

Geometría en 3D

Geometría en 3D para IB Aplicaciones e Interpretación NM: coordenadas, distancia, punto medio, volúmenes y áreas de prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-aplicaciones-e-interpretacion-nm/geometria-3d.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

La **geometría en 3D** lleva al espacio lo que ya sabes del plano: cada punto tiene tres coordenadas, la **distancia** y el **punto medio** se calculan con una componente más, y aparecen los **sólidos**: prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas. En este tema calculas **volúmenes** y **áreas de superficie**, aprovechas Pitágoras y la trigonometría **dentro de los sólidos** para hallar longitudes y ángulos, y resuelves problemas de contexto (depósitos, tiendas de campaña, globos). En el examen casi todo se hace con la calculadora y un buen **dibujo del sólido**, así que conviene practicar a esquematizar antes de calcular.

Orden recomendado

Sigue los apartados en orden: **coordenadas, distancia y punto medio**, luego **prismas y pirámides** y por último **cilindros, conos y esferas**. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

Coordenadas, distancia y punto medio en 3D

IDEA CLAVE

Pasar del plano al espacio es añadir una tercera coordenada: la **altura**. Con ella puedes situar un dron, un globo o la esquina de una habitación, medir la distancia entre dos de esos puntos con una versión ampliada de Pitágoras y encontrar el punto que queda justo a mitad de camino. En el examen del IB estos cálculos suelen abrir un problema de contexto, y después se pide un ángulo con trigonometría.

Los tres ejes y las coordenadas de un punto

El espacio se describe con tres rectas perpendiculares entre sí que se cortan en el **origen** O : el **eje x** , el **eje y** y el **eje z** . Por convención, x e y forman el «suelo» y z marca la altura. En cada eje se elige una escala, y las tres pueden ser distintas.

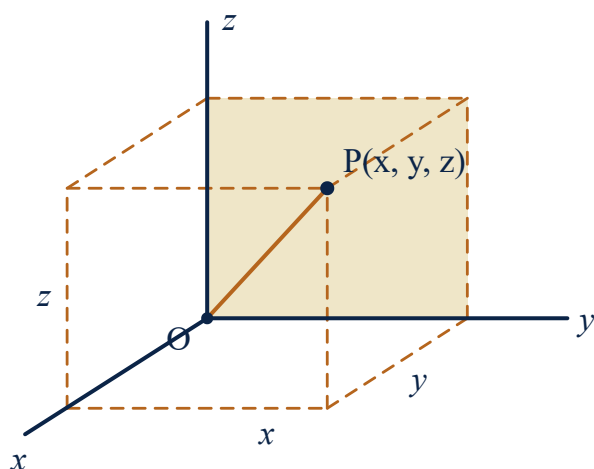
Cada pareja de ejes determina un plano, llamado **plano coordenado**: el OXY (el suelo, donde $z = 0$), el OXZ (donde $y = 0$) y el OYZ (donde $x = 0$). Estos tres planos reparten el espacio en **ocho octantes**, igual que los dos ejes del plano lo reparten en cuatro cuadrantes. Cada octante corresponde a una combinación de signos de x , y y z .

DEFINICIÓN · COORDENADAS DE UN PUNTO EN EL ESPACIO

Un punto P se identifica con una terna ordenada $P(x, y, z)$.

- x es la distancia (con signo) de P al plano OYZ .
- y es la distancia (con signo) de P al plano OXZ .
- z es la distancia (con signo) de P al plano OXY , es decir, su altura sobre el suelo.

El orden importa: $(2, 5, 1)$ y $(5, 2, 1)$ son puntos distintos. Para dibujar P se avanza x sobre el eje x , desde ahí y en la dirección del eje y y por último z hacia arriba. Esos tres tramos son las aristas de una caja cuyas esquinas opuestas son O y P .



Un punto con una coordenada igual a cero está en un plano coordenado: $(3, 4, 0)$ está sobre el suelo y $(0, -2, 5)$ está en el plano OYZ . Si dos coordenadas son cero, el punto está sobre un eje: $(0, 0, 7)$ está en el eje z .

Distancia entre dos puntos

Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$. El segmento AB es la diagonal de una caja cuyas aristas miden $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ y $|z_2 - z_1|$. La longitud sale de aplicar Pitágoras dos veces:

1. En el suelo, la diagonal s de la base cumple $s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.
2. Esa diagonal y la arista vertical son los catetos de un segundo triángulo rectángulo cuya hipotenusa es AB :
 $d^2 = s^2 + (z_2 - z_1)^2$.

TEOREMA · DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL ESPACIO

La distancia entre $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Como en el plano, el orden de los puntos no importa, porque las diferencias van al cuadrado, y los signos negativos se escriben entre paréntesis. En un problema de contexto el resultado queda en las unidades de la escala (metros, kilómetros...), y si no se indica otra cosa se da con 3 cifras significativas.

Un caso útil es la distancia de un punto $P(x, y, z)$ al origen: $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Punto medio de un segmento

El punto medio M de AB está a la misma distancia de los dos extremos. En cada eje queda a la mitad del recorrido, de modo que cada coordenada de M es la media de las coordenadas correspondientes.

TEOREMA · PUNTO MEDIO EN EL ESPACIO

El punto medio de $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Funciona en los dos sentidos: si conoces M y un extremo, el otro se despeja con $x_2 = 2x_M - x_1$, $y_2 = 2y_M - y_1$ y $z_2 = 2z_M - z_1$.

Ángulos en el espacio

Cuando hay que medir un ángulo entre dos segmentos del espacio, lo normal es buscar un **triángulo rectángulo** que contenga ese ángulo. Casi siempre aparece al combinar un segmento con su **proyección sobre el suelo**: si $K(a, b, h)$ es un punto en el aire, su proyección es $D(a, b, 0)$, el segmento KD es vertical y mide h , y el triángulo OKD tiene el ángulo recto en D . Con él se aplica Pitágoras para las longitudes y seno, coseno o tangente para el ángulo. El **ángulo de elevación** de K visto desde O es el que forma OK con el suelo, es decir, el ángulo $\widehat{KOD}$.

MÉTODO · PROBLEMA DE COORDENADAS EN 3D

1. Haz un dibujo con los ejes y rotula cada punto con sus tres coordenadas, con letras para las que falten.
2. Decide qué se pide: una **longitud** (fórmula de la distancia), una **posición intermedia** (punto medio) o un **ángulo** (triángulo rectángulo y trigonometría).
3. Para un ángulo, localiza el triángulo rectángulo: dos de sus lados salen de coordenadas y diferencias.
4. Sustituye con paréntesis y guarda los valores sin redondear hasta el final.
5. Da la respuesta con 3 cifras significativas, con sus unidades (grados para un ángulo).

NOTA · CON LA CPG

En las dos pruebas del examen puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Escribe la raíz completa de una sola vez, con los paréntesis bien puestos, y comprueba que la calculadora está en **grados** antes de calcular un ángulo con arcotangente, arcoseno o arcocoseno. Si falta una coordenada, por ejemplo $\sqrt{(p-1)^2 + 20} = 7$, puedes resolver la ecuación con la herramienta de ecuaciones; escribe siempre antes el planteamiento con los números sustituidos.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Dos drones sobre un campo

En un sistema de ejes con 1 unidad igual a 1 m, un dron de reparto se encuentra en $A(2, -3, 4)$ y otro dron, que le sigue, en $B(8, 1, 16)$.

- a) Calcula la distancia entre los dos drones.
- b) Halla las coordenadas del punto medio del segmento AB , donde se coloca una baliza de aviso.

- a) Se aplica la fórmula de la distancia en el espacio:

$$d = \sqrt{(8-2)^2 + (1-(-3))^2 + (16-4)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{196} = 14 \text{ m}$$

- b) Cada coordenada del punto medio es la media de las de los extremos:

$$M\left(\frac{2+8}{2}, \frac{-3+1}{2}, \frac{4+16}{2}\right) = (5, -1, 10)$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un punto en el octante de los negativos

En un sistema de ejes con 1 unidad igual a 1 m se coloca un sensor en el punto $P(-4, 3, -12)$.

- a) Calcula la distancia de P a cada uno de los planos coordenados OYZ , OXZ y OXY , en este orden.
- b) Calcula la distancia de P al origen.
- c) El punto $Q(-4, 3, 12)$ es el simétrico de P respecto al plano OXY . Halla el punto medio de PQ e indica en qué plano coordenado está.

- a) La distancia a cada plano coordenado es el valor absoluto de la coordenada que no está en el plano:

- al plano OYZ (donde $x = 0$): $|-4| = 4 \text{ m}$;

- al plano OXZ (donde $y = 0$): $|3| = 3$ m;
- al plano OXY (donde $z = 0$): $|-12| = 12$ m.

b) Con la fórmula de la distancia desde el origen:

$$d(O, P) = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-12)^2} = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$$

c) El punto medio es

$$M\left(\frac{-4 + (-4)}{2}, \frac{3 + 3}{2}, \frac{-12 + 12}{2}\right) = (-4, 3, 0)$$

Como su tercera coordenada es 0, está en el plano OXY : es la proyección de P sobre el suelo.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un globo atado con una cuerda

Una persona está en el origen $O(0, 0, 0)$ de un sistema de ejes con 1 unidad igual a 1 m: los ejes x e y están en el suelo y el eje z es vertical. Sujeta un globo K con una cuerda tensa, recta y de 25 m de longitud. El globo está justo encima del punto $D(9, 12, 0)$ del suelo. Un dron B se encuentra en $B(-3, 0, 8)$.

- Halla las coordenadas de K .
- Calcula el ángulo de elevación de la cuerda, es decir, el ángulo $\widehat{KOD}$, en grados.
- Calcula la distancia entre el globo y el dron.
- Halla el punto medio del segmento KB .

- a) Como K está sobre D , sus dos primeras coordenadas son las de D : $K(9, 12, h)$. El triángulo OKD tiene el ángulo recto en D . Su cateto horizontal es

$$OD = \sqrt{9^2 + 12^2 + 0^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ m}$$

y la hipotenusa es la cuerda, $OK = 25$. Por Pitágoras:

$$h^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400 \Rightarrow h = 20$$

Así que $K(9, 12, 20)$. (Se comprueba con la distancia: $\sqrt{81 + 144 + 400} = 25$.)

- b) En el triángulo rectángulo OKD , el lado opuesto al ángulo es $KD = 20$ y la hipotenusa es 25:

$$\sin \widehat{KOD} = \frac{20}{25} = 0,8 \Rightarrow \widehat{KOD} = \arcsen(0,8) = 53,1^\circ$$

- c) Con $K(9, 12, 20)$ y $B(-3, 0, 8)$:

$$KB = \sqrt{(-3 - 9)^2 + (0 - 12)^2 + (8 - 20)^2} = \sqrt{144 + 144 + 144} = \sqrt{432} = 20,8 \text{ m}$$

- d) El punto medio es

$$M\left(\frac{9 + (-3)}{2}, \frac{12 + 0}{2}, \frac{20 + 8}{2}\right) = (3, 6, 14)$$

En el examen: en un apartado como el a) se puntúa reconocer el triángulo rectángulo con el ángulo recto en el suelo y plantear Pitágoras; en el b) hay que escribir la razón trigonométrica con los lados usados y tener la CPG en grados. Guarda $\sqrt{432}$ sin redondear hasta el final.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · OLVIDAR LA TERCERA COORDENADA

Al pasar del plano al espacio es muy fácil escribir $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ y dejar fuera la diferencia de alturas, o dividir solo dos coordenadas en el punto medio. Si los dos puntos están a distinta altura, esa diferencia **siempre** suma un tercer término. Comprueba el resultado con el dibujo: la distancia en 3D es mayor que la distancia entre las proyecciones sobre el suelo.

ERROR TÍPICO · MEZCLAR EL ORDEN DE LAS COORDENADAS

En $P(x, y, z)$ la altura es la **tercera** coordenada. Si colocas la altura en otra posición, el punto cambia de sitio y, al restar, comparas coordenadas distintas. Rotula los puntos en el dibujo y resta siempre x con x , y con y y z con z , con paréntesis si hay números negativos.

ERROR TÍPICO · BUSCAR UN ÁNGULO EN UN TRIÁNGULO QUE NO ES RECTÁNGULO

Las razones seno, coseno y tangente solo valen en un triángulo rectángulo. Antes de usarlas, comprueba dónde está el ángulo recto: normalmente entre una vertical y su proyección sobre el suelo. Si usas el cateto equivocado como hipotenusa (por ejemplo, la distancia horizontal en lugar de la cuerda), el ángulo sale mal. Una comprobación rápida: el seno o el coseno de un ángulo nunca puede superar 1.

Resumen

- Un punto del espacio es una terna $P(x, y, z)$ y los tres planos coordenados dividen el espacio en ocho octantes. La distancia de P a cada plano es el valor absoluto de la coordenada que no está en él.
- Distancia: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ (Pitágoras dos veces). Al origen: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Punto medio: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$. Si conoces M y un extremo, el otro es $2M - \text{extremo}$ coordenada a coordenada.
- Para un ángulo, busca un triángulo rectángulo (casi siempre una vertical y su proyección sobre el suelo) y usa seno, coseno o tangente, con la CPG en grados.
- Haz siempre un dibujo, usa paréntesis con los números negativos, no redondees los valores intermedios y da las unidades.

APARTADO 2

Prismas y pirámides: volumen, área y ángulos

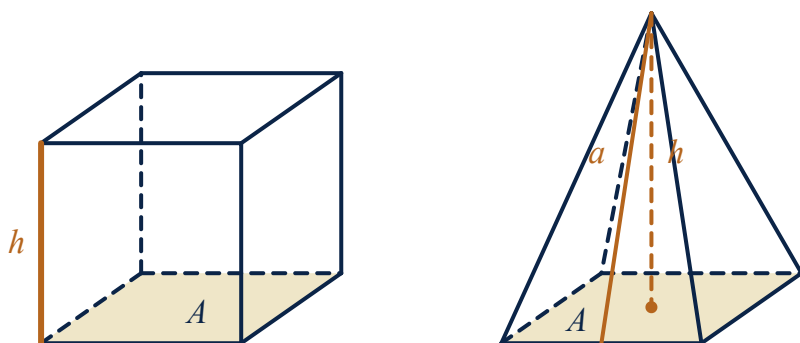
IDEA CLAVE

Los prismas y las pirámides son los sólidos de caras planas que más aparecen en el examen del IB: cajas, tiendas de campaña, tejados, monumentos. Todo se reduce a dos tareas: calcular **volúmenes y áreas** con unas pocas fórmulas, y **encontrar la medida que falta** (una altura, una arista, un ángulo) sacando de la figura un triángulo rectángulo y aplicando Pitágoras o trigonometría. Lo más importante es dibujar bien el sólido y marcar en él los triángulos rectángulos.

Prismas

Un **prisma** es un sólido con dos caras iguales y paralelas, las **bases**, unidas por caras laterales que son paralelogramos. Si las caras laterales son rectángulos, el prisma es **recto**. La base puede ser cualquier polígono: un triángulo, un rectángulo, un hexágono...

La **altura** h es la distancia entre las dos bases, medida en perpendicular. En un prisma recto coincide con la longitud de una arista lateral.



PROPIEDAD • VOLUMEN Y ÁREA DE UN PRISMA RECTO

Sea A el área de la base, P su perímetro y h la altura del prisma.

$$V = A \cdot h$$

$$\text{Área lateral} = P \cdot h$$

$$\text{Área total} = P \cdot h + 2A$$

La idea del volumen es sencilla: apilas h capas, cada una con el área de la base. Las caras laterales, abiertas sobre un plano, forman un rectángulo de largo P y alto h ; por eso su área es $P \cdot h$.

Dos casos que conviene tener controlados:

- **Prisma rectangular (ortopedro)**, con dimensiones a , b y c : $V = abc$ y área total $= 2(ab + ac + bc)$, porque tiene tres pares de rectángulos iguales.

- **Cubo** de arista a : $V = a^3$ y área total $= 6a^2$.

En un **prisma triangular** la base es un triángulo: su área es $\frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura del triángulo}$, y a menudo hay que calcular antes con Pitágoras o trigonometría alguno de sus lados. Ojo con las dos alturas: la del triángulo de la base y la h del prisma son medidas distintas.

Pirámides

Una **pirámide** tiene una base poligonal y caras laterales triangulares que se juntan en un punto, el **vértice**. En una pirámide **recta** de base regular, el vértice está justo encima del centro de la base.

Hay que distinguir dos medidas que se confunden con facilidad:

- La **altura** h es el segmento vertical desde el vértice hasta la base. Es perpendicular a la base y pasa por su centro.
- La **apotema** a es la altura de una de las caras triangulares: va del vértice hasta el punto medio de una arista de la base. Es siempre mayor que h .

PROPIEDAD • VOLUMEN Y ÁREA DE UNA PIRÁMIDE RECTA

Sea A el área de la base, P su perímetro, h la altura y a la apotema.

$$V = \frac{1}{3} Ah \quad \text{Área lateral} = \frac{P \cdot a}{2} \quad \text{Área total} = \frac{P \cdot a}{2} + A$$

El volumen es la tercera parte del de un prisma con la misma base y la misma altura. El área lateral suma los triángulos de las caras: cada uno vale $\frac{1}{2} \cdot (\text{arista de la base}) \cdot a$, y al sumarlos aparece el perímetro.

Si la base es un cuadrado de lado l , la fórmula del área total queda $l^2 + 2la$.

Longitudes y ángulos dentro del sólido

Casi todos los problemas dan la altura y alguna medida de la base y piden otra longitud o un ángulo. La técnica es siempre la misma: **encuentra un triángulo rectángulo escondido en el sólido**, dibújalo aparte con sus medidas y resuélvelo.

MÉTODO • CÓMO RESOLVER UN PROBLEMA DENTRO DE UN SÓLIDO

1. Dibuja el sólido y marca los datos. Pon con línea discontinua las aristas que no se ven.
2. Localiza el segmento o ángulo que piden y busca un triángulo rectángulo que lo contenga. Los más habituales son: la **diagonal de una cara**, la **diagonal del sólido**, la **altura de una pirámide con la mitad de la diagonal de la base**, y la **apotema con la altura y la mitad del lado**.
3. Dibuja ese triángulo por separado, con sus tres lados y el ángulo recto.
4. Si conoces dos lados y buscas el tercero, usa Pitágoras. Si buscas un ángulo, usa $\sin$, $\cos$ o $\tan$ con los lados que ya tengas.
5. Guarda los valores sin redondear en la calculadora y redondea solo la respuesta final, a 3 cifras significativas y con unidades.

Diagonal de una cara. En una cara rectangular de lados a y b , la diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Diagonal del ortoedro. Es el segmento que une dos vértices opuestos y atraviesa el interior. Se aplica Pitágoras dos veces: primero la diagonal de la base, $\sqrt{a^2 + b^2}$, y luego un triángulo que tiene esa diagonal y la altura c como catetos:

$$D = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Ángulo entre una arista y la base. Es el ángulo que forma la arista con su **proyección** sobre el plano de la base, es decir, con el segmento que une el pie de la arista con el punto de la base situado justo debajo del otro extremo. En una pirámide recta, la proyección de una arista lateral es la mitad de la diagonal de la base, y el ángulo θ cumple

$$\tan \theta = \frac{h}{\text{mitad de la diagonal}}.$$

Ángulo entre una cara y la base. En una pirámide recta de base cuadrada se usa el triángulo formado por la altura, la apotema y la mitad del lado de la base: $\tan \varphi = \frac{h}{l/2}$.

NOTA • CON LA CPG Y EL CUADERNILLO DE FÓRMULAS

En las dos pruebas del examen puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG), y se dispone de un cuadernillo de fórmulas, pero conviene conocer de memoria cómo se obtiene cada medida. Comprueba que la CPG está en **grados** antes de hacer cualquier cálculo trigonométrico. Para un ángulo, usa la función inversa ($\tan^{-1}$, $\sin^{-1}$ o $\cos^{-1}$) con los lados sin redondear. En los problemas de varias partes, guarda cada resultado en la memoria de la calculadora y reutilízalo en el apartado siguiente: así el error de redondeo no se acumula. Escribe siempre la fórmula con los números sustituidos, porque un resultado sin planteamiento puede perder puntos.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Una caja de almacenaje

Una caja de almacenaje con forma de ortoedro mide 1,5 m de largo, 0,8 m de ancho y 0,6 m de alto.

- Calcula su volumen.
- Calcula el área de toda su superficie, que se quiere pintar por fuera.
- Halla la longitud de la varilla más larga que cabe dentro de la caja.

a) Volumen del ortoedro: $V = 1,5 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,72 \text{ m}^3$.

b) Hay tres pares de caras iguales:

$$A = 2(1,5 \cdot 0,8 + 1,5 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,6) = 2(1,2 + 0,9 + 0,48) = 5,16 \text{ m}^2$$

c) La varilla más larga se coloca a lo largo de la diagonal del ortoedro:

$$D = \sqrt{1,5^2 + 0,8^2 + 0,6^2} = \sqrt{3,25} = 1,80 \text{ m}$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Una tienda de campaña

Una tienda de campaña tiene forma de prisma triangular recto. Su entrada es un triángulo isósceles de 2,4 m de base y 1,5 m de altura, y la tienda mide 3,2 m de fondo. La tela cubre las dos paredes inclinadas, las dos fachadas triangulares y el suelo.

- Calcula el volumen de aire que hay dentro de la tienda.
- Calcula la superficie total de tela necesaria.
- Halla el ángulo que forma cada pared inclinada con el suelo.

- a) El área de la base triangular es $A = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1,5 = 1,8 \text{ m}^2$. Con $h = 3,2 \text{ m}$ de fondo:

$$V = A \cdot h = 1,8 \cdot 3,2 = 5,76 \text{ m}^3$$

- b) Cada pared inclinada es un rectángulo cuyo lado inclinado es la hipotenusa del triángulo formado por la altura (1,5 m) y la mitad de la base (1,2 m):

$$l = \sqrt{1,2^2 + 1,5^2} = \sqrt{3,69} \approx 1,921 \text{ m}$$

Superficie de tela:

- dos paredes inclinadas: $2 \cdot 1,921 \cdot 3,2 \approx 12,29 \text{ m}^2$
- dos fachadas triangulares: $2 \cdot 1,8 = 3,6 \text{ m}^2$
- suelo: $2,4 \cdot 3,2 = 7,68 \text{ m}^2$

Total: $12,29 + 3,6 + 7,68 = 23,6 \text{ m}^2$.

- c) En el triángulo de la entrada, el ángulo θ entre la pared y el suelo cumple:

$$\tan \theta = \frac{1,5}{1,2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1,25) = 51,3^\circ$$

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Un monumento con forma de pirámide

Un monumento es una pirámide recta de base cuadrada de 8 m de lado y 5 m de altura. Su vértice está justo encima del centro de la base.

- Calcula el volumen del monumento.
- Halla la apotema, es decir, la altura de una de sus caras triangulares.
- Calcula el área total de su superficie (cuatro caras laterales y base).
- Halla la longitud de una arista lateral.
- Calcula el ángulo que forma una arista lateral con la base.

- a) El área de la base es $8^2 = 64 \text{ m}^2$, así que

$$V = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 5 = \frac{320}{3} = 107 \text{ m}^3$$

- b) La apotema es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por la altura (5 m) y la distancia del centro de la base al punto medio de un lado (la mitad del lado, 4 m):

$$a = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} = 6,40 \text{ m}$$

- c) Cada cara lateral es un triángulo de base 8 m y altura a . Con las cuatro caras y la base:

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{41} + 64 = 16\sqrt{41} + 64 = 166 \text{ m}^2$$

- d) La arista lateral es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura (5 m) y la mitad de la diagonal de la base. La diagonal de la base mide $8\sqrt{2}$, luego su mitad es $4\sqrt{2} \approx 5,657$ m:

$$\ell = \sqrt{5^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 + 32} = \sqrt{57} = 7,55 \text{ m}$$

- e) El ángulo θ entre la arista y la base es el que forma la arista con la mitad de la diagonal de la base, en el mismo triángulo del apartado d):

$$\tan \theta = \frac{5}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4\sqrt{2}}\right) = 41,5^\circ$$

En el examen: en un problema así se puntúa dibujar o describir el triángulo rectángulo que se usa en cada apartado, escribir Pitágoras o la razón trigonométrica con los números sustituidos y dar la respuesta con unidades. No confundas la apotema con la altura de la pirámide, ni la mitad del lado con la mitad de la diagonal. Guarda $\sqrt{41}$ sin redondear para el apartado c).

