcule el tiempo, redondeando al número entero de segundos más próximo, que tardará la moneda en llegar al suelo.

Prachi acude a una oficina de turismo cercana. Se inauguró a principios de 2015 y en el primer año tuvo ya 17000 visitantes. Se espera que el número de personas que acuden a esta oficina de turismo vaya aumentando un 10 % cada año.

- Calcule cuántas personas se espera que acudan a la oficina de turismo en 2016.
- Calcule el número total de personas que se espera que hayan acudido a la oficina durante los 10 primeros años tras su inauguración.

Las distancias 5, 15, 25, ... forman una progresión aritmética con $u_1 = 5$.

a)

- (i) La diferencia común es la resta de dos términos consecutivos: $d = 15 - 5 = 10$ m.
- (ii) Cuarto segundo: $u_4 = u_3 + d = 25 + 10 = 35$ m.

b)

- Fórmula del término general: $u_n = u_1 + (n - 1)d$.
- Para $n = 15$: $u_{15} = 5 + 14 \cdot 10 = 145$ m.

c)

- Suma de los n primeros términos: $S_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n)$.
- $S_{15} = \frac{15}{2} (5 + 145) = 1125$ m.
- Pasamos a kilómetros dividiendo entre 1000: $1,125 \text{ km} \approx 1,13 \text{ km}$.

d)

- La suma en forma general es $S_n = \frac{n}{2} [2 \cdot 5 + (n - 1) \cdot 10] = 5n^2$.
- Imponemos $S_n = 1800$: $5n^2 = 1800 \Rightarrow n^2 = 360 \Rightarrow n \approx 18,97$.
- Redondeando al entero más próximo: $n = 19$ segundos.

e) Cada año el número de visitantes se multiplica por 1,10 (progresión geométrica con $v_1 = 17000$ en 2015).

- Para 2016: $v_2 = 17000 \cdot 1,1 = 18700$ personas.

f)

- Suma de los n primeros términos de una geométrica: $S_n = \frac{v_1(r^n - 1)}{r - 1}$, con $r = 1,1$.

$$2. S_{10} = \frac{17000(1,1^{10} - 1)}{0,1} \approx 270936.$$

Resultado: a) (i) $d = 10$ m; (ii) 35 m. b) 145 m. c) 1,125 km ($\approx 1,13$ km). d) 19 s. e) 18 700 personas. f) $\approx 270 936$ personas ($\approx 271 000$).

EJERCICIO 12

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2013

El lunes Paco va a entrenar a una pista de atletismo. La primera vuelta a la pista la corre en 120 segundos.

A partir de ahí, cada vuelta que corre Paco tarda 10 segundos más que en la vuelta anterior.

a) Halle el tiempo, en segundos, que tarda Paco en correr la quinta vuelta.

Paco tarda 260 segundos en correr la última vuelta.

b) Halle cuántas vueltas ha corrido Paco el lunes.

c) Halle el tiempo total, en minutos, que ha estado corriendo Paco el lunes.

El miércoles Paco lleva a Lola al entrenamiento. Ambos corren la primera vuelta a la pista en 120 segundos.

Cada vuelta que corre Lola tarda 1,06 veces del tiempo que tardó en la vuelta anterior.

d) Halle el tiempo, en segundos, que tarda Lola en correr la tercera vuelta.

e) Halle el tiempo total, en segundos, que tarda Lola en correr las cuatro primeras vueltas.

Como antes, cada vuelta que corre Paco tarda 10 segundos más de lo que tardó en la vuelta anterior. Al cabo de un determinado número de vueltas, Paco corre cada vuelta en menos tiempo que Lola.

f) Halle a partir de qué vuelta sucede esto.

a) Los tiempos de Paco forman una progresión aritmética con $u_1 = 120$ y $d = 10$.

$$1. u_5 = 120 + 4 \cdot 10 = 160 \text{ s.}$$

b)

$$1. \text{Imponemos } u_n = 260: 120 + (n - 1) \cdot 10 = 260.$$

$$2. (n - 1) \cdot 10 = 140 \Rightarrow n - 1 = 14 \Rightarrow n = 15 \text{ vueltas.}$$

c)

$$1. \text{Suma de la aritmética: } S_{15} = \frac{15}{2}(120 + 260) = 2850 \text{ s.}$$

$$2. \text{En minutos: } 2850/60 = 47,5 \text{ min.}$$

d) Los tiempos de Lola forman una progresión geométrica con $v_1 = 120$ y $r = 1,06$.

$$1. v_n = v_1 r^{n-1}.$$

$$2. v_3 = 120 \cdot 1,06^2 = 134,832 \approx 134,83 \text{ s } (\approx 135 \text{ s}).$$

e)

$$1. S_4 = \frac{120(1,06^4 - 1)}{1,06 - 1}.$$

$$2. S_4 \approx 524,95 \text{ s } (\approx 525 \text{ s}).$$

f)

$$1. \text{Tiempo de Paco en la vuelta } n: u_n = 120 + 10(n - 1) = 110 + 10n. \text{ Tiempo de Lola: } v_n = 120 \cdot 1,06^{n-1}.$$

2. Buscamos el menor n con $110 + 10n < 120 \cdot 1,06^{n-1}$. Se puede hacer con una tabla de la CPG o resolviendo la desigualdad con las dos gráficas.

3. Comprobamos valores: $n = 12$: Paco 230, Lola $\approx 227,8$ (todavía es más rápida Lola). $n = 13$: Paco 240, Lola $\approx 241,5$ (ya Paco es más rápido).

Resultado: a) 160 s. b) 15 vueltas. c) 47,5 min. d) $\approx 134,83$ s (≈ 135 s). e) $\approx 524,95$ s (≈ 525 s). f) a partir de la vuelta 13.

Progresiones aritméticas: término y suma

EJERCICIO 13 ★ Básico IB · P1 TZ0 Mayo 2005

A continuación aparecen los cinco primeros términos de una progresión aritmética.

2, 6, 10, 14, 18

- Escriba el sexto número de esta progresión.
- Calcule el término que ocupa el lugar 200.
- Calcule la suma de los 90 primeros términos de la progresión.

La diferencia entre términos consecutivos es $6 - 2 = 4$, así que $u_1 = 2$ y $d = 4$.

- $u_6 = u_5 + d = 18 + 4 = 22$.
- $u_{200} = u_1 + 199d = 2 + 199 \cdot 4 = 2 + 796 = 798$.
- $S_{90} = \frac{90}{2} (2 \cdot 2 + 89 \cdot 4) = 45 (4 + 356) = 45 \cdot 360 = 16200$.

Resultado: a) $u_6 = 22$; b) $u_{200} = 798$; c) $S_{90} = 16200$

EJERCICIO 14 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2001

Los primeros cuatro términos de una progresión aritmética se muestran a continuación.

1, 5, 9, 13, ...

- Escriba el enésimo término de la progresión.
- Calcule el término 100 de la progresión.
- Encuentre la suma de los primeros 100 términos de la progresión.

La diferencia común es $d = 5 - 1 = 4$ y $u_1 = 1$.

- $u_n = u_1 + (n - 1)d = 1 + 4(n - 1) = 4n - 3$.
- $u_{100} = 4 \cdot 100 - 3 = 397$.
- $S_{100} = \frac{100}{2} (u_1 + u_{100}) = 50 (1 + 397) = 50 \cdot 398 = 19900$.

Resultado: a) $u_n = 4n - 3$; b) $u_{100} = 397$; c) $S_{100} = 19900$

EJERCICIO 15 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2012

El décimo término de una progresión aritmética es 32 y la diferencia común es -6 .

- Halle el primer término de la progresión.
- Halle el término 21 de la progresión.
- Halle la suma de los 30 primeros términos de la progresión.

a) $u_{10} = u_1 + 9d$, luego $32 = u_1 + 9(-6)$ y por tanto $u_1 = 32 + 54 = 86$.

b) $u_{21} = u_1 + 20d = 86 + 20(-6) = 86 - 120 = -34$.

$$c) S_{30} = \frac{30}{2} (2 \cdot 86 + 29 \cdot (-6)) = 15 (172 - 174) = 15 \cdot (-2) = -30.$$

Resultado: a) $u_1 = 86$. b) $u_{21} = -34$. c) $S_{30} = -30$.

EJERCICIO 16

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

El primer término de una progresión aritmética es 3 y el séptimo término es 33.

Calcule

- la diferencia común;
- el término 95.º de la progresión;
- la suma de los primeros 250 términos.

$$a) u_7 = u_1 + 6d, \text{ es decir, } 33 = 3 + 6d, \text{ luego } d = \frac{30}{6} = 5.$$

$$b) u_{95} = u_1 + 94d = 3 + 94 \cdot 5 = 3 + 470 = 473.$$

$$c) S_{250} = \frac{250}{2} (2 \cdot 3 + 249 \cdot 5) = 125 (6 + 1245) = 125 \cdot 1251 = 156\,375.$$

Resultado: a) $d = 5$; b) $u_{95} = 473$; c) $S_{250} = 156\,375$.

EJERCICIO 17

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2009

Considere la siguiente progresión: 57, 55, 53, ..., 5, 3

- Encuentre el número de términos de la progresión.
- Encuentre la suma de la progresión.

$$a) d = 55 - 57 = -2. \text{ El último término es 3:}$$

$$1. 57 + (n - 1)(-2) = 3$$

$$2. -2(n - 1) = -54$$

$$3. n - 1 = 27 \Rightarrow n = 28.$$

$$b) S_{28} = \frac{28}{2} (57 + 3) = 14 \cdot 60 = 840.$$

Resultado: a) 28 términos; b) 840.

EJERCICIO 18

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

Un cometa gira alrededor del Sol y se ve desde la Tierra cada 37 años. La primera vez que se vio el cometa desde la Tierra fue en el año 1064.

- Halle en qué año se vio el cometa desde la Tierra por quinta vez.
- Determine cuántas veces se ha visto el cometa desde la Tierra hasta el año 2014.

Los años de aparición forman una progresión aritmética con $u_1 = 1064$ y $d = 37$.

a)

$$1. u_n = u_1 + (n - 1)d.$$

$$2. \text{Quinta vez: } u_5 = 1064 + 4 \cdot 37 = 1064 + 148 = 1212.$$

b)

1. Buscamos el mayor n con $u_n \leq 2014$: $1064 + 37(n - 1) \leq 2014$.
2. $37(n - 1) \leq 950 \Rightarrow n - 1 \leq 25,67 \Rightarrow n \leq 26,67$.
3. Como n es entero, $n = 26$ (en el año $1064 + 25 \cdot 37 = 1989$ fue la última aparición antes de 2014).

Resultado: a) año 1212. b) 26 veces.

EJERCICIO 19

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2006

Los primeros tres términos de una progresión aritmética son $2k + 3$, $5k - 2$, y $10k - 15$.

- a) Muestre que $k = 4$.
- b) Encuentre los valores de los primeros tres términos de la progresión.
- c) Escriba el valor de la diferencia común.
- d) Calcule el vigésimo término de la progresión.
- e) Encuentre la suma de los primeros 15 términos de la progresión.

a) En una progresión aritmética la diferencia entre términos consecutivos es constante: $u_2 - u_1 = u_3 - u_2$.

1. $(5k - 2) - (2k + 3) = (10k - 15) - (5k - 2)$.
2. Simplificamos cada lado: $3k - 5 = 5k - 13$.
3. Agrupamos: $8 = 2k$, luego $k = 4$.

Queda demostrado.

b) Con $k = 4$:

- $u_1 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$
- $u_2 = 5 \cdot 4 - 2 = 18$
- $u_3 = 10 \cdot 4 - 15 = 25$

c) $d = 18 - 11 = 7$.

d) $u_n = u_1 + (n - 1)d$, luego $u_{20} = 11 + 19 \cdot 7 = 11 + 133 = 144$.

e) $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d)$:

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2 \cdot 11 + 14 \cdot 7) = \frac{15}{2}(22 + 98) = \frac{15}{2} \cdot 120 = 900.$$

Resultado: b) 11, 18, 25; c) $d = 7$; d) $u_{20} = 144$; e) $S_{15} = 900$

EJERCICIO 20

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2004

El término n -ésimo de una progresión aritmética viene dado por $u_n = 63 - 4n$.

- a) Calcule los valores de los dos primeros términos de esta progresión.
- b) ¿Qué término de la progresión es -13 ?
- c) La suma de dos términos consecutivos de la progresión, u_k y u_{k+1} es 34. Halle k .

a)

- $u_1 = 63 - 4 \cdot 1 = 59$
- $u_2 = 63 - 4 \cdot 2 = 55$

b) Igualamos $u_n = -13$: $63 - 4n = -13$, luego $4n = 76$ y $n = 19$.

c)

- $u_k = 63 - 4k$ y $u_{k+1} = 63 - 4(k+1) = 59 - 4k$.
- Su suma: $(63 - 4k) + (59 - 4k) = 122 - 8k$.
- Imponemos $122 - 8k = 34$: $8k = 88$, luego $k = 11$.

Resultado: a) $u_1 = 59$, $u_2 = 55$; b) $n = 19$; c) $k = 11$

EJERCICIO 21

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

El sexto término de una sucesión aritmética es 24. La diferencia común es 8.

a) Calcule el primer término de la sucesión.

La suma de los n primeros términos es 600.

b) Calcule el valor de n .

a) $u_6 = u_1 + 5d$, así que $24 = u_1 + 5 \cdot 8$ y $u_1 = 24 - 40 = -16$.

b)

$$1. S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(-32 + 8(n-1)) = \frac{n}{2}(8n - 40) = 4n^2 - 20n.$$

$$2. \text{Imponemos } S_n = 600: 4n^2 - 20n - 600 = 0, \text{ es decir, } n^2 - 5n - 150 = 0.$$

$$3. \text{Factorizamos: } (n-15)(n+10) = 0, \text{ luego } n = 15 \text{ o } n = -10.$$

$$4. \text{Como } n \text{ es un número natural, } n = 15.$$

Resultado: a) $u_1 = -16$; b) $n = 15$

EJERCICIO 22

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2013

En una progresión aritmética, el quinto término, u_5 , es mayor que el primer término, u_1 .

La diferencia entre estos términos es 36.

a) Encuentre la diferencia común, d .

El décimo término de la progresión es el doble del séptimo término.

b) (i) Escriba una ecuación en u_1 y d para mostrar esta información.

(ii) Calcule u_1 .

a) $u_5 = u_1 + 4d$, de modo que $u_5 - u_1 = 4d = 36$ y $d = 9$.

b) (i) El décimo término es $u_{10} = u_1 + 9d$ y el séptimo es $u_7 = u_1 + 6d$. Que el décimo sea el doble del séptimo se escribe:

$$u_1 + 9d = 2(u_1 + 6d).$$

(ii) 1. Sustituimos $d = 9$: $u_1 + 81 = 2(u_1 + 54) = 2u_1 + 108$. 2. Agrupamos: $81 - 108 = 2u_1 - u_1$, luego $u_1 = -27$.

Comprobación: $u_7 = -27 + 54 = 27$ y $u_{10} = -27 + 81 = 54 = 2 \cdot 27$.

Resultado: a) $d = 9$; b) (i) $u_1 + 9d = 2(u_1 + 6d)$; (ii) $u_1 = -27$

EJERCICIO 23

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2010

Un coro se dispone a dar un concierto. Sus integrantes se colocan en filas, según una progresión aritmética. Así, en la cuarta fila hay 20 cantantes, y en la octava fila hay 32 cantantes.

a) Halle la diferencia común de esta progresión aritmética.

En el coro hay 10 filas. En la primera fila hay 11 cantantes.

b) Halle el número total de cantantes que hay en el coro.

a)

1. Del octavo al cuarto término hay 4 saltos de la diferencia común: $u_8 = u_4 + 4d$.

2. $32 = 20 + 4d$, luego $4d = 12$ y $d = 3$.

b)

1. Con $u_1 = 11$, $d = 3$ y $n = 10$: $S_{10} = \frac{10}{2} (2 \cdot 11 + 9 \cdot 3) = 5 (22 + 27) = 5 \cdot 49 = 245$.

2. Comprobación con los datos: $u_4 = 11 + 9 = 20$ y $u_8 = 11 + 21 = 32$, correctos.

Resultado: a) $d = 3$. b) 245 cantantes.

EJERCICIO 24

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

El primer término de una progresión aritmética es 3 y la suma de los dos primeros términos es igual a 11.

a) Escriba el segundo término de esta progresión.

b) Escriba la diferencia común de esta progresión.

c) Escriba el cuarto término de esta progresión.

d) El término n -ésimo es el primer término de esta progresión que es mayor que 1000.

Halle el valor de n .

a) La suma de los dos primeros términos es $u_1 + u_2 = 11$ y $u_1 = 3$, así que $u_2 = 11 - 3 = 8$.

b) La diferencia común es $d = u_2 - u_1 = 8 - 3 = 5$.

c) $u_4 = u_1 + 3d = 3 + 3 \cdot 5 = 18$.

d) El término general es $u_n = 3 + 5(n - 1)$. Imponemos $u_n > 1000$:

1. $3 + 5(n - 1) > 1000$

2. $5(n - 1) > 997$

3. $n - 1 > 199,4$, es decir, $n > 200,4$.

Como n es entero, el primer valor posible es $n = 201$. Comprobación: $u_{201} = 3 + 5 \cdot 200 = 1003 > 1000$ y $u_{200} = 998 < 1000$.

Resultado: a) $u_2 = 8$; b) $d = 5$; c) $u_4 = 18$; d) $n = 201$.

EJERCICIO 25

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

Considere la progresión aritmética 326, 321, 316, 311, ..., 191.

- Encuentre el valor de la diferencia común de esta progresión.
- Calcule la suma de los 10 primeros términos de esta progresión.
- Encuentre el número de términos en esta progresión.

a) $d = 321 - 326 = -5$.

b) $S_{10} = \frac{10}{2} (2 \cdot 326 + 9 \cdot (-5)) = 5 (652 - 45) = 5 \cdot 607 = 3035$.

c) El último término es 191, así que $u_n = 326 + (n - 1)(-5) = 191$:

1. $-5(n - 1) = 191 - 326 = -135$

2. $n - 1 = 27$

3. $n = 28$.

Resultado: a) $d = -5$; b) $S_{10} = 3035$; c) 28 términos.

EJERCICIO 26

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2009

Un árbol comienza a perder sus hojas en octubre. La cantidad de hojas que pierde el árbol cada día aumenta en el mismo número en cada día sucesivo.

Día de Octubre 1 2 3 4

Número de hojas perdidas 24 40 56 72

- Calcule el número de hojas que pierde el árbol el 21 de octubre.
- Encuentre el número total de hojas que pierde el árbol en los 31 días del mes de octubre.

Las cantidades 24, 40, 56, 72, ... forman una progresión aritmética con $u_1 = 24$ y $d = 40 - 24 = 16$.

a) El 21 de octubre corresponde a $n = 21$: $u_{21} = 24 + 20 \cdot 16 = 24 + 320 = 344$ hojas.

b) Octubre tiene 31 días: $S_{31} = \frac{31}{2} (2 \cdot 24 + 30 \cdot 16) = \frac{31}{2} \cdot 528 = 31 \cdot 264 = 8184$ hojas.

Resultado: a) 344 hojas; b) 8184 hojas.

EJERCICIO 27

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2009

Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 7 y que el sexto término es 22, halle

- la diferencia común;
- el término duodécimo (el número 12);
- la suma de los 100 primeros términos.

a) En una progresión aritmética $u_n = u_1 + (n - 1)d$. Con $u_6 = 22$ y $u_1 = 7$:

1. $7 + 5d = 22$.

2. $5d = 15$, luego $d = 3$.

Resultado a): $d = 3$.

b) 1. $u_{12} = u_1 + 11d = 7 + 11 \cdot 3$. 2. $u_{12} = 7 + 33 = 40$.

Resultado b): $u_{12} = 40$.

c) 1. Fórmula de la suma: $S_n = \frac{n}{2} (2u_1 + (n-1)d)$. 2. $S_{100} = 50 (14 + 99 \cdot 3) = 50 \cdot 311$. 3. $S_{100} = 15550$.

Resultado c): $S_{100} = 15550$.

Resultado: $d = 3$; $u_{12} = 40$; $S_{100} = 15550$.

EJERCICIO 28

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

Dada la progresión aritmética: $u_1 = 124$, $u_2 = 117$, $u_3 = 110$, $u_4 = 103, \dots$

- a) Escriba el valor de la diferencia común de esta progresión.
b) Calcule la suma de los 50 primeros términos de la progresión.

u_k es el primer término de la progresión que es negativo.

- c) Halle el valor de k .

a) $d = u_2 - u_1 = 117 - 124 = -7$.

