

Geometría en 2D

Geometría en el plano para IB Aplicaciones e Interpretación NM: distancia, punto medio, rectas, paralelismo y perpendicularidad, distancia a una recta y diagramas de Voronói, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-aplicaciones-e-interpretacion-nm/geometria-2d.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

La **geometría en el plano** te permite describir con números los puntos y las rectas: dónde están, qué distancia hay entre ellos, cuánto inclinada está una recta y cómo se cortan. En este tema trabajas con el **sistema de coordenadas**, la **distancia** entre dos puntos y el **punto medio**, la **pendiente** y las **ecuaciones de la recta**, las rectas **paralelas y perpendiculares**, la **distancia de un punto a una recta** y las **mediatrices**, y terminas con los **diagramas de Voronói**, una herramienta muy típica de Aplicaciones e Interpretación para decidir qué zona queda más cerca de cada punto (tiendas, antenas, hospitales). En el examen, casi todo se hace con la calculadora de pantalla gráfica (CPG) y con un dibujo, así que conviene practicar a **hacer un esquema** antes de calcular.

Orden recomendado

Sigue los apartados en orden: el 1 da las herramientas básicas (distancia y punto medio), el 2 es el corazón del tema (pendiente y ecuaciones de la recta), el 3 y el 4 aprovechan la pendiente para el paralelismo, la perpendicularidad y las distancias, y el 5 aplica todo a los diagramas de Voronói. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

Coordenadas, distancia entre dos puntos y punto medio

IDEA CLAVE

Todo el tema de geometría en 2D parte de dos herramientas: saber dónde está un punto con sus coordenadas y medir con ellas. Con la **fórmula de la distancia** calculas cuánto separa dos puntos (dos ciudades en un mapa, una antena y una casa) y con el **punto medio** encuentras el lugar que queda justo a mitad de camino. En el examen del IB aparecen casi siempre dentro de un problema de contexto con un mapa o un plano.

Las coordenadas de un punto

Para describir una posición en el plano se dibujan dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto O , el **origen**. La horizontal es el **eje x** y la vertical es el **eje y** . Cada eje lleva una escala: las dos pueden ser iguales o distintas, pero en una escala dada la misma distancia en el dibujo representa siempre la misma cantidad.

DEFINICIÓN • COORDENADAS DE UN PUNTO

Un punto P del plano se identifica con un par ordenado $P(x, y)$.

- La **coordenada x** (abscisa) dice cuánto se desplaza P en horizontal desde el origen: es positiva a la derecha del eje y y negativa a la izquierda.
- La **coordenada y** (ordenada) dice cuánto se desplaza en vertical: es positiva por encima del eje x y negativa por debajo.

El orden importa: $P(5, 2)$ y $Q(2, 5)$ son puntos distintos. Los ejes dividen el plano en cuatro regiones, los **cuadrantes**, que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj empezando por arriba a la derecha.

[FIGURA mai-t4-a1-cuadrantes: Plano cartesiano con ejes x (de -5 a 6) e y (de -5 a 5) y cuadrícula suave; origen O rotulado. Los cuatro cuadrantes rotulados con numeración romana en tono tenue, I arriba a la derecha ($x > 0$, $y > 0$), II arriba a la izquierda ($x < 0$, $y > 0$), III abajo a la izquierda ($x < 0$, $y < 0$), IV abajo a la derecha ($x > 0$, $y < 0$). Cuatro puntos marcados con su etiqueta: $P(4, 3)$ en el cuadrante I, $Q(-3, 2)$ en el II, $R(-4, -3)$ en el III y $S(2, -4)$ en el IV. Para P se muestran líneas discontinuas hasta ambos ejes, rotulando el 4 en el eje x y el 3 en el eje y .]

Cuadrante Signo de x Signo de y

I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Un punto sobre un eje tiene una coordenada igual a cero: $(3, 0)$ está en el eje x y $(0, -2)$ en el eje y .

Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, el segmento AB es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son horizontales y verticales. El cateto horizontal mide $|x_2 - x_1|$ y el vertical $|y_2 - y_1|$, así que basta aplicar el

teorema de Pitágoras.

[FIGURA mai-t4-a1-distancia: Ejes cartesianos con el punto A(x1, y1) abajo a la izquierda y el punto B(x2, y2) arriba a la derecha, unidos por un segmento oblicuo rotulado d. Desde A una línea horizontal hasta la vertical que baja de B, formando un triángulo rectángulo con el ángulo recto en la esquina inferior derecha (marcado con un cuadradito). Cateto horizontal rotulado x2 - x1 y cateto vertical rotulado y2 - y1. Sobre los ejes, líneas discontinuas de guía hasta x1, x2, y1 y y2, rotulados.]

TEOREMA · DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre A(x1, y1) y B(x2, y2) es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Como las diferencias están elevadas al cuadrado, da igual restar en un orden o en el otro: $d(A, B) = d(B, A)$. Tampoco importan los cuadrantes: si una coordenada es negativa, la resta la tiene en cuenta sola. Lo único que hay que vigilar es escribir los signos con paréntesis, por ejemplo $(-3 - 2)^2$.

El resultado está en las unidades de la escala del plano (kilómetros, metros, casillas...). Si el enunciado no pide otra cosa, redondea a 3 cifras significativas.

Punto medio de un segmento

El punto medio M de AB es el que está a la misma distancia de A que de B. Para pasar de A a B hay que recorrer $x_2 - x_1$ en horizontal; el punto medio queda a la mitad de ese recorrido, y lo mismo en vertical. Por eso cada coordenada de M es la media de las coordenadas de los extremos.

TEOREMA · PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

El punto medio de A(x1, y1) y B(x2, y2) es

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

[FIGURA mai-t4-a1-punto-medio: Ejes cartesianos con el punto A(x1, y1) abajo a la izquierda y B(x2, y2) arriba a la derecha unidos por un segmento. El punto M en el centro del segmento, rotulado M((x1+x2)/2, (y1+y2)/2). Dos pequeñas marcas iguales (doble trazo) sobre las dos mitades AM y MB. Líneas discontinuas desde A, M y B a los ejes marcando x1, (x1+x2)/2, x2 en el eje x y y1, (y1+y2)/2, y2 en el eje y.]

Esta fórmula sirve en los dos sentidos. Si conoces el punto medio y un extremo, la otra coordenada se despeja: $x_2 = 2x_M - x_1$ y $y_2 = 2y_M - y_1$.

MÉTODO · PROBLEMA CON DISTANCIA O PUNTO MEDIO

1. Haz un esquema con los puntos y escribe sus coordenadas, con una letra para cada incógnita.
2. Decide qué piden: una **longitud** (fórmula de la distancia) o una **posición intermedia** (punto medio).
3. Sustituye con paréntesis, sobre todo si hay coordenadas negativas.
4. Si falta una coordenada, plantea una ecuación: igualando la fórmula a la distancia dada, o igualando cada coordenada del punto medio a su valor.
5. Redondea al final a 3 cifras significativas y escribe las unidades.

NOTA • CON LA CPG

En las dos pruebas del examen puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Escribe la raíz completa de una sola vez, con los paréntesis bien puestos, y no redondees las diferencias intermedias. Si la distancia contiene una incógnita, por ejemplo $(p+2)^2 + 16 = 25$, puedes resolver la ecuación con el módulo de ecuaciones o dibujando las dos partes y buscando las intersecciones. Aun así, escribe siempre el planteamiento con los números sustituidos: un resultado sin él puede perder puntos.

[FIGURA mai-t4-a1-mapa-senderos: Plano con cuadrícula suave, ejes x (de -4 a 6) e y (de -9 a 5), 1 unidad = 1 km. Cuatro puntos marcados y rotulados: refugio A(-3, 4) arriba a la izquierda, fuente C(5, 4) arriba a la derecha, mirador B(5, -8) abajo a la derecha y lago M(1, -2) en el centro, en el segmento AB. Segmento AB oblicuo de A a B pasando por M, con una doble marca de igualdad en cada mitad. Segmento AC horizontal rotulado 8 km y segmento CB vertical rotulado 12 km, con un cuadradito de ángulo recto en C. El segmento AB rotulado con su longitud, raíz de 208, aproximadamente 14,4 km.]

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

De la plaza al puerto

En el plano de una ciudad, con 1 unidad igual a 1 km, la plaza mayor está en $A(2, -1)$ y el puerto en $B(8, 4)$.

- Calcula la distancia en línea recta entre la plaza y el puerto.
- Halla las coordenadas del punto medio del segmento AB , donde se quiere colocar un punto de información.

- Se aplica la fórmula de la distancia:

$$d = \sqrt{(8-2)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} = 7,81 \text{ km}$$

- Cada coordenada del punto medio es la media de las de los extremos:

$$M\left(\frac{2+8}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(5, \frac{3}{2}\right)$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un dron y su estación base

En un plano con unidades en metros, una estación base está en $E(-2, 1)$. Un dron se encuentra en el punto $D(p, 5)$, con p desconocido, y su distancia a la estación es de 5 m.

- Halla los posibles valores de p .
- Para el valor positivo de p , calcula las coordenadas del punto medio entre la estación y el dron.

- La distancia ED vale 5:

$$\sqrt{(p-(-2))^2 + (5-1)^2} = 5 \Rightarrow (p+2)^2 + 16 = 25 \Rightarrow (p+2)^2 = 9$$

Luego $p+2 = 3$ o $p+2 = -3$, es decir, $p = 1$ o $p = -5$. Hay dos posiciones del dron, una a cada lado de la estación.

- b) Con $p = 1$, el dron está en $D(1, 5)$ y el punto medio es

$$M\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Un sendero con un punto medio dado

En el mapa de una zona de senderos, con 1 unidad igual a 1 km, el refugio está en $A(-3, 4)$. Un mirador B está situado de modo que el punto medio del segmento AB es el lago $M(1, -2)$. Además, hay una fuente en $C(5, 4)$.