Errores típicos

ERROR TÍPICO · CONFUNDIR LA ALTURA CON LA APOTEMA

La altura de una pirámide es vertical y llega al centro de la base; la apotema es la altura de una cara triangular y es siempre mayor. Usar la altura en la fórmula del área lateral, o la apotema en la del volumen, da un resultado incorrecto. Si el enunciado da la altura y necesitas la apotema, calcúlala con Pitágoras con la mitad del lado de la base.

ERROR TÍPICO · OLVIDAR EL FACTOR UN TERCIO O DUPLICAR LAS BASES

En el volumen de una pirámide hay que multiplicar por $\frac{1}{3}$: sin él sale el volumen de un prisma. Y al revés: el área total de un prisma lleva **dos** bases, la de una pirámide solo una. Antes de calcular, escribe la fórmula completa del sólido que tienes delante y comprueba cuántas bases y cuántas caras laterales hay.

ERROR TÍPICO · USAR LA MITAD DEL LADO EN VEZ DE LA MITAD DE LA DIAGONAL

Para la arista lateral de una pirámide de base cuadrada, el cateto horizontal es la mitad de la **diagonal** de la base, no la mitad del lado. La mitad del lado sirve para la apotema. Como $l/2$ y $l\sqrt{2}/2$ son números distintos, dibuja el triángulo y señala sobre la base cuál de los dos segmentos usas.

Resumen

- Prisma recto: $V = A \cdot h$ y área total $= P \cdot h + 2A$. Ortoedro: $V = abc$ y área $= 2(ab + ac + bc)$. Cubo: $V = a^3$ y área $= 6a^2$.
- Pirámide recta: $V = \frac{1}{3}Ah$ y área total $= \frac{1}{2}Pa + A$, con h la altura vertical y a la apotema (altura de una cara), siempre $a > h$.
- Para hallar longitudes y ángulos dentro del sólido, saca un triángulo rectángulo, dibújalo aparte y usa Pitágoras o $\sin$, $\cos$, $\tan$.
- Diagonal de una cara: $\sqrt{a^2 + b^2}$. Diagonal del ortoedro: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Ángulo arista-base: arista y su proyección sobre la base.
- Pon la CPG en grados, no redondees los valores intermedios y da la respuesta final con 3 cifras significativas y unidades.

APARTADO 3

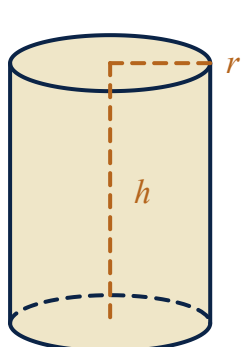
Cilindros, conos y esferas

IDEA CLAVE

Los cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) son los sólidos de los depósitos, las latas, los embudos, los globos y los helados. Con tres radios y alturas y unas pocas fórmulas calculas cuánto cabe dentro (**volumen**) y cuánto material hace falta para cubrirlos (**área de la superficie**). En el examen del IB casi siempre se combinan: un sólido hecho de dos piezas, un recipiente cuyo nivel cambia o una pieza fundida y vuelta a moldear.

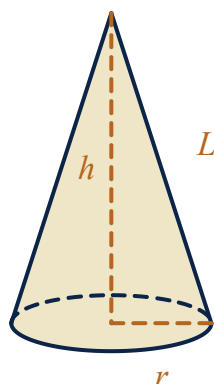
Los tres sólidos y sus medidas

Los tres se describen con muy pocas medidas. El **radio** r es la distancia del centro de la base (o de la esfera) a su borde, y la **altura** h se mide en perpendicular a la base. En el examen se dispone de un cuadernillo de fórmulas, pero conviene entender de dónde sale cada una para no confundirlas.



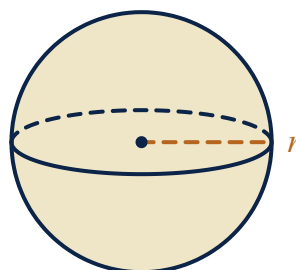
$$V = \pi r^2 h$$

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$A = \pi r^2 + \pi r L$$



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$A = 4\pi r^2$$

El cilindro.

Un cilindro es un «prisma redondo»: dos círculos iguales y paralelos unidos por una pared curva. Su volumen se calcula como el de cualquier prisma, **área de la base por altura**. Si desenrollas la pared lateral obtienes un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia, $2\pi r$, y cuya altura es h .

DEFINICIÓN · CILINDRO

Un cilindro de radio r y altura h tiene

$$V = \pi r^2 h \quad A_{\text{lateral}} = 2\pi r h \quad A_{\text{total}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

El término $2\pi r^2$ son las dos tapas. Si el recipiente está abierto por arriba (un vaso, un cubo), solo cuenta una tapa y el área es $2\pi r h + \pi r^2$.

El cono.

El cono es la versión redonda de la pirámide, y por eso su volumen es la **tercera parte** del cilindro con la misma base y altura. Además de la altura h tiene la **generatriz** L : es la longitud de un segmento que va del vértice a un punto del borde de la base, medida sobre la pared inclinada. Altura, radio y generatriz forman un triángulo rectángulo, con L como hipotenusa.

DEFINICIÓN · CONO Y GENERATRIZ

En un cono de radio r , altura h y generatriz L :

$$L^2 = r^2 + h^2 \quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad A_{\text{total}} = \pi r^2 + \pi r L$$

El término πr^2 es la base y $\pi r L$ es la pared curva. Fíjate en que en el área interviene la generatriz L y no la altura h .

La esfera.

Una esfera es el conjunto de puntos del espacio que están a la misma distancia r de un punto central. No tiene altura ni base: solo el radio.

DEFINICIÓN · ESFERA Y SEMIESFERA

Una esfera de radio r tiene

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad A = 4\pi r^2$$

Una **semiesfera** es la mitad: $V = \frac{2}{3}\pi r^3$. Su superficie curva mide $2\pi r^2$; si además hay que cerrar la tapa plana, se suma el círculo πr^2 y el total es $3\pi r^2$.

Cuidado con las unidades: los volúmenes se miden en unidades cúbicas (cm^3 , m^3) y las áreas en unidades cuadradas. Para pasar a litros, $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$ y $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$. Si el enunciado no pide otra cosa, redondea el resultado final a 3 cifras significativas.

Sólidos compuestos

Muchos objetos son la unión de dos piezas: un cilindro con una semiesfera encima (un silo, una cápsula), un cono sobre un cilindro (una tienda, un embudo) o un cono con una semiesfera (un cucurucho de helado). El volumen total es la **suma** de los volúmenes. Con el área hay que pensar qué parte es superficie exterior: la cara donde se pegan las dos piezas queda dentro y **no se cuenta**.

MÉTODO · SÓLIDO COMPUESTO

1. Dibuja el sólido y sepáralo en piezas que conozcas, escribiendo sus medidas. Fíjate en qué radios coinciden.
2. Si falta alguna medida, búscala con Pitágoras o con trigonometría en el triángulo rectángulo adecuado (por ejemplo, la generatriz de un cono).
3. Calcula el volumen de cada pieza y súmalos.
4. Para el área, suma solo las superficies visibles desde fuera, y quita las caras que se unen.
5. Redondea al final y escribe las unidades.

Cambios de volumen y de radio

Muchas preguntas parten de un volumen conocido y piden una medida. Se plantea la ecuación de la fórmula con el dato y se despeja la incógnita, o se resuelve directamente en la calculadora de pantalla gráfica (CPG), que está permitida en las dos pruebas. Por ejemplo, para una esfera de volumen V :

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = V \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Para un cambio porcentual, trabaja con el factor multiplicador: un aumento del 20 % es multiplicar por 1,2. Si el volumen de una esfera pasa a ser $1,2V$, **el radio no aumenta un 20 %**, porque está elevado al cubo: el radio nuevo es $r\sqrt[3]{1,2}$.

Semejanza: factores k , k^2 y k^3

Dos sólidos de la misma forma son **semejantes** si todas sus longitudes se multiplican por el mismo número k , el factor de escala. Esto ocurre con una maqueta y su edificio, o con dos latas del mismo diseño pero de distinto tamaño.

PROPIEDAD · ESCALA EN LONGITUD, ÁREA Y VOLUMEN

Si el factor de escala entre dos sólidos semejantes es k :

- las **longitudes** (radio, altura, generatriz) se multiplican por k ;
- las **áreas** se multiplican por k^2 ;
- los **volúmenes** se multiplican por k^3 .

La razón es la misma que en las fórmulas: las áreas llevan dos longitudes multiplicadas (r^2 , rh) y los volúmenes, tres (r^3 , r^2h). Así, una maqueta a escala 1 : 10 tiene la décima parte de la altura, la centésima parte de la superficie y la milésima parte del volumen. Esta regla sirve cuando no te dan todas las medidas: basta saber k .

NOTA · EN EL EXAMEN

En las dos pruebas tienes la CPG, así que lo importante es lo que escribes: la fórmula con los números sustituidos, el valor sin redondear y la respuesta final con 3 cifras significativas y su unidad. Si una pregunta pide un valor «exacto», deja el π sin calcular (por ejemplo, 45π). Para despejar un radio a partir de un volumen puedes usar el módulo de ecuaciones de la CPG, pero escribe antes la ecuación que estás resolviendo.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un depósito de agua

Un depósito de agua tiene forma de cilindro con radio de base de 40 cm y altura de 90 cm. Está cerrado por todas partes.

- Escribe su volumen en cm^3 , de forma exacta, en función de π .
- Calcula su capacidad en litros, con 3 cifras significativas.
- Calcula el área de toda su superficie, en cm^2 , con 3 cifras significativas.

a) $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 40^2 \cdot 90 = 144\,000\pi \text{ cm}^3$.

b) $144\,000\pi = 452\,389 \text{ cm}^3$. Como $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$, la capacidad es $452,389 \text{ L} \approx 452 \text{ L}$.

- c) El depósito está cerrado, así que hay pared lateral y dos tapas:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 40 \cdot 90 + 2\pi \cdot 40^2 = 7200\pi + 3200\pi = 10400\pi = 32673 \text{ cm}^2$$

que con 3 cifras significativas es 32700 cm^2 .

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un cucurucho de helado

Un helado se modela como un cono de radio de base 3 cm y altura 9 cm, coronado por una semiesfera del mismo radio que cubre exactamente la boca del cono.

- Halla la generatriz del cono, de forma exacta.
- Halla el volumen total del helado, de forma exacta en cm^3 .
- Halla el área de la superficie exterior del helado (cono más semiesfera), de forma exacta en cm^2 .

- a) Altura, radio y generatriz forman un triángulo rectángulo:

$$L = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ cm } (\approx 9,49 \text{ cm})$$

- b) Volumen del cono más volumen de la semiesfera:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 9 + \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = 27\pi + 18\pi = 45\pi \text{ cm}^3 (\approx 141 \text{ cm}^3)$$

- c) La tapa del cono y la base de la semiesfera coinciden y quedan por dentro, así que solo cuentan la pared curva del cono, $\pi r L$, y la curva de la semiesfera, $2\pi r^2$:

$$A = \pi \cdot 3 \cdot 3\sqrt{10} + 2\pi \cdot 3^2 = 9\sqrt{10}\pi + 18\pi \text{ cm}^2 (\approx 146 \text{ cm}^2)$$

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un globo que se hincha y su maqueta

Un globo esférico tiene un radio de 5 cm.

- Calcula su volumen, con 3 cifras significativas.
- Se hincha hasta que su volumen se duplica. Calcula el nuevo radio, con 3 cifras significativas.
- ¿Qué porcentaje aumenta el radio? Da la respuesta con 3 cifras significativas.
- ¿Qué porcentaje aumenta el área de la superficie del globo? Da la respuesta con 3 cifras significativas.

Un depósito de agua cilíndrico tiene una capacidad de 54 000 L y una superficie exterior que se pinta, de 90 m^2 . Se construye una maqueta semejante a escala 1 : 30.

- Calcula la capacidad de la maqueta en litros.
- Calcula el área de pintura de la maqueta en cm^2 .

- a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi = 523,6 \text{ cm}^3 \approx 524 \text{ cm}^3$.

- b) El volumen nuevo es $2 \cdot \frac{500}{3}\pi = \frac{1000}{3}\pi$. Se despeja el radio:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1000}{3}\pi \Rightarrow r^3 = 250 \Rightarrow r = \sqrt[3]{250} = 6,30 \text{ cm}$$

- c) El radio pasa de 5 a 6,2996 cm. El factor es $\frac{6,2996}{5} = \sqrt[3]{2} = 1,260$, así que aumenta un **26,0 %**. Es mucho menos que el 100 % del volumen.

- d) Los dos globos son semejantes con $k = \sqrt[3]{2}$, luego el área se multiplica por $k^2 = 2^{2/3} = 1,587$. Aumenta un **58,7 %**.

- e) Los volúmenes se multiplican por k^3 , con $k = \frac{1}{30}$:

$$\text{capacidad} = 54\,000 \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^3 = \frac{54\,000}{27\,000} = 2 \text{ L}$$

- f) Las áreas se multiplican por $k^2 = \frac{1}{900}$:

$$\frac{90}{900} = 0,1 \text{ m}^2 = 0,1 \cdot 10\,000 = 1000 \text{ cm}^2$$

En el examen: en los apartados b) y c) se puntúa plantear la ecuación $\frac{4}{3}\pi r^3 = 2V$ y obtener $r^3 = 250$, y en c) no vale decir «20 %»: hay que calcular el cociente de radios. En e) y f) hay que citar que el volumen se multiplica por k^3 y el área por k^2 ; dividir por 30 es el fallo típico.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · USAR LA ALTURA EN LUGAR DE LA GENERATRIZ

En el área del cono, $\pi r L$ lleva la **generatriz** L , la longitud inclinada de la pared, y no la altura h . Con $r = 3$ y $h = 9$, usar h da 27π en lugar de $9\sqrt{10}\pi \approx 28,5\pi$. Antes de calcular el área de un cono, halla $L = \sqrt{r^2 + h^2}$. En cambio, en el **volumen** se usa la altura h .

ERROR TÍPICO · CONFUNDIR RADIO CON DIÁMETRO, O LITROS CON cm^3

Si te dan el diámetro, el radio es la mitad: una lata de 8 cm de diámetro tiene $r = 4$ cm. Y las unidades no se mezclan: $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$ y $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$, no 100. Comprueba que el resultado tiene sentido: una botella de 1,5 L ocupa 1500 cm^3 , no 150 cm^3 .

ERROR TÍPICO · CONTAR CARAS QUE NO SE VEN O CAMBIAR k POR k^3 EN TODO

En un sólido compuesto, la cara donde se pegan las piezas queda dentro: **no** se suma a la superficie exterior. Y en la semejanza, cada magnitud lleva su potencia: solo las longitudes se multiplican por k , las áreas por k^2 y los volúmenes por k^3 . Si un radio se duplica ($k = 2$), el área se multiplica por 4 y el volumen por 8.

Resumen

- Cilindro: $V = \pi r^2 h$, $A = 2\pi r h + 2\pi r^2$. Cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $A = \pi r^2 + \pi r L$, con $L^2 = r^2 + h^2$. Esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$. Semiesfera: $V = \frac{2}{3}\pi r^3$.
- En el cono, el volumen usa la altura h y el área usa la generatriz L .
- Sólido compuesto: suma los volúmenes; en el área, cuenta solo las superficies exteriores.
- Para hallar un radio o una altura, sustituye el dato en la fórmula y despeja (o usa la CPG, escribiendo la ecuación).
- Un porcentaje de volumen no es el porcentaje de radio: el radio sale con una raíz cúbica.
- Semejanza con factor k : longitudes por k , áreas por k^2 y volúmenes por k^3 .
- $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$; redondea a 3 cifras significativas al final y escribe las unidades.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 5

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Coordenadas, distancia y punto medio en 3D

EJERCICIO 1

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2000

Los vértices de la base cuadrada $ABCD$ de una pirámide $ABCDE$ tienen las coordenadas siguientes:

$A(2, 1, 3)$, $B(2, 6, 3)$, $C(-3, k, 3)$, $D(-3, 1, 3)$

- a) Calcule
- (i) la longitud de AB ;
 - (ii) el valor de k ;
 - (iii) el área del triángulo ABC .
- b) El volumen de la pirámide es 40 unidades³.
- (i) Halle la altura de la pirámide.
 - (ii) Escriba las coordenadas de E .

a)

- (i) Distancia entre $A(2, 1, 3)$ y $B(2, 6, 3)$:

$$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (6-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

- (ii) La base es un cuadrado, así que $BC = AB = 5$. Como $B(2, 6, 3)$ y $C(-3, k, 3)$:

$$BC = \sqrt{(-3-2)^2 + (k-6)^2 + 0} = 5 \Rightarrow 25 + (k-6)^2 = 25 \Rightarrow k = 6.$$

Comprobamos con $D(-3, 1, 3)$: $AD = \sqrt{(-5)^2 + 0 + 0} = 5$, correcto. Luego $C(-3, 6, 3)$.

- (iii) Los lados AB y BC miden 5 y son perpendiculares (la base es un cuadrado), así que el triángulo ABC es rectángulo en B :

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12,5.$$

Resultado: (i) $AB = 5$; (ii) $k = 6$; (iii) área = 12,5

b)

- (i) El área de la base es $5^2 = 25$. Con $V = \frac{1}{3} \cdot \text{área base} \cdot h$:

$$40 = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot h \Rightarrow h = \frac{120}{25} = 4,8.$$

- (ii) La pirámide es recta: el vértice E está sobre el centro de la base, que es el punto medio de la diagonal AC :

$$\left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{1+6}{2}, 3 \right) = (-0,5, 3,5, 3).$$

La base está en el plano $z = 3$, así que E se obtiene sumando la altura a la coordenada z (tomando la pirámide hacia arriba): $z_E = 3 + 4,8 = 7,8$.

Resultado: (i) $h = 4,8$; (ii) $E(-0,5, 3,5, 7,8)$

Resultado: a) (i) 5; (ii) $k = 6$; (iii) 12,5; b) (i) 4,8; (ii) $E(-0,5, 3,5, 7,8)$

Prismas y pirámides

EJERCICIO 2 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2019

Una calculadora cabe en una caja cuboide con una altura de 29 mm, una anchura de 98 mm y una longitud de 186 mm.

- Encuentre el volumen, en mm^3 , de la caja de esta calculadora. Dé su respuesta a dos cifras significativas.
- Escriba su respuesta al apartado a) en la forma $a \times 10^k$ donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.
- Encuentre el volumen, en cm^3 , de la caja de esta calculadora.

a) Volumen del cuboide: $V = 29 \cdot 98 \cdot 186 = 528\,612 \text{ mm}^3$. A dos cifras significativas: $530\,000 \text{ mm}^3$.

Resultado: $V \approx 530\,000 \text{ mm}^3$

b) En notación científica, $530\,000 = 5,3 \times 10^5$ (con $a = 5,3$ y $k = 5$).

Resultado: $5,3 \times 10^5$

c) Como $1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$, se tiene $1 \text{ cm}^3 = 10^3 \text{ mm}^3 = 1000 \text{ mm}^3$. Dividimos el volumen exacto entre 1000:

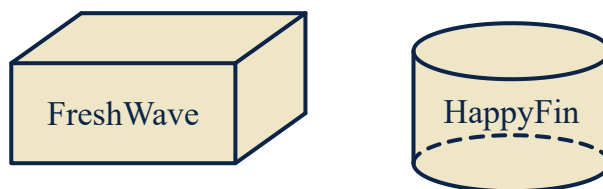
$$V = \frac{528\,612}{1000} = 528,612 \text{ cm}^3 \approx 529 \text{ cm}^3.$$

(También se puede pasar cada medida a centímetros: $2,9 \cdot 9,8 \cdot 18,6 = 528,612$.)

Resultado: a) $530\,000 \text{ mm}^3$; b) $5,3 \times 10^5$; c) $\approx 529 \text{ cm}^3$

EJERCICIO 3 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2016

El atún de la marca FreshWave se vende en latas que tienen forma de cuboide de 8 cm de largo, ancho 5 cm y alto 3,5 cm. El atún de la marca HappyFin se vende en latas cilíndricas con 7 cm de diámetro y 4 cm de altura.



- Encuentre el volumen, en cm^3 , de una lata de
 - atún FreshWave;
 - atún HappyFin.

El precio del atún por cm^3 es el mismo para cada marca.

Una lata de atún FreshWave cuesta 90 centavos.

- Calcule el precio, en centavos, de una lata de atún HappyFin.

a)

(i) Cuboide: $V = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto} = 8 \cdot 5 \cdot 3,5 = 140 \text{ cm}^3$.

(ii) Cilindro de diámetro 7 cm (radio 3,5 cm) y altura 4 cm:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3,5^2 \cdot 4 = 49\pi \approx 153,9 \approx 154 \text{ cm}^3.$$

Resultado: (i) 140 cm^3 ; (ii) 154 cm^3

b)

1. El precio por cm^3 es el de FreshWave: $\frac{90}{140} \approx 0,643$ centavos por cm^3 .

2. La lata HappyFin tiene $49\pi \text{ cm}^3$, así que su precio es

$$\frac{90}{140} \cdot 49\pi \approx 98,96 \approx 99,0 \text{ centavos.}$$

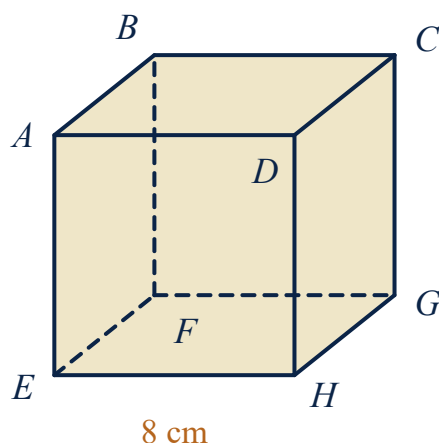
Resultado: a) (i) 140 cm^3 ; (ii) 154 cm^3 ; b) 99,0 centavos

EJERCICIO 4

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2000

El siguiente diagrama muestra una caja en forma de cubo de 8 cm de largo por cada lado.



- La varilla más larga que cabría en la parte inferior de la caja iría de E a G . Halle la longitud l de esta varilla.
- Encuentre la longitud L de la varilla más larga que cabría dentro de la caja.

a) La varilla EG es la diagonal de la cara inferior, que es un cuadrado de lado 8 cm.

1. Por Pitágoras en el triángulo rectángulo EHG (con $EH = HG = 8$): $l^2 = 8^2 + 8^2 = 128$.

2. Entonces $l = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \approx 11,3 \text{ cm}$.

Resultado: $l = 8\sqrt{2} \approx 11,3 \text{ cm}$

b) La varilla más larga dentro de la caja es la diagonal del cubo, por ejemplo de E a C .

1. Tomamos el triángulo rectángulo formado por la diagonal de la base EG , la arista vertical GC y la diagonal EC . Su ángulo recto está en G , y $GC = 8$.

2. Por Pitágoras: $L^2 = l^2 + 8^2 = 128 + 64 = 192$.

3. Entonces $L = \sqrt{192} = 8\sqrt{3} \approx 13,9 \text{ cm}$.

Resultado: $L = 8\sqrt{3} \approx 13,9 \text{ cm}$

Resultado: a) $l \approx 11,3 \text{ cm}$; b) $L \approx 13,9 \text{ cm}$

EJERCICIO 5 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2013

Un ortoedro tiene las siguientes dimensiones: longitud 8,7 cm, anchura = 5,6 cm y altura = 3,4 cm.