Resultado a): $d = -7$.

b) 1. $S_n = \frac{n}{2} (2u_1 + (n-1)d)$. 2. $S_{50} = 25 (248 + 49 \cdot (-7)) = 25(248 - 343)$. 3. $S_{50} = 25 \cdot (-95) = -2375$.

Resultado b): $S_{50} = -2375$.

c) 1. $u_n = 124 - 7(n-1) = 131 - 7n$. 2. Buscamos el primer n con $u_n < 0$: $131 - 7n < 0 \Rightarrow n > \frac{131}{7} \approx 18,71$. 3. El primer entero es $n = 19$. Comprobación: $u_{18} = 5 > 0$ y $u_{19} = -2 < 0$.

Resultado c): $k = 19$.

Resultado: $d = -7$; $S_{50} = -2375$; $k = 19$.

EJERCICIO 29

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2007

Los números naturales: $1, 2, 3, 4, 5 \dots$ forman una progresión aritmética.

- a) Establezca para esta progresión los valores de u_1 y de d .
b) Utilice una fórmula adecuada para demostrar que la suma de los números naturales desde 1 hasta n , viene dada por $\frac{1}{2}n(n+1)$.
c) Calcule la suma de los números naturales desde 1 hasta 200.

a) La sucesión $1, 2, 3, 4, \dots$ empieza en 1 y cada término suma 1 al anterior: $u_1 = 1$, $d = 1$.

Resultado a): $u_1 = 1$; $d = 1$.

b) 1. Usamos $S_n = \frac{n}{2} (2u_1 + (n-1)d)$. 2. Sustituimos $u_1 = 1$ y $d = 1$: $S_n = \frac{n}{2} (2 + (n-1))$. 3. Simplificamos: $S_n = \frac{n}{2} (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Queda demostrado.

c) 1. $S_{200} = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 201$. 2. $S_{200} = 100 \cdot 201 = 20100$.

Resultado c): $S_{200} = 20100$.

Resultado: $u_1 = 1$, $d = 1$; fórmula demostrada; $S_{200} = 20100$.

EJERCICIO 30

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

El quinto término de una progresión aritmética es 20 y el duodécimo término es 41.

- (i) Encuentre la diferencia común.
- (ii) Encuentre el primer término de la progresión.
- Calcule el término ochenta y cuatro.
- Calcule la suma de los primeros 200 términos.

a) Planteamos $u_5 = u_1 + 4d = 20$ y $u_{12} = u_1 + 11d = 41$.

1. Restamos la primera ecuación a la segunda: $7d = 21$.

2. $d = 3$.

3. Sustituimos en la primera: $u_1 + 12 = 20$, luego $u_1 = 8$.

Resultado a): (i) $d = 3$; (ii) $u_1 = 8$.

b) 1. $u_{84} = u_1 + 83d = 8 + 83 \cdot 3$. 2. $u_{84} = 8 + 249 = 257$.

Resultado b): $u_{84} = 257$.

c) 1. $S_{200} = 100(2 \cdot 8 + 199 \cdot 3)$. 2. $S_{200} = 100(16 + 597) = 100 \cdot 613 = 61300$.

Resultado c): $S_{200} = 61300$.

Resultado: $d = 3$; $u_1 = 8$; $u_{84} = 257$; $S_{200} = 61300$.

EJERCICIO 31

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2017

Tomás está jugando con unos palos y con ellos forma los tres primeros diagramas de un patrón. Estos diagramas se muestran a continuación.



Diagrama 1



Diagrama 2



Diagrama 3

Tomás continúa formando diagramas siguiendo este mismo patrón.

- Para formar el diagrama n utiliza 52 palos. Halle el valor de n .

Tomás forma, en total, 24 diagramas.

- Halle el número total de palos que ha utilizado Tomás para formar estos 24 diagramas.

Los números de palos 4, 7, 10, ... forman una progresión aritmética con $u_1 = 4$ y $d = 3$.

a)

1. $u_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 1$.

2. $3n + 1 = 52 \Rightarrow 3n = 51 \Rightarrow n = 17$.

b)

1. $u_{24} = 3 \cdot 24 + 1 = 73$.

2. $S_{24} = \frac{24}{2}(4 + 73) = 12 \cdot 77 = 924$ palos.

Resultado: a) $n = 17$. b) 924 palos.

EJERCICIO 32

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2016

Uno de los lugares de los Juegos Olímpicos de 2016 es un anfiteatro. La cantidad de asientos en la primera fila del anfiteatro, u_1 , es 240. El número de asientos en cada fila subsiguiente forma una progresión aritmética. El número de asientos en la sexta fila, u_6 , es 270.

a) Calcule el valor de la diferencia común, d .

Hay 20 filas en el anfiteatro.

b) Encuentre el número total de asientos en el anfiteatro.

Anisha visita el anfiteatro. Ella estima que el anfiteatro tiene 6500 asientos.

c) Calcule el error porcentual en la estimación de Anisha.

a)

$$1. u_6 = u_1 + 5d \Rightarrow 270 = 240 + 5d.$$

$$2. 5d = 30 \Rightarrow d = 6.$$

b)

$$1. S_{20} = \frac{20}{2} [2 \cdot 240 + 19 \cdot 6] = 10 \cdot (480 + 114) = 10 \cdot 594 = 5940 \text{ asientos.}$$

c)

$$1. \text{Error porcentual} = \frac{|\text{valor estimado} - \text{valor exacto}|}{|\text{valor exacto}|} \cdot 100.$$

$$2. \frac{|6500 - 5940|}{5940} \cdot 100 = \frac{560}{5940} \cdot 100 \approx 9,43 \%.$$

Resultado: a) $d = 6$. b) 5940 asientos. c) $\approx 9,43 \%$.

EJERCICIO 33

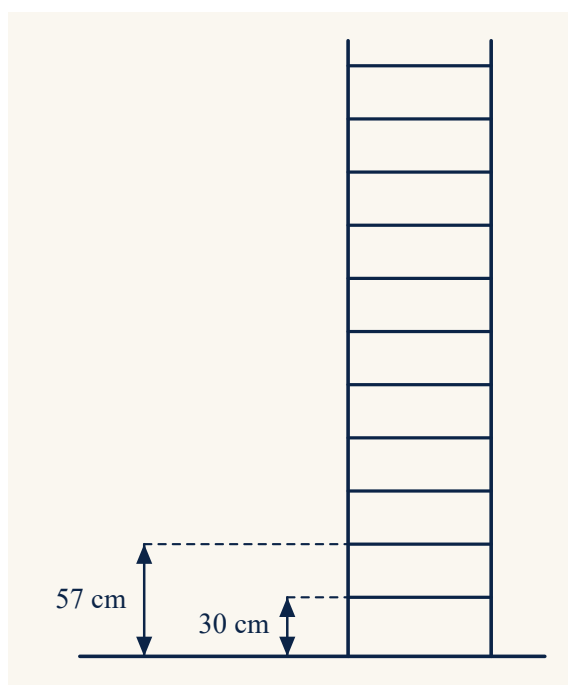
★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

La empresa Snakezen's Ladders fabrica escaleras de diferentes longitudes. Todas las escaleras que hace la empresa tienen el mismo diseño de tal manera que:

el primer peldaño está a 30 cm de la base de la escalera, el segundo peldaño está a 57 cm de la base de la escalera, la distancia entre el primer y segundo peldaño es igual a la distancia entre todos peldaños adyacentes en la escalera.

La escalera en el diagrama fue hecha por esta compañía y tiene once peldaños igualmente espaciados.



a) Encuentre la distancia desde la base de esta escalera hasta el peldaño superior.

La empresa también fabrica una escalera de 1050 cm de largo.

b) Encuentre el número máximo de peldaños en esta escalera de 1050 cm de largo.

a)

1. Las alturas de los peldaños forman una progresión aritmética: $u_1 = 30$ y $u_2 = 57$.

2. La diferencia es $d = 57 - 30 = 27$ cm.

3. El peldaño superior es el undécimo: $u_{11} = u_1 + (11 - 1)d = 30 + 10 \cdot 27 = 300$.

Resultado a): la distancia es 300 cm.

b)

1. El peldaño n está a $u_n = 30 + 27(n - 1)$ cm de la base, y debe cumplirse $u_n \leq 1050$.

2. $30 + 27(n - 1) \leq 1050 \Rightarrow 27(n - 1) \leq 1020 \Rightarrow n - 1 \leq 37,78 \dots$

3. Como n es entero, $n - 1 = 37$, luego $n = 38$. Comprobación: $u_{38} = 30 + 27 \cdot 37 = 1029 \leq 1050$, y $u_{39} = 1056 > 1050$.

Resultado: el número máximo de peldaños es 38.

EJERCICIO 34

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2018

Sergei está entrenando para ser levantador de pesas. Cada día entrena en el gimnasio local levantando una barra que tiene pesos pesados adjuntos. Realiza sucesivos levantamientos. Después de cada levantamiento, el mismo agrega una cantidad de peso a la barra para aumentar el peso que se debe levantar. Los pesos de cada uno de los levantamientos de Sergei forman una progresión aritmética. El amigo de Sergei, Yuri, registra el peso de cada levantamiento. Desafortunadamente, el lunes pasado, Yuri perdió todas menos dos de las anotaciones de los levantamientos de Sergei. Ese día, Sergei levantó 21 kg en el tercer levantamiento y 46 kg en el octavo levantamiento.

- a) Para ese día
- (i) encuentre cuánto peso se agregó después de cada levantamiento;
 - (ii) encuentre el peso del primer levantamiento de Sergei.

Ese día, Sergei realizó 12 levantamientos sucesivos.

- b) Encuentre el peso total combinado de estos levantamientos.

a)

1. Los pesos forman una progresión aritmética con $u_3 = 21$ y $u_8 = 46$.
2. Entre el tercer y el octavo levantamiento hay 5 incrementos: $u_8 - u_3 = 5d$.

(i) $5d = 46 - 21 = 25 \Rightarrow d = 5$.

(ii) $u_1 = u_3 - 2d = 21 - 10 = 11$.

Resultado a): (i) se añadieron 5 kg después de cada levantamiento; (ii) el primer levantamiento fue de 11 kg.

b)

1. $u_{12} = 11 + 11 \cdot 5 = 66$.
2. $S_{12} = \frac{12}{2}(u_1 + u_{12}) = 6(11 + 66) = 462$.

Resultado b): el peso total combinado es 462 kg.

EJERCICIO 35

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2000

El Sr. Jones decide aumentar la cantidad de dinero que gasta en comida en d GBP cada año. En el primer año gasta a GBP. En el 8º año gasta el doble que en el 4º año. En el 20º año gasta 4000 GBP.

Halle el valor de d .

Los gastos forman una progresión aritmética de primer término a y diferencia d : $u_n = a + (n - 1)d$.

1. Año 4: $a + 3d$. Año 8: $a + 7d$. Como el del año 8 es el doble: $a + 7d = 2(a + 3d)$.
2. Simplificamos: $a + 7d = 2a + 6d \Rightarrow a = d$.
3. Año 20: $a + 19d = 4000$. Sustituyendo $a = d$: $20d = 4000$.
4. Por tanto $d = 200$.

Resultado: $d = 200$ GBP.

EJERCICIO 36

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2015

La suma de los primeros n términos de una progresión aritmética viene dada por $S_n = 6n + n^2$.

a) Escriba el valor de

(i) S_1 ;

(ii) S_2 .

El enésimo término de la progresión aritmética viene dado por u_n .

b) Demuestre que $u_2 = 9$.

c) Encuentre la diferencia común de la progresión.

d) Calcule u_{10} .

e) Encuentre el menor valor de n para el cual u_n es mayor que 1000.

f) Hay un valor de n para el cual $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1512$

Calcule el valor de n .

a)

1. (i) $S_1 = 6 \cdot 1 + 1^2 = 7$.

2. (ii) $S_2 = 6 \cdot 2 + 2^2 = 16$.

b) $u_1 = S_1 = 7$. Como $S_2 = u_1 + u_2$:

$$u_2 = S_2 - S_1 = 16 - 7 = 9$$

Queda demostrado.

c) $d = u_2 - u_1 = 9 - 7 = 2$.

d) $u_{10} = u_1 + 9d = 7 + 9 \cdot 2 = 25$.

e)

1. $u_n = 7 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 5$.

2. Imponemos $2n + 5 > 1000$, es decir $n > 497,5$.

3. El menor entero que cumple esto es $n = 498$ (comprobación: $u_{498} = 1001 > 1000$ y $u_{497} = 999$).

f)

1. Se pide $S_n = 1512$, es decir $6n + n^2 = 1512$, o sea $n^2 + 6n - 1512 = 0$.

2. Discriminante: $36 + 4 \cdot 1512 = 6084 = 78^2$.

3. $n = \frac{-6 \pm 78}{2}$, así que $n = 36$ o $n = -42$. Como n es positivo, $n = 36$.

Resultado: a) $S_1 = 7$, $S_2 = 16$. b) $u_2 = 9$ (demostrado). c) $d = 2$. d) $u_{10} = 25$. e) $n = 498$. f) $n = 36$.

EJERCICIO 37

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2017

Rosa se apunta a un club donde se preparan para correr una maratón. Durante la primera sesión de entrenamiento Rosa corre una distancia de 3000 metros. En cada sesión de entrenamiento Rosa corre 400 metros más que en la anterior.

- a) Escriba la distancia que corre Rosa
(i) en la tercera sesión de entrenamiento;
(ii) en la n -ésima sesión de entrenamiento.

Una maratón son 42,195 kilómetros. En la k -ésima sesión de entrenamiento Rosa correrá por primera vez una distancia mayor que una maratón.

- b) Halle el valor de k .
c) Calcule la distancia total, en kilómetros, que habrá corrido Rosa en las 50 primeras sesiones de entrenamiento.

Carlos se apunta al club para perder peso. El primer mes corre 7500 metros. La distancia que Carlos corre va aumentando un 20 % cada mes.

- d) Halle la distancia que corre Carlos durante el quinto mes de entrenamiento.
e) Calcule la distancia total que corre Carlos durante el primer año.

a) Distancias en metros: progresión aritmética con $u_1 = 3000$ y $d = 400$.

1. (i) $u_3 = 3000 + 2 \cdot 400 = 3800$ m.
2. (ii) $u_n = 3000 + (n - 1) \cdot 400 = 2600 + 400n$ m.

b)

1. Una maratón son 42195 m. Pedimos $2600 + 400k > 42195$.
2. $400k > 39595 \Rightarrow k > 98,99$.
3. El menor entero es $k = 99$. Comprobación: $u_{99} = 42200 > 42195$ y $u_{98} = 41800 < 42195$.

c)

1. $S_{50} = \frac{50}{2} [2 \cdot 3000 + 49 \cdot 400] = 25 \cdot 25600 = 640000$ m.
2. En kilómetros: 640 km.

d) Distancias de Carlos: progresión geométrica con $v_1 = 7500$ y $r = 1,2$.

1. $v_5 = 7500 \cdot 1,2^4 = 7500 \cdot 2,0736 = 15552$ m ($\approx 15\,600$ m).

e)

1. Primer año = 12 meses: $S_{12} = \frac{7500(1,2^{12} - 1)}{0,2}$.
2. $S_{12} \approx 296\,854$ m ($\approx 297\,000$ m).

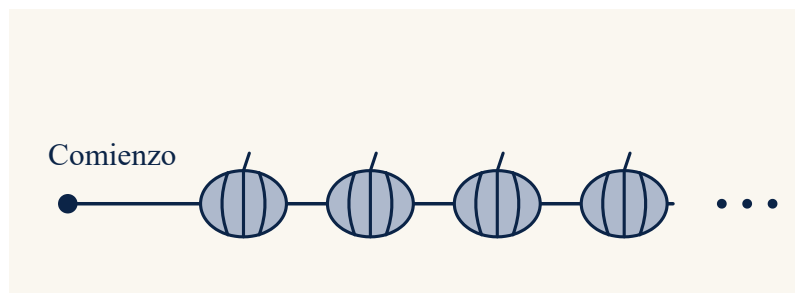
Resultado: a) (i) 3800 m; (ii) $3000 + 400(n - 1)$ m. b) $k = 99$. c) 640 km. d) 15 552 m ($\approx 15\,600$ m). e) $\approx 296\,854$ m ($\approx 297\,000$ m).

EJERCICIO 38

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2014

En un juego, n calabazas pequeñas se colocan a 1 metro de distancia en línea recta. Los jugadores comienzan 3 metros antes de la primera calabaza.



Cada jugador recoge una sola calabaza y la devuelve al principio. Primero se recolecta la calabaza más cercana. Luego, el jugador recolecta la siguiente calabaza más cercana y el juego continúa de esta manera hasta que se da la señal para el final. Sirma corre a buscar cada calabaza y la devuelve al principio.

a) Escriba la distancia, a_1 , en metros que tiene que correr para recoger la primera calabaza.

Las distancias que corre para recoger cada calabaza forman una progresión $a_1, a_2, a_3, \dots$

b) (i) Calcule a_2 .

(ii) calcule a_3 .

c) Escriba la diferencia común, d , de la progresión.

La calabaza final que Sirma recogió estaba a 24 metros del inicio.

d) (i) Encuentre el número total de calabazas que recogió Sirma.

(ii) Encuentre la distancia total que corrió Sirma para recolectar estas calabazas.

Peter también juega al juego. Cuando se da la señal para el final del juego, ha corrido 940 metros.

e) Calcule el número total de calabazas que recolectó Peter.

f) Calcule la distancia entre Peter y el punto de inicio de la prueba cuando se da la señal.

a) La primera calabaza está a 3 m del comienzo: ir y volver son $2 \cdot 3 = 6$ m. Así $a_1 = 6$ m.

b)

1. La segunda calabaza está a 4 m: $a_2 = 2 \cdot 4 = 8$ m.

2. La tercera está a 5 m: $a_3 = 2 \cdot 5 = 10$ m.

c) $d = a_2 - a_1 = 8 - 6 = 2$ m (cada calabaza añade 1 m de ida y 1 m de vuelta).

d)

1. (i) Es una progresión aritmética: $a_n = 6 + (n - 1) \cdot 2$. La última calabaza está a 24 m, luego su recorrido es 48 m: $6 + 2(n - 1) = 48 \Rightarrow n - 1 = 21 \Rightarrow n = 22$ calabazas.

2. (ii) $S_{22} = \frac{22}{2}(6 + 48) = 11 \cdot 54 = 594$ m.

e)

1. La distancia total tras n calabazas completas es $S_n = \frac{n}{2} [12 + 2(n - 1)] = n(n + 5)$.

2. Resolvemos $n(n + 5) \leq 940$ (con la CPG o con $n^2 + 5n - 940 = 0$, que da $n \approx 28,3$).

3. $S_{28} = 28 \cdot 33 = 924 \leq 940$ y $S_{29} = 29 \cdot 34 = 986 > 940$. Por tanto Peter recogió 28 calabazas completas.

f)

1. Tras 28 calabazas ha corrido 924 m; le quedan $940 - 924 = 16$ m dentro del siguiente trayecto (la calabaza 29 está a 31 m del inicio, así que aún va de ida).

2. Por tanto está a 16 m del punto de inicio.

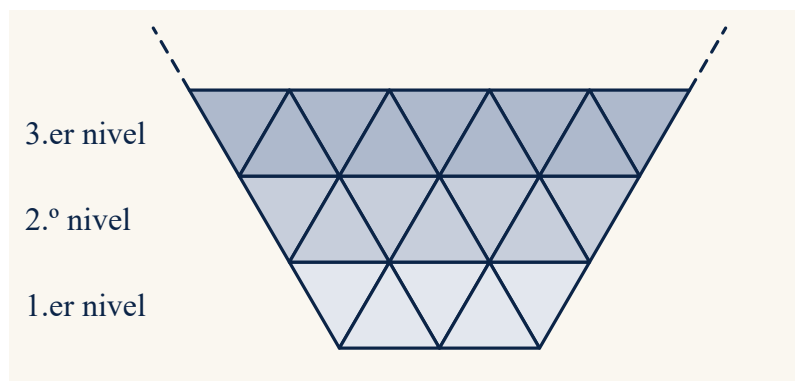
Resultado: a) $a_1 = 6$ m. b) (i) $a_2 = 8$ m; (ii) $a_3 = 10$ m. c) $d = 2$ m. d) (i) 22 calabazas; (ii) 594 m. e) 28 calabazas. f) 16 m.

EJERCICIO 39

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2019

Maegan diseña una vidriera decorativa para la fachada de un nuevo Centro de Bellas Artes. La vidriera está hecha de pequeños paneles triangulares. Los tres primeros niveles de la vidriera se muestran en la siguiente figura.



El 1.º nivel —el de la parte inferior de la vidriera— consta de 5 paneles triangulares. En el 2.º nivel hay 7 paneles triangulares y en el 3.º nivel hay 9 paneles triangulares. Cada nivel adicional tiene 2 paneles triangulares más que el nivel que está debajo de él.