- Halla las coordenadas del mirador B .
- Calcula la distancia entre el refugio y el mirador.
- Calcula el perímetro del triángulo ABC .
- Comprueba si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en C . Responde "sí" o "no".

- a) Si M es el punto medio de AB , cada coordenada de M es la media de las de A y B . Con $B(x, y)$:

$$\frac{-3+x}{2} = 1 \Rightarrow x = 5 \quad \frac{4+y}{2} = -2 \Rightarrow y = -8$$

Así, $B(5, -8)$.

- b) $AB = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-8 - 4)^2} = \sqrt{8^2 + 12^2} = \sqrt{208} = 14,4$ km.

- c) Calculamos los otros dos lados:

$$AC = \sqrt{(5 + 3)^2 + (4 - 4)^2} = 8 \quad BC = \sqrt{(5 - 5)^2 + (4 + 8)^2} = 12$$

El perímetro es $8 + 12 + \sqrt{208} = 34,4$ km.

- d) Si hay un ángulo recto en C , el lado opuesto, AB , es la hipotenusa y se cumple Pitágoras:

$$AC^2 + BC^2 = 64 + 144 = 208 = AB^2$$

Se cumple, así que el ángulo en C es recto. (También se ve en el mapa: AC es horizontal y BC es vertical.)

En el examen: en un apartado como el a) se puntúa plantear que cada coordenada del punto medio es una media y despejar la incógnita; en el d) hay que escribir la comparación de los cuadrados, no basta con decir que «se ve». Guarda $\sqrt{208}$ sin redondear en la CPG hasta el final.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · RESTAR MAL CON COORDENADAS NEGATIVAS

Es el fallo más común en la fórmula de la distancia: con $A(2, -1)$ y $B(8, 4)$ escribir $(4 - 1)^2$ en lugar de $(4 - (-1))^2 = 5^2$. Los signos de las coordenadas se conservan al restar. Escribe cada diferencia con paréntesis, con las dos coordenadas entre paréntesis si son negativas, y comprueba con el esquema que el cateto sale con un tamaño razonable (aquí, 5 y no 3).

ERROR TÍPICO • OLVIDAR LA RAÍZ O DIVIDIR SIN QUERER

Dos fallos distintos con el mismo origen: confundir las dos fórmulas. La distancia lleva una raíz cuadrada y **no** se divide entre 2; el punto medio se divide entre 2 y **no** lleva raíz ni cuadrados. Una comprobación rápida: el punto medio debe quedar entre los extremos (cada coordenada entre las de A y B), y la distancia debe ser mayor que el cateto más largo y menor que la suma de los dos.

ERROR TÍPICO • MEZCLAR EL ORDEN DE LAS COORDENADAS

En $P(x, y)$ la primera coordenada es siempre la horizontal. Cambiar el orden lleva el punto a otro sitio: $(2, 5)$ no es $(5, 2)$. Al calcular, además, no mezcles las restas: la x se resta con la x y la y con la y . Rotula los puntos en el esquema antes de sustituir.

Resumen

- Un punto es un par $P(x, y)$: x es la posición horizontal e y la vertical. Los ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes, según los signos de x e y .
- Distancia entre $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Sale de Pitágoras y no depende del orden de los puntos.
- Punto medio: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Si conoces M y un extremo, el otro es $x_2 = 2x_M - x_1$, $y_2 = 2y_M - y_1$.
- Si falta una coordenada, plantea una ecuación con la distancia o con el punto medio y resuélvela.
- Usa paréntesis con las coordenadas negativas, no redondees los valores intermedios en la CPG y da la respuesta con 3 cifras significativas y sus unidades.

APARTADO 2

Pendiente y ecuaciones de la recta

IDEA CLAVE

Una recta queda determinada por dos datos: dos puntos, o un punto y su pendiente. La pendiente dice cuánto sube o baja la recta por cada unidad que avanza hacia la derecha, y con ella se escribe la ecuación en tres formas equivalentes. En el examen del IB aparece al modelizar situaciones lineales (tarifas, caminos, rampas), al hallar dónde se cortan dos rectas y al calcular figuras formadas con los ejes.

La pendiente

Cuando recorres una recta de izquierda a derecha, tu posición cambia en dos direcciones: avanzas en horizontal y subes o bajas en vertical. La **pendiente** compara ambos cambios.

[FIGURA mai-t4-a2-pendiente: plano cartesiano con ejes x e y , cuadrícula suave. Una recta que sube hacia la derecha pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(5, 5)$, marcados con puntos y rotulados " $A(x_1, y_1)$ " y " $B(x_2, y_2)$ ". Desde A se dibuja un segmento horizontal discontinuo hasta la vertical de B , rotulado " $x_2 - x_1$ (avance)"; desde ahí un segmento vertical discontinuo hasta B , rotulado " $y_2 - y_1$ (subida)". En la intersección de la recta con el eje x se marca el ángulo θ entre la recta y el sentido positivo del eje x . A la derecha, un cuadro pequeño con la recta que baja (por $C(1, 5)$ y $D(5, 2)$) con su avance y su bajada marcados, rotulado "pendiente negativa"; el primer dibujo rotulado "pendiente positiva".]

DEFINICIÓN • PENDIENTE DE UNA RECTA

Si una recta pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, su **pendiente** es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}}$$

Da igual cuál de los dos puntos llames A y cuál B , siempre que uses el mismo orden arriba y abajo.

El signo de m te cuenta cómo es la recta:

- $m > 0$: la recta **sube** al ir hacia la derecha.
- $m < 0$: la recta **baja** al ir hacia la derecha.
- $m = 0$: la recta es **horizontal** (no hay cambio vertical).
- Si $x_1 = x_2$, el denominador es 0: la recta es **vertical** y su pendiente **no está definida**.

Cuanto mayor es $|m|$, más empinada es la recta. Una pendiente $m = 2$ significa que, por cada unidad que avanzas, subes dos.

Pendiente y ángulo

Si θ es el ángulo agudo que forma la recta con el eje horizontal, el triángulo rectángulo de la figura tiene catetos $y_2 - y_1$ y $x_2 - x_1$. Por la razón tangente,

PROPIEDAD · PENDIENTE Y ÁNGULO CON EL EJE X

$$m = \tan \theta \quad \text{y, por tanto,} \quad \theta = \tan^{-1}|m|$$

Con $m > 0$, θ es el ángulo con el que la recta sube; con $m < 0$, $\tan^{-1}|m|$ es el ángulo agudo que forma la recta con la horizontal al bajar.

Esta relación une este tema con la trigonometría: una pendiente de 1 corresponde a 45° y una pendiente grande, a un ángulo cercano a 90° .

Las ecuaciones de una recta

Una misma recta se puede escribir de varias maneras. Cada forma sirve para algo distinto.

Forma punto-pendiente

Supón que la recta tiene pendiente m y pasa por $A(x_1, y_1)$. Si $P(x, y)$ es cualquier otro punto de la recta, la pendiente entre A y P también es m :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Quitando el denominador queda la ecuación siguiente.

DEFINICIÓN · FORMA PUNTO-PENDIENTE

La recta de pendiente m que pasa por (x_1, y_1) tiene por ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Es la forma que usarás para **construir** una recta cuando conoces un punto y la pendiente, o dos puntos (calculas m primero y eliges cualquiera de los dos).

Forma explícita

Si despejas y en la forma punto-pendiente obtienes

$$y = mx + (y_1 - mx_1)$$

El término entre paréntesis es una constante: es el valor de y cuando $x = 0$.

DEFINICIÓN · FORMA EXPLÍCITA

$$y = mx + c$$

donde m es la pendiente y c es la **ordenada en el origen**: la recta corta al eje y en el punto $(0, c)$.

Es la forma más cómoda para **leer** una recta, dibujarla o interpretarla como un modelo: c es el valor inicial y m es lo que cambia y por cada unidad de x .

Forma general

Si pasas todos los términos al mismo lado, la ecuación toma el aspecto

$$ax + by + d = 0$$

con a , b y d números reales y a , b no nulos a la vez. Es la forma general (o estándar). El examen suele pedir «en la forma $ax + by + d = 0$, donde a , b y d son números enteros»: multiplica toda la ecuación por el denominador común para quitar las fracciones.

Para pasar de la general a la explícita, despeja y :

$$by = -ax - d \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{d}{b}$$

De aquí se lee que la pendiente es $m = -\frac{a}{b}$ y la ordenada en el origen $c = -\frac{d}{b}$ (si $b \neq 0$).

Rectas horizontales y verticales

PROPIEDAD · RECTAS HORIZONTALES Y VERTICALES

- Una recta **horizontal** tiene ecuación $y = k$ (todos sus puntos tienen la misma y) y pendiente 0.
- Una recta **vertical** tiene ecuación $x = k$ (todos sus puntos tienen la misma x) y no tiene pendiente: no se puede escribir en la forma $y = mx + c$.

[FIGURA mai-t4-a2-horizontal-vertical: dos planos cartesianos pequeños, uno al lado del otro, con ejes graduados de -5 a 5 en x y de -4 a 4 en y . En el de la izquierda, una recta horizontal gruesa a la altura $y = -3$ con la etiqueta " $y = -3$ " sobre ella y el punto $(2, -3)$ marcado. En el de la derecha, una recta vertical gruesa en $x = 4$ con la etiqueta " $x = 4$ " a su lado y el punto $(4, 1)$ marcado.]

MÉTODO · ESCRIBIR LA ECUACIÓN DE UNA RECTA DADA POR DOS PUNTOS

1. Calcula la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Si $x_1 = x_2$, la recta es vertical, $x = x_1$, y has terminado.
2. Sustituye m y uno de los puntos en $y - y_1 = m(x - x_1)$.
3. Desarrolla y deja la ecuación en la forma que pida el enunciado: $y = mx + c$ o $ax + by + d = 0$ con coeficientes enteros.
4. Comprueba: el otro punto debe cumplir la ecuación.