- Calcule el valor exacto del volumen del ortoedro, en cm^3 .
- Escriba la respuesta del apartado (a) redondeando a
 - un lugar decimal;
 - tres cifras significativas.
- Escriba la respuesta del apartado (b)(ii) de la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Volumen = largo por ancho por alto:

$$V = 8,7 \cdot 5,6 \cdot 3,4 = 165,648 \text{ cm}^3.$$

b)

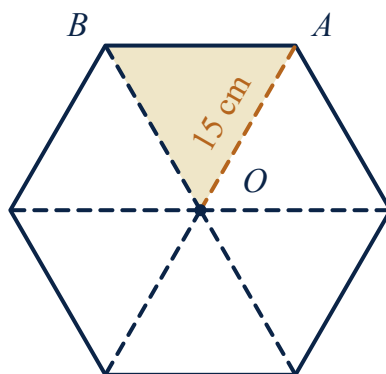
- (i) A un lugar decimal: la segunda cifra decimal es 4, así que no se sube: $165,6 \text{ cm}^3$.
- (ii) A tres cifras significativas (las tres primeras son 1, 6 y 5; la siguiente cifra es 6, así que se sube): 166 cm^3 .

c) En notación científica, con a entre 1 y 10: $166 = 1,66 \times 10^2$.

Resultado: a) $165,648 \text{ cm}^3$; b) (i) $165,6 \text{ cm}^3$, (ii) 166 cm^3 ; c) $1,66 \times 10^2$

EJERCICIO 6 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

La base de un prisma es un hexágono regular. El centro del hexágono es O y la longitud del segmento OA es igual a 15 cm.



- Escriba el valor del ángulo AOB .
 - Halle el área del triángulo AOB .
- La altura del prisma es igual a 20 cm.
- Halle el volumen del prisma.

a) Los seis vértices de un hexágono regular reparten la vuelta completa en seis ángulos centrales iguales:

$$\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Resultado: $\widehat{AOB} = 60^\circ$

b) $OA = OB = 15 \text{ cm}$ y el ángulo entre ellos es 60° :

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 \cdot \sin 60^\circ \approx 97,4 \text{ cm}^2.$$

Resultado: área de $AOB \approx 97,4 \text{ cm}^2$

c)

1. El hexágono se divide en seis triángulos iguales a AOB , así que su área es $6 \cdot 97,43 \approx 584,6 \text{ cm}^2$.
2. Volumen del prisma = área de la base por altura:

$$V = 584,6 \cdot 20 \approx 11\,700 \text{ cm}^3.$$

Resultado: a) 60° ; b) $97,4 \text{ cm}^2$; c) $11\,700 \text{ cm}^3$

EJERCICIO 7

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

En un concurso de televisión hay una caja transparente completamente llena de cubos idénticos.

Los participantes tienen que estimar cuántos cubos hay en la caja.

La caja tiene 50 cm de ancho, 100 cm de largo y 40 cm de alto.

a) Halle el volumen de la caja.

Joaquín estima que el volumen de un cubo es igual a 500 cm^3 .

Luego utiliza este valor para estimar la cantidad de cubos que hay en la caja.

b) Halle el número de cubos que Joaquín estima que hay en la caja.

El número de cubos que en realidad hay en la caja es 350.

c) Halle el porcentaje de error correspondiente al número de cubos que Joaquín estima que hay en la caja.

a) La caja es un ortoedro, así que el volumen es el producto de sus tres dimensiones:

$$V = 50 \cdot 100 \cdot 40 = 200\,000 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V = 200\,000 \text{ cm}^3$

b) Joaquín divide el volumen de la caja entre su estimación del volumen de un cubo:

$$\frac{200\,000}{500} = 400.$$

Resultado: 400 cubos

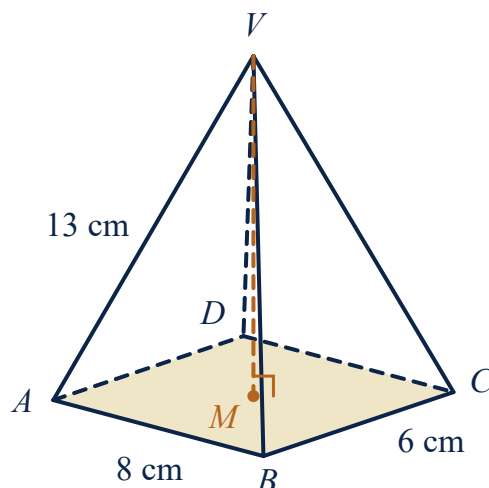
c) El valor real es 350 y el estimado es 400:

$$\text{error} = \left| \frac{400 - 350}{350} \right| \cdot 100 = 14,285 \dots \% = 14,3 \%$$

Resultado: a) $200\,000 \text{ cm}^3$; b) 400 cubos; c) 14,3 %

EJERCICIO 8 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2015

Una pirámide recta tiene el pico V y la base rectangular $ABCD$, con $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm y $VA = 13$ cm. La altura vertical de la pirámide es VM .



- Calcule VM .
- Calcule el volumen de la pirámide.

a) El pie de la altura, M , es el centro del rectángulo, es decir, el punto medio de la diagonal AC .

1. La diagonal de la base, por Pitágoras: $AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ cm.

2. Entonces $AM = \frac{AC}{2} = 5$ cm.

3. El triángulo VMA tiene un ángulo recto en M , con hipotenusa $VA = 13$ cm:

$$VM = \sqrt{VA^2 - AM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

Resultado: $VM = 12$ cm

b) El volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (8 \cdot 6) \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 12 = 192 \text{ cm}^3.$$

Resultado: a) $VM = 12$ cm; b) $V = 192 \text{ cm}^3$

EJERCICIO 9 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2010

Un contenedor de envío es un cuboide con dimensiones de 16 m, $1\frac{3}{4}$ m y $2\frac{2}{3}$ m.

- Calcule el volumen exacto del recipiente. Dé su respuesta como una fracción.

Jim estima las dimensiones del contenedor en 15 m, 2 m y 3 m y las usa para estimar el volumen del contenedor.

- Calcule el porcentaje de error en el volumen estimado de Jim del contenedor.

a) Pasamos los números mixtos a fracciones: $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ y $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

$$V = 16 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 3} = \frac{896}{12} = \frac{224}{3} \text{ m}^3.$$

Resultado: $V = \frac{224}{3} \text{ m}^3$

b) El volumen estimado por Jim es $15 \cdot 2 \cdot 3 = 90 \text{ m}^3$. El valor real es $\frac{224}{3} = 74,666 \dots \text{ m}^3$:

$$\text{error} = \left| \frac{90 - \frac{224}{3}}{\frac{224}{3}} \right| \cdot 100 = \frac{46/3}{224/3} \cdot 100 = \frac{46}{224} \cdot 100 = 20,535 \dots \% \approx 20,5 \%$$

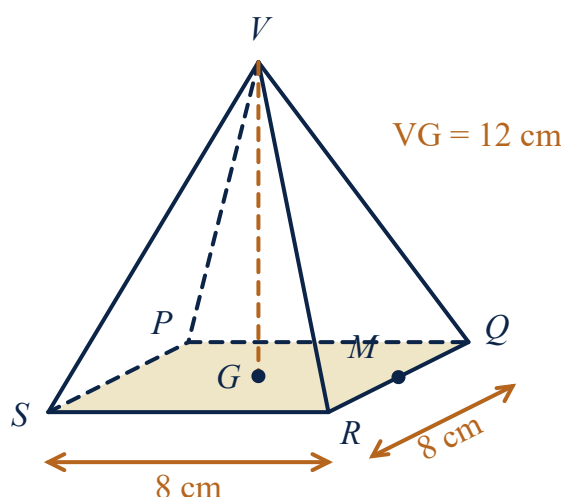
Resultado: a) $V = \frac{224}{3} \text{ m}^3$; b) 20,5 %

EJERCICIO 10

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2001

En el siguiente diagrama, $PQRS$ es la base cuadrada de una pirámide recta sólida con vértice V . Los lados del cuadrado miden 8 cm y la altura VG es 12 cm. M es el punto medio de $[QR]$.



- a)
 - (i) Escriba la longitud de $[GM]$.
 - (ii) Calcule la longitud de $[VM]$.
- b) Encuentre
 - (i) la superficie total de la pirámide;
 - (ii) el ángulo entre la cara VQR y la base de la pirámide.

a)

- (i) G es el centro del cuadrado y M el punto medio del lado QR , así que GM es la mitad del lado: $GM = 4 \text{ cm}$.
- (ii) El triángulo VGM es rectángulo en G (la altura es perpendicular a la base), con $VG = 12$ y $GM = 4$. Por Pitágoras:

$$VM = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 12,649 \dots \approx 12,6 \text{ cm}.$$

Resultado: (i) 4 cm; (ii) 12,6 cm

b)

- (i) La superficie total es la base más cuatro triángulos iguales. VM es la altura de cada triángulo lateral sobre su base de 8 cm (porque $VM \perp QR$):

1. Base: $8^2 = 64 \text{ cm}^2$.

2. Cada cara lateral: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12,649 = 50,596 \text{ cm}^2$; las cuatro: $202,39 \text{ cm}^2$.

3. Total: $64 + 202,39 = 266,39 \dots \approx 266 \text{ cm}^2$.

- (ii) $GM \perp QR$ y $VM \perp QR$, así que el ángulo entre la cara VQR y la base es el ángulo $\widehat{VMG}$:

$$\tan \widehat{VMG} = \frac{VG}{GM} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow \widehat{VMG} = 71,6^\circ.$$

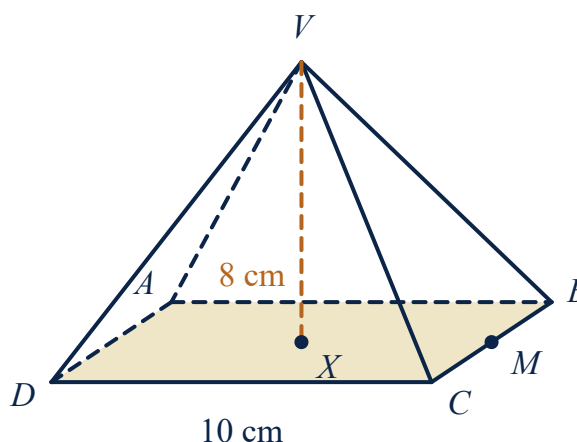
Resultado: a) (i) 4 cm, (ii) 12,6 cm; b) (i) 266 cm², (ii) 71,6°

EJERCICIO 11

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2009

La siguiente figura muestra una pirámide recta de base cuadrada. $ABCD$ es un cuadrado de 10 cm de lado. VX es la altura medida perpendicularmente a la base, y es igual a 8 cm. M es el punto medio de BC .



- Escriba la longitud de XM .
- Calcule la longitud de VM .
- Calcule el ángulo que forma VM con $ABCD$.

a) X es el centro del cuadrado y M el punto medio de BC , así que XM es perpendicular a BC y mide la mitad del lado: $XM = \frac{10}{2} = 5$ cm.

Resultado: $XM = 5$ cm

b) VX es perpendicular a la base, luego el triángulo VXM es rectángulo en X , con catetos $VX = 8$ y $XM = 5$. Por el teorema de Pitágoras:

$$VM = \sqrt{VX^2 + XM^2} = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} \approx 9,43 \text{ cm.}$$

Resultado: $VM \approx 9,43$ cm

c) El ángulo entre la recta VM y el plano de la base es el que forma VM con su proyección sobre la base, que es XM ; es decir, el ángulo $\widehat{VMX}$. En el triángulo rectángulo VXM :

$$\tan \widehat{VMX} = \frac{VX}{XM} = \frac{8}{5} \Rightarrow \widehat{VMX} = \tan^{-1}\left(\frac{8}{5}\right) \approx 58,0^\circ.$$

Resultado: a) 5 cm; b) 9,43 cm; c) 58,0°

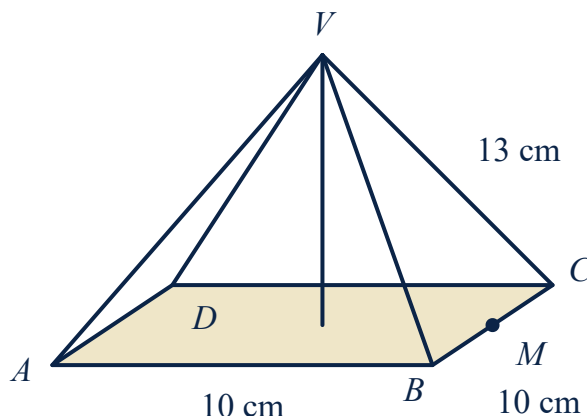
EJERCICIO 12

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

La siguiente figura muestra una pirámide $VABCD$. Esta pirámide tiene la base cuadrada, de 10 cm de lado, y la longitud de sus aristas es igual a 13 cm.

M es el punto medio del lado BC .



- Calcule la longitud de VM .
- Calcule la altura en vertical de la pirámide.
- Calcule el ángulo que forma una de las caras inclinadas de la pirámide con su base.

a) Las aristas laterales miden 13 cm, así que $VB = VC = 13$ y el triángulo VBC es isósceles. VM es su altura, luego $VM \perp BC$ y $BM = \frac{10}{2} = 5$. En el triángulo rectángulo VMB :

$$VM = \sqrt{VB^2 - BM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm.}$$

Resultado: $VM = 12$ cm

b) Sea X el centro de la base (pie de la altura). Entonces $XM = \frac{10}{2} = 5$ cm y VXM es rectángulo en X :

$$h = VX = \sqrt{VM^2 - XM^2} = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} \approx 10,9 \text{ cm.}$$

Resultado: $h \approx 10,9$ cm

c) El ángulo entre la cara VBC y la base es $\widehat{VMX}$ (VM y XM son perpendiculares a la arista común BC):

$$\cos \widehat{VMX} = \frac{XM}{VM} = \frac{5}{12} \Rightarrow \widehat{VMX} \approx 65,4^\circ.$$

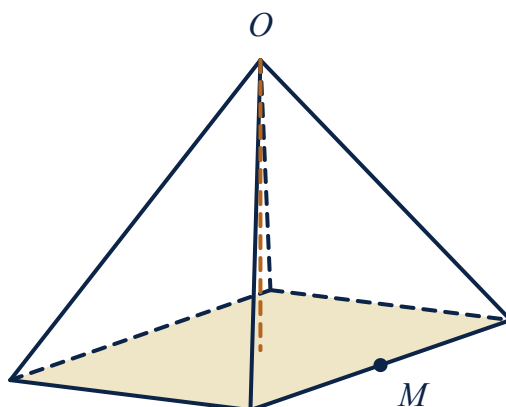
Resultado: a) 12 cm; b) 10,9 cm; c) $65,4^\circ$

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2008

Sylvia está construyendo una pirámide de base cuadrada. Cada triángulo tiene una base de longitud 12 cm y una altura de 10 cm.



a) Muestre que la altura de la pirámide es de 8 cm.

M es el punto medio de la base de uno de los triángulos y O es el vértice de la pirámide.

b) Encuentre el ángulo que forma la línea MO con la base de la pirámide.

c) Calcule el volumen de la pirámide.

d) Daniel quiere hacer un prisma rectangular con el mismo volumen que el de la pirámide de Sylvia. La base de su prisma debe ser un cuadrado de 10 cm de lado. Calcula la altura del prisma.

a) La base de cada triángulo mide 12 cm, así que el lado del cuadrado es 12 y la distancia del centro X de la base al punto medio M de un lado es $XM = 6$ cm. La altura del triángulo ($OM = 10$ cm) y la altura de la pirámide OX forman el triángulo rectángulo OXM (recto en X), con hipotenusa $OM = 10$:

$$OX = \sqrt{OM^2 - XM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm.}$$

Resultado: altura = 8 cm

b) El ángulo entre MO y la base es $\widehat{OMX}$:

$$\cos \widehat{OMX} = \frac{6}{10} \quad (\text{o bien } \tan \widehat{OMX} = \frac{8}{6}) \Rightarrow \widehat{OMX} \approx 53,1^\circ.$$

Resultado: $53,1^\circ$

c)

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V = 384 \text{ cm}^3$

d) El prisma tiene base $10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$ y debe tener volumen 384 cm^3 :

$$100h = 384 \Rightarrow h = 3,84 \text{ cm.}$$

Resultado: a) 8 cm; b) $53,1^\circ$; c) 384 cm^3 ; d) 3,84 cm

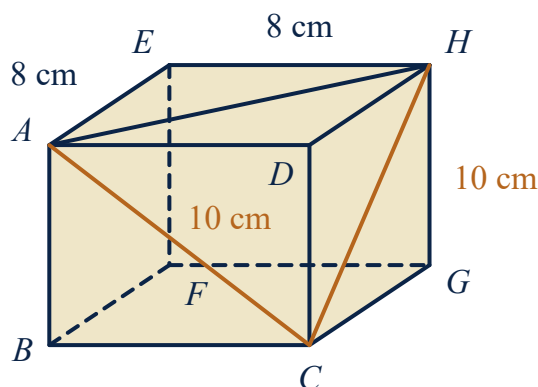
EJERCICIO 14

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2006

La figura que aparece debajo es un prisma rectangular en el cual se indican las longitudes de algunos lados y algunas diagonales.

$AC = 10$ cm, $CH = 10$ cm, $EH = 8$ cm, $AE = 8$ cm.



- Calcule la longitud de AH .
- Halle la medida del ángulo ACH .
- Compruebe que el área total del prisma rectangular es 320 cm².
- Entre los planos $ABCD$, $CGHD$ y $ABGH$ se encuentra un prisma triangular. Calcule el volumen de ese prisma.

a) AH es la diagonal de la cara superior $ADHE$, que es un rectángulo con $AE = 8$ y $EH = 8$ (y $AD = EH = 8$). En el triángulo rectángulo AEH :

$$AH = \sqrt{AE^2 + EH^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} \approx 11,3 \text{ cm.}$$

Resultado: $AH \approx 11,3$ cm

b) El triángulo ACH tiene lados $AC = 10$, $CH = 10$ y $AH = \sqrt{128}$. Por el teorema del coseno aplicado al ángulo en C :

$$\cos \widehat{ACH} = \frac{AC^2 + CH^2 - AH^2}{2 \cdot AC \cdot CH} = \frac{100 + 100 - 128}{200} = 0,36 \Rightarrow \widehat{ACH} \approx 68,9^\circ.$$

Resultado: $\widehat{ACH} \approx 68,9^\circ$

c) Calculamos las tres dimensiones. $AD = EH = 8$ cm (largo) y $DH = AE = 8$ cm (fondo). En la cara frontal $ABCD$, que es un rectángulo, $AC = 10$ es la diagonal y $AD = 8$, así que

$$AB = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ cm.}$$

(Se comprueba con CH : $CD = 6$, $DH = 8$, $\sqrt{36 + 64} = 10$.) El prisma mide $8 \times 8 \times 6$ y su área total es

$$A = 2(8 \cdot 8 + 8 \cdot 6 + 8 \cdot 6) = 2(64 + 48 + 48) = 320 \text{ cm}^2.$$

Resultado: $A = 320$ cm²

d) El plano $ABGH$ es vertical y corta el prisma por la diagonal de la base, así que el prisma triangular tiene como base el triángulo BCG (visto desde abajo): rectángulo en C , con catetos $BC = 8$ y $CG = 8$, es decir, la mitad del cuadrado de 8×8 . Su altura es $AB = 6$ cm:

$$V = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 6 = 192 \text{ cm}^3.$$

Resultado: a) 11,3 cm; b) $68,9^\circ$; c) 320 cm²; d) 192 cm³

EJERCICIO 15

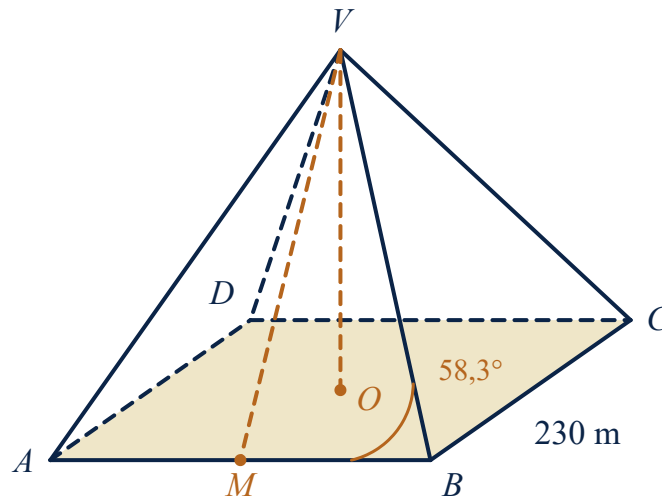
★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2016

La Gran Pirámide de Giza en Egipto es una pirámide recta con una base cuadrada. La pirámide está hecha de piedra maciza. Los lados de la base tienen 230 m de largo. El siguiente diagrama representa esta pirámide, etiquetada $VABCD$.

V es el vértice de la pirámide. O es el centro de la base, $ABCD$. M es el punto medio de AB .

Ángulo $ABV = 58,3^\circ$.

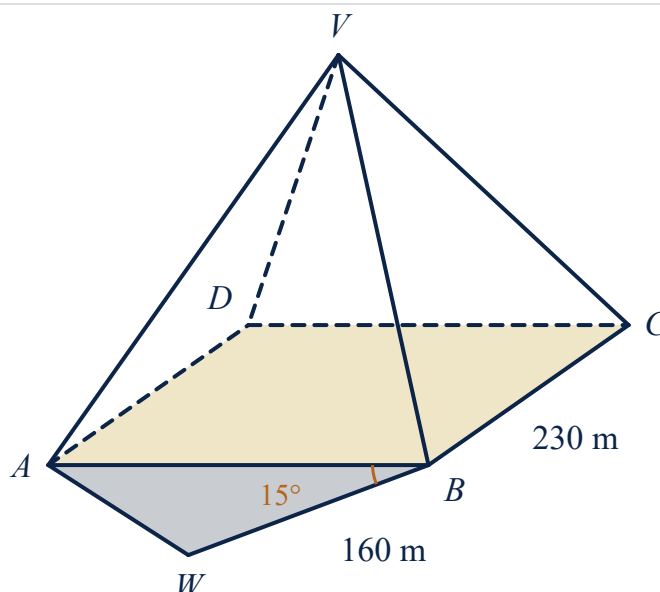


- Muestre que la longitud de VM es 186 metros, aproximado con tres cifras significativas.
- Calcule la altura de la pirámide, VO .
- Encuentre el volumen de la pirámide.
- Escriba su respuesta al apartado (c) en la forma $a \times 10^k$ donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Ahmad es un guía turístico en la Gran Pirámide de Giza. Afirma que la cantidad de piedra utilizada para construir la pirámide podría construir un muro de 5 metros de alto y 1 metro de ancho que se extendería desde París a Ámsterdam, que están a 430 km de distancia.

- Determine si la afirmación de Ahmad es correcta. Dar una razón.

A Ahmad y sus amigos les gusta sentarse a la sombra de la pirámide, ABW , para refrescarse a media tarde, $BW = 160$ m y el ángulo $ABW = 15^\circ$.