- Halle el número de paneles triangulares que habrá en el 12.º nivel.
- Muestre que el número total de paneles triangulares, S_n , que hay en los primeros n niveles viene dado por: $S_n = n^2 + 4n$.
- A partir de lo anterior, halle el número total de paneles que habrá en una vidriera de 18 niveles. Maegan tiene 1000 paneles triangulares para construir la vidriera y no quiere dejar incompleto ningún nivel.
- Halle el número máximo de niveles completos que podrá hacer Maegan. El área de cada panel triangular es igual a $1,84 \text{ m}^2$.
- Halle el área total que tendrá la vidriera si se construye con ese número máximo de niveles completos. Exprese el área que ha hallado redondeando al m^2 más cercano.

Paneles por nivel: 5, 7, 9, ..., progresión aritmética con $u_1 = 5$ y $d = 2$.

a)

$$1. u_{12} = 5 + 11 \cdot 2 = 27 \text{ paneles.}$$

b)

$$1. S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [10 + 2(n-1)].$$

$$2. \text{Simplificamos: } \frac{n}{2} (2n + 8) = n(n + 4) = n^2 + 4n.$$

Queda demostrado.

c)

$$1. S_{18} = 18^2 + 4 \cdot 18 = 324 + 72 = 396 \text{ paneles.}$$

d)

$$1. \text{ Buscamos el mayor } n \text{ con } n^2 + 4n \leq 1000.$$

$$2. n = 29: 841 + 116 = 957 \leq 1000. n = 30: 900 + 120 = 1020 > 1000.$$

3. Máximo: 29 niveles.

e)

1. Paneles usados: $S_{29} = 957$.

2. Área: $957 \cdot 1,84 = 1760,88 \approx 1761 \text{ m}^2$.

Resultado: a) 27 paneles. b) demostrado. c) 396 paneles. d) 29 niveles. e) $\approx 1761 \text{ m}^2$.

Progresiones geométricas: término y suma

EJERCICIO 40

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Considere la progresión geométrica $8, a, 2, \dots$ para la cual la razón común es $\frac{1}{2}$.

- a) Encuentre el valor de a .
- b) Encuentre el valor del octavo término.
- c) Encuentre la suma de los primeros doce términos.

a) En una progresión geométrica, cada término es el anterior multiplicado por la razón: $a = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$.

(Comprobación: $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.)

b) Usamos $u_n = u_1 r^{n-1}$ con $u_1 = 8$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 8$:

$$u_8 = 8 \left(\frac{1}{2} \right)^7 = \frac{8}{128} = \frac{1}{16} = 0,0625.$$

c) Suma de los n primeros términos: $S_n = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}$.

$$S_{12} = \frac{8 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{12} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \left(1 - \frac{1}{4096} \right) \approx 15,996 \approx 16,0.$$

Resultado: a) $a = 4$; b) $u_8 = \frac{1}{16} = 0,0625$; c) $S_{12} \approx 16,0$

EJERCICIO 41

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2019

Sea una progresión geométrica donde el primer término es $\frac{8}{3}$ y el cuarto término es 9.

- a) Halle la razón de la progresión.
- b) Escriba el segundo término de esta progresión.

La suma de los k primeros términos es mayor que 2500.

- c) Halle el valor más pequeño posible de k .

a) En una progresión geométrica $u_n = u_1 r^{n-1}$, así que $u_4 = u_1 r^3$.

1. Sustituimos los datos: $9 = \frac{8}{3} r^3$.

2. Despejamos: $r^3 = 9 \cdot \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$.

3. Extraemos la raíz cúbica: $r = \frac{3}{2}$.

Resultado: $r = \frac{3}{2}$

b) El segundo término es $u_2 = u_1 r = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} = 4$.

Resultado: $u_2 = 4$

c) Usamos la suma de los k primeros términos, $S_k = \frac{u_1(r^k - 1)}{r - 1}$.

$$1. S_k = \frac{\frac{8}{3}(1,5^k - 1)}{0,5} = \frac{16}{3}(1,5^k - 1).$$

$$2. \text{Imponemos } S_k > 2500: \frac{16}{3}(1,5^k - 1) > 2500, \text{ es decir, } 1,5^k - 1 > 468,75 \text{ y por tanto } 1,5^k > 469,75.$$

$$3. \text{Tomamos logaritmos: } k > \frac{\ln 469,75}{\ln 1,5} \approx 15,2.$$

4. Como k es entero, el menor valor es $k = 16$.

Comprobación: $S_{15} = \frac{16}{3}(1,5^{15} - 1) \approx 2330$, que no llega a 2500, y $S_{16} = \frac{16}{3}(1,5^{16} - 1) \approx 3498$, que sí lo supera.

Resultado: a) $r = \frac{3}{2}$; b) $u_2 = 4$; c) $k = 16$

EJERCICIO 42

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

Los primeros tres términos de una progresión geométrica son $u_1 = 486$, $u_2 = 162$, $u_3 = 54$.

- Encuentre el valor de r , la razón común de la progresión.
- Encuentre el valor de n para el cual $u_n = 2$.
- Encuentre la suma de los primeros 30 términos de la progresión.

a) $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{162}{486} = \frac{1}{3}$. (Comprobación: $162 \cdot \frac{1}{3} = 54$.)

b)

$$1. u_n = 486 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2.$$

$$2. \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{486} = \frac{1}{243} = \frac{1}{3^5}.$$

3. Igualamos exponentes: $n - 1 = 5$, luego $n = 6$.

c) $S_n = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}$:

$$S_{30} = \frac{486 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{30}\right)}{\frac{2}{3}} = 729 (1 - 3^{-30}) \approx 729.$$

(El término 3^{-30} es del orden de 10^{-15} , y no afecta al resultado.)

Resultado: a) $r = \frac{1}{3}$; b) $n = 6$; c) $S_{30} \approx 729$

EJERCICIO 43

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

Considere la progresión geométrica 2048, 1536, 1152, 864 ...

- Halle la razón común, r .
- Escriba el siguiente término de la progresión, u_5 .
- Halle cuál es el término más grande de la progresión que **no** es un número entero.
- Halle la suma de los 20 primeros términos.

a) $r = \frac{1536}{2048} = \frac{3}{4} = 0,75$. Comprobación: $\frac{1152}{1536} = 0,75$ y $\frac{864}{1152} = 0,75$.

b) $u_5 = u_4 \cdot r = 864 \cdot 0,75 = 648$.

c)

1. El término general es $u_n = 2048 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 2^{11} \cdot \frac{3^{n-1}}{2^{2(n-1)}} = 3^{n-1} \cdot 2^{13-2n}$.

2. Mientras $13 - 2n \geq 0$, es decir $n \leq 6$, el término es un entero. Así $u_6 = 3^5 \cdot 2 = 486$.

3. Para $n = 7$: $u_7 = 3^6 \cdot 2^{-1} = \frac{729}{2} = 364,5$, que no es entero.

4. Para $n \geq 7$ el denominador es una potencia de 2 (2^{2n-13}) y el numerador, una potencia de 3 (impar), así que ningún término posterior es entero.

5. La progresión es decreciente, por tanto el mayor término no entero es el primero que deja de serlo:
 $u_7 = 364,5$.

d) Con $S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$:

$$S_{20} = \frac{2048(1-0,75^{20})}{1-0,75} = 8192(1-0,75^{20}) \approx 8192(1-0,003171) \approx 8166$$

Resultado: a) $r = 0,75$. b) $u_5 = 648$. c) $u_7 = 364,5$. d) $S_{20} \approx 8166$ (unos 8170 con 3 cifras significativas).

EJERCICIO 44

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2004

Se deja caer verticalmente una pelota de baloncesto. En el primer bote alcanza una altura de 2 m. La altura de cada uno de los botes posteriormente es el 90% de la anterior.

- ¿Qué altura alcanzará en el 8.º bote?
- ¿Cuál es la longitud total de la distancia vertical recorrida por la pelota entre la primera y la sexta vez que toca el suelo?

Las alturas de los botes forman una progresión geométrica con primer término 2 (primer bote) y razón $r = 0,9$.

a) Altura del 8.º bote: $u_8 = 2 \cdot 0,9^7 \approx 2 \cdot 0,4783 = 0,957$ m.

b)

1. Entre la primera y la sexta vez que la pelota toca el suelo ocurren cinco botes completos (los botes 1 a 5), cada uno de subida y bajada.

2. Alturas de esos botes: 2; 1,8; 1,62; 1,458; 1,3122. Cada bote recorre el doble de su altura.

3. Suma de las alturas, con $S_5 = \frac{2(1-0,9^5)}{1-0,9} = 20(1-0,59049) = 8,1902$ m.

4. Distancia total: $2 \cdot 8,1902 = 16,3804 \approx 16,4$ m.

Resultado: a) 0,957 m. b) $\approx 16,4$ m.

EJERCICIO 45

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2012

Javier comienza a entrenar para una carrera a pie.

El primer día corre 1,5 km. Todos los días corre un 10% más que el día anterior.

- Escriba la distancia que corre en el segundo día de entrenamiento.
- Calcula la distancia total que Javier corre en los primeros siete días de entrenamiento.

Javier deja de entrenar el día que su distancia total supera los 100 km.

- Calcula el número de días que Javier ha entrenado para la carrera a pie.

Las distancias diarias forman una progresión geométrica con $u_1 = 1,5$ y $r = 1,10$ (un 10 % más cada día).

a) $u_2 = 1,5 \cdot 1,1 = 1,65$ km.

b) $S_7 = \frac{1,5(1,1^7 - 1)}{1,1 - 1} = 15(1,9487 - 1) \approx 14,2$ km.

c)

1. Imponemos $S_n > 100$: $\frac{1,5(1,1^n - 1)}{0,1} > 100$, es decir $15(1,1^n - 1) > 100$.

2. Entonces $1,1^n > 1 + \frac{100}{15} = 7,667$, y tomando logaritmos $n > \frac{\ln 7,667}{\ln 1,1} \approx 21,4$. (También se puede resolver con una tabla en la CPG.)

3. Comprobación: $S_{21} \approx 15(7,4002 - 1) = 96,0$ km, que no supera 100, y $S_{22} \approx 15(8,1403 - 1) = 107,1$ km, que sí.

4. Luego $n = 22$.

Resultado: a) 1,65 km. b) $\approx 14,2$ km. c) Entrena durante 22 días.

EJERCICIO 46

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

Considere la progresión 512, 128, 32, 8, ...

- Calcule el valor exacto del noveno término de la progresión.
- Calcule el menor número de términos necesarios para que la suma de la progresión sea mayor que 682,6

Los cocientes son $\frac{128}{512} = \frac{32}{128} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$: progresión geométrica con $u_1 = 512$ y $r = \frac{1}{4}$.

a)

$$u_9 = 512 \left(\frac{1}{4}\right)^8 = \frac{2^9}{2^{16}} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$$

b)

1. $S_n = \frac{512(1 - 0,25^n)}{1 - 0,25} = \frac{2048}{3}(1 - 0,25^n)$. La suma tiende a $\frac{2048}{3} \approx 682,67$.

2. Imponemos $\frac{2048}{3}(1 - 0,25^n) > 682,6$, es decir $0,25^n < 1 - \frac{2047,8}{2048} = \frac{1}{10240}$.

3. Equivale a $4^n > 10240$. Con logaritmos, $n > \frac{\ln 10240}{\ln 4} \approx 6,66$. (O con una tabla en la CPG.)

4. Comprobación: $S_6 = \frac{2048}{3}\left(1 - \frac{1}{4096}\right) \approx 682,50 < 682,6$ y $S_7 = \frac{2048}{3}\left(1 - \frac{1}{16384}\right) \approx 682,63 > 682,6$.

5. El menor número de términos es $n = 7$.

Resultado: a) $u_9 = \frac{1}{128}$. b) $n = 7$.

EJERCICIO 47

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

Considere la progresión geométrica 16, 8, a , 2, b , ...

- Escriba la razón común.
- Escriba el valor de
 - a ;
 - b .
- La suma de los n primeros términos es igual a 31,9375. Halle el valor de n .

a) La razón es el cociente entre dos términos consecutivos: $r = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

b) (i) $a = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$. (Comprobación: $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$, que es el término siguiente.)

(ii) $b = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

c) Usamos la suma de los n primeros términos, $S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$:

$$1. S_n = \frac{16(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 32(1 - (\frac{1}{2})^n).$$

$$2. \text{Igualamos: } 32(1 - (\frac{1}{2})^n) = 31,9375.$$

$$3. 1 - (\frac{1}{2})^n = \frac{31,9375}{32} = 0,998046875, \text{ luego } (\frac{1}{2})^n = 0,001953125 = \frac{1}{512}.$$

$$4. \text{Como } 512 = 2^9, \text{ resulta } n = 9 \text{ (también se obtiene resolviendo la ecuación con la CPG).}$$

Resultado: a) $r = \frac{1}{2}$; b) $a = 4$, $b = 1$; c) $n = 9$.

EJERCICIO 48

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2011

El séptimo término, u_7 , de una progresión geométrica es 108. El octavo término, u_8 , de la progresión es 36.

- Escriba la razón común de la progresión.
 - Encuentre u_1 .
- La suma de los primeros k términos de la progresión es 118096.
- Encuentre el valor de k .

$$a) r = \frac{u_8}{u_7} = \frac{36}{108} = \frac{1}{3}.$$

$$b) u_7 = u_1 r^6, \text{ luego } 108 = u_1 (\frac{1}{3})^6 = \frac{u_1}{729} \text{ y } u_1 = 108 \cdot 729 = 78\,732.$$

c) Usamos $S_k = \frac{u_1(1-r^k)}{1-r}$:

$$1. S_k = \frac{78732(1 - (\frac{1}{3})^k)}{1 - \frac{1}{3}} = 118\,098(1 - (\frac{1}{3})^k).$$

$$2. \text{Igualamos a } 118\,096: 1 - (\frac{1}{3})^k = \frac{118096}{118098}.$$

$$3. (\frac{1}{3})^k = \frac{2}{118098} = \frac{1}{59049} = \frac{1}{3^{10}}.$$

$$4. \text{Por tanto } k = 10.$$

Resultado: a) $r = \frac{1}{3}$; b) $u_1 = 78\,732$; c) $k = 10$.

EJERCICIO 49

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2009

Una progresión geométrica tiene un segundo término 12 y un quinto término 324.

- Calcule el valor de la razón común.
- Calcule el décimo término de esta progresión.
- El k -ésimo término es el primer término que es mayor que 2000. Encuentre el valor de k .

a) $u_5 = u_2 r^3$, luego $324 = 12 r^3$, $r^3 = 27$ y $r = 3$.

b) Primero $u_1 = \frac{u_2}{r} = \frac{12}{3} = 4$. Entonces $u_{10} = 4 \cdot 3^9 = 4 \cdot 19\,683 = 78\,732$.

c) Buscamos el menor k con $4 \cdot 3^{k-1} > 2000$:

1. $3^{k-1} > 500$.

2. Como $3^5 = 243 < 500$ y $3^6 = 729 > 500$, hace falta $k - 1 = 6$ (con la CPG se comprueba en una tabla de valores).

3. $k = 7$. Comprobación: $u_7 = 4 \cdot 729 = 2916 > 2000$ y $u_6 = 4 \cdot 243 = 972 < 2000$.

Resultado: a) $r = 3$; b) $u_{10} = 78\,732$; c) $k = 7$.

EJERCICIO 50

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

Un martillo hidráulico se usa para clavar un poste metálico en el suelo en dirección vertical.

Para ello, va golpeando repetidamente la parte superior del poste. La distancia que penetra el poste en el suelo con el n -ésimo golpe de martillo es igual a d_n .

Las distancias $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ forman una progresión geométrica.

La distancia que penetra el poste en el suelo con el primer golpe de martillo, d_1 , es igual a 64 cm.

La distancia que penetra el poste en el suelo con el segundo golpe de martillo, d_2 , es igual a 48 cm.

- Halle la razón común de esta progresión.
- Halle la distancia que penetra el poste en el suelo con el octavo golpe de martillo.
- Halle la **profundidad total** a la que ha penetrado el poste en el suelo tras 10 golpes de martillo.

a) 1. En una progresión geométrica $r = \frac{d_2}{d_1} = \frac{48}{64}$. 2. $r = 0,75$.

Resultado a): $r = 0,75$.

b) 1. $d_n = 64 \cdot 0,75^{n-1}$. 2. $d_8 = 64 \cdot 0,75^7 \approx 64 \cdot 0,13348 = 8,543$.

Resultado b): $d_8 \approx 8,54$ cm.

c) 1. La profundidad total tras 10 golpes es la suma S_{10} de la progresión geométrica. 2. $S_{10} = \frac{64(1 - 0,75^{10})}{1 - 0,75} = 256(1 - 0,75^{10})$. 3. Con $0,75^{10} \approx 0,05631$: $S_{10} \approx 256 \cdot 0,94369 \approx 241,58$ cm.

Resultado c): ≈ 242 cm.

Resultado: $r = 0,75$; $d_8 \approx 8,54$ cm; profundidad total ≈ 242 cm.

EJERCICIO 51

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2013

512 participantes inician la ronda 1 de un torneo de tenis. En esta ronda, cada participante juega un partido contra otro participante. El participante que gana el partido pasa a la siguiente ronda (ronda 2), mientras que el participante que pierde queda eliminado del torneo. El torneo continúa de esta manera hasta que hay un ganador.

- Halle el número de participantes que juegan la ronda 6 del torneo.
- Halle el número total de partidos que se juegan en el torneo.

Los participantes en cada ronda forman una progresión geométrica con $u_1 = 512$ y $r = \frac{1}{2}$ (cada partido elimina a uno de cada dos).

a)

$$1. u_n = 512 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$2. \text{Ronda 6: } u_6 = 512 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{512}{32} = 16 \text{ participantes.}$$

b)

1. En cada ronda se juegan la mitad de partidos que participantes: 256, 128, 64, ..., 1. Son $256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ con $k = 1, \dots, 9$ (el último, la final, es 1 partido: $256/2^8 = 1$).

$$2. \text{Suma de 9 términos con primer término 256 y razón } \frac{1}{2}: S_9 = \frac{256 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 511.$$

3. Comprobación: hay 512 jugadores y sólo queda uno, así que hay 511 eliminados, uno por partido.

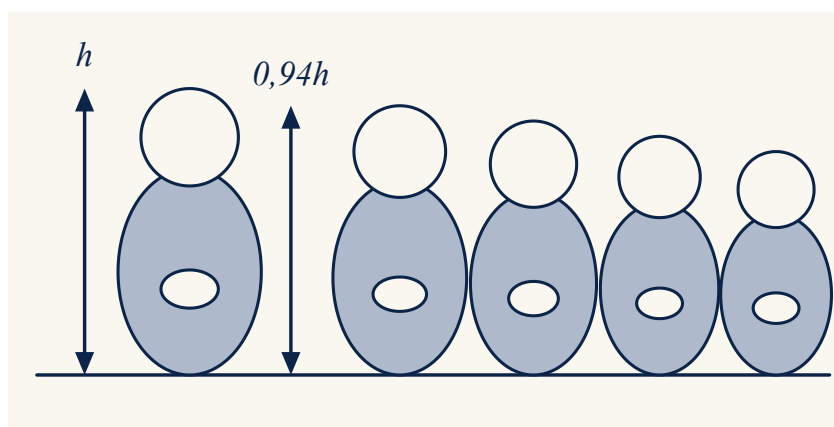
Resultado: a) 16 participantes. b) 511 partidos.

EJERCICIO 52

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2018

Las muñecas Matryoshka, o muñecas rusas, son muñecas de diseño similar que se abren y se ajustan una dentro de la otra. El conjunto más grande de este tipo de muñecas es un conjunto de 51 piezas que se completó en 2003. La altura de la pieza más grande de este conjunto es de 54 cm. Las alturas de sucesivas muñecas más pequeñas son el 94% de la muñeca anterior más grande, como se muestra.



- Encuentre la altura de la muñeca más pequeña de este conjunto.
- Encuentre la altura total si las 51 muñecas estuvieran colocadas una encima de la otra.

Las alturas forman una progresión geométrica con $u_1 = 54$ y $r = 0,94$.

a)

$$1. \text{La muñeca más pequeña es la número 51: } u_{51} = 54 \cdot 0,94^{50}.$$

2. $u_{51} \approx 2,45$ cm.

b)

1. $S_{51} = \frac{54(1 - 0,94^{51})}{1 - 0,94}$.

2. $S_{51} \approx 861,65$ cm, es decir, ≈ 862 cm.

Resultado: a) $\approx 2,45$ cm. b) ≈ 862 cm.