Cortes con los ejes

PROPIEDAD · PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

- Con el eje x ($y = 0$): el punto es de la forma $(x, 0)$. Sustituye $y = 0$ en la ecuación y despeja x .
- Con el eje y ($x = 0$): el punto es de la forma $(0, y)$. Sustituye $x = 0$ y despeja y .

[FIGURA mai-t4-a2-cortes-ejes: plano cartesiano con ejes graduados de -2 a 7 en x y de -5 a 3 en y . Una recta gruesa que corta al eje x en el punto $(6, 0)$ y al eje y en el punto $(0, -3)$. Ambos puntos señalados con puntos grandes y rotulados " $(6, 0)$ " y " $(0, -3)$ ". Junto a la recta, la etiqueta " $x - 2y - 6 = 0$ ". Se sombrea ligeramente el triángulo formado por la recta y las partes positiva del eje x y negativa del eje y .]

Los cortes con los ejes son los puntos más fáciles de calcular de una recta y, además, bastan para dibujarla: con dos puntos hay una sola recta.

Intersección de dos rectas

Dos rectas con pendientes distintas se cortan en **un único punto**. Ese punto es el único que cumple las dos ecuaciones a la vez, así que sus coordenadas son la solución del sistema formado por ambas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + d_2 = 0 \end{cases}$$

Si tienes una de las rectas en forma explícita, lo más rápido es sustituir y en la otra. Si no, usa reducción: multiplica las ecuaciones para igualar los coeficientes de una incógnita y resta.

- Si las pendientes son **iguales** y las ordenadas distintas, las rectas son paralelas y no se cortan: el sistema no tiene solución.
- Si las pendientes y las ordenadas son iguales, es la misma recta: hay infinitas soluciones.

[FIGURA mai-t4-a2-interseccion: plano cartesiano con ejes graduados de -2 a 8 en x y de -2 a 8 en y. Dos rectas: la recta r (azul) con ecuación " $y = x/2 + 1$ " que pasa por (0, 1) y (4, 3); la recta s (naranja) con ecuación " $y = -x + 7$ " que pasa por (0, 7) y (7, 0). Se cortan en el punto P(4, 3), señalado con un punto grande y rotulado "P(4, 3)". Líneas discontinuas desde P hasta los ejes con los valores 4 y 3 marcados.]

NOTA • CON LA CPG

En las dos pruebas del examen puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Para hallar la intersección de dos rectas tienes dos caminos: el módulo de **ecuaciones**, resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (escribes los coeficientes en la forma $ax + by = k$), o el módulo **gráfico**, dibujando las dos rectas en forma explícita y usando la herramienta de intersección. Si escribes en la hoja solo el resultado, puedes perder puntos: anota siempre el sistema que planteas y, cuando se pida «halla», el método usado. Para dibujar una recta con la CPG necesitas la forma $y = mx + c$, así que despeja antes y si te la dan en forma general.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un camino en el plano de una finca

En el plano de una finca, un camino recto une la casa A(2, 1) con el pozo B(6, 4) (unidades en cientos de metros).

- Calcula la pendiente del camino.
- Halla el ángulo agudo que forma el camino con el eje horizontal, con una cifra decimal.
- Escribe la ecuación de la recta que contiene al camino en la forma $ax + by + d = 0$, con a , b y d enteros y $a > 0$.

a) $m = \frac{4 - 1}{6 - 2} = \frac{3}{4}$.

b) Como $m = \tan \theta$, $\theta = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36,9^\circ$.

- c) Forma punto-pendiente con el punto A(2, 1):

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

Multiplicamos por 4 para quitar la fracción:

$$4y - 4 = 3x - 6 \Rightarrow 3x - 4y - 2 = 0$$

Comprobamos con B(6, 4): $3 \cdot 6 - 4 \cdot 4 - 2 = 18 - 16 - 2 = 0$. Se cumple.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Alquiler de bicicletas

Una tienda alquila bicicletas con una tarifa que combina una cuota fija y un precio por hora. Alquilar una bicicleta durante 2 horas cuesta 11 euros y durante 6 horas cuesta 23 euros. El coste C (en euros) es una función lineal del tiempo t (en horas).

- Halla la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $C = mt + c$ que modeliza el coste, y di qué significa cada una.
- ¿Cuántas horas se pueden alquilar con 32 euros?
- ¿Cuánto cuesta alquilar la bicicleta durante 4,5 horas?

- Los puntos de la recta son $(2, 11)$ y $(6, 23)$:

$$m = \frac{23 - 11}{6 - 2} = \frac{12}{4} = 3$$

Con el punto $(2, 11)$: $C - 11 = 3(t - 2)$, es decir, $C = 3t + 5$. Entonces $m = 3$ y $c = 5$.

Significado: $m = 3$ es el **precio por hora** (3 euros por cada hora más); $c = 5$ es la **cuota fija** (lo que se paga aunque el tiempo fuera cero).

- Resolvemos $32 = 3t + 5$:

$$3t = 27 \Rightarrow t = 9 \text{ horas}$$

- $C = 3 \cdot 4,5 + 5 = 18,5$ euros.

EJEMPLO 3 ★★★ Dificil

Dos senderos que se cruzan

En el mapa de un parque (unidades de 1 km) un sendero L_1 pasa por los puntos $A(-2, 1)$ y $B(4, 4)$. Otro sendero L_2 sigue la recta de ecuación $3x + 2y - 16 = 0$.

- Halla la ecuación de L_1 en la forma $ax + by + d = 0$ con coeficientes enteros y $a > 0$.
- Halla los puntos donde L_2 corta a los ejes x e y .
- Halla las coordenadas del punto en que se cruzan los dos senderos.
- La recta L_2 y los ejes de coordenadas encierran una zona triangular. Calcula su área en km^2 , con una cifra decimal.

- Pendiente: $m = \frac{4 - 1}{4 - (-2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Con el punto $A(-2, 1)$:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow 2y - 2 = x + 2 \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$$

- Con el eje x ($y = 0$): $3x - 16 = 0$, luego $x = \frac{16}{3}$ y el punto es $\left(\frac{16}{3}, 0\right)$.

Con el eje y ($x = 0$): $2y - 16 = 0$, luego $y = 8$ y el punto es $(0, 8)$.

- Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 3x + 2y - 16 = 0 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones se elimina y : $4x - 12 = 0$, luego $x = 3$. En la primera, $3 - 2y + 4 = 0$, de donde $y = \frac{7}{2}$. El punto de cruce es $P\left(3, \frac{7}{2}\right)$. (Con la CPG, resolviendo el sistema, se obtiene $x = 3$, $y = 3,5$.)

- d) El triángulo tiene vértices $O(0,0)$, $\left(\frac{16}{3}, 0\right)$ y $(0,8)$. Es rectángulo en el origen, con catetos $\frac{16}{3}$ y 8:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 8 = \frac{64}{3} = 21,3 \text{ km}^2$$

En el examen: en un problema de varias partes se puntúa cada resultado. Escribe la pendiente antes de la ecuación, indica qué sustituyes para cada corte con un eje (por ejemplo « $y = 0$ ») y plantea el sistema antes de resolverlo, aunque uses la CPG. Escribe la unidad en el área.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • RESTAR LAS COORDENADAS EN DISTINTO ORDEN

Calcular $m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$, o restar en un orden arriba y en otro abajo, cambia el signo de la pendiente. Una buena comprobación es el dibujo: si la recta sube hacia la derecha, m debe ser positiva. Elige un punto como «primero» y úsalo siempre primero, arriba y abajo.

ERROR TÍPICO • ESCRIBIR « $Y - Y_1 = M(X + X_1)$ »

En la forma punto-pendiente, el punto (x_1, y_1) entra restando: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Si el punto es $(-3, 5)$, la ecuación es $y - 5 = m(x + 3)$: el signo más aparece porque $x - (-3) = x + 3$, no porque la fórmula lo lleve. Sustituir sin cuidado con coordenadas negativas es la fuente de errores más frecuente.

ERROR TÍPICO • DAR LA PENDIENTE DE LA FORMA GENERAL SIN DESPEJAR

En $3x + 2y - 16 = 0$ la pendiente no es 3 ni -16 . Hay que despejar $y = -\frac{3}{2}x + 8$, de donde $m = -\frac{3}{2}$ (o usar $m = -\frac{a}{b}$). Lo mismo pasa con las rectas verticales: $x = 4$ no tiene pendiente, aunque algunos alumnos escriben « $m = 4$ ».

Resumen

- La pendiente de la recta por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Positiva: sube; negativa: baja; cero: horizontal; si $x_1 = x_2$ la recta es vertical y no tiene pendiente.
- Con θ el ángulo agudo con el eje x : $m = \tan \theta$.
- Forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$. Forma explícita: $y = mx + c$. Forma general: $ax + by + d = 0$, con $m = -\frac{a}{b}$.
- Rectas horizontales $y = k$ y verticales $x = k$.
- Corte con el eje x : haz $y = 0$. Corte con el eje y : haz $x = 0$.
- La intersección de dos rectas es la solución del sistema que forman sus ecuaciones; con la CPG, módulo de ecuaciones o gráfico.
- Interpretando un modelo lineal $y = mx + c$: m es el cambio por unidad y c el valor inicial.

APARTADO 3

Rectas paralelas y perpendiculares

IDEA CLAVE

Dos rectas del plano se relacionan por su inclinación: si tienen la misma pendiente son paralelas, y si el producto de sus pendientes es -1 son perpendiculares. En el examen del IB aparece cuando te piden «la recta que pasa por este punto y es paralela (o perpendicular) a esta otra», un paso que se repite en problemas de calles, vallas, tuberías y en las mediatrices de los diagramas de Voronói.