- f) (i) Calcule la longitud de AW a media tarde.
(ii) Calcule el área de la sombra, ABW , a media tarde.

a)

- La pirámide es recta con base cuadrada, así que el triángulo VAB es isósceles ($VA = VB$) y VM es perpendicular a AB . En el triángulo VMB , rectángulo en M , tenemos $MB = \frac{230}{2} = 115$ m y el ángulo en B es $58,3^\circ$.
- Usamos la tangente:

$$\tan 58,3^\circ = \frac{VM}{115} \Rightarrow VM = 115 \tan 58,3^\circ \approx 186,2 \approx 186 \text{ m.}$$

b)

- O es el centro de la base y M el punto medio de AB , así que $OM = \frac{230}{2} = 115$ m. El triángulo VOM es rectángulo en O .
- Por Pitágoras:

$$VO = \sqrt{VM^2 - OM^2} = \sqrt{186,2^2 - 115^2} \approx 146,4 \approx 146 \text{ m.}$$

Resultado: $VO \approx 146$ m

- c) Volumen de una pirámide: $\frac{1}{3} \cdot \text{área base} \cdot \text{altura}$ (con la altura sin redondear):

$$V = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 146,4 \approx 2\,582\,000 \approx 2\,580\,000 \text{ m}^3.$$

Resultado: $V \approx 2\,580\,000 \text{ m}^3$

- d) $V \approx 2,58 \times 10^6 \text{ m}^3$.

e)

- Volumen del muro: largo $430 \text{ km} = 430\,000$ m, alto 5 m y ancho 1 m:
$$V_{\text{muro}} = 430\,000 \cdot 5 \cdot 1 = 2\,150\,000 = 2,15 \times 10^6 \text{ m}^3.$$
- La pirámide tiene $2,58 \times 10^6 \text{ m}^3$, que es mayor que $2,15 \times 10^6 \text{ m}^3$. Hay piedra de sobra para construir ese muro, así que la afirmación de Ahmad es correcta.

f)

- (i) En el triángulo ABW conocemos $AB = 230$, $BW = 160$ y el ángulo $ABW = 15^\circ$. Teorema del coseno:

$$AW^2 = 230^2 + 160^2 - 2 \cdot 230 \cdot 160 \cdot \cos 15^\circ \approx 7405 \Rightarrow AW \approx 86,1 \text{ m.}$$

(ii) Área con la fórmula $\frac{1}{2}ab \sin C$:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 230 \cdot 160 \cdot \sin 15^\circ \approx 4762 \approx 4760 \text{ m}^2.$$

Resultado: (i) $AW \approx 86,1 \text{ m}$; (ii) $\text{área} \approx 4760 \text{ m}^2$

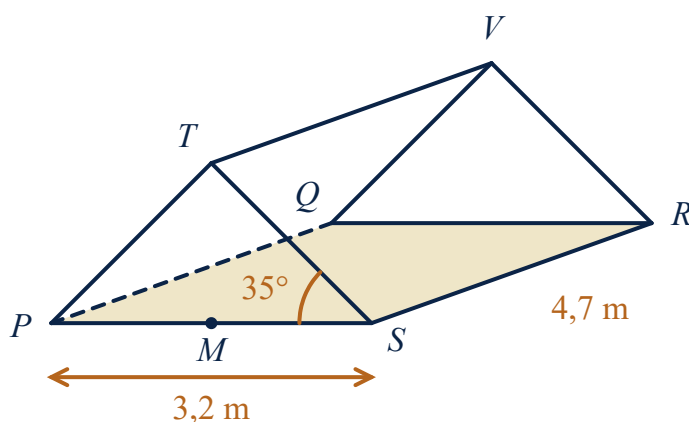
Resultado: a) $VM \approx 186 \text{ m}$; b) $VO \approx 146 \text{ m}$; c) $2\,580\,000 \text{ m}^3$; d) $2,58 \times 10^6 \text{ m}^3$; e) sí, es correcta ($2,58 \times 10^6 > 2,15 \times 10^6$); f) (i) $86,1 \text{ m}$; (ii) 4760 m^2

EJERCICIO 16

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2013

En el siguiente diagrama se muestra una tienda de campaña con forma de prisma recto triangular.



La tienda tiene base rectangular $PQRS$.

PTS y QVR son triángulos isósceles, de modo tal que $PT = TS$ y $QV = VR$.

PS mide 3,2 m, SR mide 4,7 m y el ángulo TSP es igual a 35° .

- Compruebe que el lado ST mide 1,95 m, redondeando a 3 cifras significativas.
- Calcule el área del triángulo PTS .
- Escriba el área del rectángulo $STVR$.
- Calcule el área total de la superficie de la tienda de campaña, incluida la base.
- Calcule el volumen de la tienda.

Se coloca un palo que va desde V hasta M , siendo M el punto medio de PS .

- Halle, en metros,
 - la altura de la tienda, TM ;
 - la longitud del palo, VM .
- Calcule el ángulo que forma VM con la base de la tienda.

Como PTS es isósceles con $PT = TS$, la altura TM cae sobre el punto medio M de PS , y $PM = MS = 1,6 \text{ m}$. El triángulo TMS es rectángulo en M , con ángulo 35° en S .

a) En el triángulo TMS , el lado MS es el cateto adyacente al ángulo de 35° y ST es la hipotenusa:

$$\cos 35^\circ = \frac{MS}{ST} \Rightarrow ST = \frac{1,6}{\cos 35^\circ} = 1,9532 \dots \approx 1,95 \text{ m.}$$

Resultado: $ST \approx 1,95 \text{ m}$

b)

1. Altura del triángulo (cateto opuesto a 35°): $TM = MS \tan 35^\circ = 1,6 \tan 35^\circ = 1,1203 \dots \text{ m}$.

2. Área: $\frac{1}{2} \cdot PS \cdot TM = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 1,1203 = 1,7925 \dots \approx 1,79 \text{ m}^2$.

Resultado: $1,79 \text{ m}^2$

c) $STVR$ es un rectángulo de lados ST y SR :

$$A = ST \cdot SR = 1,9532 \dots \cdot 4,7 = 9,1802 \dots \approx 9,18 \text{ m}^2.$$

Resultado: $9,18 \text{ m}^2$

d) La superficie está formada por la base, los dos triángulos de los extremos y los dos rectángulos inclinados (iguales):

1. Base $PQRS$: $3,2 \cdot 4,7 = 15,04 \text{ m}^2$.

2. Dos triángulos: $2 \cdot 1,7925 = 3,585 \text{ m}^2$.

3. Dos rectángulos: $2 \cdot 9,1802 = 18,3604 \text{ m}^2$.

4. Total: $15,04 + 3,585 + 18,3604 = 36,985 \dots \approx 37,0 \text{ m}^2$.

Resultado: $37,0 \text{ m}^2$

e) El volumen de un prisma es el área de la base por la altura (aquí, la longitud SR):

$$V = 1,7925 \cdot 4,7 = 8,4249 \dots \approx 8,42 \text{ m}^3.$$

Resultado: $8,42 \text{ m}^3$

f)

(i) La altura de la tienda es $TM = 1,1203 \dots \approx 1,12 \text{ m}$ (calculada en b).

(ii) Los dos triángulos de los extremos son iguales, así que V está a la misma altura que T sobre el punto medio N de QR , y $MN = SR = 4,7 \text{ m}$. El triángulo VNM es rectángulo en N , con $VN = 1,1203 \text{ m}$:

$$VM = \sqrt{4,7^2 + 1,1203^2} = 4,8317 \dots \approx 4,83 \text{ m}.$$

Resultado: (i) $1,12 \text{ m}$; (ii) $4,83 \text{ m}$

g) El ángulo de VM con la base es el ángulo VMN del triángulo anterior:

$$\tan \widehat{VMN} = \frac{VN}{MN} = \frac{1,1203}{4,7} \Rightarrow \widehat{VMN} = 13,4^\circ.$$

Resultado: a) $ST \approx 1,95 \text{ m}$; b) $1,79 \text{ m}^2$; c) $9,18 \text{ m}^2$; d) $37,0 \text{ m}^2$; e) $8,42 \text{ m}^3$; f) (i) $1,12 \text{ m}$, (ii) $4,83 \text{ m}$; g) $13,4^\circ$

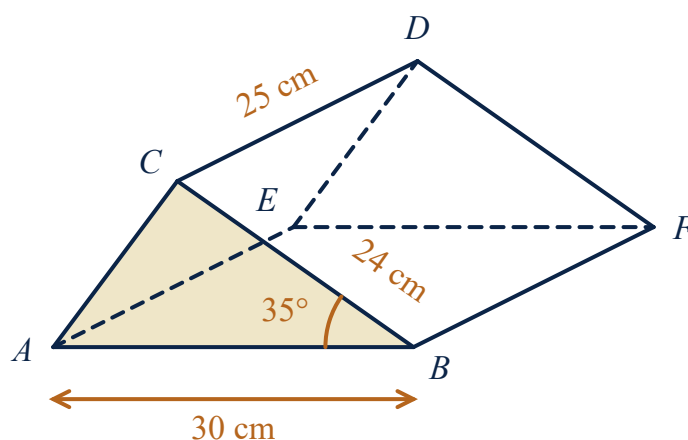
EJERCICIO 17

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2013

Una empresa tiene un contrato para fabricar 2600 bloques de madera sólidos. Cada bloque tiene forma de prisma triangular recto, $ABCDEF$, tal y como se muestra en el diagrama.

$AB = 30$ cm, $BC = 24$ cm, $CD = 25$ cm y el ángulo $\widehat{ABC} = 35^\circ$.



- Calcule la longitud de AC .
 - Calcule el área del triángulo ABC .
 - Suponiendo que no se desaprovecha nada de madera, compruebe que el volumen de madera que se necesita para hacer los 2600 bloques es igual a 13400000 cm^3 , redondeando a tres cifras significativas.
 - Escriba 13400000 en la forma $a \times 10^k$ donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.
 - Compruebe que la superficie total de un bloque es 2190 cm^2 , redondeando a tres cifras significativas.
- Se van a pintar los bloques. Un litro de pintura alcanza para cubrir 22 m^2 .
- Calcule el número de litros que se necesitan para pintar los 2600 bloques.

a) Teorema del coseno en el triángulo ABC (conocemos dos lados y el ángulo que forman):

$$AC^2 = 30^2 + 24^2 - 2 \cdot 30 \cdot 24 \cos 35^\circ = 1476 - 1440 \cos 35^\circ = 296,4 \dots$$

$$AC = \sqrt{296,4 \dots} = 17,2169 \dots \approx 17,2 \text{ cm.}$$

Resultado: $AC \approx 17,2$ cm

b) Área con dos lados y el ángulo comprendido:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 24 \cdot \sin 35^\circ = 360 \sin 35^\circ = 206,487 \dots \approx 206 \text{ cm}^2.$$

Resultado: 206 cm^2

c)

- Volumen de un bloque = área de la base por la altura del prisma ($CD = 25$ cm): $206,487 \dots \cdot 25 = 5162,19 \dots \text{ cm}^3$.
- Volumen de 2600 bloques: $2600 \cdot 5162,19 \dots = 13\,421\,689 \dots \text{ cm}^3$.
- Redondeando a tres cifras significativas: $13\,400\,000 \text{ cm}^3$. Queda comprobado.

Resultado: $13\,400\,000 \text{ cm}^3$

d) Movemos la coma siete lugares hacia la izquierda:

$$13\,400\,000 = 1,34 \times 10^7.$$

Resultado: $1,34 \times 10^7$

e) La superficie total son dos triángulos iguales (las bases) y tres rectángulos de altura 25 cm:

1. Dos triángulos: $2 \cdot 206,487 = 412,975 \text{ cm}^2$.
2. Los tres rectángulos suman (perímetro de la base) $\cdot 25 = (30 + 24 + 17,2169) \cdot 25 = 1780,42 \text{ cm}^2$.
3. Total: $412,975 + 1780,42 = 2193,4 \dots \approx 2190 \text{ cm}^2$ (3 cifras significativas).

Resultado: 2190 cm^2

f)

1. Superficie de los 2600 bloques: $2600 \cdot 2193,4 = 5\,702\,832 \text{ cm}^2$.
2. Pasamos a m^2 ($1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$): $570,28 \text{ m}^2$.
3. Litros de pintura: $\frac{570,28}{22} = 25,92 \dots \approx 25,9$ litros.

Resultado: a) 17,2 cm; b) 206 cm^2 ; c) $13\,400\,000 \text{ cm}^3$; d) $1,34 \times 10^7$; e) 2190 cm^2 ; f) 25,9 litros

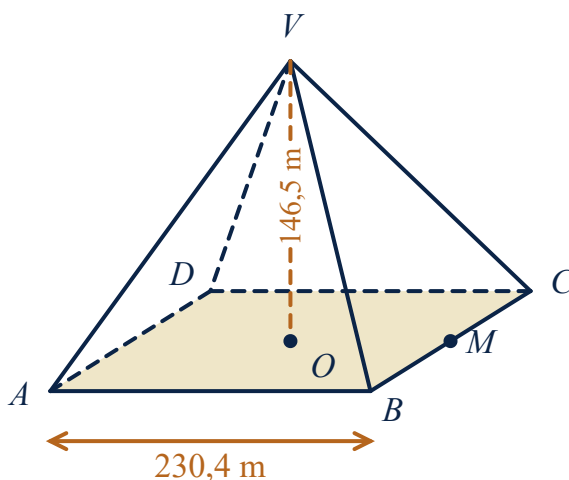
EJERCICIO 18

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2012

La Gran Pirámide de Keops, en Egipto, es una pirámide de base cuadrada. La base de la pirámide es un cuadrado de 230,4 m de lado y la altura en vertical es igual a 146,5 m.

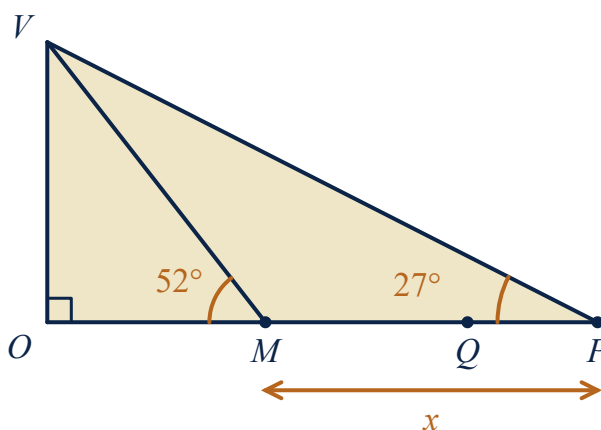
La Gran Pirámide se representa en el siguiente diagrama como $ABCDV$. El vértice V se encuentra directamente sobre el centro de la base O . M es el punto medio de BC .



- (i) Escriba la longitud de OM .
- (ii) Halle la longitud de VM .
- Halle el área del triángulo VBC .
- Calcule el volumen de la pirámide.
- Compruebe que el ángulo que forman la recta VM y la base de la pirámide es igual a 52° , redondeando a 2 cifras significativas.

Ahmed se encuentra en el punto P , a una distancia de x metros de M sobre suelo horizontal, tal y como se muestra en el siguiente diagrama. El valor del ángulo VPM es 27° .

Q es un punto sobre MP .



- Escriba el valor del ángulo VMP .
- Utilizando el valor de VM obtenido en el apartado a)(ii), halle el valor de x .

Ahmed camina 50 m para ir de P a Q .

- g) Halle la longitud de QV , la distancia que hay desde donde se encuentra Ahmed hasta el vértice de la pirámide.

a)

- (i) O es el centro de la base y M el punto medio de un lado, así que OM es la mitad del lado: $OM = \frac{230,4}{2} = 115,2$ m.

- (ii) El triángulo VOM es rectángulo en O , con $VO = 146,5$ y $OM = 115,2$:

$$VM = \sqrt{146,5^2 + 115,2^2} = 186,37 \dots \approx 186 \text{ m.}$$

Resultado: (i) 115,2 m; (ii) 186 m

- b) VM es perpendicular a BC (la cara VMC es un triángulo isósceles y M es el punto medio de su base), luego es la altura del triángulo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot VM = \frac{1}{2} \cdot 230,4 \cdot 186,37 = 21\,469,7 \dots \approx 21\,500 \text{ m}^2.$$

Resultado: 21 500 m²

- c) Volumen de una pirámide = $\frac{1}{3} \cdot (\text{área de la base}) \cdot \text{altura}$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 230,4^2 \cdot 146,5 = 2\,592\,276 \dots \approx 2\,590\,000 \text{ m}^3.$$

Resultado: 2 590 000 m³

- d) El ángulo de VM con la base es $\widehat{VMO}$ del triángulo rectángulo VOM :

$$\tan \widehat{VMO} = \frac{VO}{OM} = \frac{146,5}{115,2} \Rightarrow \widehat{VMO} = 51,82 \dots^\circ \approx 52^\circ \text{ (2 cifras significativas).}$$

Resultado: $\widehat{VMO} \approx 52^\circ$

- e) O , M y P están alineados sobre el suelo, así que $\widehat{VMP}$ y $\widehat{VMO}$ son suplementarios:

$$\widehat{VMP} = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ.$$

Resultado: 128°

f)

1. En el triángulo VMP el tercer ángulo es $\widehat{MVP} = 180^\circ - 128^\circ - 27^\circ = 25^\circ$.

2. Teorema del seno: $\frac{x}{\sin 25^\circ} = \frac{VM}{\sin 27^\circ}$.

3. Despejamos:

$$x = \frac{186,37 \cdot \sin 25^\circ}{\sin 27^\circ} = 173,5 \dots \approx 173 \text{ m.}$$

Resultado: $x \approx 173$ m

g)

1. En el triángulo rectángulo VOP : $VP = \frac{VO}{\sin 27^\circ} = \frac{146,5}{\sin 27^\circ} = 322,69 \dots$ m.

2. En el triángulo VQP conocemos $QP = 50$, $VP = 322,69$ y el ángulo 27° en P . Teorema del coseno:

$$QV^2 = 322,69^2 + 50^2 - 2 \cdot 322,69 \cdot 50 \cos 27^\circ = 77\,879 \dots$$

$$QV = 279,07 \dots \approx 279 \text{ m.}$$

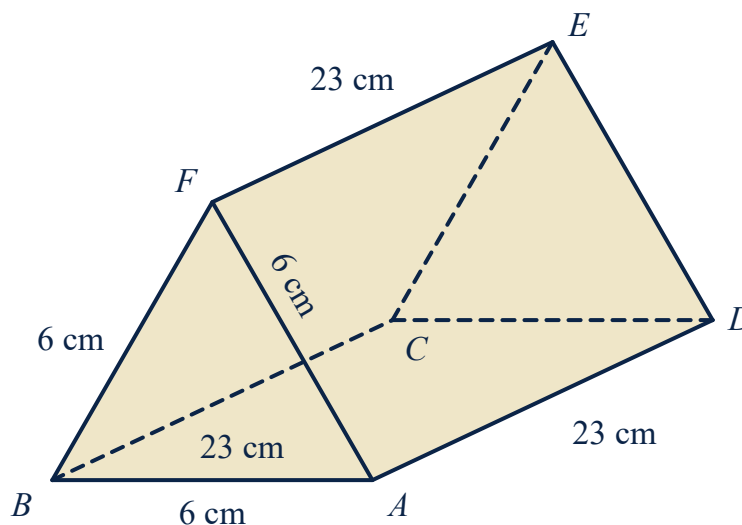
Resultado: a) (i) 115,2 m, (ii) 186 m; b) 21 500 m²; c) 2 590 000 m³; d) 52°; e) 128°; f) 173 m; g) 279 m

EJERCICIO 19

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2009

Una barra de chocolate tiene la forma de un prisma rectángulo triangular $ABCDEF$ como se muestra en el diagrama. Los extremos son triángulos equiláteros de 6 cm de lado y la longitud de la barra de chocolate es de 23 cm.



- Escriba el tamaño del ángulo BAF .
 - Usando lo anterior o de otra manera encuentre el área del extremo triangular de la barra de chocolate.
 - Encuentre el área de la superficie total de la barra de chocolate.
 - Se sabe que 1 cm^3 de este chocolate pesa 1,5 g. Calcule el peso de la barra de chocolate.
- Una barra de chocolate diferente hecha con la misma mezcla también tiene la forma de un prisma triangular. Los extremos son triángulos con lados de 4 cm, 6 cm y 7 cm de largo.
- Muestre que el tamaño del ángulo entre los lados de 6 cm y 4 cm es $86,4^\circ$ aproximado a 3 cifras significativas.
 - El peso de esta barra de chocolate es de 500 g. Calcule su longitud.

- Un triángulo equilátero tiene los tres ángulos iguales, de 60° : $\widehat{BAF} = 60^\circ$.
 - El triángulo tiene dos lados de 6 cm que forman un ángulo de 60° :

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = 9\sqrt{3} \approx 15,6 \text{ cm}^2.$$

Resultado: a) i) 60° ; ii) $15,6 \text{ cm}^2$

- La superficie total son los dos extremos triangulares más las tres caras rectangulares (cada una de $6 \times 23 \text{ cm}$):

$$A_T = 2 \cdot 15,588 + 3 \cdot (6 \cdot 23) = 31,18 + 414 \approx 445 \text{ cm}^2.$$

Resultado: $A_T \approx 445 \text{ cm}^2$

- Volumen: área de la base por longitud, $V = 15,588 \cdot 23 \approx 358,5 \text{ cm}^3$.
 - Peso: $358,5 \cdot 1,5 \approx 538 \text{ g}$.

Resultado: peso $\approx 538 \text{ g}$

- Sea θ el ángulo entre los lados de 6 cm y 4 cm; el lado opuesto es el de 7 cm. Teorema del coseno:

$$7^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{36 + 16 - 49}{48} = \frac{3}{48} = 0,0625.$$

$$\theta = \arccos(0,0625) \approx 86,4^\circ.$$

Resultado: $\theta \approx 86,4^\circ$

e)

1. Área del extremo: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 86,417^\circ \approx 11,98 \text{ cm}^2$ (también sale con la fórmula de Herón).

2. Volumen de la barra: $\frac{500}{1,5} \approx 333,3 \text{ cm}^3$.

3. Longitud: $\ell = \frac{V}{\text{área}} = \frac{333,3}{11,98} \approx 27,8 \text{ cm}$.

Resultado: a) i) 60° ; ii) $15,6 \text{ cm}^2$; b) 445 cm^2 ; c) 538 g ; d) $86,4^\circ$; e) $27,8 \text{ cm}$

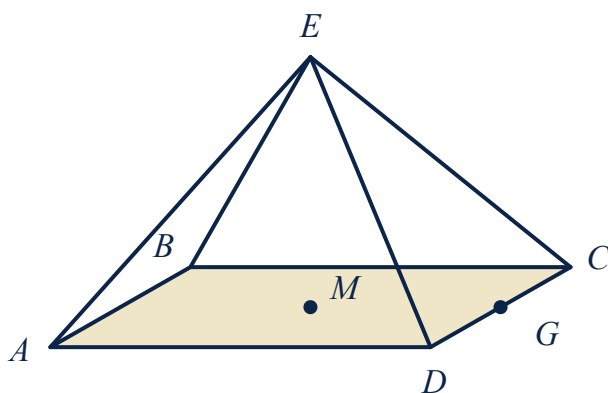
EJERCICIO 20

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2008

Las caras triangulares de una pirámide de base cuadrada, $ABCE$, están todas inclinadas a 70° con la base. Los bordes de la base $ABCD$ son todos de 10 cm y M es el centro.

G es el punto medio de CD .



- Con las letras del diagrama, dibuje un triángulo que muestre la posición de un ángulo de 70° .
- Muestre que la altura de la pirámide es $13,7 \text{ cm}$, con 3 cifras significativas.
- Calcular
 - la longitud de EG ;
 - el tamaño del ángulo $\widehat{DEC}$.
- Encuentre el área de superficie total de la pirámide.
- Encuentre el volumen de la pirámide.

a) El ángulo entre una cara triangular y la base se mide en el plano perpendicular a la arista común, pasando por la altura. Para la cara ECD (arista CD), G es el punto medio de CD , EG es la altura de la cara y MG es perpendicular a CD dentro de la base. El triángulo pedido es EMG , rectángulo en M , con el ángulo de 70° en G (es decir, $\widehat{EGM} = 70^\circ$).