EJERCICIO 53

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2009

Las cuotas anuales pagadas a una escuela durante los años escolares 2000, 2001 y 2002 aumentan a medida de una progresión geométrica. La siguiente tabla muestra la estructura de tarifas.

Año Tarifa (USD)

2000 8000.00

2001 8320.00

2002 8652.80

a) Calcule la razón común para la progresión creciente de tarifas.

En los apartados (b) y (c), dé su respuesta aproximada con 2 decimales.

Las tarifas continúan aumentando en la misma proporción.

b) Encuentre las tarifas pagadas para 2006.

Un estudiante asiste a la escuela durante ocho años, a partir de 2000.

c) Encuentre las tarifas totales pagadas durante estos ocho años.

a) En una progresión geométrica la razón es el cociente entre dos términos consecutivos.

1. $r = \frac{8320}{8000} = 1,04$

2. Comprobación con el siguiente par: $\frac{8652,80}{8320} = 1,04$.

Resultado a): $r = 1,04$

b) 2000 es el término $u_1 = 8000$, así que 2006 es el término u_7 .

1. Fórmula: $u_n = u_1 r^{n-1}$.

2. $u_7 = 8000 \cdot 1,04^6 = 8000 \cdot 1,2653 \dots = 10122,55$

Resultado b): \$10122,55

c) Ocho años son los ocho primeros términos: suma de una progresión geométrica.

1. Fórmula: $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$.

2. $S_8 = \frac{8000(1,04^8 - 1)}{0,04} = \frac{8000 \cdot 0,368569}{0,04} = 73713,81$

Resultado: a) $r = 1,04$; b) \$10122,55; c) \$73713,81

EJERCICIO 54

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2006

Annie va a comenzar a trabajar. Va a ganar \$ 26.000 durante el primer año y su salario anual aumentará un 3 % cada año.

a) Calcule cuánto ganará Annie durante su quinto año de trabajo.

Annie gasta \$ 24.800 de lo que gana en su primer año de trabajo. En los años siguientes, el costo de vida aumentará 5 % al año debido a la inflación.

b) (i) Calcule en cuántos años Annie va a gastar más de lo que va a ganar.

(ii) ¿En cuánto superarán los gastos a los ingresos ese año?

a)

1. El salario sigue una progresión geométrica de primer término 26000 y razón 1,03: $u_n = 26000 \cdot 1,03^{n-1}$.
2. Quinto año: $u_5 = 26000 \cdot 1,03^4 = 29263,23 \dots$

Resultado a): \$ 29 263,23.

b)

1. Los gastos también forman una progresión geométrica: $g_n = 24800 \cdot 1,05^{n-1}$.
2. Los gastos superan a los ingresos cuando $24800 \cdot 1,05^{n-1} > 26000 \cdot 1,03^{n-1}$. Se lo pedimos a la CPG (tabla o intersección de las dos curvas): se cortan en $n \approx 3,46$.
3. Comprobamos con valores enteros:
 - Año 3: ingresos $26000 \cdot 1,03^2 = 27583,40$; gastos $24800 \cdot 1,05^2 = 27342,00$. Todavía gana más de lo que gasta.
 - Año 4: ingresos $26000 \cdot 1,03^3 = 28410,90$; gastos $24800 \cdot 1,05^3 = 28709,10$. Ya gasta más.
4. (i) Es en el cuarto año de trabajo, es decir, a los 4 años.
5. (ii) La diferencia es $28709,10 - 28410,90 = 298,20 \approx 298$.

Resultado: a) \$ 29 263,23; b) (i) en el 4.º año; (ii) los gastos superan a los ingresos en unos \$ 298.

EJERCICIO 55

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

Herman se hizo socio de un club de tenis en el año 2000. La cuota era de £ 1200 al año. Cada año se incrementa en un 3 %.

a) Calcule la cuota del año 2002, aproximando a las unidades en libras esterlinas (£).

b) Calcule la cantidad total que pagará Herman en cuotas, si se hizo socio del club en el año 2000 y es miembro del mismo durante cinco años.

a)

1. Las cuotas forman una progresión geométrica de primer término 1200 (año 2000) y razón 1,03: $u_n = 1200 \cdot 1,03^{n-1}$.
2. El año 2002 es el tercer año, $n = 3$: $u_3 = 1200 \cdot 1,03^2 = 1273,08$.
3. A las unidades: 1273.

Resultado a): £ 1273.

b)

1. Cinco años de cuotas: suma de los 5 primeros términos de la progresión geométrica, $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$.
2. $S_5 = \frac{1200(1,03^5 - 1)}{0,03} = 6370,97 \dots$

Resultado b): £ 6370,97 en total (unos £ 6371).

EJERCICIO 56

★★★ Dificil

IB · P2 TZ0 Mayo 2007

Una progresión geométrica G_1 tiene como primer término 1 y como razón común 3.

a) La suma de los n primeros términos de G_1 es igual a 29 524. Halle n .

Una segunda progresión geométrica G_2 es de la forma $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, 1$,

b) Establezca la razón común de G_2 .

c) Calcule la suma de los 10 primeros términos de G_2 .

d) Explique por qué el resultado de la suma de los 1000 primeros términos de G_2 es el mismo que el de la suma de los 10 primeros términos, cuando se redondea el resultado a tres cifras significativas.

e) Utilizando los resultados obtenidos en los apartados (a) a (c) o bien con cualquier otro método, calcule la suma de los 10 primeros términos de la progresión $2, 3\frac{1}{3}, 9\frac{1}{9}, 27\frac{1}{27}, \dots, 2$.

Dé la respuesta redondeando a 1 cifra decimal.

a) 1. Suma geométrica: $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$. 2. $\frac{3^n - 1}{2} = 29524 \Rightarrow 3^n = 59049$. 3. Como $3^{10} = 59049$, $n = 10$.
(También se puede resolver con la CPG la ecuación $\frac{3^n - 1}{2} = 29524$.)

Resultado a): $n = 10$.

b) La razón es el cociente de dos términos consecutivos: $r = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}$.

Resultado b): $r = \frac{1}{3}$.

c) 1. $S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - (\frac{1}{3})^{10})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{59049}\right)$. 2. $S_{10} \approx 1,49997\dots$, que a 3 cifras significativas es 1,50.

Resultado c): $S_{10} \approx 1,50$.

d) 1. Cada término de G_2 es $(\frac{1}{3})^{k-1}$; a partir del décimo son extremadamente pequeños. 2. Los términos del 11 al 1000 suman menos de $\frac{(\frac{1}{3})^{10}}{1 - \frac{1}{3}} \approx 0,000025$, cantidad que no altera las tres primeras cifras significativas. 3.

Además, $(\frac{1}{3})^{1000} \approx 0$, por lo que $S_{1000} = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{1000}}{1 - \frac{1}{3}} \approx \frac{1}{2/3} = 1,5$. 4. Así, S_{10} y S_{1000} valen ambas 1,50 con tres cifras significativas.

Resultado d): los términos añadidos después del décimo son despreciables y ambas sumas se redondean a 1,50.

e) 1. Los términos de la nueva progresión son $2 = 1 + 1$, $3\frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$, $9\frac{1}{9} = 9 + \frac{1}{9}$, etc.; es decir, el término k es $3^{k-1} + (\frac{1}{3})^{k-1}$ (suma de los términos de G_1 y G_2). 2. Su suma de 10 términos es la suma de las de G_1 y G_2 : $29524 + 1,49997\dots = 29525,49997\dots$ 3. Redondeando a una cifra decimal: 29525,5.

Resultado e): 29525,5.

Resultado: $n = 10$; $r = \frac{1}{3}$; $S_{10} \approx 1,50$; S_{10} de la nueva progresión = 29525,5.

EJERCICIO 57

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2019

John compra una bicicleta nueva por 880 dólares estadounidenses (USD) y la paga con una tarjeta de crédito canadiense. Hay una comisión del 4.2% cobrada a John por la compañía de la tarjeta de crédito para convertir esta compra en dólares canadienses (CAD). El tipo de cambio es 1 USD = 1,25 CAD.

a) Calcule, en CAD, la cantidad total que Juan paga por la bicicleta.

John asegura su bicicleta con una empresa estadounidense. La compañía de seguros produce la siguiente tabla para el valor de la bicicleta durante cada año.

Año Valor de la bicicleta (USD)

1.º 880

2.º 704

3.º 563,20

...

Los valores de la bicicleta forman una progresión geométrica.

b) Encuentre el valor de la bicicleta durante el quinto año. Dé su respuesta con dos decimales.

c) Calcule, en años, cuándo el valor de la bicicleta será inferior a 50 USD.

Durante el primer año, John paga 120 USD para asegurar su bicicleta. Cada año la cantidad que paga para asegurar su bicicleta se reduce en 3,50 USD.

d) Calcule la cantidad total que John ha pagado para asegurar su bicicleta durante los primeros 5 años.

John compró la bicicleta en 2008.

e) Justifique por qué John no debería asegurar su bicicleta en 2019.

a)

1. Precio en CAD: $880 \cdot 1,25 = 1100$ CAD.

2. La comisión del 4,2 % se suma: $1100 \cdot 1,042 = 1146,20$.

Resultado a): John paga 1146,20 CAD.

b)

1. Razón común: $r = \frac{704}{880} = 0,8$ (y $\frac{563,20}{704} = 0,8$).

2. Término general: $u_n = 880 \cdot 0,8^{n-1}$.

3. Quinto año: $u_5 = 880 \cdot 0,8^4 = 880 \cdot 0,4096 = 360,448$.

Resultado b): 360,45 USD.

c)

1. Se plantea $880 \cdot 0,8^{n-1} < 50$, es decir, $0,8^{n-1} < 0,056818$.

2. Se resuelve (con logaritmos o con una tabla de valores en la CPG). Con logaritmos, como $\ln 0,8 < 0$ se invierte la desigualdad:

$$n - 1 > \frac{\ln 0,056818}{\ln 0,8} = 12,85.$$

3. El primer entero es $n - 1 = 13$, luego $n = 14$. Comprobación: $u_{13} = 880 \cdot 0,8^{12} = 60,54 > 50$ y $u_{14} = 880 \cdot 0,8^{13} = 48,43 < 50$.

Resultado c): el valor es inferior a 50 USD durante el 14.º año, es decir, una vez transcurridos 13 años.

d)

1. Los pagos del seguro forman una progresión aritmética con $u_1 = 120$ y $d = -3,50$.

2. Suma de los 5 primeros términos: $S_5 = \frac{5}{2} [2 \cdot 120 + (5 - 1)(-3,5)] = 2,5 (240 - 14) = 565$.

Resultado d): 565 USD.

e)

1. Si se compró en 2008 (año 1), el año 2019 es el año 12.
2. Valor de la bicicleta: $u_{12} = 880 \cdot 0,8^{11} = 75,59$ USD.
3. Seguro de ese año: $120 - 3,5 \cdot 11 = 81,50$ USD.
4. El seguro cuesta más que lo que vale la bicicleta, ya que $81,50 > 75,59$.

Resultado e): en 2019 la prima del seguro (81,50 USD) es mayor que el valor de la bicicleta (75,59 USD), así que no compensa asegurarla.

Interés simple y compuesto

EJERCICIO 58

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

Dos hermanos, Adam y Ben, heredan \$ 6500 cada uno. Adam invierte su dinero en un bono que paga interés simple a una tasa del 5% anual. Ben invierte su dinero en un banco que paga interés compuesto a una tasa del 4,5% anual.

- a) Calcule el valor de la inversión de Adán al final de los 6 años.
- b) Calcule el valor de la inversión de Ben al final de 6 años. Dé su respuesta aproximada a 2 lugares decimales.

a)

1. Con interés simple, el interés es el mismo cada año: $I = C \cdot r \cdot t = 6500 \cdot 0,05 \cdot 6 = 1950$.
2. Valor final = $6500 + 1950 = 8450$.

Resultado a): \$ 8450.

b)

1. Con interés compuesto anual, $V = C \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$, con $C = 6500$, $r = 4,5$, $n = 6$.
2. $V = 6500 \cdot 1,045^6 = 8464,69 \dots$

Resultado b): \$ 8464,69.

EJERCICIO 59

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Andrew invierte 20000 francos suizos en un banco que ofrece un interés simple del 2% anual durante 8 años.

- a) Encuentre el interés que tiene después de estos 8 años.

Philip invierte 20000 francos suizos durante 6 años en un banco a una tasa nominal del 5% de interés compuesto trimestral.

- b) Encuentre la cantidad total en la cuenta de Felipe después de estos 6 años.

a)

1. Interés simple: $I = C \cdot r \cdot t = 20000 \cdot 0,02 \cdot 8$.
2. $I = 3200$.

Resultado a): 3200 francos suizos.

b)

1. Interés compuesto trimestral: hay $k = 4$ periodos al año, así que en 6 años hay $n = 4 \cdot 6 = 24$ periodos y el tipo por periodo es $5/4 = 1,25\%$.
2. $V = 20000 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{24} = 20000 \cdot 1,0125^{24}$.
3. $V = 26947,0 \dots$ (valor que da la CPG con sus utilidades financieras: $N = 6$, $I\% = 5$, $PV = -20000$, $P/Y = C/Y = 4$).

Resultado b): 26 947 francos suizos.

EJERCICIO 60

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2019

Devra invirtió k dólares estadounidenses (USD) en una cuenta que paga una tasa de interés nominal Anual de 3,1%, compuesto mensualmente. Después de 6 años, tiene 1100 USD en la cuenta.

a) Calcule el valor de k . Dé su respuesta con 2 lugares decimales.

Luego, Devra compró una computadora que costaba 1100 USD y la vendió 4 años después por 350 USD.

b) Encuentre la razón a la que la computadora se depreció por año.

a)

1. Es interés compuesto con $n = 12$ periodos por año, tasa nominal $r = 3,1\%$ y 6 años, es decir, 72 periodos mensuales. Se usa

$$FV = k \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt}.$$

2. Se sustituye: $1100 = k \left(1 + \frac{3,1}{1200}\right)^{72}$.

3. Con la CPG (solucionador financiero) con $N = 6$, $I\% = 3,1$, $FV = 1100$, $P/Y = C/Y = 12$ se obtiene PV (en valor absoluto); o bien se despeja:

$$k = \frac{1100}{\left(1 + \frac{3,1}{1200}\right)^{72}} = \frac{1100}{1,20413 \dots} = 913,52.$$

Resultado a): $k = 913,52$ USD.

b)

1. Depreciación anual constante en porcentaje: $V = V_0 \left(1 - \frac{r}{100}\right)^t$.
2. Con $V_0 = 1100$, $V = 350$ y $t = 4$: $350 = 1100 \left(1 - \frac{r}{100}\right)^4$.
3. Se despeja: $\left(1 - \frac{r}{100}\right)^4 = \frac{350}{1100} = 0,31818 \dots$
4. Se extrae la raíz cuarta: $1 - \frac{r}{100} = 0,31818^{1/4} = 0,75105$.
5. Por tanto $\frac{r}{100} = 0,24895$, es decir $r \approx 24,9\%$.

Resultado b): la computadora se depreció a razón de aproximadamente 24,9 % por año.

EJERCICIO 61

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2019

Siân invierte 50 000 dólares australianos (AUD) en una cuenta de ahorro que ofrece un tipo de interés nominal anual del 5,6 % compuesto mensualmente.

- a) Calcule cuál será el valor de la inversión de Siân al cabo de cuatro años. Dé la respuesta redondeando a dos lugares decimales.

Transcurrido ese período de cuatro años, Siân saca 40 000 AUD de su cuenta de ahorro y utiliza este dinero para comprarse un coche. Sabemos que el coche se deprecia un 18 % cada año. Después de t años, el coche tendrá un valor de 2500 AUD.

- b) Halle el valor de t .

a)

1. Interés compuesto mensual: $n = 12$, tasa 5,6 %, $t = 4$ años, es decir, 48 periodos.

$$2. FV = 50000 \left(1 + \frac{5,6}{1200} \right)^{48}.$$

3. Con la CPG (o con la calculadora): $FV = 50000 \cdot 1,250419 \dots = 62520,97$.

Resultado a): 62 520,97 AUD.

b)

1. El coche vale al comprarlo 40 000 AUD y pierde un 18 % al año, así que cada año se multiplica por 0,82:

$$40000 \cdot 0,82^t = 2500.$$

2. Se divide: $0,82^t = \frac{2500}{40000} = 0,0625$.

3. Se toman logaritmos (o se resuelve la ecuación con la CPG):

$$t = \frac{\ln 0,0625}{\ln 0,82} = \frac{-2,77259}{-0,19845} = 13,97.$$

Resultado b): $t \approx 13,97$ años (aproximadamente 14 años).

EJERCICIO 62

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2018

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a dos lugares decimales.

Karl invierte 1000 dólares estadounidenses (USD) en una cuenta que paga un interés nominal anual del 3,5 %, compuesto trimestralmente. Karl deja el dinero en esa cuenta durante 5 años.

- a) (i) Calcule la cantidad de dinero que Karl tendrá en la cuenta al cabo de 5 años;

(ii) Escriba la cantidad de intereses que habrá recibido al cabo de esos 5 años.

Karl decide donar estos intereses a una ONG de Francia. La ONG recibe 170 euros (EUR). El tipo de cambio es $1 \text{ USD} = t \text{ EUR}$.

- b) Calcule el valor de t .

a) (i)

1. Interés compuesto trimestral: $n = 4$, $t = 5$ años, 20 periodos, tasa 3,5 %.

$$2. FV = 1000 \left(1 + \frac{3,5}{400} \right)^{20} = 1000 \cdot 1,19034 \dots = 1190,34.$$

(ii)

1. Intereses = cantidad final – capital inicial = $1190,34 - 1000 = 190,34$.

Resultado a): (i) 1190,34 USD; (ii) 190,34 USD.

b)

1. Se cumple $190,34 \cdot t = 170$.

$$2. t = \frac{170}{190,34} = 0,893 \dots \approx 0,89.$$

Resultado b): $t = 0,89$ EUR por cada USD.

EJERCICIO 63

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

Nick tiene 150 000 \$ en un fideicomiso. Todos los años, dona el 8 % del dinero que queda en el fideicomiso.

a) Determine el máximo número de años que Nick puede donar dinero, manteniendo por lo menos 50 000 \$ en el fideicomiso.

Louise invierte 200 000 \$ en una cuenta bancaria que paga un tipo de interés nominal del 5 %, compuesto trimestralmente, durante ocho años.

b) Calcule el valor de la inversión de Louise cuando finalice este periodo. Dé la respuesta redondeando al número de céntimos más próximo.

a)

1. Cada año queda el 92 % del dinero, así que tras n años hay $150000 \cdot 0,92^n$.

2. Se exige $150000 \cdot 0,92^n \geq 50000$, es decir, $0,92^n \geq \frac{1}{3}$.

3. Con logaritmos (se invierte la desigualdad porque $\ln 0,92 < 0$):

$$n \leq \frac{\ln(1/3)}{\ln 0,92} = \frac{-1,0986}{-0,08338} = 13,18.$$

4. Comprobación: $150000 \cdot 0,92^{13} = 50\,760 > 50\,000$ y $150000 \cdot 0,92^{14} = 46\,700 < 50\,000$.

Resultado a): puede donar durante un máximo de 13 años.

b)

1. Interés compuesto trimestral: $n = 4$, 8 años, 32 periodos, tasa 5 %.

$$2. FV = 200000 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{32} = 200000 \cdot 1,0125^{32} = 200000 \cdot 1,488131 \dots = 297\,626,10.$$

Resultado b): 297 626,10 \$.

EJERCICIO 64

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

Arthur y Jacob sueñan con tener una lancha rápida que cuesta 35300 euros (EUR). Arthur invirtió x EUR en una cuenta que paga una tasa de interés nominal anual del 3,6%, compuesto mensualmente. Después de 18 años, tendrá 35300 EUR en la cuenta.

a) Calcule el valor de la inversión inicial de Arthur, x . Dé su respuesta con dos lugares decimales.

Jacob invirtió 9000 EUR durante n años. La inversión tiene una tasa de interés nominal anual de 3,2% y se capitaliza trimestralmente. Después de n años, la inversión valdrá 35300 EUR.

b) Encuentre el valor de n .

a) Interés compuesto mensual: $FV = PV \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn}$ con $FV = 35300$, $r = 3,6$, $k = 12$, $n = 18$.

1. Escribimos la ecuación: $35300 = x \left(1 + \frac{3,6}{1200}\right)^{12 \cdot 18} = x (1,003)^{216}$.

2. Despejamos x (o se lo pedimos a la CPG con la herramienta de finanzas: $N = 216$, $I\% = 3,6$, $FV = 35300$, $PV = ?$, $P/Y = C/Y = 12$): $x = \frac{35300}{1,003^{216}} \approx 18483,03$.