Rectas paralelas

Dos rectas **paralelas** nunca se cortan: están igual de inclinadas. Como la pendiente mide la inclinación, basta comparar pendientes.

PROPIEDAD • PARALELISMO

Dos rectas no verticales r_1 y r_2 , de pendientes m_1 y m_2 , son paralelas ($r_1 \parallel r_2$) si y solo si

$$m_1 = m_2$$

Fíjate en la figura: las dos rectas tienen pendiente $\frac{2}{3}$. Cada vez que avanzas 3 unidades hacia la derecha, las dos suben 2.

[FIGURA mai-t4-a3-paralelas: Plano cartesiano con cuadrícula, ejes x e y rotulados, x de -4 a 8 e y de -4 a 6 . Dos rectas azules paralelas: r_1 de ecuación $y = \frac{2}{3}x - 1$, que corta al eje y en $(0, -1)$ y al eje x en $(1,5; 0)$, y r_2 de ecuación $y = \frac{2}{3}x + 2$, que corta al eje y en $(0, 2)$. Rótulos « $r_1: y = 2x/3 - 1$ » y « $r_2: y = 2x/3 + 2$ » junto a cada recta. Sobre cada recta, un triángulo escalonado pequeño: recorrido horizontal de 3 unidades (rótulo «3») y subida vertical de 2 unidades (rótulo «2»), para indicar que ambas tienen la misma pendiente $2/3$.]

Si además de la misma pendiente tienen la misma ordenada en el origen, no son dos rectas distintas sino **la misma recta** (rectas coincidentes). Si las rectas vienen en forma general, $ax + by + d = 0$, la pendiente es $m = -\frac{a}{b}$: dos rectas con los mismos coeficientes a y b (salvo un factor común) y distinto d son paralelas.

NOTA • RECTAS VERTICALES

Una recta vertical, $x = k$, no tiene pendiente. Dos rectas verticales, $x = 2$ y $x = 7$, son paralelas entre sí aunque no puedas comparar pendientes. Lo mismo ocurre con dos horizontales, $y = 1$ e $y = 4$: ambas tienen $m = 0$.

Rectas perpendiculares

Dos rectas son **perpendiculares** ($r_1 \perp r_2$) cuando se cortan formando un ángulo recto de 90° .

PROPIEDAD · PERPENDICULARIDAD

Dos rectas no verticales ni horizontales, de pendientes m_1 y m_2 , son perpendiculares si y solo si

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{es decir,} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

La pendiente de una perpendicular es la **inversa cambiada de signo**: si $m_1 = \frac{3}{4}$, entonces $m_2 = -\frac{4}{3}$.

¿Por qué funciona? Una recta que pasa por el origen con pendiente m pasa también por el punto $(1, m)$. Si giras ese punto 90° alrededor del origen, llega a $(-m, 1)$, y la recta que pasa por el origen y por este punto tiene pendiente $\frac{1}{-m} = -\frac{1}{m}$. Es la perpendicular.

[FIGURA mai-t4-a3-perpendiculares: Plano cartesiano con cuadrícula y ejes rotulados, x de -4 a 4 e y de -4 a 4 . Recta azul $L1$ que pasa por el origen con pendiente $2/3$, es decir $y = 2x/3$, dibujada hasta $(3,2)$; con el triángulo rectángulo de catetos 3 (horizontal, rótulo «3») y 2 (vertical, rótulo «2») bajo ella. Recta roja $L2$ que pasa por el origen y por $(-2,3)$, es decir $y = -3x/2$, con su triángulo rectángulo de catetos 2 (horizontal hacia la izquierda, rótulo «2») y 3 (vertical, rótulo «3»). Pequeño cuadradito de ángulo recto en el origen entre las dos rectas, con el rótulo « 90° ». Rótulos « $L1: m_1 = 2/3$ » y « $L2: m_2 = -3/2$ », y debajo, en un recuadro, « $m_1 \cdot m_2 = (2/3) \cdot (-3/2) = -1$ ».]

Observa cómo los triángulos de la figura intercambian sus catetos (3 y 2 pasan a ser 2 y 3) y uno de los recorridos cambia de sentido: de ahí salen la inversa y el signo negativo.

NOTA · CASOS CON RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

La condición $m_1 m_2 = -1$ no se puede usar si una de las rectas es vertical o horizontal. Una recta horizontal $y = c$ ($m = 0$) es perpendicular a cualquier recta vertical $x = k$, y viceversa. Si te piden la perpendicular a $y = 4$ por el punto $(3, 1)$, es la vertical $x = 3$.

En forma general es todavía más rápido: la recta $ax + by + d = 0$ tiene pendiente $-\frac{a}{b}$, y la recta $bx - ay + d' = 0$ tiene pendiente $\frac{b}{a}$. Son perpendiculares: se intercambian a y b y se cambia un signo.

Recta por un punto paralela o perpendicular a otra

Es la tarea típica del examen. Se resuelve con la ecuación punto-pendiente, $y - y_0 = m(x - x_0)$, donde (x_0, y_0) es el punto dado.

MÉTODO · RECTA POR UN PUNTO PARALELA O PERPENDICULAR A OTRA

1. Calcula la pendiente m_1 de la recta dada. Si viene en forma general $ax + by + d = 0$, es $m_1 = -\frac{a}{b}$.
2. Elige la pendiente de la recta pedida: $m = m_1$ si es **paralela**, $m = -\frac{1}{m_1}$ si es **perpendicular**.
3. Sustituye en $y - y_0 = m(x - x_0)$ con el punto (x_0, y_0) por el que debe pasar.
4. Escribe la ecuación en la forma que pida el enunciado: $y = mx + n$ o $ax + by + d = 0$ con a, b, d enteros.
5. Comprueba: el punto dado debe cumplir la ecuación y la pendiente debe tener la relación correcta con m_1 .

NOTA • CON LA CPG

En las dos pruebas del examen puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Dibuja la recta dada y la que has hallado en una ventana con los ejes a la misma escala: si no, dos rectas perpendiculares no parecerán formar un ángulo recto. Comprueba visualmente que la recta pasa por el punto y que es paralela (no se cortan) o perpendicular (forman una «L»). Si te piden el punto donde se cortan dos rectas, puedes usar la herramienta de intersección de la gráfica o el módulo de sistemas de ecuaciones. En cualquier caso, escribe en tu respuesta la pendiente que has usado y la ecuación punto-pendiente: un resultado sin planteamiento puede perder puntos.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Calles de un barrio

En el plano de un barrio (una unidad equivale a 100 m) hay tres calles rectas con estas ecuaciones:

$$r : y = -\frac{2}{5}x + 1 \quad s : 2x + 5y - 10 = 0 \quad t : 5x - 2y + 3 = 0$$

- Halla la pendiente de cada calle.
- Indica qué calles son paralelas y qué parejas son perpendiculares.

a) La calle r ya está en forma explícita: $m_r = -\frac{2}{5}$.

Para s despejamos y : $5y = -2x + 10$, luego $y = -\frac{2}{5}x + 2$ y $m_s = -\frac{2}{5}$.

Para t : $2y = 5x + 3$, luego $y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$ y $m_t = \frac{5}{2}$.

b) r y s tienen la misma pendiente $-\frac{2}{5}$ y distinta ordenada en el origen (1 y 2): son **paralelas**.

Comprobamos el producto con t : $-\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = -1$. Por tanto $t \perp r$ y, como s tiene la misma pendiente que r , también $t \perp s$.

Las parejas perpendiculares son $r-t$ y $s-t$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Una tubería que hay que acompañar

En un mapa con unidades de 1 km, una tubería de agua sigue la recta $L : 3x + 4y - 12 = 0$. Se quiere construir, desde el depósito situado en $P(5, -2)$, una conducción paralela a la tubería y un camino de acceso perpendicular a ella.

- Halla la ecuación de la conducción (recta por P paralela a L) en la forma $ax + by + d = 0$ con a , b y d enteros y $a > 0$.
- Halla la ecuación del camino (recta por P perpendicular a L) en la misma forma.

La pendiente de L es $m_L = -\frac{3}{4}$.

a) Paralela: misma pendiente, $m = -\frac{3}{4}$. Con el punto $P(5, -2)$:

$$y - (-2) = -\frac{3}{4}(x - 5) \Rightarrow 4y + 8 = -3x + 15 \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$$

Comprobación: $3 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) = 15 - 8 = 7$, así que P cumple la ecuación.

b) Perpendicular: $m = -\frac{1}{-3/4} = \frac{4}{3}$. Con el punto P :

$$y + 2 = \frac{4}{3}(x - 5) \Rightarrow 3y + 6 = 4x - 20 \Rightarrow 4x - 3y - 26 = 0$$

Comprobación: $4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 20 + 6 = 26$. Además $(-\frac{3}{4}) \cdot \frac{4}{3} = -1$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Los caminos de un parque triangular

Un parque tiene forma de triángulo con vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 3)$ y $C(0, 7)$ en un plano con unidades de 100 m. Se quieren abrir dos caminos rectos: uno desde C perpendicular al lado AB y otro desde B perpendicular al lado AC .

- Halla la ecuación del camino que parte de C en la forma $ax + by + d = 0$ con a, b, d enteros y $a > 0$.
- Halla la ecuación del camino que parte de B en la misma forma.
- Los caminos se cruzan en el punto H . Halla sus coordenadas.
- Calcula el producto de las pendientes de HA y BC e interpreta el resultado.