Resultado: triángulo EMG , recto en M , con $\widehat{EGM} = 70^\circ$

b) M es el centro del cuadrado, así que MG es la mitad del lado: $MG = 5$ cm. En el triángulo EMG :

$$\tan 70^\circ = \frac{EM}{MG} \Rightarrow EM = 5 \tan 70^\circ \approx 13,737 \approx 13,7 \text{ cm.}$$

Resultado: altura = 13,7 cm

c) i) En el mismo triángulo:

$$\cos 70^\circ = \frac{MG}{EG} \Rightarrow EG = \frac{5}{\cos 70^\circ} \approx 14,6 \text{ cm.}$$

(ii) EG es la altura del triángulo isósceles ECD sobre su base $CD = 10$, luego divide el ángulo en dos iguales. En el triángulo EGD , recto en G , con $GD = 5$ y $EG = 14,619$:

$$\tan \frac{\widehat{DEC}}{2} = \frac{5}{14,619} \Rightarrow \frac{\widehat{DEC}}{2} \approx 18,88^\circ \Rightarrow \widehat{DEC} \approx 37,8^\circ.$$

Resultado: i) $EG \approx 14,6$ cm; ii) $\widehat{DEC} \approx 37,8^\circ$

d) El área total es la de la base más la de las cuatro caras triangulares iguales (base 10, altura EG):

$$A = 10^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 14,619 = 100 + 292,4 \approx 392 \text{ cm}^2.$$

Resultado: $A \approx 392 \text{ cm}^2$

e)

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 13,737 \approx 458 \text{ cm}^3.$$

Resultado: a) triángulo EMG con 70° en G ; b) 13,7 cm; c) i) 14,6 cm; ii) $37,8^\circ$; d) 392 cm^2 ; e) 458 cm^3

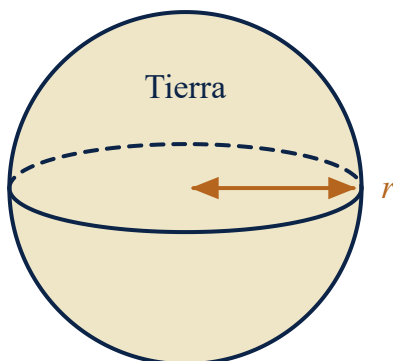
Cilindros, conos y esferas

EJERCICIO 21

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

Suponga que la Tierra es una esfera de radio $r = 6,38 \times 10^3$ km.



- a) (i) Calcule el área de la superficie de la Tierra en km^2 .
(ii) Escriba la respuesta dada en el apartado (a)(i) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.
La superficie de la Tierra que está cubierta por agua ocupa un área aproximada $3,61 \times 10^8 \text{ km}^2$.
b) Calcule el porcentaje de la superficie de la Tierra que está cubierta por agua.

a)

- (i) El área de la superficie de una esfera es $4\pi r^2$:

$$A = 4\pi (6,38 \times 10^3)^2 = 4\pi \cdot 6380^2 \approx 511\,506\,576 \approx 512\,000\,000 \text{ km}^2.$$

- (ii) Con una cifra antes de la coma y potencia de 10: $A \approx 5,12 \times 10^8 \text{ km}^2$.

Resultado: (i) $\approx 512\,000\,000 \text{ km}^2$; (ii) $5,12 \times 10^8$

- b) Porcentaje cubierto por agua (con el área sin redondear):

$$\frac{3,61 \times 10^8}{5,115 \times 10^8} \cdot 100 \approx 70,6 \%$$

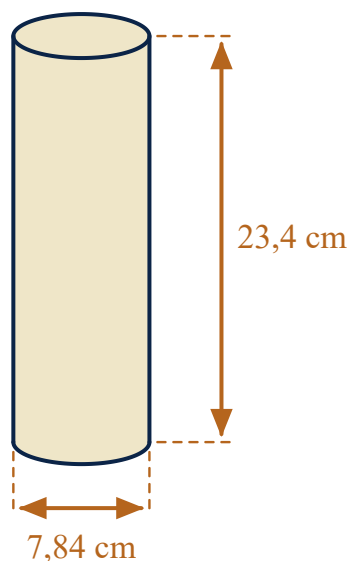
Resultado: a) (i) $\approx 512\,000\,000 \text{ km}^2$; (ii) $5,12 \times 10^8$; b) 70,6 %

EJERCICIO 22

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

El bote donde se venden unos aperitivos tiene forma cilíndrica. El diámetro de la base es igual a 7,84 cm. La altura del bote es igual a 23,4 cm. Esta información se muestra en la siguiente figura.



- Escriba el radio, en cm, de la base del bote.
 - Calcule el área de la base del bote.
- Dan tiene previsto pintar la superficie curva y la base del bote.
- Calcule el área que va a pintar.

a) El radio es la mitad del diámetro: $r = \frac{7,84}{2} = 3,92$ cm.

Resultado: $r = 3,92$ cm

b) Área del círculo de la base:

$$A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi \cdot 3,92^2 \approx 48,27 \approx 48,3 \text{ cm}^2.$$

Resultado: $48,3 \text{ cm}^2$

c)

- Superficie curva (lateral) del cilindro: $2\pi rh = 2\pi \cdot 3,92 \cdot 23,4 \approx 576,34 \text{ cm}^2$.
- Se pinta además una base: $48,27 \text{ cm}^2$.
- Área total a pintar: $576,34 + 48,27 \approx 624,6 \approx 625 \text{ cm}^2$.

Resultado: a) $r = 3,92$ cm; b) $48,3 \text{ cm}^2$; c) 625 cm^2

EJERCICIO 23

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2015

Suponga que la Tierra es una esfera perfecta con un radio de 6371 km.

a) Calcule el volumen de la Tierra en km^3 . Dé su respuesta en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

El volumen de la Luna es $2,1958 \times 10^{10} \text{ km}^3$.

b) Calcule cuántas veces es mayor el volumen de la Tierra que el de la Luna.

Dé su respuesta correcta al número entero más cercano.

a) Volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6371^3 \approx 1,0832 \times 10^{12} \approx 1,08 \times 10^{12} \text{ km}^3.$$

Resultado: $V \approx 1,08 \times 10^{12} \text{ km}^3$

b) Cociente de volúmenes (sin redondear el de la Tierra):

$$\frac{1,0832 \times 10^{12}}{2,1958 \times 10^{10}} \approx 49,3 \approx 49.$$

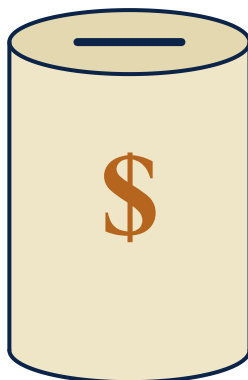
Resultado: a) $V \approx 1,08 \times 10^{12} \text{ km}^3$; b) ≈ 49 veces mayor

EJERCICIO 24

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2019

Las huchas son recipientes para monedas que usan los niños y vienen en una variedad de formas. La hucha que se muestra tiene la forma de un cilindro. Tiene un radio de 4,43 cm y una altura de 12,2 cm.



a) Encuentre el volumen de la hucha.

Una segunda hucha tiene la forma de una esfera y el mismo volumen que la hucha cilíndrica.



b) Encuentre el diámetro de la segunda caja de dinero.

a) Volumen del cilindro:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4,43^2 \cdot 12,2 \approx 752,17 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V \approx 752 \text{ cm}^3$

b)

1. El volumen de la esfera es igual al del cilindro: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 752,17$.

2. Despejamos el radio: $R^3 = \frac{3 \cdot 752,17}{4\pi} \approx 179,6$, luego $R \approx 5,642 \text{ cm}$.

3. El diámetro es el doble del radio: $D = 2R \approx 11,3 \text{ cm}$.

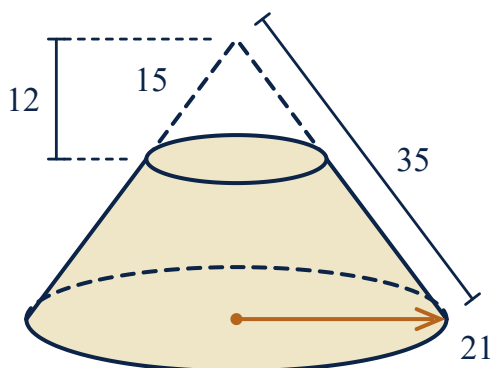
Resultado: a) 752 cm^3 ; b) $D \approx 11,3 \text{ cm}$

EJERCICIO 25

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2018

Un cono circular recto sólido tiene un radio de base de 21 cm y una altura de inclinación de 35 cm. Un cono circular recto más pequeño tiene una altura de 12 cm y una altura inclinada de 15 cm, y es retirado de la parte superior del cono más grande, como se muestra en el diagrama.



- Calcule el radio de la base del cono que se ha quitado.
- Calcule el área de la superficie curva del cono que se ha eliminado.
- Calcule el área de la superficie curva del sólido restante.

a)

1. En el cono pequeño, la altura (12), el radio r y la generatriz (15) forman un triángulo rectángulo: $r^2 + 12^2 = 15^2$.

2. Despejamos: $r^2 = 225 - 144 = 81$, luego $r = 9 \text{ cm}$.

(Se puede comprobar con semejanza: $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ y $21 \cdot \frac{3}{7} = 9$.)

Resultado: $r = 9 \text{ cm}$

b) La superficie curva de un cono es $\pi r g$:

$$A_{\text{pequeño}} = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi \approx 424 \text{ cm}^2.$$

Resultado: $A \approx 424 \text{ cm}^2$

c)

1. Superficie curva del cono grande: $\pi \cdot 21 \cdot 35 = 735\pi \approx 2309 \text{ cm}^2$.

2. La superficie curva del sólido restante es la del cono grande menos la del pequeño retirado: $735\pi - 135\pi = 600\pi$.

3. Es decir, $A \approx 1885 \text{ cm}^2$.

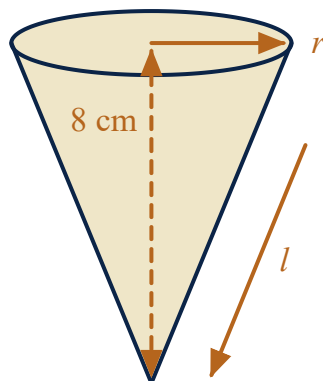
Resultado: a) $r = 9 \text{ cm}$; b) $A \approx 424 \text{ cm}^2$; c) $A = 600\pi \approx 1885 \text{ cm}^2$

EJERCICIO 26

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

Un tipo de caramelo se envasa en un cono circular recto que tiene un volumen de 100 cm^3 y altura vertical 8 cm.



- Encuentre el radio, r , de la base circular del cono.
- Encuentre la altura inclinada, l , del cono.
- Encuentre el área de la superficie curva del cono.

a)

- Volumen del cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Con $V = 100$ y $h = 8$: $100 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 8$.
- Despejamos: $r^2 = \frac{300}{8\pi} \approx 11,94$.
- Luego $r \approx 3,45 \text{ cm}$.

Resultado: $r \approx 3,45 \text{ cm}$

b) La altura, el radio y la altura inclinada forman un triángulo rectángulo:

$$l = \sqrt{r^2 + 8^2} = \sqrt{11,94 + 64} \approx 8,71 \text{ cm}.$$

Resultado: $l \approx 8,71 \text{ cm}$

c) Superficie curva del cono (con los valores sin redondear):

$$A = \pi r l \approx \pi \cdot 3,4549 \cdot 8,7142 \approx 94,6 \text{ cm}^2.$$

Resultado: a) $r \approx 3,45 \text{ cm}$; b) $l \approx 8,71 \text{ cm}$; c) $A \approx 94,6 \text{ cm}^2$

EJERCICIO 27

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2007

Juana tiene un cilindro circular con tapa.

El cilindro tiene una altura de 39 cm y un diámetro de 65 mm.

a) Calcule el volumen del cilindro en cm^3 .

Dé la respuesta redondeando a dos cifras decimales.

El cilindro se utiliza para guardar pelotas de tenis. Cada pelota tiene un radio de 3,25 cm.

b) Calcule cuántas pelotas puede meter Juana en el cilindro hasta llenarlo por completo.

c) (i) Juana llena el cilindro con el número de pelotas hallado en el apartado (b) y pone la tapa. Calcule el volumen de aire que hay dentro del cilindro, correspondiente a los huecos que hay entre las pelotas de tenis.

(ii) Convierta la respuesta del apartado (c) (i) a metros cúbicos.

a) Pasamos el diámetro a centímetros: $65 \text{ mm} = 6,5 \text{ cm}$, luego el radio es $r = 3,25 \text{ cm}$.

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3,25^2 \cdot 39 = 1294,14 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V \approx 1294,14 \text{ cm}^3$

b) Las pelotas tienen el mismo diámetro que el cilindro ($2 \cdot 3,25 = 6,5 \text{ cm}$), así que van apiladas una sobre otra. Cada una ocupa 6,5 cm de altura:

$$\frac{39}{6,5} = 6.$$

Resultado: 6 pelotas

c) (i) El aire es la diferencia entre el volumen del cilindro y el de las 6 pelotas.

$$1. \text{ Volumen de una pelota: } \frac{4}{3}\pi \cdot 3,25^3 = 143,79 \dots \text{ cm}^3.$$

$$2. \text{ Volumen de 6 pelotas: } 6 \cdot 143,79 \dots = 862,76 \dots \text{ cm}^3.$$

$$3. \text{ Aire: } 1294,14 \dots - 862,76 \dots = 431,38 \dots \text{ cm}^3 \approx 431 \text{ cm}^3.$$

(ii) Como $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$:

$$431,38 \dots \text{ cm}^3 = 431,38 \dots \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \approx 0,000431 \text{ m}^3.$$

Resultado: a) $1294,14 \text{ cm}^3$; b) 6 pelotas; c) (i) 431 cm^3 , (ii) $0,000431 \text{ m}^3$

EJERCICIO 28

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2011

75 balas de cañón esféricas de metal, cada una de 10 cm de diámetro, fueron excavadas de un campo de batalla de la guerra napoleónica.

a) Calcule el volumen total de las 75 balas de cañón de metal excavadas.

Las balas de cañón deben fundirse para formar una escultura en forma de cono.

El radio de la base del cono es de 20 cm.

b) Calcule la altura del cono, suponiendo que no se desperdicia metal.

a) El diámetro es 10 cm, así que el radio es 5 cm. Volumen de una bala:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3} = 523,6 \dots \text{ cm}^3.$$

Volumen de las 75 balas:

$$V = 75 \cdot \frac{500\pi}{3} = 12500\pi = 39269,9 \dots \approx 39300 \text{ cm}^3.$$

Resultado: 39300 cm^3

b) Si no se pierde metal, el cono tiene el mismo volumen que las balas:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 12\,500\pi \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot h = 12\,500 \Rightarrow h = \frac{37\,500}{400} = 93,75 \approx 93,8 \text{ cm.}$$

Resultado: a) 39 300 cm³; b) 93,8 cm

EJERCICIO 29

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2019

Una fábrica envasa agua de coco en recipientes con forma de cono, donde el radio de la base es de 5,2 cm y la altura es igual a 13 cm.

- Halle el volumen de uno de los recipientes con forma de cono.
- Halle la generatriz de este recipiente con forma de cono.
- Muestre que el área total de la superficie de este recipiente con forma de cono es igual a 314 cm², redondeando a tres cifras significativas.

Los diseñadores de la fábrica están investigando si es posible sustituir los recipientes con forma de cono por recipientes con forma de cilindro que tengan el mismo radio y la misma superficie total.

- Halle la altura (h) de uno de estos recipientes con forma de cilindro.
- El director de la fábrica quiere aumentar el volumen de agua de coco que se vende con cada recipiente.
- Indique si debería (o no) sustituir los recipientes con forma de cono por recipientes con forma de cilindro. Justifique su respuesta.

a) Volumen del cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5,2^2 \cdot 13 \approx 368,1 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V \approx 368 \text{ cm}^3$

b) La generatriz, la altura y el radio forman un triángulo rectángulo (la generatriz es la hipotenusa):

$$g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{5,2^2 + 13^2} = \sqrt{196,04} \approx 14,0 \text{ cm.}$$

Resultado: $g \approx 14,0 \text{ cm}$

c)

- El área total del cono es la base más la superficie lateral: $A = \pi r^2 + \pi r g$.
- Sustituimos con el valor exacto de g : $A = \pi \cdot 5,2^2 + \pi \cdot 5,2 \cdot 14,0014 \approx 84,95 + 228,73 = 313,68 \text{ cm}^2$.
- Redondeando a tres cifras significativas: $A \approx 314 \text{ cm}^2$, que es lo que se pedía mostrar.

d)

- El cilindro tiene el mismo radio, 5,2 cm, y la misma superficie total, 314 cm². Su área total es dos bases más la superficie lateral: $2\pi r^2 + 2\pi r h = 314$.
- Sustituimos: $2\pi \cdot 5,2^2 + 2\pi \cdot 5,2 \cdot h = 314$, es decir, $169,9 + 32,67 h = 314$.
- Despejamos: $h = \frac{314 - 2\pi \cdot 5,2^2}{2\pi \cdot 5,2} \approx 4,41 \text{ cm.}$

Resultado: $h \approx 4,41 \text{ cm}$

e)

- Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 5,2^2 \cdot 4,41 \approx 374,7 \text{ cm}^3$.
- Volumen del cono: 368,1 cm³.
- Como $374,7 > 368,1$, el cilindro contiene más agua de coco que el cono con la misma superficie de envase. Por tanto, **sí** debería sustituir los recipientes cónicos por cilíndricos.

Resultado: a) 368 cm^3 ; b) $14,0 \text{ cm}$; c) $A \approx 313,68 \approx 314 \text{ cm}^2$; d) $h \approx 4,41 \text{ cm}$; e) sí, porque el cilindro tiene mayor volumen ($374,7 \text{ cm}^3$ frente a $368,1 \text{ cm}^3$)

Sólidos compuestos y problemas de contexto

EJERCICIO 30

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2009

Las pelotas de tenis se venden en tubos cilíndricos que contienen cuatro pelotas. El radio de cada una de las pelotas de tenis mide $3,15 \text{ cm}$ y el radio del tubo es de $3,2 \text{ cm}$. La longitud del tubo es 26 cm .

- Encuentre el volumen de una pelota de tenis.
- Calcule el volumen del espacio vacío en el tubo cuando cuatro pelotas de tenis están colocadas en él.

a) Una pelota es una esfera de radio $3,15 \text{ cm}$:

$$V_{\text{pelota}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3,15^3 \approx 130,9 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V \approx 131 \text{ cm}^3$

b)

- Volumen del tubo (cilindro de radio $3,2 \text{ cm}$ y longitud 26 cm): $V_{\text{tubo}} = \pi \cdot 3,2^2 \cdot 26 \approx 836,4 \text{ cm}^3$.
- Volumen de las cuatro pelotas: $4 \cdot 130,92 \approx 523,7 \text{ cm}^3$.
- El espacio vacío es la diferencia: $836,4 - 523,7 \approx 312,7 \text{ cm}^3$.

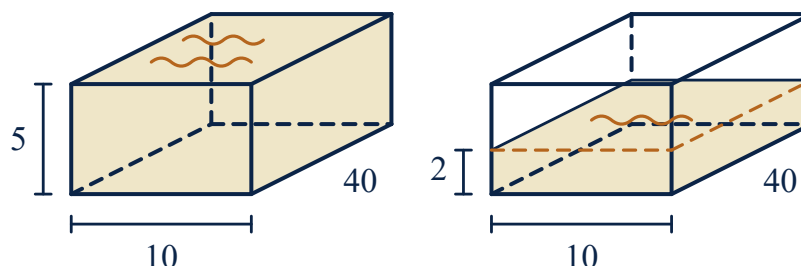
Resultado: a) 131 cm^3 ; b) $\approx 313 \text{ cm}^3$

EJERCICIO 31

★★ Medio

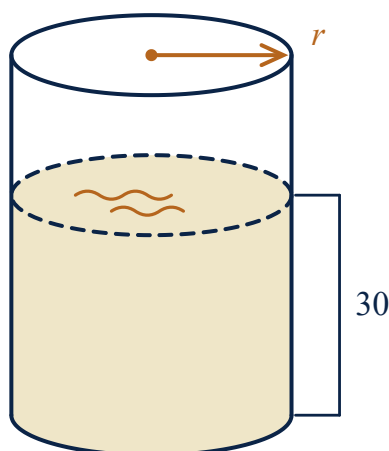
IB · P1 TZ0 Noviembre 2019

Yao extrae todo el aceite de su motocicleta y lo vierte en dos ortoedros idénticos cuya base rectangular mide 10 cm de ancho por 40 cm de largo. La altura de cada ortoedro es igual a 5 cm. El aceite de la motocicleta llena el primer ortoedro completamente y el segundo ortoedro hasta una altura de 2 cm. Toda esta información se muestra en la siguiente figura.



a) Calcule el volumen de aceite que se ha extraído de la motocicleta de Yao.

A continuación Yao vierte todo el aceite de los ortoedros en un contenedor cilíndrico vacío. En dicho contenedor, el aceite alcanza una altura de 30 cm.



b) Halle el radio interno, r , de este contenedor.

a)

1. Aceite del primer ortoedro (lleno): $10 \cdot 40 \cdot 5 = 2000 \text{ cm}^3$.
2. Aceite del segundo ortoedro (hasta 2 cm de altura): $10 \cdot 40 \cdot 2 = 800 \text{ cm}^3$.
3. Volumen total: $2000 + 800 = 2800 \text{ cm}^3$.

Resultado: $V = 2800 \text{ cm}^3$

b)

1. El aceite forma un cilindro de altura 30 cm y radio r , cuyo volumen es el volumen total: $\pi r^2 \cdot 30 = 2800$.
2. Despejamos: $r^2 = \frac{2800}{30\pi} \approx 29,71$.
3. Entonces $r = \sqrt{\frac{2800}{30\pi}} \approx 5,45 \text{ cm}$.

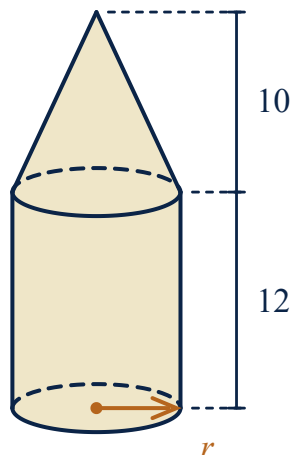
Resultado: a) 2800 cm^3 ; b) $r \approx 5,45 \text{ cm}$

EJERCICIO 32

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2018

Julio está haciendo un estuche de madera para lápices que tiene forma de lápiz de gran tamaño. El estuche para lápices consta de un cilindro que está unido a un cono, como se muestra en la figura. El cilindro mide r cm de radio y 12 cm de altura. En el cono, la altura son 10 cm y el radio de la base mide r cm.



- a) Halle una expresión que permita calcular la generatriz del cono en función de r .

El área total de la superficie externa del estuche de lápices es igual a 570 cm^2 , si redondeamos a 3 cifras significativas.

- b) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica, calcule el valor de r .

- a) La altura del cono, el radio de su base y la generatriz forman un triángulo rectángulo, así que

$$g = \sqrt{r^2 + 10^2} = \sqrt{100 + r^2}.$$

Resultado: $g = \sqrt{100 + r^2}$

- b)

1. La superficie externa del estuche está formada por la superficie lateral del cono, la superficie lateral del cilindro y la base inferior del cilindro. La unión entre cono y cilindro no cuenta, porque queda dentro.
2. Cono: $\pi r g = \pi r \sqrt{100 + r^2}$. Cilindro (lateral): $2\pi r \cdot 12 = 24\pi r$. Base inferior: πr^2 .
3. Igualamos al área dada:

$$\pi r \sqrt{100 + r^2} + 24\pi r + \pi r^2 = 570.$$

4. Resolvemos la ecuación con la calculadora de pantalla gráfica (por ejemplo, buscando el punto de corte de la gráfica del primer miembro con la recta $y = 570$): $r \approx 4,58 \text{ cm}$.