Resultado a): $x = 18483,03$ EUR.

b) Interés compuesto trimestral ($k = 4$, tasa por trimestre $\frac{3,2}{4} = 0,8\%$):

1. Planteamos $9000(1,008)^{4n} = 35300$.
2. Dividimos: $(1,008)^{4n} = \frac{35300}{9000} \approx 3,9222$.
3. Resolvemos con la CPG (resolución de ecuaciones o la herramienta de finanzas con $PV = -9000$, $FV = 35300$, $I\% = 3,2$, $P/Y = C/Y = 4$) o con logaritmos: $4n = \frac{\ln 3,9222}{\ln 1,008} \approx 171,5$.
4. Entonces $n \approx 42,9$ años, es decir, unos 43 años.

Resultado: a) $x = 18483,03$ EUR; b) $n \approx 42,9$ años (aprox. 43 años).

EJERCICIO 65

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

Juan se compra una bicicleta en las rebajas. A Juan le hacen un descuento del 30 % sobre el precio original y paga por la bicicleta 560 dólares estadounidenses (USD).

a) Calcule cuál era el precio original de la bicicleta.

Para poder comprarse la bicicleta, Juan pide un préstamo de 560 USD durante 6 meses con un tipo de interés anual nominal del 75 %, compuesto mensualmente. Juan cree que la cantidad total que tendrá que pagar será menor que el precio original de la bicicleta.

b) Calcule la diferencia entre el precio original de la bicicleta y la cantidad total que Juan acabará pagando.

a) El precio pagado es el 70% del original (descuento del 30%).

1. $0,70 \cdot P = 560$.
2. $P = \frac{560}{0,7} = 800$.

Resultado a): el precio original era 800 USD.

b) Interés compuesto mensual: tasa mensual $\frac{75}{12} = 6,25\%$, durante 6 meses.

1. Cantidad a pagar: $560(1 + 0,0625)^6 = 560 \cdot 1,0625^6 \approx 805,68$ USD.
2. Comparamos con el precio original: 805,68 es mayor que 800, así que Juan se equivocaba: pagará más que el precio original.
3. Diferencia: $805,68 - 800 = 5,68$ USD, es decir, unos 6 USD de más.

Resultado: a) 800 USD; b) Juan pagará unos 5,68 USD (aprox. 6 USD) más que el precio original.

EJERCICIO 66

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2016

En esta pregunta, dé todas las respuestas correctas con dos decimales.

Diogo depositó 8000 pesos argentinos, ARS, en una cuenta bancaria que paga una tasa nominal de interés anual del 15%, compuesto mensualmente.

a) Encuentre cuánto interés ha ganado Diogo después de 2 años.

Carmen también depositó ARS en una cuenta bancaria. Su cuenta paga una tasa de interés anual nominal del 17%, compuesta anualmente. Después de tres años, el monto total en la cuenta de Carmen es de 10000 ARS.

b) Encuentre la cantidad que Carmen depositó en la cuenta bancaria.

a) Interés compuesto mensual: $k = 12$, tasa mensual $\frac{15}{12} = 1,25\%$, $n = 2$ años, es decir, 24 periodos.

1. Valor final: $8000(1,0125)^{24} \approx 10778,81$ ARS.
2. Interés ganado = valor final – depósito: $10778,81 - 8000 = 2778,81$.

Resultado a): 2778,81 ARS de interés.

b) Interés compuesto anual al 17% durante 3 años.

$$1. 10000 = C (1,17)^3.$$

$$2. C = \frac{10000}{1,17^3} = \frac{10000}{1,601613} \approx 6243,71.$$

Resultado: a) 2778,81 ARS; b) 6243,71 ARS.

EJERCICIO 67

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

Obi viaja de Dubái a Pretoria y, para ello, cambia en un banco 2000 dirhams de Emiratos Árabes Unidos (AED). A cambio recibe 6160 rands sudafricanos (ZAR). El tipo de cambio aplicado es $1 \text{ AED} = x \text{ ZAR}$.

a) Calcule el valor de x .

Obi decide invertir la mitad del dinero que ha recibido, es decir, 3080 ZAR, en una cuenta donde le pagan un tipo de interés nominal del 9 %, compuesto mensualmente. La cantidad de dinero que hay en la cuenta se habrá duplicado antes de que finalice el n -ésimo año de inversión.

b) Calcule el mínimo valor de n .

a) El tipo de cambio es la cantidad de ZAR que se recibe por cada AED.

$$1. x = \frac{6160}{2000} = 3,08.$$

Resultado a): $x = 3,08$ ZAR por AED.

b) Tasa mensual $\frac{9}{12} = 0,75\%$. Con m meses de inversión:

1. Condición de duplicar: $3080 (1,0075)^m = 6160$, es decir, $(1,0075)^m = 2$.

2. Con la CPG (resolución de ecuaciones o tabla de valores) o con logaritmos: $m = \frac{\ln 2}{\ln 1,0075} \approx 92,76$ meses.

3. El dinero se duplica entre los meses 92 y 93. Como 92,76 meses son 7,73 años, el duplicado ocurre durante el octavo año.

4. Comprobación: al final del año 7 (mes 84) hay $3080 \cdot 1,0075^{84} \approx 5772,6 < 6160$; al final del año 8 (mes 96) hay $3080 \cdot 1,0075^{96} \approx 6309,7 > 6160$.

Resultado: a) $x = 3,08$; b) $n = 8$ (se duplica antes de que acabe el octavo año).

EJERCICIO 68

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2015

Pierre invierte 5000 euros en un depósito fijo que paga un tipo de interés nominal anual del 4,5%, compuesto mensualmente, durante siete años.

a) Calcule el valor de la inversión de Pierre al final de este tiempo. De su respuesta correcto con dos lugares decimales.

Carla tiene 7000 dólares para invertir en un depósito fijo que se capitaliza anualmente. Ella quiere a duplicar su dinero después de 10 años.

b) Calcule la tasa de interés anual mínima necesaria para que Carla logre su objetivo.

a) Interés compuesto mensual: tasa mensual $\frac{4,5}{12} = 0,375\%$, $7 \cdot 12 = 84$ periodos.

$$1. 5000 (1,00375)^{84} \approx 6847,26.$$

Resultado a): 6847,26 euros.

b) Interés compuesto anual, queremos $7000 \rightarrow 14000$ en 10 años.

1. $7000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} = 14000$.
2. $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} = 2$, de donde $1 + \frac{r}{100} = 2^{1/10} \approx 1,0718$.
3. (También se puede resolver con la CPG.) Así $r \approx 7,18$.

Resultado: a) 6847,26 euros; b) tasa mínima $r \approx 7,18\%$ anual.

EJERCICIO 69

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2015

Minta deposita 1000 euros en una cuenta bancaria. El banco paga una tasa de interés 5% nominal anual, compuesto trimestralmente.

- a) Calcule la cantidad de dinero que Minta tendrá en su cuenta después de 3 años. Dé su respuesta aproximada con dos dígitos después del punto decimal.

Minta retirará el dinero de su cuenta bancaria cuando el interés devengado sea de 300 euros.

- b) Calcule el tiempo, en años, hasta que Minta retira el dinero de su cuenta bancaria.

- a) Interés compuesto trimestral: tasa por trimestre $\frac{5}{4} = 1,25\%$, $3 \cdot 4 = 12$ trimestres.

$$1. 1000 (1,0125)^{12} \approx 1160,75.$$

Resultado a): 1160,75 euros.

- b) El interés es de 300 euros cuando el saldo es 1300 euros.

$$1. 1000 (1,0125)^{4t} = 1300, \text{ luego } (1,0125)^{4t} = 1,3.$$

$$2. \text{ Con la CPG (ecuación o herramienta de finanzas) o con logaritmos: } 4t = \frac{\ln 1,3}{\ln 1,0125} \approx 21,12 \text{ trimestres.}$$

$$3. t = \frac{21,12}{4} \approx 5,28 \text{ años.}$$

Resultado: a) 1160,75 euros; b) $t \approx 5,28$ años.

EJERCICIO 70

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2014

Ludmila obtiene un préstamo de 320 000 reales brasileños (BRL) de un banco durante dos años a una tasa de interés nominal anual del 10%, compuesto semestralmente.

- a) Escriba la cantidad de veces que se agrega interés al préstamo en los dos años.
b) Calcule la cantidad exacta de dinero que Ludmila debe reembolsar al final de los dos años.

Ludmila estima que deberá reembolsar 360 000 BRL al final de los dos años.

- c) Calcule el error porcentual en su estimación.

- a) Capitalización semestral: 2 veces al año.

$$1. \text{ En 2 años: } 2 \cdot 2 = 4 \text{ veces.}$$

Resultado a): 4 veces.

- b) Tasa por semestre: $\frac{10}{2} = 5\%$, con 4 periodos.

$$1. 320000 (1,05)^4 = 320000 \cdot 1,21550625 = 388962.$$

Resultado b): 388962 BRL.

- c) Error porcentual = $\left| \frac{v_{\text{estimado}} - v_{\text{exacto}}}{v_{\text{exacto}}} \right| \cdot 100$.

$$1. \left| \frac{360000 - 388962}{388962} \right| \cdot 100 = \frac{28962}{388962} \cdot 100 \approx 7,45.$$

Resultado: a) 4 veces; b) 388962 BRL; c) error del 7,45%.

EJERCICIO 71 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2014

Mandzur, un granjero, solicita un préstamo para comprar un búfalo. Pide prestados 900.000 ríeles Camboyanos (KHR) durante 2 años. La tasa de interés nominal anual es del 15%, compuesto mensualmente.

- Encuentre el total de los intereses que debe pagar Mandzur. Dé su respuesta aproximada lo más próximo a 100 KHR.
- Escriba su respuesta al apartado (a) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Tasa mensual $\frac{15}{12} = 1,25\%$, 24 periodos.

- Valor final: $900000(1,0125)^{24} \approx 1212615,9$ KHR.
- Intereses: $1212615,9 - 900000 \approx 312615,9$.
- Redondeando a las 100 KHR más próximas: 312600.

Resultado a): 312600 KHR.

b) Notación científica:

- $312600 = 3,126 \times 10^5$.

Resultado: a) 312600 KHR; b) $3,126 \times 10^5$.

EJERCICIO 72 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2013

Jenny invirtió \$ 20000 en una cuenta bancaria que pagaba un interés simple anual del 3,5%. Ella retiró su inversión de la cuenta cuando su valor era de \$ 31200.

- Encuentre el número de años durante los cuales se invirtió el dinero.
- Ramón invierte \$ 18000 en una cuenta bancaria que paga 3,4% de interés nominal anual, compuesto trimestralmente.
- Encuentre el número mínimo de años que Ramón debe invertir el dinero para que su inversión llegue al valor de \$ 27000.

a) Interés simple: cada año se gana la misma cantidad, $I = P \cdot r$.

- Interés anual: $20000 \cdot 0,035 = 700$ \$ al año.
- Interés total ganado: $31200 - 20000 = 11200$ \$.
- Número de años: $n = \frac{11200}{700} = 16$.

Resultado a): 16 años.

b) Interés compuesto: $FV = PV \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn}$ con $k = 4$ pagos al año, $r = 3,4$.

- Planteamos $18000 \left(1 + \frac{3,4}{400}\right)^{4n} = 27000$, es decir $18000 \cdot 1,0085^{4n} = 27000$.
- Con la CPG (solucionador de ecuaciones, o la función financiera de TVM con N desconocido) se obtiene $4n \approx 47,9$, es decir $n \approx 11,98$ años.
- Como n debe cumplir que la inversión llegue a \$ 27000 y los intereses se abonan cada trimestre, hacen falta 48 trimestres, que son 12 años. (Con 11,75 años, 47 trimestres, aún no se alcanza.)

Resultado: a) 16 años; b) 12 años como mínimo.

EJERCICIO 73

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2013

A Marcus le da su abuela 500 dólares australianos (AUD) por su 18º cumpleaños. Tiene previsto ingresar ese dinero en un banco que le ofrece, durante tres años, un tipo de interés nominal anual del 6,0 % compuesto trimestralmente.

- a) Calcule la cantidad total de intereses, en AUD, que cobraría Marcus durante estos tres años. Dé la respuesta redondeando a dos cifras decimales.

Marcus cobraría a lo largo de esos tres años los mismos intereses si ingresase los 500 AUD en un segundo banco que ofrece un interés compuesto anualmente.

- b) Calcule el tipo de interés que ofrece ese segundo banco.

a) Capital final con interés compuesto trimestral: $k = 4$, $n = 3$, $r = 6\%$.

$$1. FV = 500 \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{12} = 500 \cdot 1,015^{12}.$$

$$2. \text{Con la CPG: } FV = 597,81 \text{ AUD (aprox., } 597,809 \dots).$$

$$3. \text{Intereses: } 597,81 - 500 = 97,81 \text{ AUD.}$$

Resultado a): 97,81 AUD.

b) En el segundo banco el capital final es el mismo, pero el interés se compone una vez al año durante 3 años.

$$1. \text{Planteamos } 500 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 = 597,809 \dots$$

$$2. \text{Dividimos entre 500: } \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 = 1,195618 \dots$$

$$3. \text{Raíz cúbica: } 1 + \frac{r}{100} = 1,0614, \text{ de donde } r \approx 6,14. \text{ (También se puede resolver con la CPG, con } N = 3, I\% \text{ desconocido y 1 pago por año.)}$$

Resultado: a) 97,81 AUD; b) $r = 6,14\%$ anual.

EJERCICIO 74

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

Veronica quiere hacer una inversión y acumular 25000 EUR durante un período de 18 años. Encuentra dos opciones de inversión. La opción 1 ofrece un interés simple del 5% anual.

- a) Averigüe la cantidad exacta que tendrá en su cuenta después de 18 años, si invierte 12500 EUR con esta opción.

La opción 2 ofrece una tasa de interés nominal anual del 4%, compuesto mensualmente.

- b) Encuentre la cantidad que Verónica tiene que invertir con la opción 2 para tener 25000 EUR en su cuenta después de 18 años. Dé su respuesta aproximada con dos decimales.

a) Interés simple: $FV = PV \left(1 + \frac{r n}{100}\right).$

$$1. \text{Interés anual: } 12500 \cdot 0,05 = 625 \text{ EUR.}$$

$$2. \text{En 18 años: } 625 \cdot 18 = 11250 \text{ EUR.}$$

$$3. \text{Cantidad final: } 12500 + 11250 = 23750 \text{ EUR.}$$

Resultado a): 23750 EUR.

b) Aquí buscamos el capital inicial PV : interés compuesto mensual, $k = 12$, $n = 18$, $r = 4\%$.

$$1. \text{Número de periodos: } 12 \cdot 18 = 216.$$

$$2. \text{Ecuación: } PV \left(1 + \frac{4}{1200}\right)^{216} = 25000.$$

3. Despejamos: $PV = \frac{25000}{\left(1 + \frac{1}{300}\right)^{216}}$.

4. Con la CPG (TVM con PV desconocido, o calculando directamente): $PV \approx 12183,39$ EUR.

Resultado: a) 23750 EUR; b) 12183,39 EUR.

EJERCICIO 75

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

Jackson invirtió 12.000 dólares australianos (AUD) en un banco que ofrecía interés simple a una tasa de interés anual de $r\%$.

El valor de la inversión de Jackson se duplicó después de 20 años.

a) Calcule el valor de r .

Maddison invierte 15000 AUD en un banco que ofrece interés compuesto a una tasa de interés anual de 4.44%, compuesta trimestralmente.

b) Calcule el número de años que tardará la inversión de Maddison en triplicar el valor.

a) Con interés simple, duplicar el valor significa ganar 12000 AUD de intereses en 20 años.

1. Interés anual: $\frac{12000}{20} = 600$ AUD.

2. Tasa: $r = \frac{600}{12000} \cdot 100 = 5$.

Resultado a): $r = 5$.

b) Interés compuesto trimestral ($k = 4$), $r = 4,44\%$. Triplicar significa llegar a 45000 AUD.

1. Ecuación: $15000 \left(1 + \frac{4,44}{400}\right)^{4n} = 45000$, es decir $1,0111^{4n} = 3$.

2. Con la CPG (TVM con N desconocido, o resolviendo la ecuación) se obtiene $4n \approx 99,5$ trimestres, es decir $n \approx 24,9$ años.

3. Como el interés se abona al final de cada trimestre, hacen falta 100 trimestres completos, es decir 25 años (a los 99 trimestres aún no se ha triplicado).

Resultado: a) $r = 5$; b) 25 años (aprox. 24,9 años).

EJERCICIO 76

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

Manisha pide prestado 200000 rupias indias (INR) a un prestamista durante 18 meses a una tasa anual del 15% de interés simple.

a) Calcule el interés que debe pagar Manisha al final de los 18 meses.

Kunal pide prestados 200000 INR al prestamista durante 18 meses a una tasa de interés anual del 15%, compuesto mensualmente.

b) Calcule la cantidad total que Kunal debe reembolsar al final de los 18 meses.

Dé su respuesta a la rupia más cercana.

a) Interés simple durante 18 meses = 1,5 años.

1. $I = 200000 \cdot 0,15 \cdot 1,5 = 45000$.

Resultado a): 45000 INR.

b) Interés compuesto mensual: $k = 12$, $n = 1,5$, número de periodos $12 \cdot 1,5 = 18$.

$$1. FV = 200000 \left(1 + \frac{15}{1200}\right)^{18} = 200000 \cdot 1,0125^{18}.$$

2. Con la CPG: $FV \approx 250115,5 \dots$, que a la rupia más cercana es 250115.

Resultado: a) 45000 INR; b) 250115 INR.

EJERCICIO 77

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2010

Astrid invierte 1200 euros a cinco años, con un tipo de interés (tasa de interés) nominal anual del 7,2%, compuesto mensualmente.

a) Halle los intereses que ha cobrado Astrid durante los cinco años que dura la inversión. Dé la respuesta redondeando a dos cifras decimales.

Helen invierte 1200 euros a cinco años, y se le aplica un tipo de interés (tasa de interés) anual simple. En total, cobra los mismos intereses que Astrid.

b) Halle el tipo de interés (tasa de interés) simple que se le ha aplicado a Helen.

a) Interés compuesto mensual: $k = 12$, 5 años $\Rightarrow$ 60 periodos, tipo mensual $\frac{7,2}{12} = 0,6\%$.

$$1. FV = 1200 \cdot 1,006^{60} \approx 1718,15 \text{ EUR.}$$

$$2. \text{Intereses: } 1718,15 - 1200 = 518,15 \text{ EUR.}$$

Resultado a): 518,15 EUR.

b) Con interés simple, $I = P \cdot \frac{r}{100} \cdot n$.

$$1. 518,15 = 1200 \cdot \frac{r}{100} \cdot 5 = 60r.$$

$$2. r = \frac{518,15}{60} = 8,64.$$

Resultado: a) 518,15 EUR; b) 8,64% anual.

EJERCICIO 78

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2009

Inge pide prestados 4500 € a 2 años.

a) El Banco 1 cobra interés compuesto a una tasa del 15% anual, compuesto trimestral.

Calcule la cantidad total a reembolsar al final de los 2 años.

Dé su respuesta aproximada a dos lugares decimales.

b) El Banco 2 cobra interés simple e Inge pagaría la misma cantidad total que para el banco 1.

Encuentre la tasa de interés que cobra el banco 2.

a) Compuesto trimestral: $k = 4$, $n = 2$ años, tasa por trimestre $\frac{15}{4} = 3,75\%$.

$$1. FV = 4500 \left(1 + \frac{15}{400}\right)^8 = 4500 \cdot 1,0375^8$$

$$2. FV = 4500 \cdot 1,34247 \dots = 6041,12$$

Resultado a): 6041,12 €

b) Con interés simple se paga la misma cantidad, así que el interés es $6041,12 - 4500 = 1541,12$.

$$1. I = PV \cdot \frac{r}{100} \cdot n \Rightarrow 1541,12 = 4500 \cdot \frac{r}{100} \cdot 2$$

$$2. r = \frac{1541,12}{90} = 17,12$$

Resultado: a) 6041,12 €; b) 17,1 % anual (simple)

EJERCICIO 79 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2008

Emma deposita 8000 € en una cuenta bancaria que paga un tipo de interés nominal del 5% anual, compuesto trimestralmente.

a) Calcule la cantidad de dinero que Emma tendría en su cuenta después de 15 años.

Dé su respuesta redondeada al euro más cercano.

b) Después de un tiempo decide retirar el dinero de este banco. Tiene 9058,17 € en su cuenta.

Calcule la cantidad de meses que Emma había dejado el dinero en la cuenta.

a) $k = 4$, $n = 15$, tasa por trimestre $\frac{5}{4} = 1,25\%$.

$$1. FV = 8000 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{60} = 8000 \cdot 1,0125^{60}$$

$$2. FV = 8000 \cdot 2,10718 \dots = 16857,46$$

Resultado a): 16857 €

b) 1. $8000 \cdot 1,0125^m = 9058,17$, donde m es el número de trimestres. 2. Con la CPG (resolver la ecuación): $m = 10$. (Comprobación: $8000 \cdot 1,0125^{10} = 9058,17$.) 3. Meses: $10 \cdot 3 = 30$.