[FIGURA mai-t4-a3-parque: Plano cartesiano con cuadrícula, ejes x e y rotulados (x de -3 a 6, y de -1 a 8). Triángulo ABC con vértices marcados como puntos y rotulados: $A(-2, 1)$, $B(4, 3)$ y $C(0, 7)$. Lados dibujados en gris. Desde C , una recta azul que baja hasta cortar el lado AB ; desde B , una recta roja hacia el lado AC . Ambas rectas se cortan en el punto $H(1, 4)$ rotulado en el interior del triángulo. Pequeños cuadraditos de ángulo recto donde cada recta corta al lado al que es perpendicular. Segmento punteado de A a H .]

a) La pendiente de AB es $m_{AB} = \frac{3-1}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. El camino desde C es perpendicular a AB , así que su pendiente es -3 . Por $C(0, 7)$:

$$y - 7 = -3(x - 0) \Rightarrow y = -3x + 7 \Rightarrow 3x + y - 7 = 0$$

b) La pendiente de AC es $m_{AC} = \frac{7-1}{0-(-2)} = \frac{6}{2} = 3$. El camino desde B es perpendicular a AC : pendiente $-\frac{1}{3}$. Por $B(4, 3)$:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y - 9 = -x + 4 \Rightarrow x + 3y - 13 = 0$$

c) El punto H cumple las dos ecuaciones. De la primera, $y = 7 - 3x$. Sustituyendo en la segunda:

$$x + 3(7 - 3x) - 13 = 0 \Rightarrow x + 21 - 9x - 13 = 0 \Rightarrow -8x + 8 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Entonces $y = 7 - 3 = 4$. Luego $H = (1, 4)$. (Con la CPG basta con dibujar las dos rectas y pedir la intersección; comprueba que coincide.)

d) La pendiente de HA es $\frac{4-1}{1-(-2)} = 1$ y la de BC es $\frac{7-3}{0-4} = -1$. El producto es $1 \cdot (-1) = -1$, así que $HA \perp BC$: el camino que uniría A con H sería perpendicular al lado BC . Los tres caminos desde cada vértice, perpendiculares al lado opuesto, se cruzan en un único punto, H .

Para el examen: en cada apartado puntúan el cálculo de la pendiente, el uso de la relación $m_1 m_2 = -1$ y la ecuación final en la forma pedida. En el apartado c) deja escrito el sistema que resuelves, aunque lo hagas con la CPG.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · INVERTIR LA PENDIENTE PERO OLVIDAR EL SIGNO

Para una recta de pendiente $\frac{2}{3}$, la perpendicular tiene pendiente $-\frac{3}{2}$, no $\frac{3}{2}$. Hay que hacer las dos cosas: invertir la fracción y cambiar el signo. Antes de seguir, multiplica las dos pendientes: si no sale -1 , hay un fallo. El error contrario también aparece: cambiar el signo sin invertir ($-\frac{2}{3}$), que no es perpendicular sino otra recta cualquiera.

ERROR TÍPICO · LEER MAL LA PENDIENTE EN LA FORMA GENERAL

En $3x + 4y - 12 = 0$ la pendiente no es 3 ni -3 : es $-\frac{3}{4}$. Hay que despejar y (o usar $m = -\frac{a}{b}$) antes de comparar. Es la causa más habitual de confundir dos rectas paralelas con perpendiculares en el examen, y de ahí a una ecuación final que no pasa por el punto pedido.

ERROR TÍPICO · CREER QUE MISMA PENDIENTE BASTA PARA SER PARALELAS

Si dos rectas tienen la misma pendiente y la misma ordenada en el origen son la misma recta, no «dos rectas paralelas». Para que sean paralelas distintas, la ordenada en el origen (o el término d en forma general) debe ser diferente. Comprueba además que el punto por el que pasa la paralela que has hallado no esté ya en la recta dada.

Resumen

- Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente, $m_1 = m_2$ (y distinta ordenada en el origen; si no, coinciden).
- Dos rectas son **perpendiculares** si $m_1 \cdot m_2 = -1$, es decir, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$: se invierte la pendiente y se cambia el signo.
- En forma general, $ax + by + d = 0$ tiene pendiente $-\frac{a}{b}$; las rectas $ax + by + d = 0$ y $bx - ay + d' = 0$ son perpendiculares.
- Las rectas verticales ($x = k$) y horizontales ($y = c$) se tratan aparte: dos verticales son paralelas y una vertical es perpendicular a una horizontal.
- Para hallar la recta por (x_0, y_0) paralela o perpendicular a otra: pendiente m_1 de la dada, pendiente m de la pedida, y $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Comprueba siempre que el punto cumple la ecuación y que el producto o la igualdad de pendientes es correcto; con la CPG, dibuja ambas rectas con los ejes a la misma escala.

APARTADO 4

Distancia de un punto a una recta y mediatriz

IDEA CLAVE

Dos situaciones aparecen una y otra vez en geometría de coordenadas: ¿cuál es el camino más corto desde un punto hasta una carretera, una tubería o una pared?, y ¿dónde están los puntos que quedan a la misma distancia de dos lugares? Las dos se resuelven con la misma herramienta: una recta perpendicular. En el examen del IB son la base de los diagramas de Voronói y de los problemas de ubicación.

La distancia más corta de un punto a una recta

Un punto A y una recta r que no pasa por él. Desde A puedes llegar a r por infinitos caminos rectos, pero uno solo es el más corto: el que corta a la recta formando un ángulo recto.

DEFINICIÓN • DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La **distancia** de un punto A a una recta r es la longitud del segmento AD , donde D es el punto de r tal que AD es **perpendicular** a r . Es la distancia más corta de A a cualquier punto de la recta. El punto D se llama pie de la perpendicular.

[FIGURA mai-t4-a4-distancia-perpendicular: plano cartesiano con ejes y cuadrícula suave. Una recta r descendente (pendiente negativa) dibujada en azul y rotulada « r ». Un punto A en rojo situado arriba a la derecha de la recta, rotulado « A ». El segmento perpendicular desde A hasta la recta en trazo grueso rojo, que corta a r en un punto D rotulado « D », con un pequeño cuadrado en D que marca el ángulo recto. Dos segmentos finos grises y discontinuos desde A hasta otros dos puntos cualesquiera de r (uno a cada lado de D), rotulados «más largos que AD ». Sobre el segmento grueso, rótulo « $d = AD$, distancia más corta».]

¿Por qué es la más corta? Si tomas otro punto E de la recta, el triángulo ADE es rectángulo en D y AE es su hipotenusa, que siempre es mayor que el cateto AD .

Para calcularla no hace falta una fórmula nueva. Solo necesitas rectas perpendiculares (ya sabes que sus pendientes cumplen $m_1 \cdot m_2 = -1$) y la distancia entre dos puntos.

MÉTODO • DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

1. Halla la pendiente de r (despeja y si está en forma general $ax + by + d = 0$).
2. Calcula la pendiente de la perpendicular: la inversa cambiada de signo.
3. Escribe la ecuación de la recta que pasa por A con esa pendiente.
4. Halla el punto D donde se cortan las dos rectas: resuelve el sistema de las dos ecuaciones, con la CPG o a mano.
5. Calcula la distancia entre A y D con $d = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$.

NOTA • CON LA CPG

En el paso 4 usa el módulo de ecuaciones de la CPG, en sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Pasa las dos rectas a la forma $ax + by = c$ y teclea los coeficientes. Si al final prefieres no calcular la raíz a mano, la CPG la hace directamente: escribe la expresión completa de la distancia con las coordenadas de A y de D . Anota siempre el punto D y la raíz con los números sustituidos antes del resultado decimal.

La mediatriz de un segmento

Ahora tienes dos puntos A y B y buscas los puntos del plano que están a la misma distancia de ambos.

DEFINICIÓN • MEDIATRIZ (BISECTRIZ PERPENDICULAR) DE UN SEGMENTO

La **mediatriz** del segmento AB (en el IB también se llama «bisectriz perpendicular») es la recta que pasa por el **punto medio** M de AB y es **perpendicular** a AB .

PROPIEDAD • LOS PUNTOS DE LA MEDIATRIZ EQUIDISTAN DE LOS EXTREMOS

Un punto está en la mediatriz de AB si y solo si está a la misma distancia de A que de B . Es decir, P pertenece a la mediatriz si $PA = PB$.

La intuición: si P está en la mediatriz, los triángulos PMA y PMB son rectángulos en M , comparten el cateto PM y tienen el otro cateto igual ($MA = MB$). Por Pitágoras, sus hipotenusas PA y PB miden lo mismo.

[FIGURA mai-t4-a4-mediatriz-equidistan: segmento horizontal AB , con A a la izquierda y B a la derecha, ambos puntos en azul y rotulados. En el centro del segmento, el punto medio M rotulado «M», con una marca de igualdad (una pequeña raya) en cada mitad que indique que $AM = MB$. Una recta vertical que pasa por M , dibujada en rojo, rotulada «mediatriz», con un pequeño cuadrado de ángulo recto en M . Sobre la mediatriz, dos puntos P (arriba, a distancia media) y Q (abajo), rotulados. Segmentos finos discontinuos desde P hasta A y B , y desde Q hasta A y B ; rótulos « $PA = PB$ » cerca de P y « $QA = QB$ » cerca de Q .]

Para hallar su ecuación sigue el mismo plan de siempre: un punto y una pendiente.

MÉTODO • ECUACIÓN DE LA MEDIATRIZ DE AB

1. Halla el punto medio $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.
2. Calcula la pendiente de la recta AB : $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
3. La pendiente de la mediatriz es $m = -\frac{1}{m_{AB}}$. Si AB es horizontal, la mediatriz es vertical ($x = x_M$); si AB es vertical, es horizontal ($y = y_M$).
4. Escribe la ecuación punto-pendiente con M y m , y déjala en la forma que pida el enunciado ($y = mx + n$ o $ax + by + d = 0$).

Fíjate en que la mediatriz **no** pasa por A ni por B : pasa por el punto medio. Para comprobar tu ecuación, elige un punto de la recta y verifica que está a la misma distancia de A y de B .