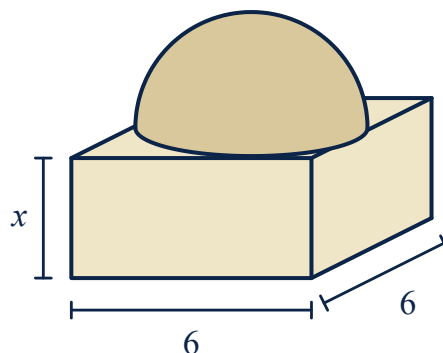
Resultado: a) $g = \sqrt{100 + r^2}$; b) $r \approx 4,58 \text{ cm}$

EJERCICIO 33

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

Un pisapapeles de cristal sólido consta de una semiesfera de 6 cm de diámetro situada encima de un ortoedro de base cuadrada de 6 cm de longitud, tal y como se muestra en la figura.



La altura del ortoedro, x cm, es igual a la altura de la semiesfera.

- a) (i) Escriba el valor de x .
 (ii) Calcule el volumen del pisapapeles.
 1 cm³ de cristal tiene una masa de 2,56 gramos.
 b) Calcule la masa, en gramos, del pisapapeles.

a)

(i) La semiesfera tiene diámetro 6 cm, luego su radio es 3 cm. Su altura es igual al radio, así que $x = 3$.

(ii) 1. Volumen del ortoedro: $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108 \text{ cm}^3$. 2. Volumen de la semiesfera: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 18\pi \approx 56,55 \text{ cm}^3$. 3. Volumen del pisapapeles: $108 + 18\pi \approx 164,5 \text{ cm}^3$.

Resultado: $x = 3$; $V \approx 165 \text{ cm}^3$

b) Masa = volumen $\times$ masa de cada cm³:

$$m = 164,55 \cdot 2,56 \approx 421,2 \text{ g.}$$

Resultado: a) (i) $x = 3$; (ii) $V \approx 165 \text{ cm}^3$; b) $m \approx 421 \text{ g}$

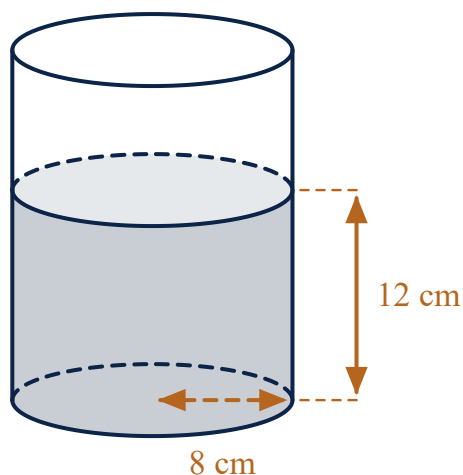
EJERCICIO 34

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2017

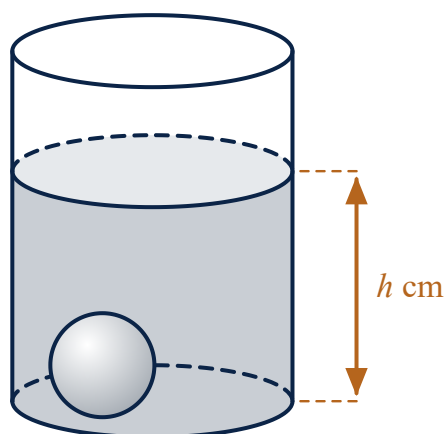
Un contenedor cilíndrico de 8 cm de radio se coloca sobre una superficie plana.

El contenedor se llena de agua hasta una altura de 12 cm, tal y como se muestra en la siguiente figura.



a) Halle el volumen de agua que hay en el contenedor.

Una bola pesada de 2,9 cm de radio se deja caer dentro del contenedor. Como resultado de ello, la altura del agua aumenta hasta alcanzar los h cm, tal y como se muestra en la siguiente figura.



b) Halle el valor de h .

a) El agua forma un cilindro de radio $r = 8$ cm y altura 12 cm:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 8^2 \cdot 12 = 768\pi \approx 2412,7 \text{ cm}^3 \approx 2410 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V \approx 2410 \text{ cm}^3$

b)

1. La bola queda totalmente sumergida y desplaza un volumen de agua igual al suyo. El volumen de la bola es

$$V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2,9^3 \approx 102,16 \text{ cm}^3.$$

2. Ahora el agua ocupa un cilindro de altura h cuyo volumen es el del agua inicial más el de la bola:

$$\pi \cdot 8^2 \cdot h = 768\pi + 102,16.$$

3. Despejamos h :

$$h = \frac{768\pi + 102,16}{64\pi} = 12 + \frac{102,16}{64\pi} \approx 12,508 \text{ cm.}$$

Resultado: $h \approx 12,5 \text{ cm}$

Resultado: a) $V \approx 2410 \text{ cm}^3$; b) $h \approx 12,5 \text{ cm}$

EJERCICIO 35

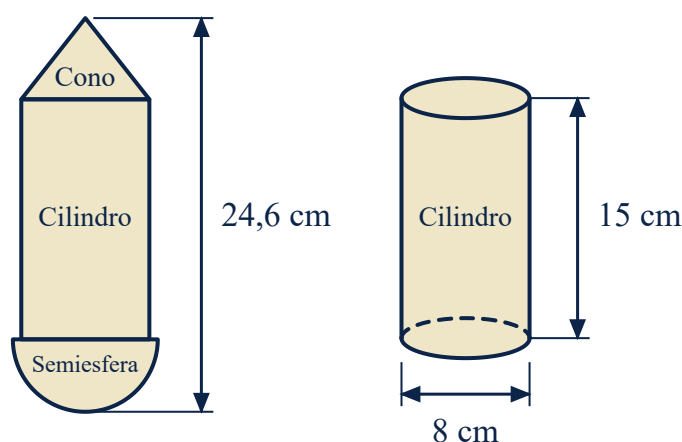
★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2015

Yutaka construye un cohete de juguete. Consta de tres partes sólidas diferenciadas: un cono, un cilindro y una semiesfera.

Este juguete aparece representado en la siguiente figura bidimensional.

El cilindro también se muestra en una figura aparte.



El cilindro tiene una altura de 15 cm y un diámetro de 8 cm.

a) Halle el volumen del cilindro.

El cono tiene un diámetro de 8 cm y un volumen de 85 cm^3 .

b) Halle la altura del cono.

El cohete de juguete tiene una altura total de 24,6 cm.

c) Halle el volumen de la semiesfera.

Yutaka decide pintar el cono de su cohete de juguete.

d) Calcule el área lateral del cono.

Dé la respuesta redondeando al número entero de cm^2 más próximo.

a) El diámetro es 8 cm, luego el radio es 4 cm:

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 4^2 \cdot 15 = 240\pi = 753,98 \dots \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V \approx 754 \text{ cm}^3$

b) El cono tiene radio 4 cm y volumen 85 cm^3 :

$$85 = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 85}{16\pi} = 5,073 \dots \text{ cm.}$$

Resultado: $h \approx 5,07 \text{ cm}$

c) La altura total es la suma de las alturas de las tres piezas, así que la altura de la semiesfera (que es su radio R) es:

$$R = 24,6 - 15 - 5,073 \dots = 4,527 \dots \text{ cm.}$$

El volumen de una semiesfera es la mitad del de la esfera:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi (4,527 \dots)^3 = 194,3 \dots \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V \approx 194 \text{ cm}^3$

d) El área lateral de un cono es $\pi r l$, donde l es la generatriz, que por Pitágoras (radio 4 cm y altura 5,073... cm) vale:

$$l = \sqrt{4^2 + 5,073 \dots^2} = 6,457 \dots \text{ cm}.$$

$$A = \pi \cdot 4 \cdot 6,457 \dots = 81,18 \dots \text{ cm}^2 \approx 81 \text{ cm}^2.$$

Resultado: a) 754 cm^3 ; b) 5,07 cm; c) 194 cm^3 ; d) 81 cm^2

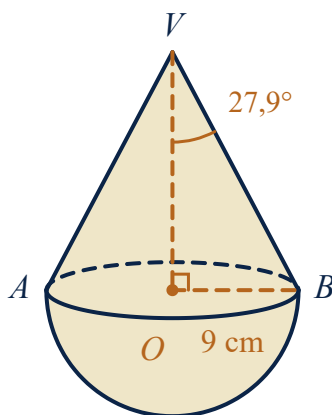
EJERCICIO 36

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2014

Un juguete de madera para niños consta de una semiesfera, de 9 cm de radio, unida a un cono con el mismo radio base. O es el centro de la base del cono y V está verticalmente sobre O .

El ángulo $OV B$ es $27,9^\circ$



- Calcule OV , la altura del cono.
- Calcule el volumen de madera que se usó para hacer el juguete.

a) El triángulo VOB tiene un ángulo recto en O , con $OB = 9 \text{ cm}$ (radio) y ángulo $\widehat{OV B} = 27,9^\circ$. El lado OB es el cateto opuesto a ese ángulo y OV el adyacente:

$$\tan 27,9^\circ = \frac{9}{OV} \Rightarrow OV = \frac{9}{\tan 27,9^\circ} = 16,998 \dots \approx 17 \text{ cm}.$$

Resultado: $OV \approx 17 \text{ cm}$

b) El juguete es un cono más una semiesfera, ambos de radio 9 cm.

$$1. \text{ Cono: } V_{cono} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 9^2 \cdot 17 = 1441,9 \dots \text{ cm}^3.$$

$$2. \text{ Semiesfera: } V_{sem} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 9^3 = 486\pi = 1526,8 \dots \text{ cm}^3.$$

$$3. \text{ Suma: } V \approx 2968,6 \dots \text{ cm}^3 \approx 2970 \text{ cm}^3 \text{ (tres cifras significativas).}$$

Resultado: a) $OV \approx 17 \text{ cm}$; b) $V \approx 2970 \text{ cm}^3$

EJERCICIO 37

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2014

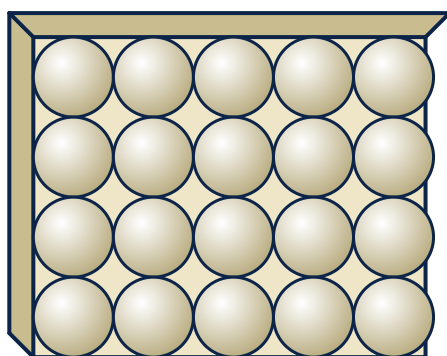
Se venden bombones con forma de esfera en cajas de 20.

Cada bombón tiene un radio de 1 cm.

- Halle el volumen de un bombón.
- Escriba el volumen de 20 bombones.

La figura muestra la caja de bombones vista desde arriba.

Los 20 bombones encajan a la perfección en la caja. Cada bombón está en contacto con los bombones que tiene a su alrededor o con el borde de la caja.



- Calcule el volumen de la caja.
- Calcule el volumen del espacio vacío que queda en la caja.

- El volumen de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Con $r = 1$ cm:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4\pi}{3} \approx 4,19 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $4,19 \text{ cm}^3$

- Multiplicamos por 20 (sin redondear el volumen de un bombón):

$$20 \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{80\pi}{3} \approx 83,8 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $83,8 \text{ cm}^3$

c)

- Cada bombón tiene 2 cm de diámetro. Como los bombones se tocan entre sí y con los bordes, las dimensiones de la caja son múltiplos del diámetro.
- Hay 5 bombones en una fila y 4 en una columna, así que la caja mide $5 \cdot 2 = 10$ cm de largo y $4 \cdot 2 = 8$ cm de ancho.
- Los bombones están en una sola capa, de modo que la altura de la caja es el diámetro: 2 cm.
- Volumen de la caja: $10 \cdot 8 \cdot 2 = 160 \text{ cm}^3$.

Resultado: 160 cm^3

- El espacio vacío es el volumen de la caja menos el de los 20 bombones:

$$160 - \frac{80\pi}{3} \approx 160 - 83,8 = 76,2 \text{ cm}^3.$$

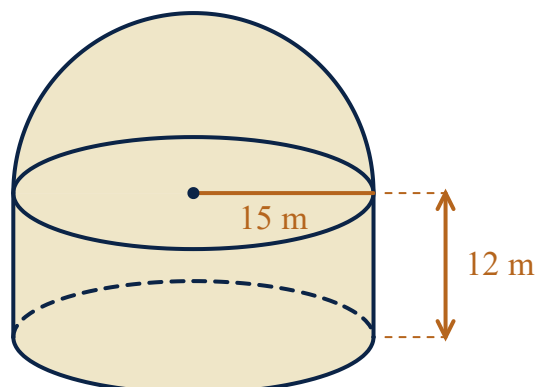
Resultado: a) $4,19 \text{ cm}^3$; b) $83,8 \text{ cm}^3$; c) 160 cm^3 ; d) $76,2 \text{ cm}^3$

EJERCICIO 38

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

Se construye un observatorio en forma de cilindro con un techo hemisférico en la parte superior como se muestra en el diagrama. La altura del cilindro es de 12 m y su radio es de 15 m.



a) Calcule el volumen del observatorio.

Se pintará el techo semiesférico.

b) Calcule el área que se va a pintar.

a) El volumen es el del cilindro más el de la semiesfera, ambos de radio 15 m:

$$1. \text{ Cilindro: } \pi r^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 12 = 2700\pi \text{ m}^3.$$

$$2. \text{ Semiesfera: } \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 15^3 = 2250\pi \text{ m}^3.$$

$$3. \text{ Total: } 2700\pi + 2250\pi = 4950\pi = 15\,550,9 \dots \approx 15\,600 \text{ m}^3.$$

Resultado: 15 600 m³

b) El techo es media superficie esférica: el área de una esfera es $4\pi r^2$, así que

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi \cdot 15^2 = 450\pi = 1413,7 \dots \approx 1410 \text{ m}^2.$$

Resultado: a) 15 600 m³; b) 1410 m²

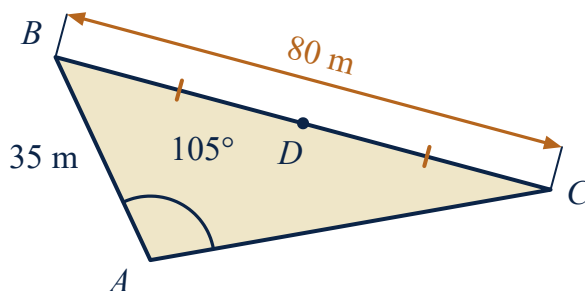
EJERCICIO 39

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2009

Un agricultor tiene un campo triangular, ABC , como se muestra en el diagrama.

$AB = 35$ m, $BC = 80$ m y $\widehat{BAC} = 105^\circ$, y D es el punto medio de BC .



a) Encuentre el tamaño de $\widehat{BCA}$.

b) Calcule la longitud de AD .

El agricultor quiere construir una cerca alrededor de ABD .

c) Calcule la longitud total de la cerca.

d) El agricultor paga 802,50 USD por la cerca. Calcule el costo por metro.

e) Calcule el área del triángulo ABD .

f) Se retira una capa de tierra de 3 cm de espesor de ABD . Encuentre el volumen retirado en metros cúbicos.

a) Teorema del seno en ABC : el lado $BC = 80$ es opuesto al ángulo de 105° y el lado $AB = 35$ es opuesto a $\widehat{C}$:

$$\frac{\sin \widehat{C}}{35} = \frac{\sin 105^\circ}{80} \Rightarrow \sin \widehat{C} \approx 0,4226 \Rightarrow \widehat{BCA} \approx 25,0^\circ.$$

(El ángulo es agudo porque ya hay un ángulo obtuso de 105° en el triángulo.)

Resultado: $\widehat{BCA} \approx 25,0^\circ$

b)

1. El ángulo en B es $\widehat{ABC} = 180^\circ - 105^\circ - 25,0^\circ = 50,0^\circ$.

2. D es el punto medio de BC , luego $BD = 40$ m.

3. Teorema del coseno en el triángulo ABD :

$$AD^2 = 35^2 + 40^2 - 2 \cdot 35 \cdot 40 \cos 50^\circ \approx 1025,2 \Rightarrow AD \approx 32,0 \text{ m.}$$

Resultado: $AD \approx 32,0$ m

c) La cerca rodea el triángulo ABD :

$$AB + BD + AD = 35 + 40 + 32,02 \approx 107 \text{ m.}$$

Resultado: longitud de la cerca ≈ 107 m

d) Costo por metro = $\frac{802,50}{107,02} \approx 7,50$ USD.

Resultado: 7,50 USD por metro

e) Con los lados $AB = 35$ y $BD = 40$ y el ángulo $B = 50^\circ$ entre ellos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 40 \cdot \sin 50^\circ \approx 536 \text{ m}^2.$$

Resultado: área de $ABD \approx 536 \text{ m}^2$

f) Espesor: $3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$. Volumen = área por espesor:

$$V = 536,24 \cdot 0,03 \approx 16,1 \text{ m}^3.$$

Resultado: a) $25,0^\circ$; b) $32,0 \text{ m}$; c) 107 m ; d) $7,50 \text{ USD por metro}$; e) 536 m^2 ; f) $16,1 \text{ m}^3$

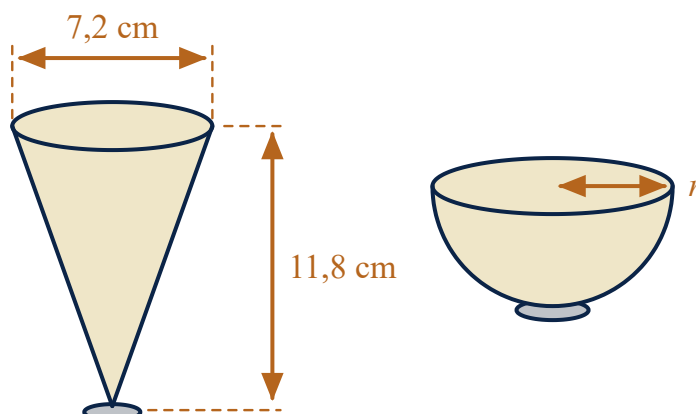
EJERCICIO 40

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2017

Un restaurante sirve los postres en copas que tienen forma de cono o forma de semiesfera.

Las copas con forma de cono tienen un diámetro de 7,2 cm y una altura de 11,8 cm, tal y como se muestra en la figura.



- a) Muestre que el volumen de una copa con forma de cono es igual a 160 cm^3 , redondeando a 3 cifras significativas.

El volumen de una copa con forma de semiesfera es igual a 225 cm^3 .

- b) Calcule el radio, r , de una de estas copas con forma de semiesfera.

El restaurante ofrece dos tipos de postre.

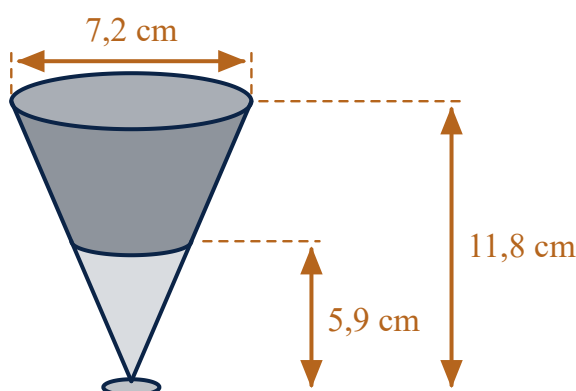
El postre normal es una copa con forma de semiesfera completamente llena de mousse de chocolate.

El costo, para el restaurante, del mousse de chocolate para un postre normal es \$1,89.

- c) Halle el costo de 100 cm^3 de mousse de chocolate.

El postre especial es una copa con forma de cono que se rellena con dos ingredientes.

Primero se rellena de pasta de naranja hasta la mitad de la altura y luego, el volumen restante se rellena de mousse de chocolate.



- d) Muestre que en cada postre especial hay 20 cm^3 de pasta de naranja.

El costo, para el restaurante, de 100 cm^3 de pasta de naranja es \$7,42.

- e) Halle el costo total de los ingredientes que se utilizan en un postre especial.

El chef del restaurante prepara 50 postres; x postres normales e y postres especiales.

El costo de los ingredientes para los 50 postres es igual a \$111,44.

f) Halle el valor de x .

a) El cono tiene diámetro 7,2 cm, luego radio 3,6 cm, y altura 11,8 cm:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3,6^2 \cdot 11,8 \approx 160,1 \approx 160 \text{ cm}^3.$$

b) El volumen de la semiesfera es la mitad del de la esfera:

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 225 \Rightarrow r^3 = \frac{3 \cdot 225}{2\pi} \approx 107,43 \Rightarrow r \approx 4,75 \text{ cm}.$$

Resultado: $r \approx 4,75 \text{ cm}$

c) Un postre normal lleva 225 cm³ de mousse y cuesta \$1,89. Por una regla de tres:

$$\frac{1,89}{225} \cdot 100 = 0,84.$$

Resultado: \$0,84

d) La pasta de naranja forma un cono pequeño de altura 5,9 cm (la mitad). Es semejante al cono grande con razón $\frac{1}{2}$, así que su radio es 1,8 cm:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 1,8^2 \cdot 5,9 \approx 20,02 \approx 20 \text{ cm}^3.$$

(Equivale a $\frac{160,1}{2^3} \approx 20,0$, porque el volumen se divide entre 2³.)

e)

1. Volumen de pasta de naranja: 20,02 cm³. Su costo: $20,02 \cdot \frac{7,42}{100} \approx 1,485$.
2. Volumen de mousse: $160,15 - 20,02 \approx 140,13 \text{ cm}^3$. Su costo, con \$0,84 por cada 100 cm³: $140,13 \cdot 0,0084 \approx 1,177$.
3. Costo total: $1,485 + 1,177 \approx 2,66$.

Resultado: \$2,66

f)

1. Hay 50 postres: $x + y = 50$.
2. Costo total: $1,89x + 2,66y = 111,44$.
3. Sustituimos $y = 50 - x$: $1,89x + 2,66(50 - x) = 111,44 \Rightarrow 133 - 0,77x = 111,44$.
4. Despejamos: $x = \frac{133 - 111,44}{0,77} = \frac{21,56}{0,77} = 28$ (y por tanto $y = 22$).

Resultado: $x = 28$

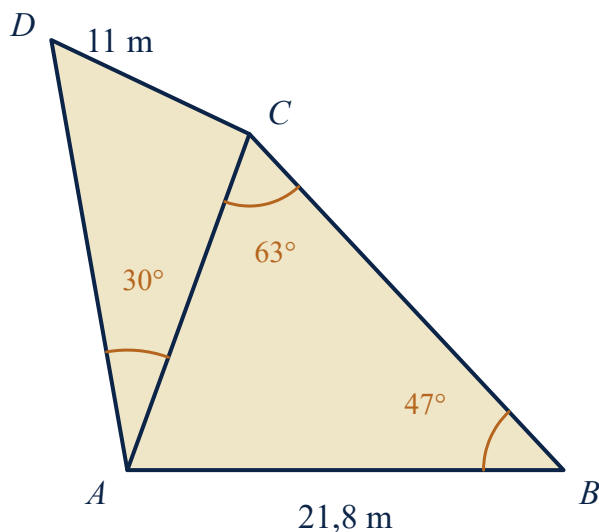
Resultado: a) $V \approx 160 \text{ cm}^3$; b) $r \approx 4,75 \text{ cm}$; c) \$0,84; d) $V \approx 20 \text{ cm}^3$; e) \$2,66; f) $x = 28$

EJERCICIO 41

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 2016 TZ2

Un parque infantil, al verlo desde arriba, tiene forma de un cuadrilátero, $ABCD$, donde $AB = 21,8$ m y $CD = 11$ m. Se han medido tres de los ángulos internos: el ángulo $ABC = 47^\circ$, el ángulo $ACB = 63^\circ$ y el ángulo $CAD = 30^\circ$. Toda esta información aparece representada en la siguiente figura.



- a) Calcule la distancia AC .
- b) Calcule el ángulo ADC .

En C hay un árbol que es perpendicular al suelo. El ángulo de elevación que hay desde D hasta la copa del árbol es igual a 35° .

- c) Calcule la altura del árbol.