Resultado: a) 16857 €; b) 30 meses

EJERCICIO 80 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

Eva invierte USD 2000, siendo el tipo de interés (tasa de interés) anual nominal del 8 %, compuesto semestralmente.

a) Calcule el valor de la inversión al cabo de 5 años, redondeando al valor entero de dólares más cercano.

Tony invierte USD 1500, siendo el tipo de interés (tasa de interés) nominal anual del 7,8 %, compuesto anualmente.

b) Halle el número de años completos que tardará en duplicar el valor de su inversión.

a) $k = 2$, $n = 5$, tasa semestral $\frac{8}{2} = 4\%$.

$$1. FV = 2000 \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{10} = 2000 \cdot 1,04^{10}$$

$$2. FV = 2000 \cdot 1,48024 = 2960,49$$

Resultado a): 2960 USD

b) Duplicar: $1500 \cdot 1,078^n > 3000$, es decir, $1,078^n > 2$.

1. Con la CPG, $1,078^n = 2$ da $n \approx 9,23$.

2. Como piden años completos y debe superarse el doble: $n = 10$. (Con $n = 9$ el valor es 2959,59 USD < 3000; con $n = 10$ es 3190,4 USD.)

Resultado: a) 2960 USD; b) 10 años

EJERCICIO 81

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2006

Alex invierte 3.600 euros en una cuenta que paga una tasa de interés (tipo de interés) nominal del 5,4 % anual, compuesto mensualmente. El interés se agrega a la cuenta al final de cada mes.

- a) Calcule el número de meses enteros que tardará en duplicarse la inversión de Alex.
- b) (i) Calcule el valor de la inversión luego de nueve años.
- (ii) Halle la tasa (o tipo) de interés simple anual que daría el mismo valor para la inversión después de nueve años.

a) Tasa mensual: $\frac{5,4}{12} = 0,45 \%$.

- Buscamos n con $3600 \cdot 1,0045^n > 7200$, es decir, $1,0045^n > 2$.
- Con la CPG, $1,0045^n = 2$ da $n \approx 154,4$.
- Con $n = 154$ aún no se ha duplicado; con $n = 155$ sí.

Resultado a): 155 meses

b) (i) Nueve años son $12 \cdot 9 = 108$ meses.

$$1. FV = 3600 \cdot 1,0045^{108} = 3600 \cdot 1,62403 = 5846,50$$

Resultado (i): 5846,50 €

(ii) El interés ganado es $5846,50 - 3600 = 2246,50$.

$$1. \text{Interés simple: } 2246,50 = 3600 \cdot \frac{r}{100} \cdot 9$$

$$2. r = \frac{2246,50}{324} = 6,93$$

Resultado (ii): 6,93 % anual

Resultado: a) 155 meses; b) (i) 5846,50 €; (ii) 6,93 %

EJERCICIO 82

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2007

a) 1 real brasileño (BRL) = 2,607 rands sudafricanos (ZAR). Redondeando las respuestas a dos cifras decimales,

- (i) convierta 300 BRL a ZAR,
- (ii) halle cuántos reales se necesitan para comprar 300 rands.

Marta ingresa en una cuenta de ahorros un regalo que le ha hecho su tío por valor de 150 reales. La cuenta de ahorros le paga una tasa de interés (tipo de interés) simple del r % anual. El interés se va añadiendo a la cuenta al final de cada mes. Después de 9 meses, la cantidad en la cuenta de ahorros ascendió a 158,10 reales.

b) Halle el valor de r .

a) (i) $1. 300 \cdot 2,607 = 782,10$

Resultado (i): 782,10 ZAR

(ii) 1. Dividimos entre el tipo de cambio: $\frac{300}{2,607} = 115,07$

Resultado (ii): 115,07 BRL

b) 1. Interés ganado: $158,10 - 150 = 8,10$ reales. 2. 9 meses son $\frac{9}{12} = 0,75$ años. 3. Interés simple: $8,10 = 150 \cdot \frac{r}{100} \cdot 0,75$ 4. $r = \frac{8,10}{1,125} = 7,2$

Resultado: a) (i) 782,10 ZAR; (ii) 115,07 BRL; b) $r = 7,2$

EJERCICIO 83 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Mayo 2005

Una familia de Malasia recibe un regalo de 4000 dólares australianos (AUD) de un primo que vive en Australia. Se convierte el dinero en ringgits malayos. El ringgit se cambia a 0,4504 AUD.

a) Calcule la cantidad de ringgits recibidos.

El dinero se invirtió durante 2 años y 6 meses al 5,2 % anual compuesto mensualmente.

b) Calcule la cantidad de interés percibido en esta inversión. Aproxime la respuesta a las unidades en ringgits.

a)

1. Si 1 ringgit = 0,4504 AUD, para pasar de AUD a ringgits hay que dividir entre 0,4504.

2. $4000/0,4504 = 8880,99 \dots$

Resultado a): 8880,99 ringgits.

b)

1. Interés compuesto mensual: $k = 12$, tiempo 2,5 años, luego $n = 12 \cdot 2,5 = 30$ periodos, con tipo mensual 5,2/12 %.

2. Capital final: $V = 8880,99 \left(1 + \frac{5,2}{1200}\right)^{30} = 10111,06 \dots$

3. Interés = $10111,06 - 8880,99 = 1230,07 \dots$

4. Aproximando a unidades: 1230.

Resultado b): 1230 ringgits de interés.

EJERCICIO 84 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

Bobby sale de América para viajar durante un año por Francia e Inglaterra. Considere los siguientes tipos de cambio:

1 dólar americano (USD) = 0,983 Euros

1 libra esterlina británica (GBP) = 1,59 Euros

a) Bobby cambia 500 USD en Euros.

(i) Calcule cuántos Euros recibe.

Gasta 328 Euros en Francia y cambia el resto en GBP.

(ii) Calcule cuántas GBP recibe.

Mientras está en Inglaterra, Bobby decide poner este dinero en un banco que le paga un 6 % de interés simple anual, y consigue un trabajo a tiempo parcial para cubrir sus gastos. Bobby se queda en Inglaterra durante seis meses.

b) Calcule el interés que recibe al cabo de los seis meses.

a)

1. (i) De USD a euros se multiplica por 0,983: $500 \cdot 0,983 = 491,5$.

2. (ii) Tras gastar 328 euros quedan $491,5 - 328 = 163,5$ euros.

3. Como 1 GBP = 1,59 euros, para pasar a libras se divide entre 1,59: $163,5/1,59 = 102,83 \dots \approx 103$ GBP.

b)

1. Interés simple: $I = C \cdot r \cdot t$ con $C = 102,83$ GBP, $r = 0,06$ y $t = 0,5$ años (seis meses).
2. $I = 102,83 \cdot 0,06 \cdot 0,5 = 3,08 \dots$ GBP. Si se parte de las 103 GBP ya redondeadas, sale 3,09.

Resultado: a) (i) 491,5 euros; (ii) ≈ 103 GBP; b) unos 3,08 GBP de interés (3,09 con 103 GBP).

EJERCICIO 85

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2003

David invierte 6000 dólares australianos (AUD) en un banco que ofrece el 6 % de interés compuesto anual.

- a) Calcule la cantidad de dinero que tendrá dentro de 10 años.
- b) Al cabo de los 10 años, David retira 5000 AUD para invertirlos en otro banco que ofrece 8 % de interés compuesto anual. Calcule la cantidad total de dinero que tendrá en los dos bancos después de otro año más. Aproxime su respuesta al dólar australiano más cercano.

a)

1. Interés compuesto anual: $V = 6000 \cdot 1,06^{10}$.
2. $V = 10745,09 \dots$

Resultado a): unos 10 745 AUD.

b)

1. Tras retirar 5000 AUD quedan en el primer banco $10745,09 - 5000 = 5745,09$ AUD, que durante un año más al 6 % pasan a $5745,09 \cdot 1,06 = 6089,80$.
2. Los 5000 AUD del segundo banco, durante un año al 8 %, pasan a $5000 \cdot 1,08 = 5400$.
3. Total: $6089,80 + 5400 = 11489,80 \approx 11490$.

Resultado b): 11 490 AUD.

EJERCICIO 86

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2000

Hassan invirtió 10000 CHF a la fecha de 1971. La tasa de interés era del 5% anual. ¿Cuánto interés en total habría ganado Hassan al final del año 1999 si

- a) había retirado los intereses de su cuenta al final de cada año;
- b) no había retirado los intereses de su cuenta al final de cada año.

Entre 1971 y el final de 1999 transcurren 28 años.

- a) Retirando los intereses cada año, el capital sigue siendo 10000 CHF y se gana el mismo interés cada año.

1. Interés anual: $10000 \cdot 0,05 = 500$ CHF.
2. En 28 años: $28 \cdot 500 = 14000$ CHF.

- b) Sin retirar los intereses, hay interés compuesto.

1. Valor final: $10000 \cdot 1,05^{28} \approx 39201,29$ CHF.
2. Interés total: $39201,29 - 10000 \approx 29201,29$ CHF, es decir, unos 29200 CHF.

Resultado: a) 14000 CHF; b) ≈ 29200 CHF.

EJERCICIO 87

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2000

Miranti deposita \$ 1000 en una cuenta de inversión que paga un 5% de interés por año.

- a) ¿Cuál será el valor de la inversión después de 5 años si el interés es reinvertido?
b) ¿Cuántos años tardaría la inversión de Miranti de \$ 1000 para duplicar su valor?

Al comienzo de cada año, Brenda deposita \$ 1000 en una cuenta de inversión que paga un interés del 5% anual. El interés se calcula anualmente y se reinvierte.

- c) ¿Cuánto habría en la cuenta de Brenda después de 5 años?

a) Con reinversión el interés es compuesto: $V = 1000 \cdot 1,05^5 = 1276,28$ \$.

b) Se busca n con $1000 \cdot 1,05^n = 2000$, es decir, $1,05^n = 2$.

1. Resolvemos con la CPG (o con logaritmos): $n = \frac{\ln 2}{\ln 1,05} \approx 14,2$.

2. Como el interés se abona por años completos, la inversión supera el doble al cabo de 15 años (a los 14 años aún es $1000 \cdot 1,05^{14} \approx 1979,93 < 2000$).

c) Cada depósito de 1000 \$ se hace al comienzo de un año, así que el primero gana 5 años de interés, el segundo 4, etc., y el último 1:

$$1000 \cdot 1,05^5 + 1000 \cdot 1,05^4 + 1000 \cdot 1,05^3 + 1000 \cdot 1,05^2 + 1000 \cdot 1,05.$$

1. Es una progresión geométrica con primer término 1050, razón 1,05 y 5 términos.

$$2. S_5 = \frac{1050(1,05^5 - 1)}{1,05 - 1} \approx 5801,91 \text{ $}.$$

Resultado: a) 1276,28 \$; b) 15 años; c) 5801,91 \$.

EJERCICIO 88

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2000

John invierte X USD en un banco. La tasa de interés determinada por el banco es del 6% anual, compuesto mensualmente.

- a) Escriba, en función de X , una expresión del valor de la inversión de John al cabo de un año.
b) ¿Qué tasa de interés, cuando se compone anualmente (en lugar de mensualmente) dará el mismo valor de la inversión de John del apartado (a)? Dé su respuesta aproximada con tres cifras significativas.

a) El interés es del 6% anual compuesto mensualmente: $6\%/12 = 0,5\%$ por mes, con 12 periodos al año.

$$V = X \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{12} = X \cdot 1,005^{12}.$$

b) Sea r la tasa anual con capitalización anual. Debe cumplirse

$$X \left(1 + \frac{r}{100} \right) = X \cdot 1,005^{12}.$$

1. Cancelamos X : $1 + \frac{r}{100} = 1,005^{12} \approx 1,0616778$.

2. Entonces $\frac{r}{100} \approx 0,0616778$, luego $r \approx 6,17\%$.

Resultado: a) $X \cdot 1,005^{12}$; b) $r \approx 6,17\%$.

EJERCICIO 89

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2018

Dé sus respuestas a los apartados (b), (c) y (d) al número entero más cercano.

Harinder tiene 14 000 dólares estadounidenses (USD) para invertir durante un período de cinco años. El tiene dos opciones de cómo invertir el dinero.

Opción A: Invierte el monto total, en USD, en una cuenta de depósito fijo en un banco estadounidense. La cuenta paga una tasa de interés nominal anual de $r\%$, compuesto anualmente, para cinco años. El gerente del banco dice que esto le dará a Harinder un retorno de 17500 USD.

a) Calcule el valor de r .

Opción B: Invierte el monto total, en rupias indias (INR), en una cuenta de depósito fijo en un banco indio. El dinero debe convertirse de USD a INR antes de invertirlo. El tipo de cambio es $1 \text{ USD} = 66,91 \text{ INR}$.

b) Calcule 14 000 USD en INR.

La cuenta en el banco indio paga una tasa de interés nominal anual del $5,2\%$ compuesto mensual.

c) Calcule el monto de esta inversión, en INR, en esta cuenta después de cinco años.

Harinder eligió la opción B. Al cabo de cinco años, Harinder volvió a convertir esta inversión en DÓLAR ESTADOUNIDENSE. El tipo de cambio, en ese momento, era $1 \text{ USD} = 67,16 \text{ INR}$.

d) Calcule cuánto dinero más, en USD, ganó Harinder eligiendo la opción B en lugar de la opción A.

a)

$$1. \text{ Interés compuesto anual durante 5 años: } 14000 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 17500.$$

$$2. \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = \frac{17500}{14000} = 1,25.$$

$$3. 1 + \frac{r}{100} = 1,25^{1/5} = 1,04564, \text{ luego } r = 4,56 \text{ (también se puede obtener con el solucionador financiero de la CPG).}$$

Resultado a): $r \approx 4,56\%$.

b)

$$1. 14000 \cdot 66,91 = 936\,740.$$

Resultado b): 936 740 INR.

c)

$$1. \text{ Interés mensual: } n = 12, t = 5 \text{ años, 60 periodos, tasa } 5,2\%.$$

$$2. FV = 936740 \left(1 + \frac{5,2}{1200}\right)^{60} = 936740 \cdot 1,296202 \dots = 1\,214\,204.$$

Resultado c): 1 214 204 INR.

d)

$$1. \text{ Al volver a USD: } \frac{1214204}{67,16} = 18\,079,27 \dots \approx 18\,079 \text{ USD.}$$

$$2. \text{ La opción A daba } 17\,500 \text{ USD.}$$

$$3. \text{ Diferencia: } 18\,079 - 17\,500 = 579.$$

Resultado d): con la opción B, Harinder ganó 579 USD más.

EJERCICIO 90

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2013

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a dos cifras decimales.

Arthur vive en Londres. El 1 de agosto de 2008 Arthur pagó 37500 euros (EUR) por un coche nuevo traído de Alemania. El precio de ese mismo coche en Londres era de 34075 libras esterlinas (GBP). El tipo de cambio vigente el 1 de agosto de 2008 era: 1 EUR = 0,7234 GBP.

- a) Calcule, en GBP, el precio que pagó Arthur por el coche.
- b) Escriba, en GBP, cuánto dinero se ahorró Arthur por comprar el coche en Alemania.

El 1 de agosto de 2008 Arthur invirtió el dinero que se había ahorrado en un banco que pagaba un interés simple anual del 4,5 %.

- c) Calcule, en GBP, cuál era el valor de la inversión de Arthur el 1 de agosto de 2012.

Entre el 1 de agosto de 2008 y el 1 de agosto de 2012 el coche de Arthur se fue depreciando con una tasa anual del 9 % de su valor.

- d) Calcule, en GBP, cuál es el valor del coche de Arthur el 1 de agosto de 2009.
- e) Compruebe que el valor del coche de Arthur el 1 de agosto de 2012 era de 18600 GBP, redondeando a la centena de GBP más próxima.

El 1 de agosto de 2012 Arthur vendió su coche por 18600 GBP y se compró un coche nuevo traído de Alemania por el que pagó 30500 EUR. Para comprar el coche nuevo, utilizó las 18600 GBP y el valor de la inversión que había realizado el 1 de agosto de 2008.

El tipo de cambio vigente el 1 de agosto de 2012 era: 1 EUR = 0,8694 GBP.

- f) Calcule cuánto dinero le sobra, en EUR, después de haber comprado el coche.

- a) Convertimos euros a libras: 1 EUR = 0,7234 GBP.

$$1. 37500 \cdot 0,7234 = 27127,50.$$

Resultado a): 27127,50 GBP.

- b) El ahorro es la diferencia entre el precio en Londres y lo que pagó:

$$1. 34075 - 27127,50 = 6947,50.$$

Resultado b): 6947,50 GBP.

- c) Interés simple del 4,5% anual durante 4 años (de agosto de 2008 a agosto de 2012).

$$1. \text{Interés anual: } 6947,50 \cdot 0,045 = 312,6375.$$

$$2. \text{En 4 años: } 312,6375 \cdot 4 = 1250,55.$$

$$3. \text{Valor: } 6947,50 + 1250,55 = 8198,05. \text{ (Equivale a } 6947,50 \cdot 1,18.)$$

Resultado c): 8198,05 GBP.

- d) El coche costó 27127,50 GBP y se deprecia un 9% anual, es decir, cada año vale el 91% del año anterior.

$$1. \text{Tras un año: } 27127,50 \cdot 0,91 = 24686,025.$$

Resultado d): 24686,03 GBP.

- e) Tras 4 años (de 2008 a 2012):

$$1. 27127,50 \cdot 0,91^4 = 27127,50 \cdot 0,685750 \approx 18602,67 \text{ GBP.}$$

$$2. \text{Redondeado a la centena más próxima: } 18600 \text{ GBP.}$$

Queda demostrado.

- f) Dinero disponible el 1 de agosto de 2012, en GBP:

$$1. 18600 + 8198,05 = 26798,05 \text{ GBP.}$$

$$2. \text{Precio del coche nuevo en GBP: } 30500 \cdot 0,8694 = 26516,70 \text{ GBP.}$$

3. Sobrante: $26798,05 - 26516,70 = 281,35$ GBP.

4. Pasamos a euros dividiendo entre 0,8694: $\frac{281,35}{0,8694} = 323,61$ EUR.

Resultado: a) 27127,50 GBP; b) 6947,50 GBP; c) 8198,05 GBP; d) 24686,03 GBP; e) demostrado (≈ 18600 GBP); f) 323,61 EUR.

EJERCICIO 91

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2011

Responda todas las respuestas de esta pregunta a la unidad monetaria entera más cercana.

En enero de 2008, Larry tenía 90000 dólares para invertir para su jubilación en enero de 2011. Invertió 40000 USD en bonos del gobierno de EE. UU. que pagaron el 4% anual de interés simple.

a) Calcule el valor de la inversión de Larry en bonos del gobierno en enero de 2011.

Larry cambió esta inversión a rand sudafricano (ZAR) a un tipo de cambio de $1 \text{ USD} = 18.624 \text{ ZAR}$.

b) Calcule la cantidad que Larry recibió en ZAR del intercambio.

Cambió los 50000 USD restantes a rand sudafricanos (ZAR) en enero de 2008.

El tipo de cambio entre USD y ZAR fue $1 \text{ USD} = 10.608 \text{ ZAR}$. Había 2.5% de comisión cobrada en el intercambio.

c) Calcule el valor, en USD, de la comisión que pagó Larry.

d) Muestre que la cantidad que Larry tuvo que invertir es 517000 ZAR, aproximado al mil ZAR más cercano.

En enero de 2008, Larry depositó este dinero en una cuenta bancaria que pagaba intereses a una tasa nominal anual del 12%, compuesta mensualmente.

e) Encuentre el valor del dinero en la cuenta bancaria de Larry en enero de 2011.

a) Interés simple del 4% durante 3 años (enero 2008 a enero 2011).

1. Interés anual: $40000 \cdot 0,04 = 1600$.

2. En 3 años: 4800.

3. Valor: $40000 + 4800 = 44800$.

Resultado a): 44800 USD.

b) Cambio con $1 \text{ USD} = 18,624 \text{ ZAR}$:

1. $44800 \cdot 18,624 = 834355,2$.

Resultado b): 834355 ZAR.

c) La comisión es el 2,5% de los 50000 USD cambiados:

1. $50000 \cdot 0,025 = 1250$.