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

El camino más corto hasta una carretera

Un campamento está en el punto $A(5, 4)$ de un mapa, con las unidades en kilómetros. Una carretera recta tiene la ecuación $2x + y - 4 = 0$.

- Halla el punto de la carretera más cercano al campamento.
- Calcula la distancia más corta del campamento a la carretera.

- La carretera tiene pendiente -2 (de $y = -2x + 4$). La perpendicular tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y pasa por A :

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 5) \Rightarrow x - 2y = -3$$

El punto más cercano es la intersección de $2x + y = 4$ con $x - 2y = -3$. Con la CPG (o por sustitución, $x = 2y - 3$) se obtiene $D(1, 2)$.

- La distancia más corta es AD :

$$d = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ km}$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Dos antenas y la mediatriz

Dos antenas de telefonía están en los puntos $A(-2, 5)$ y $B(4, 1)$ de un plano con las unidades en kilómetros. Una tercera estación debe estar a la misma distancia de las dos.

- Halla el punto medio del segmento AB .
- Halla la ecuación de la mediatriz de AB en la forma $y = mx + n$.
- La estación se coloca en el punto de la mediatriz cuya coordenada x vale 3. Halla su coordenada y .

- $M = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{5 + 1}{2} \right) = (1, 3).$

- La pendiente de AB es $\frac{1 - 5}{4 - (-2)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, así que la pendiente de la mediatriz es $\frac{3}{2}$. Con el punto M :

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

- Para $x = 3$: $y = \frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{3}{2} = 6$. El punto es $P(3, 6)$.

Comprobación: $PA^2 = (3 + 2)^2 + (6 - 5)^2 = 26$ y $PB^2 = (3 - 4)^2 + (6 - 1)^2 = 26$. Están a la misma distancia.

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Un parque de bomberos equidistante

Dos pueblos están en $A(0, 6)$ y $B(8, 2)$ (unidades en kilómetros). Una carretera recta tiene la ecuación $x + y - 11 = 0$. Se quiere construir un parque de bomberos **en la carretera** y a la misma distancia de los dos pueblos.

- Halla la ecuación de la mediatriz del segmento AB en la forma $y = mx + n$.
- Halla las coordenadas del punto de la carretera donde debe ir el parque.
- Calcula la distancia del parque a cada pueblo.
- Se quiere unir el pueblo A con la carretera por el camino más corto. Calcula su longitud.

[FIGURA mai-t4-a4-bomberos: plano cartesiano con ejes x e y graduados de 0 a 10. Puntos $A(0,6)$ y $B(8,2)$ en azul con sus rótulos y coordenadas. El segmento AB en gris. La mediatriz $y = 2x - 4$ en rojo, rotulada. La carretera $x + y - 11 = 0$ en negro, rotulada «carretera». Las dos rectas se cortan en el punto $P(5,6)$, marcado en verde y rotulado «parque $P(5, 6)$ ». Segmentos discontinuos PA y PB . Además, el pie $D(2,5; 8,5)$ de la perpendicular desde A hasta la carretera, con el segmento AD en trazo grueso y un pequeño cuadrado de ángulo recto en D , rotulado «camino más corto».]

- El punto medio es $M = (4, 4)$. La pendiente de AB es $\frac{2-6}{8-0} = -\frac{1}{2}$ y la de la mediatriz, 2:
$$y - 4 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 4$$
- El parque debe estar en la mediatriz **y** en la carretera. Resolvemos el sistema $y = 2x - 4$, $x + y = 11$ con la CPG (o sustituyendo: $x + 2x - 4 = 11 \Rightarrow x = 5$). Resulta $P(5, 6)$.
- $PA = \sqrt{(5-0)^2 + (6-6)^2} = 5$ km. Comprobamos con $PB = \sqrt{(5-8)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$ km. Coinciden, como debe ser.
- La carretera tiene pendiente -1 , así que la perpendicular por A tiene pendiente 1: $y = x + 6$. Su corte con $x + y = 11$ es $x + x + 6 = 11$, es decir $D(2,5; 8,5)$. Entonces

$$d = \sqrt{(2,5-0)^2 + (8,5-6)^2} = \sqrt{12,5} = 3,54 \text{ km}$$

Para el examen: puntúan por separado el punto medio, la pendiente perpendicular, la ecuación y el sistema. Escribe qué recta cortas con cuál en cada apartado y deja la raíz con los números antes del decimal. Comprobar $PA = PB$ es una buena forma de detectar un error.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • USAR LA PENDIENTE DE LA RECTA EN LUGAR DE LA PERPENDICULAR

Para hallar la distancia más corta, algunos alumnos trazan por A una recta **paralela** a r (misma pendiente) o con la pendiente cambiada de signo pero sin invertir (por ejemplo, $+2$ cuando r tiene pendiente -2). La perpendicular necesita las dos cosas: invertir y cambiar de signo, $m' = -\frac{1}{m}$. Comprueba siempre que $m \cdot m' = -1$.

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR LA MEDIATRIZ CON LA RECTA AB O CON UNA RECTA POR A

La mediatriz no es la recta que une A y B ni pasa por A . Pasa por el **punto medio** y es **perpendicular** a AB . Si tu ecuación se cumple para las coordenadas de A o de B , la has planteado mal. Para comprobarla, toma un punto cualquiera de ella y verifica que $PA = PB$.

ERROR TÍPICO · MEDIR LA DISTANCIA HASTA UN PUNTO CUALQUIERA DE LA RECTA

Calcular la distancia de A a un punto de r que se ve cercano, por ejemplo el corte de r con un eje, no da la distancia más corta: solo da una distancia más larga. Hay que hallar el punto D exacto donde la perpendicular por A corta a r .

Resumen

- La distancia de un punto A a una recta r es la longitud del segmento perpendicular AD (con D en r); es el camino más corto.
- Método: pendiente de r , pendiente perpendicular, recta por A , punto D de corte (con la CPG) y distancia AD .
- La mediatriz de AB es la recta perpendicular a AB por su punto medio M .
- Todos los puntos de la mediatriz están a la misma distancia de A que de B ($PA = PB$), y solo ellos.
- Pasos: punto medio, pendiente de AB , pendiente perpendicular, ecuación punto-pendiente.
- Para ubicar un punto equidistante de A y B sobre otra recta, se cortan la mediatriz y esa recta.
- Comprueba tus respuestas: $m \cdot m' = -1$ y $PA = PB$.

APARTADO 5

Diagramas de Voronói

IDEA CLAVE

Un diagrama de Voronói reparte el plano en zonas: cada zona agrupa los puntos que están más cerca de un sitio (una tienda, una antena, un hospital) que de cualquier otro. Se construye con mediatrices, que ya sabes calcular, y sirve para responder preguntas del tipo «¿qué centro me queda más cerca?» o «¿dónde está el punto más alejado de todos?». Es un contenido muy característico de Aplicaciones e Interpretación y aparece en el examen del IB con un contexto real y un dibujo.

Qué es un diagrama de Voronói

Imagina varias farmacias repartidas por una ciudad. Cada vecino va a la que le queda más cerca. Si coloreas el mapa según la farmacia a la que iría cada punto, obtienes un **diagrama de Voronói**.

DEFINICIÓN • DIAGRAMA DE VORONÓI

Dado un conjunto de puntos del plano, llamados **sitios**, el diagrama de Voronói divide el plano en **celdas**, una por sitio. La celda de un sitio está formada por todos los puntos del plano que están más cerca de ese sitio que de cualquiera de los demás (la distancia es la distancia ordinaria entre dos puntos).

Con dos sitios el reparto es muy simple. Los puntos que están a la misma distancia de A y de B forman la **mediatriz** del segmento AB : la recta perpendicular a AB que pasa por su punto medio. Esa recta separa el plano en dos mitades, la de los puntos más cercanos a A y la de los más cercanos a B .

[FIGURA mai-t4-a5-dos-sitios: Ejes de coordenadas con cuadrícula, ventana x de 0 a 10 e y de 0 a 7. Sitios $A(2, 1)$ y $B(8, 5)$, marcados con un punto y su letra. Segmento AB en trazo fino que une los dos sitios. Su punto medio $M(5, 3)$ marcado con un punto pequeño y la etiqueta M . La mediatriz de AB , de ecuación $y = -1,5x + 10,5$, dibujada en trazo grueso desde el punto $(7/3, 7)$ en el borde superior (aproximadamente $(2,33; 7)$) hasta el punto $(7, 0)$ en el borde inferior; pasa por M . Marca de ángulo recto en M entre el segmento AB y la mediatriz. La zona a la izquierda de la mediatriz (la que contiene a A) coloreada en un tono suave y la zona derecha (la que contiene a B) en otro tono suave. Etiquetas «celda de A » y «celda de B ».]

Los puntos de la mediatriz están justo a medio camino: pertenecen a los dos territorios a la vez, y por eso la mediatriz es la **frontera** entre las dos celdas.

Tres sitios: aparece el vértice

Con tres sitios A , B y C hay tres mediatrices: la de AB , la de AC y la de BC . Las tres se cortan en un único punto, equidistante de los tres sitios. Cada mediatriz solo se usa a partir de ese punto, en el lado donde separa de verdad a dos sitios, y el plano queda partido en tres celdas.