Chavi estima que la altura del árbol es igual a 6 m.

- d) Calcule el porcentaje de error de la estimación de Chavi.

Chavi celebra su cumpleaños con sus amigos en ese parque. Su madre trae una botella de 2 litros de zumo de naranja para que lo compartan entre todos. También trae vasos de plástico con forma de cono. Cada vaso tiene una altura vertical de 10 cm y la parte de arriba del vaso tiene un diámetro de 6 cm.

- e) Calcule el volumen de uno de esos vasos de plástico.
- f) Calcule el número máximo de vasos que se pueden llenar completamente con esa botella de 2 litros de zumo de naranja.

a) En el triángulo ABC conocemos dos ángulos, así que el tercero es $\widehat{BAC} = 180^\circ - 47^\circ - 63^\circ = 70^\circ$. El lado AC está frente al ángulo en B y el lado conocido AB está frente al ángulo en C . Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{AC}{\sin 47^\circ} = \frac{AB}{\sin 63^\circ} \Rightarrow AC = \frac{21,8 \sin 47^\circ}{\sin 63^\circ} = 17,89 \dots$$

Resultado: $AC \approx 17,9$ m

b) Trabajamos ahora en el triángulo ACD , del que conocemos AC , el lado $CD = 11$ m y el ángulo $\widehat{CAD} = 30^\circ$ (opuesto a CD). Teorema del seno:

$$\frac{\sin \widehat{ADC}}{AC} = \frac{\sin 30^\circ}{CD} \Rightarrow \sin \widehat{ADC} = \frac{17,89 \dots \cdot 0,5}{11} = 0,8133 \dots$$

Con la calculadora, $\widehat{ADC} = 54,4^\circ$ (la otra solución, $125,6^\circ$, no sirve porque en la figura el ángulo en D es agudo).

Resultado: $\widehat{ADC} \approx 54,4^\circ$

c) El árbol está en C , es vertical y D está a la distancia horizontal $CD = 11$ m. El triángulo formado por D , C y la copa tiene un ángulo recto en C , y el ángulo de elevación en D es 35° :

$$\tan 35^\circ = \frac{h}{11} \Rightarrow h = 11 \tan 35^\circ = 7,702 \dots$$

Resultado: $h \approx 7,70$ m

d) El porcentaje de error es la diferencia entre el valor estimado y el real, dividida por el valor real, por 100:

$$\text{error} = \left| \frac{6 - 7,702 \dots}{7,702 \dots} \right| \cdot 100 = 22,1 \%$$

Resultado: 22,1 %

e) El vaso es un cono de radio $r = 3$ cm y altura $h = 10$ cm:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 30\pi = 94,2 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V \approx 94,2 \text{ cm}^3$

f) Pasamos los litros a centímetros cúbicos: $2 \text{ L} = 2000 \text{ cm}^3$. Dividimos entre el volumen de un vaso:

$$\frac{2000}{30\pi} = 21,2 \dots$$

Solo se pueden llenar vasos completos, así que el máximo es 21.

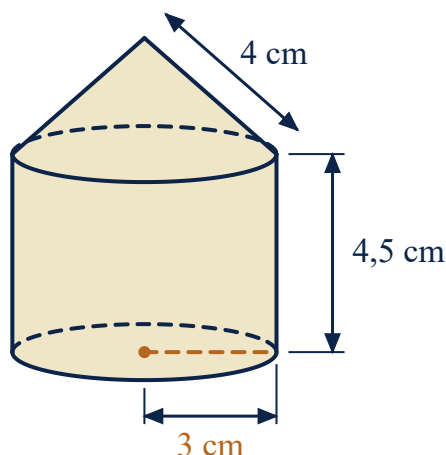
Resultado: a) $AC \approx 17,9$ m; b) $\widehat{ADC} \approx 54,4^\circ$; c) 7,70 m; d) 22,1 %; e) $94,2 \text{ cm}^3$; f) 21 vasos

EJERCICIO 42

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2015

El siguiente diagrama muestra un frasco de perfume compuesto por un cilindro y un cono.



El radio tanto del cilindro como de la base del cono es de 3 cm.

La altura del cilindro es de 4,5 cm.

La altura inclinada del cono es de 4 cm.

a) (i) Demuestre que la altura vertical del cono es 2,65 cm aproximado a tres cifras significativas.

(ii) Calcule el volumen del frasco de perfume.

El frasco contiene 125 cm^3 de perfume. La botella no está llena y todo el perfume está en la parte del cilindro.

b) Encuentre la altura del perfume en la botella.

Temi hace unas manualidades con frascos de perfume, como el de arriba, una vez que están vacíos.

Temi quiere saber la superficie de una botella de perfume.

c) Encuentre el área de superficie total del frasco de perfume.

Temi cubre los frascos de perfume con una pintura que cuesta 3 rand sudafricanos (ZAR) por mililitro. Un mililitro de esta pintura cubre un área de 7 cm^2 .

d) Calcule el costo, en ZAR, de pintar el frasco de perfume.

Dé su respuesta correcta con dos decimales.

Temi vende sus frascos de perfume en una feria de artesanía por 325 ZAR cada uno.

Dominique de Francia compra uno y quiere saber cuánto ha gastado, en euros (EUR).

El tipo de cambio es 1 EUR = 13,03 ZAR.

e) Encuentre el precio, en EUR, que Dominique pagó por el frasco de perfume.

Dé su respuesta con dos lugares decimales.

a) (i) La altura vertical h , el radio de la base (3 cm) y la altura inclinada (4 cm, la generatriz) forman un triángulo rectángulo con hipotenusa 4. Por Pitágoras:

$$h = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} = 2,6457 \dots \approx 2,65 \text{ cm.}$$

(ii) El frasco es un cilindro más un cono.

$$1. \text{ Cilindro: } V_{cil} = \pi r^2 H = \pi \cdot 3^2 \cdot 4,5 = 40,5\pi = 127,23 \dots \text{ cm}^3.$$

$$2. \text{ Cono: } V_{\text{cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt{7} = 3\pi\sqrt{7} = 24,93 \dots \text{ cm}^3.$$

$$3. \text{ Suma: } V = 127,23 \dots + 24,93 \dots = 152,17 \dots \text{ cm}^3.$$

b) El perfume ocupa un cilindro del mismo radio y altura x :

$$\pi \cdot 3^2 \cdot x = 125 \Rightarrow x = \frac{125}{9\pi} = 4,42 \dots \text{ cm}.$$

c) La superficie total es la base inferior del cilindro, más su superficie lateral, más la superficie lateral del cono (la tapa del cilindro queda tapada por el cono):

$$1. \text{ Base del cilindro: } \pi r^2 = 9\pi = 28,27 \dots \text{ cm}^2.$$

$$2. \text{ Lateral del cilindro: } 2\pi r H = 2\pi \cdot 3 \cdot 4,5 = 27\pi = 84,82 \dots \text{ cm}^2.$$

$$3. \text{ Lateral del cono: } \pi r l = \pi \cdot 3 \cdot 4 = 12\pi = 37,69 \dots \text{ cm}^2.$$

$$4. \text{ Suma: } 9\pi + 27\pi + 12\pi = 48\pi = 150,79 \dots \text{ cm}^2.$$

d) Cada mililitro cubre 7 cm^2 y cuesta 3 ZAR.

$$1. \text{ Mililitros necesarios: } \frac{48\pi}{7} = 21,54 \dots \text{ mL}.$$

$$2. \text{ Costo: } \frac{48\pi}{7} \cdot 3 = 64,627 \dots \approx 64,63 \text{ ZAR}.$$

e) Pasamos de ZAR a EUR dividiendo entre el tipo de cambio:

$$\frac{325}{13,03} = 24,94 \dots \text{ EUR}.$$

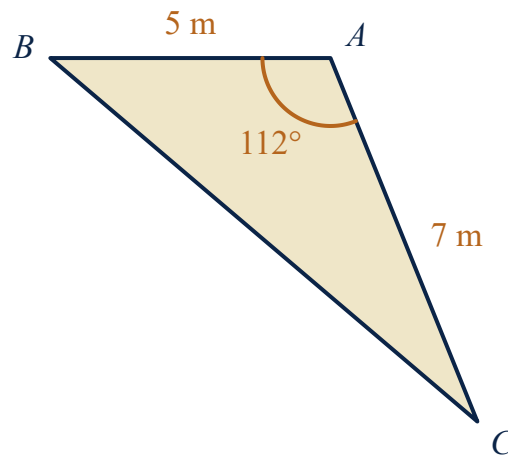
Resultado: a) (i) $h = \sqrt{7} \approx 2,65 \text{ cm}$; (ii) $V \approx 152 \text{ cm}^3$; b) $h \approx 4,42 \text{ cm}$; c) $A \approx 151 \text{ cm}^2$; d) 64,63 ZAR; e) 24,94 EUR

EJERCICIO 43

★★★ Difícil

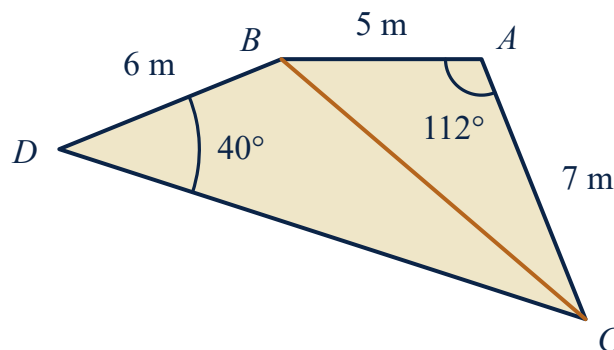
IB · P2 TZ0 Noviembre 2012

Un contratista está construyendo una casa. Primero marca tres puntos A , B y C en el terreno tal que $AB = 5$ m, $AC = 7$ m y ángulo $\widehat{BAC} = 112^\circ$.



a) Encuentre la longitud de BC .

A continuación, marca un cuarto punto, D , en el suelo a una distancia de 6 m de B , de modo que el ángulo BDC es 40° .



b) Encuentre el tamaño del ángulo DBC .

c) Encuentre el área del cuadrilátero $ABDC$.

El contratista excava y remueve el suelo debajo del cuadrilátero $ABDC$ a una profundidad de 50 cm para los cimientos de la casa.

d) Encuentre el volumen de suelo removido. Dé su respuesta en m^3 .

Para transportar la tierra removida, el contratista utiliza tambores cilíndricos con un diámetro de 30 cm y una altura de 40 cm.

e) i) Encuentre el volumen de un tambor. Dé su respuesta en m^3 .

(ii) Encuentre el número mínimo de tambores necesarios para transportar la tierra removida.

a) Aplicamos el teorema del coseno al triángulo ABC , que conocemos por dos lados y el ángulo que forman:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos 112^\circ = 25 + 49 - 70 \cos 112^\circ \approx 100,22.$$

Luego $BC \approx 10,01$ m, es decir, 10,0 m.

Resultado: $BC \approx 10,0$ m

b)

1. En el triángulo BDC conocemos $BD = 6$, $BC \approx 10,011$ y el ángulo $\widehat{D} = 40^\circ$ (opuesto a BC). Con el teorema del seno calculamos el ángulo $\widehat{C}$, opuesto a BD :

$$\frac{\sin \widehat{C}}{6} = \frac{\sin 40^\circ}{10,011} \Rightarrow \sin \widehat{C} \approx 0,3853 \Rightarrow \widehat{C} \approx 22,66^\circ.$$

2. Como $BD < BC$, el ángulo opuesto a BD es menor que el opuesto a BC (40°), así que $\widehat{C}$ es agudo y la solución anterior es la única.
3. Los ángulos de un triángulo suman 180° :

$$\widehat{DBC} = 180^\circ - 40^\circ - 22,66^\circ \approx 117,3^\circ.$$

Resultado: $\widehat{DBC} \approx 117,3^\circ$

c)

1. La diagonal BC divide el cuadrilátero en los triángulos ABC y BDC .
2. Área de ABC : $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sin 112^\circ \approx 16,23 \text{ m}^2$.
3. Área de BDC : $\frac{1}{2} \cdot BD \cdot BC \cdot \sin \widehat{DBC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10,011 \cdot \sin 117,34^\circ \approx 26,68 \text{ m}^2$.
4. Suma: $16,23 + 26,68 \approx 42,9 \text{ m}^2$.

Resultado: área de $ABDC \approx 42,9 \text{ m}^2$

- d) Pasamos la profundidad a metros: $50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$. El suelo removido es un prisma de base $ABDC$:

$$V = 42,904 \cdot 0,5 \approx 21,5 \text{ m}^3.$$

Resultado: $V \approx 21,5 \text{ m}^3$

e)

1. Un tambor es un cilindro de radio $r = 0,15 \text{ m}$ y altura $h = 0,4 \text{ m}$:

$$V_{\text{tambor}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 0,15^2 \cdot 0,4 \approx 0,0283 \text{ m}^3.$$

2. Número de tambores: $\frac{21,452}{0,028274} \approx 758,7$. Como no se pueden usar fracciones de tambor, hay que redondear hacia arriba: 759.

Resultado: a) $10,0 \text{ m}$; b) $117,3^\circ$; c) $42,9 \text{ m}^2$; d) $21,5 \text{ m}^3$; e) i) $0,0283 \text{ m}^3$; ii) 759 tambores

EJERCICIO 44

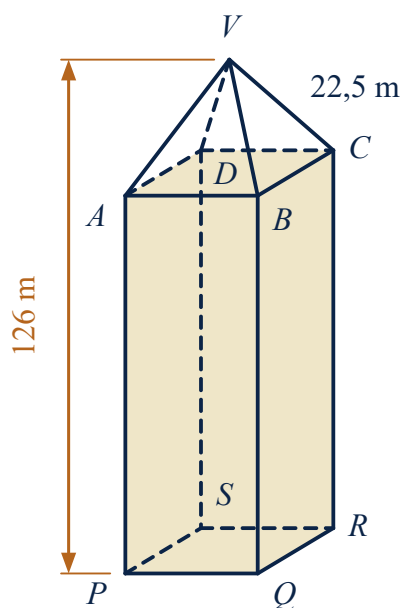
★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2010

El diagrama muestra una torre de oficinas de 126 metros de altura total. Consiste en una pirámide $VABCD$ de base cuadrada apoyada en la parte superior de un cuboide $ABCDPQRS$.

V está directamente sobre el centro de la base de la torre de oficinas.

La longitud del borde inclinado VC es de 22,5 metros y el ángulo que forma VC con la base $ABCD$ (ángulo VCA) es $53,1^\circ$.

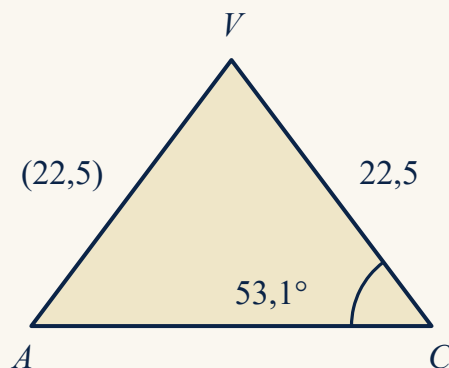


- i) Escriba la longitud de VA en metros.
- ii) Dibuje el triángulo VCA mostrando claramente la longitud de VC y el tamaño del ángulo VCA .
- b) Demuestre que la altura de la pirámide es 18,0 metros redondeando a 3 cifras significativas.
- c) Calcule la longitud de CA en metros.
- d) Demuestre que la longitud de BC es 19,1 metros aproximado a 3 cifras significativas.
- e) Calcule el volumen de la torre.

Para calcular el costo del aire acondicionado, los ingenieros deben estimar el peso del aire en la torre. Estiman que el 90 % del volumen de la torre está ocupado por aire y saben que 1 m^3 de aire pesa 1,2 kg.

- f) Calcule el peso del aire en la torre.

- a)
 - i) V está sobre el centro de la base, así que la pirámide es recta y sus aristas laterales son iguales: $VA = VC = 22,5 \text{ m}$.
 - ii) El triángulo VCA es isósceles (con $VA = VC$):



Resultado: $VA = 22,5$ m

b) La altura de la pirámide es el segmento que baja de V al centro M de la base, que es el punto medio de AC . En el triángulo rectángulo VMC (recto en M):

$$h = VM = VC \cdot \sin 53,1^\circ = 22,5 \cdot \sin 53,1^\circ \approx 17,99 \approx 18,0 \text{ m.}$$

Resultado: $h \approx 18,0$ m

c) En el mismo triángulo rectángulo, $MC = VC \cos 53,1^\circ$, y $CA = 2 MC$:

$$CA = 2 \cdot 22,5 \cdot \cos 53,1^\circ \approx 27,02 \approx 27,0 \text{ m.}$$

Resultado: $CA \approx 27,0$ m

d) AC es la diagonal del cuadrado $ABCD$, y la diagonal de un cuadrado de lado s mide $s\sqrt{2}$. Entonces:

$$BC = \frac{CA}{\sqrt{2}} = \frac{27,02}{\sqrt{2}} \approx 19,1 \text{ m.}$$

Resultado: $BC \approx 19,1$ m

e)

1. La altura del cuboide es la altura total menos la de la pirámide: $126 - 18 = 108$ m.

2. Área de la base: $BC^2 = \frac{CA^2}{2} \approx 365,0 \text{ m}^2$.

3. Volumen del cuboide: $365,0 \cdot 108 \approx 39\,420 \text{ m}^3$.

4. Volumen de la pirámide: $\frac{1}{3} \cdot 365,0 \cdot 18 \approx 2190 \text{ m}^3$.

5. Suma: $V \approx 39\,420 + 2190 \approx 41\,600 \text{ m}^3$ (3 cifras significativas).

Resultado: $V \approx 41\,600 \text{ m}^3$

f) El 90 % del volumen es aire, y cada metro cúbico pesa 1,2 kg:

$$0,9 \cdot 41\,613 \cdot 1,2 \approx 44\,900 \text{ kg.}$$

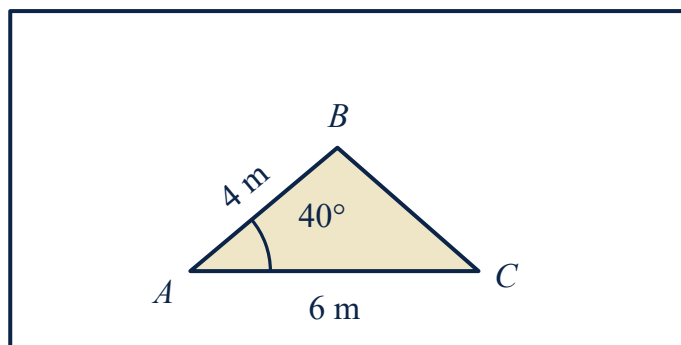
Resultado: a) i) 22,5 m; ii) triángulo isósceles con lados 22,5 y ángulo $53,1^\circ$; b) 18,0 m; c) 27,0 m; d) 19,1 m; e) 41 600 m³; f) 44 900 kg

EJERCICIO 45

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2010

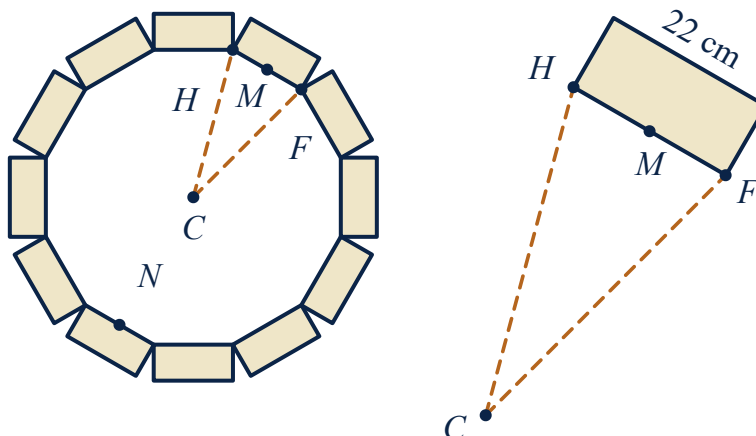
- a) Un jardinero tiene que enladrillar una superficie rectangular de 15,4 metros de largo por 5,5 metros de ancho, utilizando ladrillos rectangulares. Cada ladrillo mide 22 cm de largo y 11 cm de ancho.
- (i) Calcule el área total que hay que enladrillar. Dé su respuesta en cm^2 .
- (ii) Escriba cuál es el área de cada ladrillo.
- (iii) Halle cuántos ladrillos se necesitan para enladrillar toda la superficie.
- b) El jardinero decide dejar una zona triangular ABC sin enladrillar, para poner ahí césped. Esta zona se encuentra en el centro de la superficie rectangular, tal y como se muestra en el siguiente diagrama.



La distancia AB es igual a 4 metros, AC mide 6 metros y el ángulo BAC mide 40° .

- (i) Halle la longitud de BC .
- (ii) A partir de lo anterior, escriba cuánto mide el perímetro de la zona triangular de césped.
- (iii) Calcule el área de la zona de césped.
- (iv) Halle qué porcentaje de la superficie rectangular tendrá césped.
- c) En otro jardín, se utilizan doce de esos mismos ladrillos rectangulares para construir un borde alrededor de un pequeño macizo de flores, tal y como se muestra en la figura.

FH es la longitud de cada ladrillo, y C es el centro del macizo de flores. M y N son los puntos medios de los lados largos de los ladrillos que se encuentran en lados opuestos del macizo de flores.



- (i) Halle el valor del ángulo FCH .
- (ii) Calcule la distancia MN (de un lado a otro del macizo de flores, pasando por C).

El macizo de flores tiene un área de 5419 cm^2 . Está cubierto con una capa de tierra de 2,5 cm de espesor.

- d) Halle el volumen de tierra utilizado.

Se estima que 1 kilogramo de tierra ocupa 514 cm^3 .

e) Halle cuántos kilogramos de tierra son necesarios para utilizar para este macizo de flores.

a)

(i) Pasamos las medidas a centímetros: $15,4 \text{ m} = 1540 \text{ cm}$ y $5,5 \text{ m} = 550 \text{ cm}$. Área = $1540 \cdot 550 = 847\,000 \text{ cm}^2$ (que son $84,7 \text{ m}^2$).

(ii) Área de un ladrillo: $22 \cdot 11 = 242 \text{ cm}^2$ (es decir, $0,0242 \text{ m}^2$).

(iii) Número de ladrillos: $\frac{847\,000}{242} = 3500$.

Resultado: a) i) $847\,000 \text{ cm}^2$; ii) 242 cm^2 ; iii) 3500 ladrillos

b)

(i) Teorema del coseno en ABC con el ángulo $A = 40^\circ$ entre AB y AC :

$$BC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 40^\circ = 52 - 48 \cos 40^\circ \approx 15,23 \Rightarrow BC \approx 3,90 \text{ m}.$$

(ii) Perímetro: $AB + AC + BC = 4 + 6 + 3,90 \approx 13,9 \text{ m}$.

(iii) Área: $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 40^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 40^\circ \approx 7,71 \text{ m}^2$.

(iv) Porcentaje: $\frac{7,7135}{84,7} \cdot 100 \approx 9,11 \%$.