Resultado c): 1250 USD.

d) Cambiamos solo lo que queda tras pagar la comisión:

1. Dinero cambiado: $50000 - 1250 = 48750 \text{ USD}$.

2. En rand: $48750 \cdot 10,608 = 517140 \text{ ZAR}$.

3. Al millar de ZAR más próximo: 517000 ZAR.

Queda demostrado.

e) Interés compuesto mensual, $k = 12$, $r = 12\%$, durante 3 años: 36 periodos, tipo mensual del 1%.

1. $FV = 517000 \left(1 + \frac{12}{1200}\right)^{36} = 517000 \cdot 1,01^{36}$.

2. Con la CPG: $FV \approx 739707$.

Resultado: a) 44800 USD; b) 834355 ZAR; c) 1250 USD; d) demostrado; e) 739707 ZAR.

EJERCICIO 92

★★★ Dificil

IB · P2 TZ2 Mayo 2011

Dé todas tus respuestas numéricas aproximadas con dos decimales.

El 1 de enero de 2005, Daniel invirtió 30000 AUD a una tasa de interés simple anual en una cuenta **Ahorrador Regular**. El 1 de enero de 2007, Daniel tenía 31650 AUD en la cuenta.

a) Calcule la tasa de interés.

El 1 de enero de 2005, Rebecca invirtió 30000 AUD en una cuenta en **Supersaver** con una tasa nominal anual del 2,5% compuesto anualmente.

b) Calcule la cantidad en la cuenta **Supersaver** después de dos años.

c) Encuentre el número de años completos desde el 1 de enero de 2005 para que la cantidad en la cuenta de Rebecca exceda la cantidad en la cuenta de Daniel.

El 1 de enero de 2007, Daniel reinvertió el 80% del dinero del **Ahorro Regular** en una cuenta de **Ahorro Extra** a una tasa anual nominal del 3% compuesto trimestral.

d) (i) Calcule la cantidad de dinero reinvertida por Daniel el 1 de enero 2007.

(ii) Encuentre el número de años completos que se necesitarán para que la cantidad de Daniel en la cuenta de **Ahorro Extra** supere los 30000 AUD.

a) Interés simple: en 2 años (2005 a 2007) se ganaron $31650 - 30000 = 1650$ AUD.

$$1. \text{ Interés anual: } \frac{1650}{2} = 825 \text{ AUD.}$$

$$2. \text{ Tasa: } \frac{825}{30000} \cdot 100 = 2,75.$$

Resultado a): 2,75%.

b) Interés compuesto anual del 2,5%, 2 años:

$$1. 30000 \cdot 1,025^2 = 31518,75.$$

Resultado b): 31518,75 AUD.

c) Comparamos las dos cuentas año a año. Daniel: $30000 + 825n$. Rebecca: $30000 \cdot 1,025^n$. Resolvemos con la CPG (tabla de valores o gráficas de ambas funciones).

1. $n = 8$: Daniel 36600; Rebecca 36552,08. Rebecca aún no supera.

2. $n = 9$: Daniel 37425; Rebecca 37465,89. Rebecca ya supera.

Resultado c): 9 años.

d) (i) Se reinvierte el 80% de 31650:

$$1. 0,80 \cdot 31650 = 25320.$$

(ii) Interés compuesto trimestral, $k = 4$, $r = 3\%$: tipo trimestral 0,75%. Queremos $25320 \cdot 1,0075^{4n} > 30000$.

1. Con la CPG se obtiene $4n > 22,7$, es decir hacen falta 23 trimestres (5,75 años).

2. En años completos: tras 5 años (20 trimestres) hay ≈ 29401 AUD, no basta; tras 6 años (24 trimestres) hay ≈ 30293 AUD, ya supera 30000.

Resultado: a) 2,75%; b) 31518,75 AUD; c) 9 años; d) (i) 25320 AUD; (ii) 6 años completos.

EJERCICIO 93

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2010

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando al valor entero más próximo de la unidad monetaria correspondiente.

Ying y Ruby tienen cada uno 5000 USD para invertir.

Ying invierte sus 5000 USD en una cuenta bancaria que paga un tipo de interés (tasa de interés) nominal anual del 4,2 %, compuesto anualmente. Ruby invierte sus 5000 USD en una cuenta que ofrece un interés fijo, igual a 230 USD cada año.

- Halle cuánto dinero tendrá Ruby en el banco al cabo de 3 años.
- Compruebe que Ying tendrá en el banco 7545 USD al cabo de 10 años.
- Halle el número de años completos que tendrán que pasar para que la inversión de Ying supere por primera vez los 6500 USD.
- Halle el número de años completos que tendrán que pasar para que la inversión de Ying supere a la inversión de Ruby.

Ruby se traslada a vivir desde Estados Unidos a Italia. Por ello, transfiere 6610 USD a un banco italiano que aplica el siguiente tipo de cambio: 1 USD = 0,735 euros. El banco le cobra una comisión del 1,8 %.

- Calcule cuánto dinero tendrá Ruby para invertir en el banco italiano, una vez pagada dicha comisión.

Ruby vuelve a los Estados Unidos de vacaciones. Cambia 800 Euros en un banco en Chicago, y recibe 1006,20 USD. El banco tiene anunciado que aplica el siguiente tipo de cambio: 1 euro = 1,29 USD.

- Calcule la comisión, expresada como un porcentaje, que le cobran a Ruby en dicho banco.

- El interés es fijo: 230 USD cada año.

$$1. \text{ Dinero tras 3 años: } 5000 + 3 \cdot 230 = 5690.$$

Resultado a): 5690 USD

- Interés compuesto anual: $FV = PV \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn}$ con $k = 1$.

$$1. FV = 5000 \cdot (1,042)^{10}$$

$$2. FV = 5000 \cdot 1,50896 \dots = 7544,8 \approx 7545 \text{ USD.}$$

Queda demostrado.

- Se busca el menor n entero con $5000 \cdot 1,042^n > 6500$.

$$1. \text{ Dividimos entre 5000: } 1,042^n > 1,3.$$

$$2. \text{ Con la CPG (tabla o resolviendo la ecuación) } 1,042^n = 1,3 \text{ da } n \approx 6,38.$$

$$3. \text{ Comprobación: con } n = 6 \text{ resultan 6400 USD (no supera); con } n = 7 \text{ resultan 6668 USD (sí).}$$

Resultado c): 7 años

- Valor de Ruby tras n años: $5000 + 230n$. Valor de Ying: $5000 \cdot 1,042^n$. Comparamos con la CPG.

$$1. n = 5: \text{ Ying} = 6142; \text{ Ruby} = 6150. \text{ Ying todavía no supera.}$$

$$2. n = 6: \text{ Ying} = 6400; \text{ Ruby} = 6380. \text{ Ying ya supera.}$$

Resultado d): 6 años

1. Pasamos a euros: $6610 \cdot 0,735 = 4858,35 \text{ €}$. 2. La comisión es del 1,8 %, así que queda el 98,2 %: $4858,35 \cdot 0,982 = 4770,90$.

Resultado e): 4771 €

1. Sin comisión recibiría $800 \cdot 1,29 = 1032 \text{ USD}$. 2. Recibe 1006,20 USD, luego la comisión es $1032 - 1006,20 = 25,80 \text{ USD}$. 3. Porcentaje: $\frac{25,80}{1032} \cdot 100 = 2,5$.

Resultado: a) 5690 USD; b) comprobado; c) 7 años; d) 6 años; e) 4771 €; f) 2,5 %

EJERCICIO 94

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2010

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a dos cifras decimales.

Apartado A

Estela vive en Brasil y quiere cambiar 4000 BRL (reales brasileños) a GBP (libras esterlinas británicas). El tipo de cambio es $1,00 \text{ BRL} = 0,3071 \text{ GBP}$. El banco cobra un 3 % de comisión sobre la cantidad de BRL.

- a) Halle, en BRL, cuánto dinero tiene Estela después de pagar la comisión.
- b) Halle, en GBP, cuánto dinero recibe Estela.

Tras su viaje al Reino Unido, a Estela le han sobrado 400 GBP. En el aeropuerto vuelve a cambiar este dinero a BRL. El tipo de cambio es ahora $1,00 \text{ BRL} = 0,3125 \text{ GBP}$.

- c) Halle, en BRL, cuánto dinero debería recibir Estela.

En realidad, y después de pagar una comisión, Estela acaba recibiendo 1216,80 BRL.

- d) Halle, en BRL, qué comisión se le ha cobrado a Estela.
- e) El porcentaje de comisión es el t %. Halle el valor de t .

Apartado B

Daniel invierte \$1000 (dólares estadounidenses) en una cuenta que ofrece un tipo de interés nominal anual del 3,5 %, compuesto semestralmente.

- a) Compruebe que después de tres años, Daniel tendrá en su cuenta \$1109,70 (redondeando a dos cifras decimales).
- b) Escriba el interés que recibe Daniel una vez transcurridos estos tres años.

Helen invierte \$1000 en una cuenta que ofrece un interés simple anual.

- c) Halle el tipo de interés simple anual necesario para que Helen tenga en su cuenta \$1109,70 después de tres años.

Apartado A

- a) 1. Comisión: 3% de 4000 = 120 BRL. 2. Queda $4000 - 120 = 3880,00 \text{ BRL}$.

Resultado a): 3880,00 BRL

- b) $1. 3880 \cdot 0,3071 = 1191,548$

Resultado b): 1191,55 GBP

- c) 1. Como $1 \text{ BRL} = 0,3125 \text{ GBP}$, dividimos: $\frac{400}{0,3125} = 1280$.

Resultado c): 1280,00 BRL

- d) 1. Comisión = $1280 - 1216,80 = 63,20$.

Resultado d): 63,20 BRL

- e) 1. $t = \frac{63,20}{1280} \cdot 100 = 4,9375$

Resultado e): $t = 4,94$

Apartado B

- a) Capitalización semestral: $k = 2$, $n = 3$, tasa por periodo $\frac{3,5}{2} = 1,75\%$.

$$1. FV = 1000 \left(1 + \frac{3,5}{200} \right)^6 = 1000 \cdot 1,0175^6$$

$$2. FV = 1000 \cdot 1,10970 \dots = 1109,70$$

Queda demostrado.

b) 1. Interés = $1109,70 - 1000 = 109,70$.

Resultado b): \$109,70

c) Interés simple: $I = PV \cdot \frac{r}{100} \cdot n$.

1. $109,70 = 1000 \cdot \frac{r}{100} \cdot 3$

2. $r = \frac{109,70}{30} = 3,6566\dots$

Resultado: A) a) 3880,00 BRL; b) 1191,55 GBP; c) 1280,00 BRL; d) 63,20 BRL; e) $t = 4,94$. B) a) comprobado; b) \$109,70; c) $r = 3,66\%$

EJERCICIO 95

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2001

La siguiente tabla muestra los depósitos, en dólares australianos (AUD), realizados por Vicki en una cuenta de inversión el primer día de cada mes para los primeros cuatro meses en 1999. La tasa de interés es de 0,75% mensual compuesto mensual. El interés se agrega a la cuenta al final de cada mes.

Mes	Depósito (AUD)
Enero	600
Febrero	1300
Marzo	230
Abril	710

a) Muestre que la cantidad de dinero en la cuenta de Vicki al final de Febrero es AUD 1918.78.

b) Calcule la cantidad de dólares australianos en la cuenta de Vicki al final de abril.

Vicki no realiza retiros ni depósitos después del 1 de abril de 1999.

c) ¿Cuánto dinero hay en la cuenta de Vicki a fines de diciembre de 1999?

A partir del 1 de enero de 2000, el banco aplica un nuevo tipo de interés de 3,5% anual compuesto anualmente.

d) ¿En cuántos años completos después de diciembre de 1999 la inversión de Vicki supera los 3300 AUD?

a)

1. El 1 de enero deposita 600; al final de enero, con interés mensual del 0,75 %: $600 \cdot 1,0075 = 604,50$.
2. El 1 de febrero añade 1300: $604,50 + 1300 = 1904,50$.
3. Al final de febrero: $1904,50 \cdot 1,0075 = 1918,78\dots$

Queda demostrado.

b)

1. El 1 de marzo: $1918,78 + 230 = 2148,78$. Final de marzo: $2148,78 \cdot 1,0075 = 2164,90$ (sin redondear intermedios: 2164,898...).
2. El 1 de abril: $2164,898 + 710 = 2874,898$. Final de abril: $2874,898 \cdot 1,0075 = 2896,46\dots$

Resultado b): 2896,46 AUD.

c)

1. De final de abril a final de diciembre pasan 8 meses sin movimientos: $2896,46 \cdot 1,0075^8$.
2. = 3074,88...

Resultado c): 3074,88 AUD.

d)

1. Desde enero de 2000, interés anual del 3,5 %: tras n años, $3074,88 \cdot 1,035^n$.
2. Buscamos el menor n entero con $3074,88 \cdot 1,035^n > 3300$. Con la CPG (tabla de valores o resolviendo la ecuación) la igualdad se da en $n \approx 2,05$.
3. Comprobamos: $n = 2$ da $3074,88 \cdot 1,035^2 = 3293,9 < 3300$; $n = 3$ da $3074,88 \cdot 1,035^3 = 3409,3 > 3300$.

Resultado d): 3 años completos.

EJERCICIO 96

★★★ Dificil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2005

Ali, Bob y Connie quieren invertir 3000 USD (dólares de EE UU) cada uno.

Ali invierte sus 3000 USD en una entidad que ofrece un interés simple del 4,5% anual. El interés se hace efectivo al final de cada año.

Bob invierte sus 3000 USD en un banco que ofrece un interés compuesto anualmente a una tasa (tipo) del 4% anual. El interés se hace efectivo al final de cada año.

Connie invierte sus 3000 USD en otro banco que ofrece un interés compuesto semestralmente a una tasa (tipo) del 3,8% anual. El interés se hace efectivo al final de cada semestre.

- a) Calcule la cantidad de dinero que tendrán Ali y Bob al principio del séptimo año.
- b) Compruebe que, al principio del séptimo año, Connie tiene 3760,20 USD.
- c) Calcule cuántos años le llevará a Bob tener 6000 USD en el banco.

Al principio del séptimo año, Connie se muda a Inglaterra. Connie hace una transferencia para pasar su dinero a un banco de allí, a una tasa de cambio de 1 USD=0,711 GBP (Libras esterlinas). El banco le carga un 2% de comisión.

- d) (i) Calcule, en USD, la comisión que le carga el banco.
- (ii) Calcule la cantidad de dinero, en GBP, que Connie transfiere al banco de Inglaterra.

a) Al principio del séptimo año han pasado 6 años completos.

1. Ali (interés simple): cada año recibe $3000 \cdot 0,045 = 135$ USD. En 6 años: $3000 + 6 \cdot 135 = 3810$ USD.

2. Bob (interés compuesto anual): $V = 3000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^6 = 3000 \cdot 1,04^6 \approx 3795,96$ USD, es decir, unos 3796 USD.

b) Connie capitaliza cada semestre, así que en 6 años hay $6 \cdot 2 = 12$ periodos, con tasa $3,8\%/2 = 1,9\%$ por semestre.

1. $V = 3000 \cdot \left(1 + \frac{3,8}{200}\right)^{12} = 3000 \cdot 1,019^{12}$.

2. Con la calculadora: $3000 \cdot 1,019^{12} \approx 3760,20$ USD.

Queda demostrado.

c) Buscamos n tal que $3000 \cdot 1,04^n = 6000$, es decir, $1,04^n = 2$.

1. Resolvemos la ecuación con la herramienta de la CPG (o con logaritmos): $n = \frac{\ln 2}{\ln 1,04} \approx 17,7$.

2. Hacen falta unos 17,7 años (en la práctica, el valor supera los 6000 USD durante el año 18).

d) (i) Comisión: 2% de 3760,20, es decir, $0,02 \cdot 3760,20 = 75,20$ USD.

(ii) 1. Dinero que queda tras la comisión: $3760,20 - 75,20 = 3685,00$ USD. 2. Cambio a libras: $3685 \cdot 0,711 = 2620,035 \approx 2620,04$ GBP.

Resultado: a) Ali 3810 USD, Bob ≈ 3796 USD; b) comprobado; c) $\approx 17,7$ años; d) (i) 75,20 USD; (ii) $\approx 2620,04$ GBP.

Depreciación y crecimiento

EJERCICIO 97

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

La población de la ciudad de Nouméa, a finales de 2008, era de 97579 habitantes. Un año más tarde, a finales de 2009, la población de Nouméa era de 99 921 habitantes.

- Halle la variación porcentual que se produjo en la población desde finales de 2008 hasta finales de 2009. Suponga ahora que la población de Nouméa sigue creciendo con la misma tasa de variación porcentual.
- Utilice la respuesta hallada en el apartado (a) para estimar cuál será la población a finales de 2016.
- Escriba la respuesta hallada en el apartado (b) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Variación porcentual = $\frac{\text{valor final} - \text{valor inicial}}{\text{valor inicial}} \cdot 100$.

$$1. \frac{99921 - 97579}{97579} \cdot 100 = \frac{2342}{97579} \cdot 100 \approx 2,40.$$

Resultado a): aumento del 2,40%.

b) De finales de 2009 a finales de 2016 pasan 7 años, con un crecimiento anual del 2,4% (factor 1,024).

- Población en 2016: $99921 \cdot (1,024)^7$.
- $1,024^7 \approx 1,18059$, así que la población es ≈ 117966 habitantes.

Resultado b): aproximadamente 117966 habitantes.

c) Notación científica con $1 \leq a < 10$:

$$1. 117966 = 1,17966 \times 10^5 \approx 1,18 \times 10^5.$$

Resultado: a) 2,40%; b) ≈ 117966 habitantes; c) $1,18 \times 10^5$.

EJERCICIO 98

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2008

En un experimento se encontró que un cultivo de bacterias se triplica en número cada cuatro horas. Hay 200 bacterias al comienzo del experimento.

Horas	0	4	8	12	16
Nº de bacterias	200	600	a	5400	16200

- Encuentre el valor de a .
- Calcule cuántas bacterias habrá después de un día.
- Encuentre cuánto tiempo hará falta para que haya dos millones de bacterias.

a) Cada 4 horas se multiplica por 3: $a = 600 \cdot 3 = 1800$. (Comprobación: $1800 \cdot 3 = 5400$.)

Resultado a): $a = 1800$

b) Un día son 24 horas, es decir, $24/4 = 6$ periodos.

$$1. N = 200 \cdot 3^6 = 200 \cdot 729 = 145800$$

Resultado b): 145800 bacterias

c) Con t horas hay $N = 200 \cdot 3^{t/4}$ bacterias.

$$1. 200 \cdot 3^{t/4} = 2\,000\,000 \Rightarrow 3^{t/4} = 10\,000$$

$$2. \text{Tomando logaritmos (o resolviendo con la CPG): } \frac{t}{4} = \frac{\ln 10000}{\ln 3} = 8,384$$

$$3. t = 4 \cdot 8,384 = 33,5$$

Resultado: a) 1800; b) 145800; c) unas 33,5 horas

EJERCICIO 99

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2003

Mario ha gastado \$ 40000 en comprar unas tierras. Las tierras aumentan de valor en un 5 % todos los años.

(i) ¿Cuánto valen las tierras una vez pasados cinco años?

Pasados cinco años, Mario vende las tierras. Paga un impuesto del 1% sobre la venta y gasta el resto del dinero en un automóvil. El automóvil baja de valor a una tasa de \$ 2500 por año.

(ii) ¿Cuánto paga Mario por impuestos?

(iii) ¿Cuánto vale el automóvil cinco años después de haberlo comprado Mario?

(i)

1. Aumento del 5 % anual: factor 1,05 cada año, así que $V = 40000 \cdot 1,05^5$.
2. $V = 51051,26 \dots$

(ii)

1. El impuesto es el 1 % de la venta: $0,01 \cdot 51051,26 = 510,51$.

(iii)

1. Dinero que queda para el coche: $51051,26 - 510,51 = 50540,75$ (o bien $0,99 \cdot 51051,26$).
2. Baja \$ 2500 por año (progresión aritmética), así que en 5 años pierde $5 \cdot 2500 = 12500$.
3. Valor: $50540,75 - 12500 = 38040,75$.

Resultado: (i) \$ 51 051,26; (ii) \$ 510,51; (iii) \$ 38 040,75.

EJERCICIO 100

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2008

A lo largo de toda esta pregunta hay que dar todas las respuestas redondeando al número entero más cercano.

El Colegio Parque empezó a dar clases en enero de 2000, con 100 alumnos. Cada año completo, el número de alumnos aumenta un 6 %.

- a) Halle el número de alumnos que tiene el Colegio Parque en
- (i) enero de 2001;
 - (ii) enero de 2003.
- b) Compruebe que en enero de 2007 el número de alumnos que tiene el Colegio Parque es igual a 150.

El Colegio Arboleda tenía 110 alumnos en enero de 2000. Cada año completo, el número de alumnos aumenta en 10 respecto al año anterior.