[FIGURA mai-t4-a5-tres-sitios: Ventana x de 0 a 10, y de 0 a 9, con cuadrícula suave. Sitios $P(2, 2)$, $Q(8, 2)$ y $R(5, 7)$ marcados con un punto y su letra. Vértice $V(5; 3,6)$ marcado con un punto destacado y la etiqueta «vértice $V(5; 3,6)$ ». Tres aristas en trazo grueso que parten de V : (1) hacia abajo en vertical, $x = 5$, desde V hasta $(5, 0)$ en el borde inferior; (2) la mediatriz de PR , $y = -0,6x + 6,6$, desde V hasta $(0; 6,6)$ en el borde izquierdo; (3) la mediatriz

de QR, $y = 0,6x + 0,6$, desde V hasta (10; 6,6) en el borde derecho. Las tres celdas coloreadas en tonos suaves distintos: la de P (izquierda), la de Q (derecha) y la de R (arriba). Circunferencia de trazo discontinuo con centro V y radio 3,4 que pasa por P, Q y R. Etiquetas con flechas que señalan un «sitio» (P), una «celda» (la de Q), una «arista» (el tramo de $x = 5$) y el «vértice» (V).]

DEFINICIÓN · ELEMENTOS DE UN DIAGRAMA DE VORONÓI

- **Sitios:** los puntos dados.
- **Celdas:** las regiones; cada una contiene a su sitio y a todos los puntos que le quedan más cerca a él que a los demás.
- **Aristas:** los segmentos (o semirrectas) que separan dos celdas. Cada arista es un trozo de la mediatriz de dos sitios vecinos.
- **Vértices:** los puntos donde se encuentran varias aristas. Un vértice está a la **misma distancia de tres sitios** (o más), y por eso es el centro de una circunferencia que pasa por ellos.

PROPIEDAD · EL VÉRTICE ES EQUIDISTANTE DE TRES SITIOS

Si tres sitios A , B y C no están alineados, sus tres mediatrices se cortan en un único punto V y se cumple $VA = VB = VC$. Para hallarlo basta cortar **dos** mediatrices; la tercera pasa por el mismo punto, así que sirve para comprobar el resultado.

La razón es sencilla: si V está en la mediatriz de AB , entonces $VA = VB$; si además está en la de AC , entonces $VA = VC$, y por tanto $VB = VC$, es decir, V también está en la mediatriz de BC .

La mediatriz de dos sitios

Todo el trabajo del diagrama es calcular mediatrices. Es el mismo procedimiento que en el apartado de rectas perpendiculares.

MÉTODO · ECUACIÓN DE LA MEDIATRIZ DE A Y B

1. Calcula el **punto medio** M de AB : la media de las coordenadas, $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.
2. Calcula la **pendiente** de AB : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
3. La mediatriz es perpendicular a AB , así que su pendiente es $m' = -\frac{1}{m}$ (el inverso cambiado de signo).
4. Escribe la recta que pasa por M con pendiente m' : $y - y_M = m'(x - x_M)$, y simplifica a $y = m'x + n$.
5. Casos especiales: si AB es horizontal, la mediatriz es la recta vertical $x = x_M$; si AB es vertical, es la horizontal $y = y_M$.

Una comprobación rápida: cualquier punto de la mediatriz debe estar a la misma distancia de A que de B . Con la mediatriz de la primera figura, $A(2, 1)$ y $B(8, 5)$, el punto medio es $M(5, 3)$, la pendiente de AB es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ y la de la mediatriz es $-\frac{3}{2}$, de donde $y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 5)$, es decir, $y = -1,5x + 10,5$.

Dibujar el diagrama con más de tres sitios

Con muchos sitios dibujar todas las mediatrices a la vez produce un lío de rectas. Conviene trabajar por orden.

MÉTODO • CONSTRUIR UN DIAGRAMA DE VORONÓI

1. Dibuja los sitios en unos ejes con una escala cómoda.
2. Elige un sitio y mira cuáles son sus **vecinos** (los que le rodean). Calcula la mediatriz de cada pareja de vecinos.
3. Halla los **vértices**: son los puntos donde se cortan tres mediatrices. Comprueba cada vértice calculando su distancia a los tres sitios.
4. Conserva de cada mediatriz solo el tramo que de verdad sirve de frontera: el que va de un vértice a otro, o de un vértice hasta el borde del dibujo. Borra el resto, porque ahí hay un tercer sitio más cercano.
5. Marca cada celda y comprueba que contiene a su sitio.

La regla para saber si un trozo de mediatriz es frontera real es la de siempre: un punto de la mediatriz de A y B pertenece al diagrama solo si ningún otro sitio está **más cerca** de él que A y B . En un examen suele bastar el dibujo y los vértices que te pidan.

Qué zona queda más cerca de un punto

Una vez hecho el diagrama, decidir cuál es el sitio más cercano a un punto P es tan sencillo como ver **en qué celda cae P** . Esta idea se llama **vecino más cercano**: el dato que tiene un punto es el del sitio de su celda. Se usa, por ejemplo, para asignar a cada vivienda la antena que le da señal o el centro de salud que le toca.

DEFINICIÓN • MÉTODO DEL VECINO MÁS CERCANO

Para un punto P cualquiera, el sitio más cercano es el de la celda en la que está P . Se puede comprobar de dos maneras: situándolo en el diagrama o calculando las distancias de P a cada sitio y quedándose con la menor.

Si no tienes el diagrama completo, basta calcular distancias con $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Un punto de una arista está a igual distancia de dos sitios y un vértice, de tres: en ese caso el enunciado debe decir qué hacer.

Dónde poner un servicio que debe estar lejos de todos

Hay problemas en sentido contrario: se busca el lugar **más alejado** de todos los sitios, por ejemplo para colocar un vertedero o una planta de residuos lejos de los pueblos.

PROPIEDAD • PUNTO MÁS ALEJADO DE TODOS LOS SITIOS

En el diagrama de Voronói, el candidato a estar lo más lejos posible de todos los sitios es un **vértice**: allí la distancia al sitio más cercano es máxima en su entorno. Para elegir entre varios vértices, calcula la distancia de cada uno a sus tres sitios (es la misma) y quédate con el de mayor valor.

NOTA • SI EL TERRENO ESTÁ LIMITADO

Cuando el problema acota la zona (un recinto rectangular, una provincia), las esquinas del recinto y los puntos donde las aristas cortan el borde también son candidatos. Mira lo que pide el enunciado: si dice «en un vértice del diagrama», solo cuentan los vértices; si dice «en cualquier punto del recinto», comprueba también esas esquinas.

Añadir un sitio nuevo

Si se abre una tienda o se instala una antena, el diagrama cambia, pero no del todo.

- El nuevo sitio **se queda con una celda** propia, formada por los puntos que ahora le quedan más cerca a él que al resto.
- Esa celda se la **quita a sus vecinos**: las celdas de los sitios que no son vecinos del nuevo no cambian.
- Aparecen aristas nuevas, que son trozos de las mediatrices entre el sitio nuevo y cada uno de sus vecinos, y desaparecen tramos de aristas y vértices que quedan dentro de la celda nueva.

Para rehacer el diagrama, calcula las mediatrices entre el sitio nuevo y sus vecinos más próximos, halla los vértices nuevos (cortes de mediatrices que vuelvan a ser equidistantes de tres sitios) y borra lo que ahora queda dentro de la celda del sitio nuevo.

NOTA • CON LA CPG

En las dos pruebas del examen puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Para un vértice, escribe las dos mediatrices y halla su punto de corte con la opción de intersección de la gráfica, o resuelve el sistema con el módulo de ecuaciones. También puedes dibujar las mediatrices en la CPG para comprobar el esquema. Aun así, escribe siempre en el papel el punto medio, la pendiente y la ecuación de cada mediatriz: el IB puntúa el planteamiento, no solo el resultado.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Tres centros de salud

En el plano de una comarca (unidades de 1 km) hay tres centros de salud: $A(1, 2)$, $B(7, 2)$ y $C(3, 6)$.

- Halla la ecuación de la mediatriz de B y C en la forma $y = mx + n$. Da la pareja (m, n) .
- Halla las coordenadas del vértice del diagrama de Voronói, es decir, el punto equidistante de los tres centros.
- Calcula la distancia del vértice a cada centro.
- Un vecino vive en el punto $P(5, 5)$. ¿A qué centro le toca ir si cada vecino va al más cercano? Responde con la letra del centro.

- El punto medio de BC es $M = \left(\frac{7+3}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = (5, 4)$. La pendiente de BC es $\frac{6-2}{3-7} = -1$, así que la de la mediatriz es 1. La recta es $y - 4 = 1 \cdot (x - 5)$, es decir, $y = x - 1$.
- La mediatriz de A y B es vertical, porque AB es horizontal: pasa por el punto medio $(4, 2)$, luego es $x = 4$. Cortando con $y = x - 1$: $y = 4 - 1 = 3$. El vértice es $V(4, 3)$. Como comprobación, la mediatriz de AC (punto medio $(2, 4)$, pendiente $-\frac{1}{2}$) es $y = -\frac{1}{2}x + 5$, y en $x = 4$ da $y = 3$: pasa por V .
- $VA = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$. Igual, $VB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ y $VC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. La distancia es $\sqrt{10} \approx 3,16$ km.
- Se comparan distancias: $PA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $PB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,61$ y $PC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2,24$. El más cercano es C . Se confirma con el diagrama: P queda por encima de la recta $y = x - 1$ (porque $5 > 5 - 1$), del lado de C .

[FIGURA mai-t4-a5-ejemplo1: Ventana x de 0 a 8, y de 0 a 8, con cuadrícula. Sitios A(1, 2), B(7, 2) y C(3, 6) con punto y letra. Vértice V(4, 3) marcado con un punto destacado y la etiqueta V(4, 3). Tres aristas en trazo grueso que parten de V: vertical $x = 4$ hacia abajo hasta (4, 0); la mediatriz de AC, $y = -0,5x + 5$, hacia arriba y a la izquierda hasta (0, 5); la mediatriz de BC, $y = x - 1$, hacia arriba y a la derecha hasta (8, 7). Las tres celdas coloreadas en tonos suaves: celda de A a la izquierda, celda de B a la derecha y abajo, celda de C arriba. Punto P(5, 5) marcado con una cruz y la etiqueta P, dentro de la celda de C.]