Resultado: b) i) $3,90 \text{ m}$; ii) $13,9 \text{ m}$; iii) $7,71 \text{ m}^2$; iv) $9,11 \%$

c)

(i) Con doce ladrillos iguales alrededor de C , los ángulos centrales son iguales y suman 360° :

$$\widehat{FCH} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

(ii) El triángulo CHF es isósceles ($CH = CF$) y M es el punto medio de HF , así que CM es la altura y la bisectriz del ángulo en C :

$$1. \widehat{HCM} = 15^\circ \text{ y } HM = \frac{22}{2} = 11 \text{ cm}.$$

$$2. \text{ En el triángulo rectángulo } CMH: \tan 15^\circ = \frac{HM}{CM}, \text{ luego } CM = \frac{11}{\tan 15^\circ} \approx 41,05 \text{ cm}.$$

3. N es el punto medio del ladrillo opuesto, y como hay doce ladrillos (número par), N está en la prolongación de MC y $CN = CM$. Entonces

$$MN = 2 \cdot CM \approx 82,1 \text{ cm}.$$

Resultado: c) i) 30° ; ii) $82,1 \text{ cm}$

d) El volumen de la capa de tierra es área por espesor:

$$V = 5419 \cdot 2,5 = 13\,547,5 \approx 13\,500 \text{ cm}^3.$$

Resultado: $V \approx 13\,500 \text{ cm}^3$

e) Si 1 kg ocupa 514 cm^3 :

$$\frac{13\,547,5}{514} \approx 26,4 \text{ kg}.$$

Resultado: a) i) $847\,000 \text{ cm}^2$; ii) 242 cm^2 ; iii) 3500 ladrillos; b) i) $3,90 \text{ m}$; ii) $13,9 \text{ m}$; iii) $7,71 \text{ m}^2$; iv) $9,11 \%$; c) i) 30° ; ii) $82,1 \text{ cm}$; d) $13\,500 \text{ cm}^3$; e) $26,4 \text{ kg}$

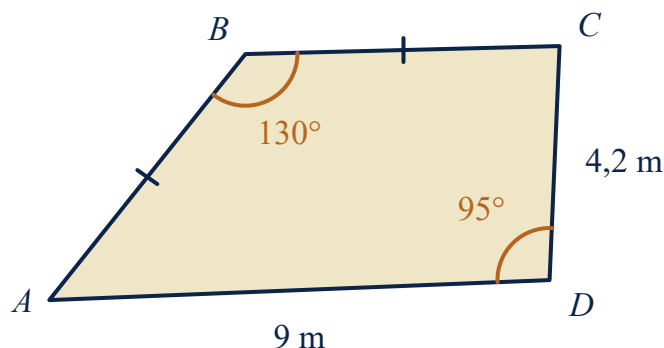
EJERCICIO 46

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2008

El cuadrilátero $ABCD$ que se muestra a continuación representa un arenero. AB y BC tienen la misma longitud. AD tiene una longitud de 9 m y CD tiene una longitud de 4,2 m.

Los ángulos ADC y ABC miden 95° y 130° respectivamente.



- Halle la longitud de AC .
- Escriba el valor del ángulo BCA .
 - Calcule la longitud de AB .
- Compruebe que el área del arenero es igual a $31,1 \text{ m}^2$ redondeando a 3 cifras significativas.

El arenero tiene forma de prisma. Sus aristas tienen una altura de 40 cm.

La arena ocupa un tercio del volumen del arenero.

- Calcule el volumen de arena que hay en el arenero.

a) En el triángulo ADC conocemos dos lados y el ángulo comprendido, así que usamos el teorema del coseno:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cos 95^\circ = 81 + 17,64 - 75,6 \cos 95^\circ \approx 105,23,$$

$$AC \approx 10,3 \text{ m}.$$

Resultado: $AC \approx 10,3 \text{ m}$

b) i) El triángulo ABC es isósceles ($AB = BC$), de modo que sus ángulos en A y en C son iguales:

$$\widehat{BCA} = \frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ.$$

(ii) Aplicamos el teorema del seno en ABC con $AC = 10,258$ (sin redondear):

$$\frac{AB}{\sin 25^\circ} = \frac{AC}{\sin 130^\circ} \Rightarrow AB = \frac{10,258 \sin 25^\circ}{\sin 130^\circ} \approx 5,66 \text{ m}.$$

Resultado: i) 25° ; ii) $AB \approx 5,66 \text{ m}$

c) El área del arenero es la suma de las áreas de los triángulos ADC y ABC :

$$A_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4,2 \cdot \sin 95^\circ \approx 18,83 \text{ m}^2,$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 130^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5,659^2 \cdot \sin 130^\circ \approx 12,27 \text{ m}^2.$$

$$A = 18,83 + 12,27 \approx 31,1 \text{ m}^2.$$

Resultado: $A \approx 31,1 \text{ m}^2$

d) La altura del prisma es 40 cm = 0,4 m. El volumen del arenero es $V = A \cdot h = 31,095 \cdot 0,4 \approx 12,44 \text{ m}^3$ y la arena ocupa un tercio:

$$V_{\text{arena}} = \frac{1}{3} \cdot 31,095 \cdot 0,4 \approx 4,15 \text{ m}^3.$$

Resultado: a) 10,3 m; b) i) 25° ; ii) 5,66 m; c) $31,1 \text{ m}^2$; d) $4,15 \text{ m}^3$

Ángulos y distancias dentro de un sólido

EJERCICIO 47

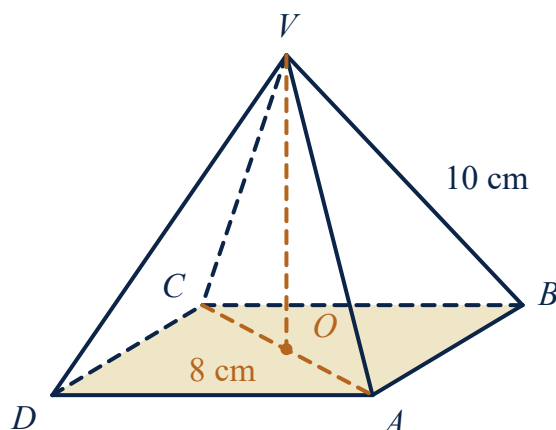
★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2015

En el siguiente diagrama, $ABCD$ es la base cuadrada de una pirámide recta con vértice V .

El centro de la base es O . La diagonal de la base, AC , mide 8 cm de largo.

Los bordes inclinados miden 10 cm de largo.



- Escriba la longitud de AO .
- Encuentre la medida del ángulo que forma la arista inclinada VA con la base de la pirámide.
- Usando lo anterior o por algún otro método, encuentre el área del triángulo CAV .

a) En un cuadrado las diagonales se cortan en su punto medio, que es el centro O :

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}.$$

Resultado: $AO = 4 \text{ cm}$

b) El ángulo que forma la arista VA con la base es el ángulo $\widehat{VAO}$, porque AO es la proyección de VA sobre la base. El triángulo VOA tiene un ángulo recto en O , con hipotenusa $VA = 10$ y cateto adyacente $AO = 4$:

$$\cos \widehat{VAO} = \frac{4}{10} \Rightarrow \widehat{VAO} = \cos^{-1}(0,4) = 66,4^\circ.$$

Resultado: $\widehat{VAO} \approx 66,4^\circ$

c) El triángulo CAV tiene base $CA = 8 \text{ cm}$ y su altura es VO (porque VO es perpendicular a AC).

1. Por Pitágoras en VOA : $VO = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84} = 9,165 \dots \text{ cm}$.

2. Área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{84} = 4\sqrt{84} = 36,66 \dots \text{ cm}^2.$$

(Comprobación con la fórmula del seno: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin \widehat{AVC}$, con $\widehat{AVC} = 2 \cdot 23,58^\circ$, da el mismo valor.)

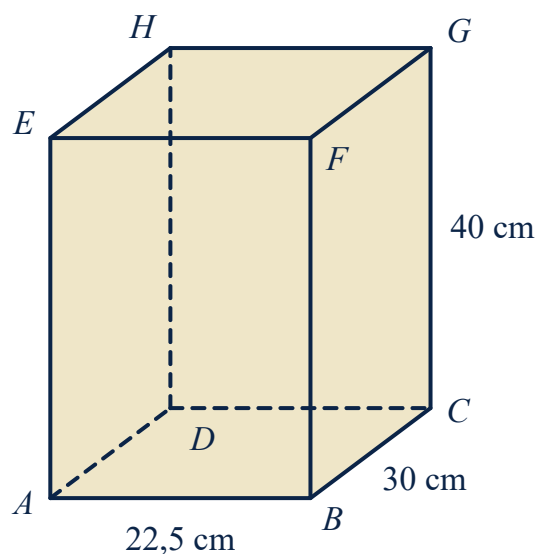
Resultado: a) $AO = 4 \text{ cm}$; b) $\widehat{VAO} \approx 66,4^\circ$; c) Área $\approx 36,7 \text{ cm}^2$

EJERCICIO 48

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2001

El diagrama muestra un cuboide de 22,5 cm por 40 cm por 30 cm.



- Calcule la longitud de $[AC]$.
- Calcule el tamaño de $\widehat{GAC}$.

a) AC es la diagonal del rectángulo de la base $ABCD$, de lados $AB = 22,5$ cm y $BC = 30$ cm. Por Pitágoras en el triángulo rectángulo ABC :

$$AC = \sqrt{22,5^2 + 30^2} = \sqrt{1406,25} = 37,5 \text{ cm.}$$

Resultado: $AC = 37,5$ cm

b) El triángulo GCA tiene un ángulo recto en C , porque la arista CG es perpendicular a la base. El ángulo $\widehat{GAC}$ tiene como cateto opuesto $CG = 40$ cm y como cateto adyacente $AC = 37,5$ cm:

$$\tan \widehat{GAC} = \frac{40}{37,5} \Rightarrow \widehat{GAC} = \tan^{-1} \left(\frac{40}{37,5} \right) = 46,8^\circ.$$

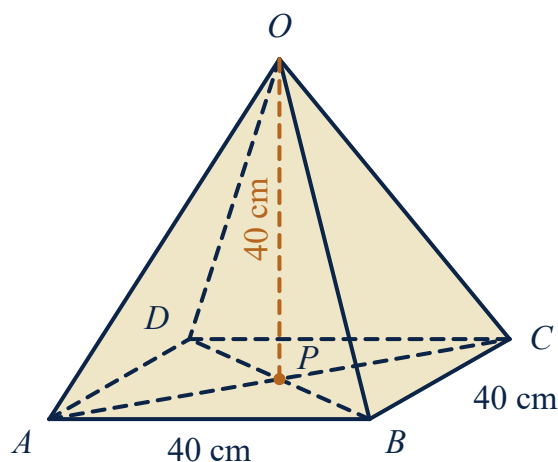
Resultado: a) $AC = 37,5$ cm; b) $\widehat{GAC} \approx 46,8^\circ$

EJERCICIO 49

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2009

La pirámide recta que se muestra en el diagrama tiene una base cuadrada con lados de 40 cm de longitud. La altura de la pirámide también es de 40 cm.



- Encuentre la longitud de OB .
- Encuentre el tamaño del ángulo OBP .

a)

- P es el centro de la base, así que PB es la mitad de la diagonal del cuadrado. La diagonal mide $40\sqrt{2}$, luego $PB = 20\sqrt{2} \approx 28,28$ cm.
- OP es perpendicular a la base, por lo que el triángulo OPB es rectángulo en P . Por Pitágoras:

$$OB = \sqrt{OP^2 + PB^2} = \sqrt{40^2 + (20\sqrt{2})^2} = \sqrt{1600 + 800} = \sqrt{2400} \approx 49,0 \text{ cm.}$$

Resultado: $OB \approx 49,0$ cm

b) En el triángulo rectángulo OPB :

$$\tan \widehat{OBP} = \frac{OP}{PB} = \frac{40}{20\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{OBP} = \arctan \sqrt{2} \approx 54,7^\circ.$$

Resultado: a) 49,0 cm; b) $54,7^\circ$

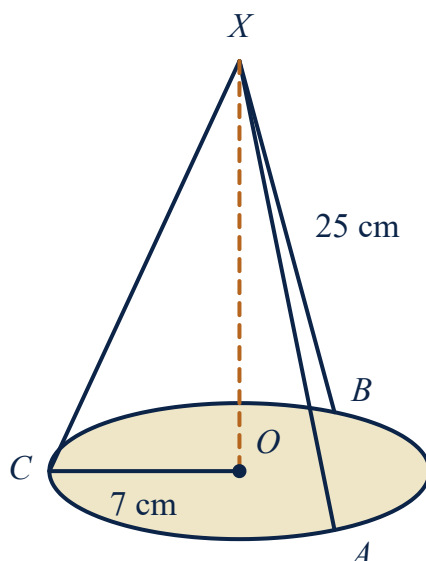
EJERCICIO 50

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2006

El siguiente diagrama muestra un juguete para niños que se compone de un aro circular, centro O , radio 7 cm. El aro está suspendido en un plano horizontal por tres hilos iguales XA , XB y XC .

Cada hilo tiene una longitud de 25 cm. Los puntos A , B y C están igualmente espaciados alrededor de la circunferencia del aro y X está verticalmente por encima del punto O .



- Calcule la longitud de XO .
- Encuentre el ángulo, en grados, entre cualquier cuerda y el plano horizontal.
- Escriba el tamaño del ángulo AOB .
- calcule la longitud de AB .
- Encuentre el ángulo entre las cuerdas XA y XB .

a) X está sobre O , así que XOC es un triángulo rectángulo en O con $OC = 7$ (radio) y $XC = 25$ (hilo):

$$XO = \sqrt{XC^2 - OC^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm.}$$

Resultado: $XO = 24$ cm

b) El ángulo entre un hilo y el plano horizontal es el que forma con su proyección sobre ese plano (OC), es decir, $\widehat{XCO}$:

$$\cos \widehat{XCO} = \frac{7}{25} \Rightarrow \widehat{XCO} \approx 73,7^\circ.$$

Resultado: $73,7^\circ$

c) Los puntos A , B y C están igualmente espaciados en la circunferencia, así que los tres ángulos centrales son iguales: $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$.

Resultado: $\widehat{AOB} = 120^\circ$

d) En el triángulo isósceles AOB ($OA = OB = 7$) por el teorema del coseno:

$$AB^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cos 120^\circ = 147 \Rightarrow AB = \sqrt{147} \approx 12,1 \text{ cm.}$$

Resultado: $AB \approx 12,1$ cm

e) En el triángulo isósceles AXB tenemos $XA = XB = 25$ y $AB = \sqrt{147}$. Por el teorema del coseno:

$$\cos \widehat{AXB} = \frac{25^2 + 25^2 - 147}{2 \cdot 25 \cdot 25} = \frac{1103}{1250} \Rightarrow \widehat{AXB} \approx 28,1^\circ.$$

(Equivalentemente, $\sin \frac{\widehat{AXB}}{2} = \frac{AB/2}{25}$.)

Resultado: a) 24 cm; b) $73,7^\circ$; c) 120° ; d) 12,1 cm; e) $28,1^\circ$

EJERCICIO 51

★★ Medio

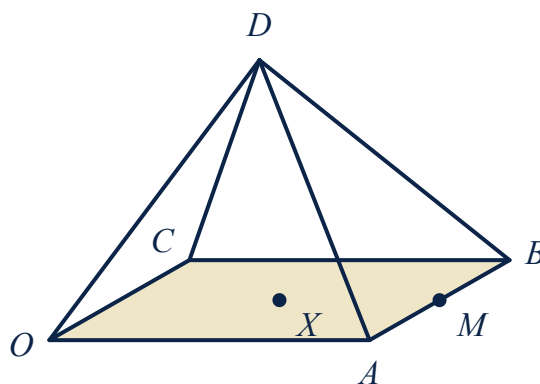
IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

$OABCD$ es una pirámide recta de base cuadrada de 4 cm de lado, tal como se muestra en la figura.

El vértice D se encuentra a una distancia de 3 unidades de X , el centro del cuadrado $OABC$.

M es el punto medio de AB .

- Halle la longitud de XM .
- Calcule la longitud de DM .
- Calcule el ángulo formado por la cara ABD y la base $OABC$.



- X es el centro del cuadrado de lado 4 y M es el punto medio del lado AB , así que XM es perpendicular a AB y mide la mitad del lado: $XM = 2$ cm.

Resultado: $XM = 2$ cm

- DX es perpendicular a la base, por lo que DXM es rectángulo en X con $DX = 3$ y $XM = 2$:

$$DM = \sqrt{DX^2 + XM^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,61 \text{ cm.}$$

Resultado: $DM \approx 3,61$ cm

- El ángulo entre la cara ABD y la base es $\widehat{DMX}$, pues DM y XM son perpendiculares a la arista común AB :

$$\tan \widehat{DMX} = \frac{DX}{XM} = \frac{3}{2} \Rightarrow \widehat{DMX} \approx 56,3^\circ.$$

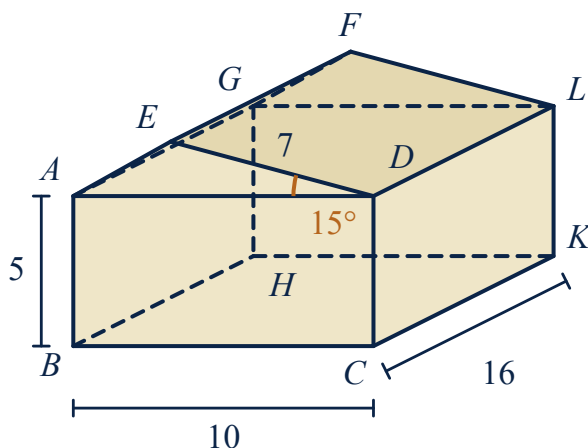
Resultado: a) 2 cm; b) 3,61 cm; c) $56,3^\circ$

EJERCICIO 52

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2018

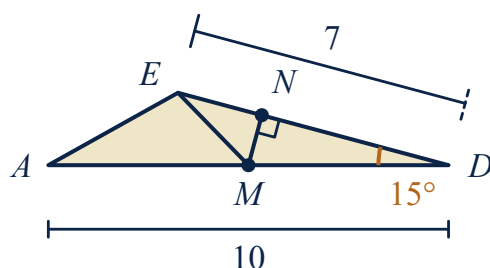
Farmer Brown ha construido un nuevo granero, en terreno horizontal, en su granja. El granero tiene una base cuboide y un techo de prisma triangular, como se muestra en el diagrama.



El cuboide tiene un ancho de 10 m, una longitud de 16 m y una altura de 5 m. El techo tiene dos caras inclinadas y dos lados verticales e idénticos, ADE y GLF . La cara $DEFL$ se inclina en un ángulo de 15° con la horizontal y $ED = 7$ m.

- Calcule el área del triángulo EAD .
- Calcule el volumen total del establo.

La cubierta se construyó con soportes metálicos. Cada soporte está hecho de cinco longitudes de metal, AE , ED , AD , EM y MN , y el diseño se muestra en el siguiente diagrama.



$ED = 7$ m, $AD = 10$ m y ángulo $ADE = 15^\circ$. M es el punto medio de AD . N es el punto en ED tal que MN está en ángulo recto con ED .

- Calcule la longitud de MN .
- Calcule la longitud de AE .

Farmer Brown cree que N es el punto medio de ED .

- Muestre que Farmer Brown está equivocado.
- Calcule la longitud total de metal requerida para un soporte.

a) El triángulo EAD tiene lados $ED = 7$ y $AD = 10$ con el ángulo 15° entre ellos, así que

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 \cdot \sin 15^\circ = 35 \sin 15^\circ \approx 9,06 \text{ m}^2.$$

Resultado: $A \approx 9,06 \text{ m}^2$

b)

1. Volumen del cuboide: $10 \cdot 16 \cdot 5 = 800 \text{ m}^3$.
2. El techo es un prisma triangular de base EAD y longitud 16 m: $9,0587 \cdot 16 \approx 144,9 \text{ m}^3$.
3. Volumen total: $800 + 144,9 \approx 944,9 \approx 945 \text{ m}^3$.

Resultado: $V \approx 945 \text{ m}^3$

c)

1. M es el punto medio de AD , así que $MD = 5 \text{ m}$.
2. En el triángulo MND , rectángulo en N , con el ángulo 15° en D : $\sin 15^\circ = \frac{MN}{MD}$.
3. Entonces $MN = 5 \sin 15^\circ \approx 1,29 \text{ m}$.

Resultado: $MN \approx 1,29 \text{ m}$

d) En el triángulo EAD aplicamos el teorema del coseno al lado AE , opuesto al ángulo de 15° :

$$AE^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cos 15^\circ = 149 - 140 \cos 15^\circ \approx 13,77.$$

Luego $AE \approx 3,71 \text{ m}$.

Resultado: $AE \approx 3,71 \text{ m}$

e)

1. Si N fuera el punto medio de ED , se tendría $ND = \frac{7}{2} = 3,5 \text{ m}$.
2. En el triángulo rectángulo MND : $ND = MD \cos 15^\circ = 5 \cos 15^\circ \approx 4,83 \text{ m}$.
3. Como $4,83 \neq 3,5$, N no es el punto medio de ED , y Farmer Brown está equivocado.

f)

1. Falta la longitud de EM . En el triángulo EMD conocemos $ED = 7$, $MD = 5$ y el ángulo 15° en D . Por el teorema del coseno:

$$EM^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cos 15^\circ = 74 - 70 \cos 15^\circ \approx 6,385,$$

luego $EM \approx 2,53 \text{ m}$.

2. Sumamos las cinco longitudes:

$$AE + ED + AD + EM + MN \approx 3,71 + 7 + 10 + 2,53 + 1,29 \approx 24,5 \text{ m}.$$

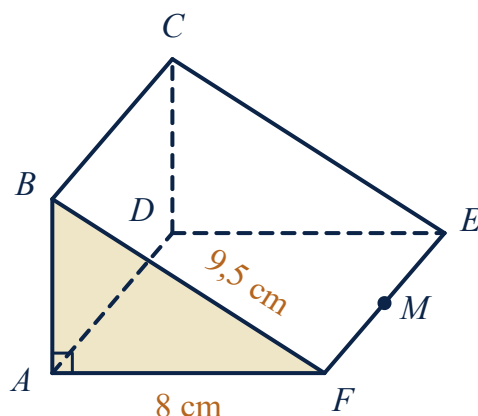
Resultado: a) $9,06 \text{ m}^2$; b) 945 m^3 ; c) $1,29 \text{ m}$; d) $3,71 \text{ m}$; e) $ND \approx 4,83 \neq 3,5$; f) $\approx 24,5 \text{ m}$

EJERCICIO 53

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

El diagrama muestra un prisma triangular rectángulo, $ABCDEF$, en el que la cara $ABCD$ es un cuadrado. $AF = 8$ cm, $BF = 9,5$ cm y el ángulo BAF es 90° .



- Calcule la longitud de AB .
 M es el punto medio de EF .
- Calcule la longitud de BM .
- Encuentre el tamaño del ángulo entre BM y la cara $ADEF$.

a) El triángulo ABF es rectángulo en A , con hipotenusa $BF = 9,5$ y un cateto $AF = 8$. Por Pitágoras:

$$AB = \sqrt{9,5^2 - 8^2} = \sqrt{26,25} = 5,1234 \dots \approx 5,12 \text{ cm.}$$

Resultado: $AB \approx 5,12$ cm

b)

- $ABCD$ es un cuadrado, luego $AD = AB = 5,1234$ cm. Las aristas AD , BC y FE son paralelas e iguales, así que $EF = 5,1234$ cm y $FM = \frac{5,1234}{2} = 2,5617$ cm.
- EF es perpendicular a la cara ABF , por lo que $FM \perp BF$ y el triángulo BFM es rectángulo en F .
- Por Pitágoras:

$$BM = \sqrt{BF^2 + FM^2} = \sqrt{9,5^2 + 2,5617^2} = 9,8393 \dots \approx 9,84 \text{ cm.}$$

Resultado: $BM \approx 9,84$ cm

c)

- AB es perpendicular a AF y a AD , que son dos rectas de la cara $ADEF$, luego AB es perpendicular a esa cara y A es la proyección de B sobre ella.
- Por tanto, el ángulo entre BM y la cara $ADEF$ es el ángulo $\widehat{BMA}$ del triángulo BAM , rectángulo en A .
- AM es la hipotenusa del triángulo rectángulo AFM (rectángulo en F): $AM = \sqrt{8^2 + 2,5617^2} = 8,4001 \dots$ cm.
- Entonces:

$$\tan \widehat{BMA} = \frac{AB}{AM} = \frac{5,1234}{8,4001} \Rightarrow \widehat{BMA} = 31,4^\circ.$$

Resultado: a) 5,12 cm; b) 9,84 cm; c) $31,4^\circ$