- c) Halle el número de alumnos que tiene el Colegio Arboleda en enero de 2003.
- d) Halle cuál será el primer año en el que el número de alumnos del Colegio Arboleda será un 60 % más que en enero de 2000.

Cada mes de enero, a uno de los dos colegios, aquel que tiene más alumnos, se le concede un dinero extra para que lo gaste en equipamiento deportivo.

- e) (i) Decida qué colegio recibe este dinero en 2007. Justifique su respuesta.
- (ii) Halle en qué año recibirá el Colegio Parque por primera vez este dinero extra.

El número de alumnos del Colegio Parque crece un 6 % cada año: es una progresión geométrica de primer término 100 y razón $r = 1,06$, es decir, $P_n = 100 \cdot 1,06^n$, con n los años transcurridos desde enero de 2000. El Colegio Arboleda crece en 10 alumnos cada año: es una progresión aritmética, $A_n = 110 + 10n$.

a)

1. (i) De enero de 2000 a enero de 2001 pasa $n = 1$ año: $P_1 = 100 \cdot 1,06 = 106$.
2. (ii) De 2000 a 2003 pasan $n = 3$ años: $P_3 = 100 \cdot 1,06^3 = 119,1016 \approx 119$.

Resultado a): (i) 106 alumnos; (ii) 119 alumnos.

b)

1. De 2000 a 2007 pasan $n = 7$ años.
2. $P_7 = 100 \cdot 1,06^7 = 150,363 \dots$
3. Redondeando al entero más cercano, $P_7 = 150$.

Queda demostrado.

c)

1. De 2000 a 2003, $n = 3$.
2. $A_3 = 110 + 10 \cdot 3 = 140$.

Resultado c): 140 alumnos.

d)

1. Un 60 % más que en enero de 2000 significa $110 \cdot 1,6 = 176$ alumnos.
2. Planteamos $110 + 10n \geq 176$, de donde $10n \geq 66$ y $n \geq 6,6$.
3. Como n es un número entero de años, el menor valor es $n = 7$ (en $n = 6$ hay solo 170 alumnos, que no llega a 176; en $n = 7$ hay 180).
4. $n = 7$ corresponde a enero de $2000 + 7 = 2007$.

Resultado d): el año 2007.

e)

1. (i) En 2007: Parque tiene 150 alumnos y Arboleda tiene $110 + 10 \cdot 7 = 180$. Como $180 > 150$, el dinero lo recibe el Colegio Arboleda.
2. (ii) Buscamos el primer n con $100 \cdot 1,06^n > 110 + 10n$. Se lo pedimos a la CPG (tabla de valores de ambas funciones, o intersección de sus gráficas), o probamos valores:
 - $n = 18$: $P_{18} = 285,4 \dots$ y $A_{18} = 290$. Aún gana Arboleda.
 - $n = 19$: $P_{19} = 302,56 \dots$ y $A_{19} = 300$. Ya gana Parque.
3. El primer n en que Parque supera a Arboleda es $n = 19$, que corresponde a enero de $2000 + 19 = 2019$.

Resultado e): (i) Colegio Arboleda; (ii) el Colegio Parque lo recibe por primera vez en el año 2019.

Cambio de divisas

EJERCICIO 101

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2019

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando al número entero más próximo. Criselda viajó a Kota Kinabalu, en Malasia. En el aeropuerto vio la siguiente información en la oficina de cambio de divisas.

Cambio de divisas – ringgit malasio (MYR)

Venta	Compra
1 dólar de Singapur (SGD)	3,22 3,07
1 dólar estadounidense (USD)	4,45 4,25

Esto significa que en esta oficina de cambio de divisas compran USD a los viajeros y, a cambio, les entregan MYR según el tipo de cambio $1 \text{ USD} = 4,25 \text{ MYR}$. No se cobra ninguna comisión. Criselda cambió 460 SGD a MYR.

a) Calcule cuántos MYR recibió Criselda.

Durante el tiempo que pasó en Kota Kinabalu, Criselda gastó 440 MYR. Volvió a la oficina de cambio de divisas y cambió el resto de sus MYR por USD.

b) Calcule cuántos USD recibió Criselda.

a)

1. La oficina compra SGD a Criselda y le entrega MYR al tipo de «Compra»: $1 \text{ SGD} = 3,07 \text{ MYR}$.
2. $460 \cdot 3,07 = 1412,2$, que redondeado al entero más próximo es 1412.

Resultado a): 1412 MYR.

b)

1. Le quedan $1412 - 440 = 972 \text{ MYR}$.
2. Ahora la oficina le vende USD a Criselda y ella entrega MYR: se usa el tipo de «Venta», $1 \text{ USD} = 4,45 \text{ MYR}$.
3. $\frac{972}{4,45} = 218,4 \dots \approx 218$.

Resultado b): 218 USD.

Otros problemas de progresiones

EJERCICIO 102

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2002

Una Lotería Nacional está ofreciendo premios en una nueva competencia. El ganador puede elegir uno de los siguientes.

Opción uno \$ 1000 cada semana durante 10 semanas.

Opción dos \$ 250 en la primera semana, \$ 450 en la segunda semana, \$ 650 en la tercera semana, aumentando en \$ 200 cada semana por un total de 10 semanas.

Opción tres \$ 10 en la primera semana, \$ 20 en la segunda semana, \$ 40 en la tercera semana continúa duplicándose durante un total de 10 semanas.

- Calcule la cantidad que recibe en la décima semana, si selecciona
 - opción dos;
 - opción tres.
- ¿Cuál es la cantidad total que recibe si selecciona la opción dos?
- ¿Qué opción tiene el mayor valor total? Justifica tu respuesta mostrando todos los cálculos apropiados.

a) (i) Opción dos es una progresión aritmética con $u_1 = 250$ y $d = 200$. Término 10: $u_{10} = u_1 + 9d = 250 + 9 \cdot 200 = 2050$.

(ii) Opción tres es una progresión geométrica con $u_1 = 10$ y $r = 2$. Término 10: $u_{10} = 10 \cdot 2^9 = 10 \cdot 512 = 5120$.

b) Suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética:

$$S_{10} = \frac{10}{2} (u_1 + u_{10}) = 5 (250 + 2050) = 11500.$$

c) 1. Opción uno: $10 \cdot 1000 = 10000$. 2. Opción dos: 11500 (apartado b). 3. Opción tres: $S_{10} = \frac{10(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 10 \cdot 1023 = 10230$. 4. Comparando, $11500 > 10230 > 10000$.

Resultado: a) (i) 2050 \$; (ii) 5120 \$; b) 11500 \$; c) la opción dos tiene el mayor valor total.

EJERCICIO 103

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2002

Keisa tenía 10000 USD para invertir. Invertió m USD en el Midland Bank, el cual le dio un interés anual del 8%. Invertió f USD en el First National Bank, el cual le dio un interés anual del 6%. Recibió un total de 640 USD en intereses al final del año.

- Escriba dos ecuaciones que representen esta información.
- Halle la cantidad de dinero que invirtió Keisha en cada uno de los bancos.

a) 1. Total invertido: $m + f = 10000$. 2. Intereses de un año: $0,08m + 0,06f = 640$.

b) 1. De la primera ecuación, $f = 10000 - m$. 2. Sustituimos: $0,08m + 0,06(10000 - m) = 640 \Rightarrow 0,02m + 600 = 640$. 3. Entonces $0,02m = 40$, luego $m = 2000$ y $f = 10000 - 2000 = 8000$. 4. (Comprobación: $0,08 \cdot 2000 + 0,06 \cdot 8000 = 160 + 480 = 640$.)

Resultado: a) $m + f = 10000$ y $0,08m + 0,06f = 640$; b) $m = 2000$ USD (Midland Bank) y $f = 8000$ USD (First National Bank).

EJERCICIO 104

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2018

Ha abierto una cafetería nueva y, durante la primera semana, obtuvo unos beneficios de 60\$. Los beneficios de la cafetería aumentan 10\$ cada semana.

- a) Halle los beneficios que obtendrá la cafetería en su 11ª semana.
- b) Calcule los beneficios totales que habrá obtenido la cafetería en las primeras 12 semanas.

A la vez que abrió esta cafetería también abrió una casa de té nueva. En la primera semana, también obtuvo unos beneficios de 60\$. Los beneficios de la casa de té aumentan un 10 % cada semana.

- c) Halle los beneficios que obtendrá la casa de té en su 11ª semana.
- d) Calcule los beneficios totales que habrá obtenido la casa de té en las primeras 12 semanas.

En la m -ésima semana, los beneficios totales de la casa de té superan a los beneficios totales de la cafetería por vez primera desde que ambas abrieron.

- e) Halle el valor de m .

a)

1. Los beneficios de la cafetería forman una progresión aritmética con $u_1 = 60$ y $d = 10$.
2. $u_{11} = 60 + 10 \cdot 10 = 160$.

Resultado a): 160 \$.

b)

$$1. S_{12} = \frac{12}{2} [2 \cdot 60 + 11 \cdot 10] = 6 \cdot 230 = 1380.$$

Resultado b): 1380 \$.

c)

1. Los beneficios de la casa de té forman una progresión geométrica con $v_1 = 60$ y razón $r = 1,1$.
2. $v_{11} = 60 \cdot 1,1^{10} = 60 \cdot 2,59374 = 155,62$.

Resultado c): 155,62 \$.

d)

$$1. S_{12} = \frac{60(1,1^{12} - 1)}{1,1 - 1} = 600(3,138428 - 1) = 1283,06.$$

Resultado d): 1283,06 \$.

e)

1. Total de la cafetería tras n semanas: $C_n = \frac{n}{2} [120 + 10(n - 1)] = 5n^2 + 55n$.
2. Total de la casa de té: $T_n = 600(1,1^n - 1)$.
3. Se busca el primer n con $T_n > C_n$. Con una tabla de valores en la CPG (o resolviendo la desigualdad gráficamente):

n	C_n	T_n
15	1950	1906,35
16	2160	2156,98
17	2380	2432,68

4. En $n = 16$ todavía $T_n < C_n$, y en $n = 17$ ya $T_n > C_n$.

Resultado e): $m = 17$.

EJERCICIO 105

★★★ Difícil

IB · P2 T22 Mayo 2014

Desde el apartado (a) hasta el apartado (e), dé la respuesta redondeando al número entero de dólares más cercano.

El día en que Hugh cumplió 18 años, sus padres le ofrecieron distintas opciones de cómo recibir la paga mensual durante los dos años siguientes.

Opción A \$60 al mes durante dos años **Opción B** \$10 el primer mes, \$15 el segundo mes, \$20 el tercer mes, aumentando así cada mes la paga en \$5, durante dos años **Opción C** \$15 el primer mes, y luego aumentando cada mes la paga un 10 %, durante dos años. **Opción D** Invertir \$1500 en un banco al comienzo del primer año, con un tipo de interés del 6 % anual compuesto mensualmente.

Hugh no gasta nada del dinero de la paga durante estos dos años.

- a) Si Hugh elige la **Opción A**, calcule el valor total de la paga al final de esos dos años.
- b) Si Hugh elige la **Opción B**, calcule
 - (i) cuánto dinero recibirá el 17º mes;
 - (ii) el valor total de la paga al final de esos dos años.
- c) Si Hugh elige la **Opción C**, calcule
 - (i) cuánto dinero recibirá Hugh el 13º mes;
 - (ii) el valor total de la paga al final de esos dos años.
- d) Si Hugh elige la **Opción D**, calcule el valor total de la paga al final de esos dos años.
- e) Indique cuál de las opciones (A, B, C o D) debería elegir Hugo para que el valor de la paga al final de esos dos años sea el mayor posible.

Otro banco garantiza a Hugh una cantidad de \$1750 tras dos años de inversión si invierte \$1500 en este banco. El interés está **compuesto anualmente**.

- f) Calcule el tipo de interés anual que ofrece el banco.

a) Opción A: 60 \$ al mes durante 24 meses.

$$1. 60 \cdot 24 = 1440.$$

Resultado a): 1440 \$.

b) Opción B: progresión aritmética con $u_1 = 10$ y $d = 5$.

(i) $1. u_n = u_1 + (n - 1)d$, luego $u_{17} = 10 + 16 \cdot 5 = 90$.

(ii) $1. \text{Suma de 24 términos: } S_{24} = \frac{24}{2} [2 \cdot 10 + 23 \cdot 5] = 12 \cdot 135 = 1620$.

Resultado b): i) 90 \$ en el mes 17; ii) 1620 \$ en total.

c) Opción C: progresión geométrica con $u_1 = 15$ y $r = 1,1$.

(i) $1. u_{13} = 15 \cdot 1,1^{12} \approx 47,08$, es decir, 47 \$.

(ii) $1. S_{24} = \frac{15(1,1^{24} - 1)}{1,1 - 1} \approx \frac{15 \cdot 8,8497}{0,1} \approx 1327,46$, es decir, 1327 \$.

Resultado c): i) 47 \$; ii) 1327 \$.

d) Opción D: interés compuesto mensual, tasa mensual $\frac{6}{12} = 0,5\%$, 24 periodos.

$$1. 1500(1,005)^{24} \approx 1690,74, \text{ es decir, } 1691 \$.$$

Resultado d): 1691 \$.

e) Comparamos: A = 1440, B = 1620, C = 1327, D = 1691. El mayor es D.

Resultado e): la Opción D.

f) Interés compuesto anual durante 2 años.

1. $1500(1+i)^2 = 1750$, luego $(1+i)^2 = \frac{1750}{1500} = 1,1\overline{6}$.
2. $1+i = \sqrt{1,1\overline{6}} \approx 1,0801$ (o con la CPG), así que $i \approx 0,0801$.

Resultado: a) 1440 \$; b) 90 \$ y 1620 \$; c) 47 \$ y 1327 \$; d) 1691 \$; e) Opción D; f) 8,01% anual.

EJERCICIO 106

★★★ Dificil

IB · P2 TZ1 Mayo 2010

Parte A

Daniel quiere invertir \$ 25000 por un total de tres años. Hay tres opciones de inversión

Opción uno interés simple a una tasa de interés anual del 6%.

Opción dos interés compuesto del país a una tasa de interés nominal anual de 5%, compuesto anualmente.

Opción tres interés compuesto a una tasa de interés nominal anual de 4.8%, compuesto mensualmente.

- a) Calcule el valor de su inversión al final del tercer año para cada opción de inversión, aproximado con dos decimales.
- b) Determine la mejor opción de inversión de Daniel.

Parte B

Una progresión aritmética se define como $u_n = 135 + 7n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

- a) Calcule u_1 , el primer término de la progresión.
- b) Muestre que la diferencia común es 7.

S_n es la suma de los primeros n términos de la progresión.

- c) Encuentre una expresión para S_n .

Dé su respuesta en la forma $S_n = An^2 + Bn$ donde A y B son constantes.

El primer término, v_1 , de una progresión geométrica es 20 y su cuarto término v_4 es 67,5.

- d) Muestre que la razón común, r , de la progresión geométrica es 1.5.

T_n es la suma de los primeros n términos de la progresión geométrica.

- e) Calcule T_7 , la suma de los primeros siete términos de la progresión geométrica.
- f) Use su calculadora de pantalla gráfica para encontrar el valor más pequeño de n para el cual $T_n > S_n$.

Parte A

a)

1. Opción uno (interés simple): $25000(1 + 0,06 \cdot 3) = 25000 \cdot 1,18 = 29500,00$ \$.
2. Opción dos (compuesto anual al 5%): $25000 \cdot 1,05^3 = 28940,63$ \$.
3. Opción tres (compuesto mensual, $\frac{4,8}{12} = 0,4\%$ al mes, 36 meses): $25000 \cdot 1,004^{36} = 28863,81$ \$.

b) La opción uno da el mayor valor final ($29500 > 28940,63 > 28863,81$). La mejor opción es la **opción uno**.

Parte B

- a) $u_1 = 135 + 7 \cdot 1 = 142$.

b) Calculamos la diferencia entre dos términos consecutivos:

1. $u_{n+1} - u_n = [135 + 7(n+1)] - [135 + 7n] = 7$.
2. No depende de n , así que la diferencia común es 7.

Queda demostrado.

- c) Suma de una progresión aritmética: $S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d]$.

$$1. S_n = \frac{n}{2} [284 + 7(n-1)] = \frac{n}{2} (277 + 7n).$$

$$2. \text{Desarrollando: } S_n = \frac{7}{2}n^2 + \frac{277}{2}n, \text{ con } A = \frac{7}{2} \text{ y } B = \frac{277}{2}.$$

d) En una progresión geométrica $v_n = v_1 r^{n-1}$.

$$1. v_4 = 20 r^3 = 67,5.$$

$$2. r^3 = \frac{67,5}{20} = 3,375.$$

$$3. r = \sqrt[3]{3,375} = 1,5, \text{ porque } 1,5^3 = 3,375.$$

Queda demostrado.

e) Suma de una progresión geométrica: $T_n = \frac{v_1 (r^n - 1)}{r - 1}$.

$$1. T_7 = \frac{20 (1,5^7 - 1)}{0,5} = 40 (17,0859375 - 1) = 643,4375 \approx 643,44.$$

f) Con la CPG comparamos $T_n = 40 (1,5^n - 1)$ y $S_n = 3,5 n^2 + 138,5 n$ (tabla de valores o intersección de gráficas).

$$1. n = 9: T_9 \approx 1497,7 \text{ y } S_9 = 1530, \text{ así que } T_9 < S_9.$$

$$2. n = 10: T_{10} \approx 2266,6 \text{ y } S_{10} = 1735, \text{ así que } T_{10} > S_{10}.$$

$$3. \text{Para } n \leq 9 \text{ siempre se cumple } T_n < S_n \text{ (por ejemplo } T_8 \approx 984,2 < S_8 = 1332).$$

Resultado: Parte A: a) 29500 \$, 28940,63 \$, 28863,81 \$; b) opción uno. Parte B: a) $u_1 = 142$; b) demostrado; c) $S_n = \frac{7}{2}n^2 + \frac{277}{2}n$; d) demostrado; e) $T_7 \approx 643,44$; f) $n = 10$.

EJERCICIO 107

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2008

Dé todas las respuestas en esta pregunta aproximadas al dólar más cercano.

Clara quiere comprar un terreno. Puede elegir entre dos opciones de pago diferentes. Ambas opciones requieren que ella pague el terreno en 20 cuotas mensuales.

Opción 1: La primera cuota es de \$ 2500. Cada cuota es \$ 200 más que la anterior.

Opción 2: La primera cuota es de \$ 2000. Cada cuota es un 8% más que la anterior.

- Si Clara elige la opción 1,
 - anote los valores de la segunda y tercera cuotas;
 - calcular el valor de la última cuota;
 - demuestre que la cantidad total que Clara pagaría por la tierra es \$ 88000.
- Si Clara elige la opción 2,
 - calcular el valor de la segunda cuota;
 - demuestre que el valor de la quinta cuota es \$ 2721.
- El precio de la tierra es \$ 80000. En la opción 1, sus reembolsos totales son \$ 88000 durante los 20 meses. Encuentre la tasa anual de interés simple.
- Clara sabe que la cantidad total que pagaría por la tierra no es la misma en ambas opciones. Quiere gastar la menor cantidad de dinero. Encuentre cuanto ella ahorrará eligiendo la opción más barata.

a) (i) Progresión aritmética con $u_1 = 2500$ y $d = 200$.

$$1. u_2 = 2700 \text{ y } u_3 = 2900.$$

$$(ii) 1. u_{20} = u_1 + 19d = 2500 + 19 \cdot 200 = 6300$$

$$(iii) 1. S_{20} = \frac{20}{2} (u_1 + u_{20}) = 10 (2500 + 6300) = 88000$$

Queda demostrado.

b) Progresión geométrica con $u_1 = 2000$ y $r = 1,08$.

(i) $1. u_2 = 2000 \cdot 1,08 = 2160$

(ii) $1. u_5 = 2000 \cdot 1,08^4 = 2000 \cdot 1,360489 = 2720,98 \approx 2721$

Queda demostrado.

c) Precio de la tierra \$80000; se pagan \$88000, luego el interés es \$8000. Son 20 meses $= \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ años.

$$1. 8000 = 80000 \cdot \frac{r}{100} \cdot \frac{5}{3}$$

$$2. r = \frac{8000 \cdot 3}{80000 \cdot 5} \cdot 100 = 6$$

Resultado c): 6 % anual

d) 1. Total opción 2: $S_{20} = \frac{2000(1,08^{20} - 1)}{0,08} = 91523,93 \approx 91524$. 2. Opción 1: 88000. La más barata es la opción

1. 3. Ahorro: $91524 - 88000 = 3524$.

Resultado: a) 2700 y 2900; 6300; demostrado. b) 2160; demostrado. c) 6 %; d) ahorra \$3524 con la opción 1