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un vertedero lejos de tres pueblos

Tres pueblos están situados, en un mapa con unidades de 1 km, en $A(10, 10)$, $B(70, 10)$ y $C(40, 50)$. Se quiere colocar un vertedero en un **vértice del diagrama de Voronói** de los tres pueblos, para que quede lo más lejos posible del pueblo más cercano.

- Halla la ecuación de la mediatriz de A y C en la forma $y = mx + n$. Da la pareja (m, n) .
- Halla las coordenadas del vértice del diagrama.
- Calcula a qué distancia queda el vertedero de cada pueblo.

- El punto medio de AC es $M = (25, 30)$. La pendiente de AC es $\frac{50 - 10}{40 - 10} = \frac{4}{3}$ y la de la mediatriz es $-\frac{3}{4}$. La recta es $y - 30 = -\frac{3}{4}(x - 25)$, que da $y = -\frac{3}{4}x + \frac{195}{4}$ (es decir, $y = -0,75x + 48,75$).

- A y B están a la misma altura, así que su mediatriz es vertical y pasa por el punto medio (40, 10): es $x = 40$. Sustituyendo en la mediatriz de AC :

$$y = -\frac{3}{4} \cdot 40 + \frac{195}{4} = -30 + \frac{195}{4} = \frac{75}{4} = 18,75$$

El vértice es $V\left(40, \frac{75}{4}\right) = (40; 18,75)$. Es el único vértice: con tres sitios solo hay uno.

- Distancia a A : $\sqrt{(40 - 10)^2 + (18,75 - 10)^2} = \sqrt{900 + 76,5625} = \sqrt{976,5625} = 31,25$ km. Con C : $\sqrt{0^2 + (50 - 18,75)^2} = 31,25$ km, y con B sale lo mismo por simetría. El vertedero queda a 31,25 km de los tres pueblos.

[FIGURA mai-t4-a5-ejemplo2: Ventana x de 0 a 80 e y de 0 a 60 (recinto rectangular), con cuadrícula cada 10 unidades. Pueblos $A(10, 10)$, $B(70, 10)$ y $C(40, 50)$ con punto y letra. Vértice $V(40; 18,75)$ marcado con un cuadrado o símbolo destacado y la etiqueta «Vertedero $V(40; 18,75)$ ». Tres aristas en trazo grueso que parten de V: $x = 40$ hacia abajo hasta (40, 0); la mediatriz de AC, $y = -0,75x + 48,75$, hacia arriba y a la izquierda hasta (0; 48,75); la mediatriz de BC, $y = 0,75x - 11,25$, hacia arriba y a la derecha hasta (80; 48,75). Tres celdas coloreadas en tonos suaves: celda de A (izquierda), celda de B (derecha) y celda de C (arriba). Segmentos finos discontinuos de V a A, a B y a C con la etiqueta 31,25 km en uno de ellos.]

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Una cuarta estación de bomberos

En un mapa con unidades de 1 km hay tres estaciones de bomberos: $A(2, 1)$, $B(8, 1)$ y $C(5, 7)$. Se construye una cuarta estación en $D(5, 4)$.

- Halla el vértice V del diagrama de Voronói de las tres estaciones A , B y C .
- Tras construir D , ¿sigue siendo V un vértice del nuevo diagrama? Responde «sí» o «no» y justifícalo.
- Halla los vértices del diagrama de las cuatro estaciones (son tres).
- Un incendio se declara en $P(3, 5)$. ¿Qué estación queda más cerca? Responde con la letra.

- a) AB es horizontal, así que su mediatriz es $x = 5$. La de AC : punto medio $(3,5; 4)$, pendiente de AC igual a $\frac{6}{3} = 2$, pendiente de la mediatriz $-\frac{1}{2}$, luego $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 3,5)$. En $x = 5$:

$$y = 4 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 = \frac{13}{4}$$

El vértice es $V(5, \frac{13}{4}) = (5; 3,25)$, a una distancia de $3,25 + \dots$ de los sitios: $VA = \sqrt{3^2 + 2,25^2} = 3,75$ (y lo mismo para B y C).

- No. La distancia de V a D es $|4 - 3,25| = 0,75$, mucho menor que $3,75$. Entonces V queda más cerca de D que de A , B y C , y un vértice debe ser equidistante de tres sitios **sin que haya ninguno más cerca**. Por tanto V desaparece y queda dentro de la celda de D .
- Los vértices son puntos equidistantes de tres sitios sin ningún otro más cerca. Buscamos las mediatrices con D :

- AD : punto medio $(3,5; 2,5)$, pendiente de AD igual a $\frac{3}{3} = 1$, mediatriz $y = -x + 6$.
- BD : punto medio $(6,5; 2,5)$, pendiente de BD igual a -1 , mediatriz $y = x - 4$.
- CD : C y D tienen la misma abscisa, así que la mediatriz es horizontal por el punto medio $(5; 5,5)$: $y = 5,5$.
- BC : punto medio $(6,5; 4)$, pendiente -2 , mediatriz $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$. Por simetría, AC es $y = -\frac{1}{2}x + \frac{23}{4}$.

Los cortes son: $x = 5$ con $y = -x + 6$ da $(5, 1)$ (equidistante de A , B y D : $VA = VB = VD = 3$); $y = -x + 6$ con $y = 5,5$ da $x = \frac{1}{2}$, es decir $(\frac{1}{2}, \frac{11}{2})$ (equidistante de A , C y D); $y = x - 4$ con $y = 5,5$ da $(\frac{19}{2}, \frac{11}{2})$ (equidistante de B , C y D). En los tres casos ningún otro sitio queda más cerca. Los vértices son $(5, 1)$, $(0,5; 5,5)$ y $(9,5; 5,5)$.

- $PA = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$, $PB = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$, $PC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ y $PD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. El menor es PD : la estación más cercana es D . Coincide con el diagrama: P está por debajo de la arista $y = 5,5$ y entre $y = -x + 6$ ($5 > -3 + 6$ es falso para $A\dots$) dentro de la celda de D .

[FIGURA mai-t4-a5-ej3-antes: Ventana x de 0 a 10, y de 0 a 9, con cuadrícula. Sitios $A(2, 1)$, $B(8, 1)$ y $C(5, 7)$ con punto y letra. Vértice $V(5; 3,25)$ destacado y etiquetado. Tres aristas en trazo grueso desde V : $x = 5$ hacia abajo hasta $(5, 0)$; la mediatriz de AC , $y = -0,5x + 5,75$, hasta $(0; 5,75)$; la mediatriz de BC , $y = 0,5x + 0,75$, hasta $(10; 5,75)$. Tres celdas coloreadas en tonos suaves: A a la izquierda, B a la derecha, C arriba.]

[FIGURA mai-t4-a5-ej3-despues: Misma ventana (x de 0 a 10, y de 0 a 9). Sitios $A(2, 1)$, $B(8, 1)$, $C(5, 7)$ y el nuevo sitio $D(5, 4)$, este último con color distinto y etiqueta «D nuevo». Aristas en trazo grueso: $x = 5$ desde $(5, 0)$ hasta el vértice $(5, 1)$; $y = -x + 6$ desde $(5, 1)$ hasta el vértice $(0,5; 5,5)$; $y = x - 4$ desde $(5, 1)$ hasta el vértice $(9,5; 5,5)$; la horizontal $y = 5,5$ desde $(0,5; 5,5)$ hasta $(9,5; 5,5)$; la mediatriz de AC , $y = -0,5x + 5,75$, desde $(0,5; 5,5)$ hasta $(0; 5,75)$ en el borde izquierdo; la mediatriz de BC , $y = 0,5x + 0,75$, desde $(9,5; 5,5)$ hasta $(10; 5,75)$ en el borde derecho. Vértices marcados con punto y sus coordenadas: $(5, 1)$, $(0,5; 5,5)$ y $(9,5; 5,5)$. Las cuatro celdas coloreadas en tonos suaves: A a la izquierda, B a la derecha, D en el centro (el triángulo grande que rodea a D , limitado por las aristas $y = -x + 6$, $y = x - 4$ y $y = 5,5$) y C arriba. El antiguo vértice $(5; 3,25)$ se muestra como un punto gris tachado dentro de la celda de D , con la etiqueta «desaparece». Punto $P(3, 5)$ marcado con una cruz en la celda de D .]

En el examen: en un problema de añadir un sitio se puntúa cada mediatriz bien planteada (punto medio, pendiente perpendicular), el corte de las rectas y la comprobación de que el vértice es equidistante de tres sitios sin otro más cerca. Comprueba siempre las distancias y no te quedes con un punto solo porque es un corte de dos rectas.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • USAR LA PENDIENTE DE AB EN VEZ DE LA PERPENDICULAR

La mediatriz no tiene la pendiente del segmento, sino la perpendicular: $m' = -\frac{1}{m}$. Si AB tiene pendiente 2, la mediatriz tiene $-\frac{1}{2}$, no 2 ni -2 . Otro fallo muy típico es hacer pasar la recta por uno de los sitios en lugar de por el **punto medio**. Calcula siempre el punto medio, la pendiente de AB , la perpendicular y comprueba con un punto cualquiera de la recta que está a igual distancia de los dos sitios.

ERROR TÍPICO • DEJAR LAS MEDIATRICES ENTERAS

Las mediatrices son rectas, pero las aristas del diagrama son **tramos** de ellas. Si dibujas la mediatriz de A y B completa, atraviesas celdas donde otro sitio está más cerca. Una vez hallados los vértices, conserva solo el tramo entre vértices (o desde un vértice hasta el borde) y borra el resto. Un buen filtro: la arista de A y B no puede atravesar la celda de un tercer sitio.

ERROR TÍPICO • CREER QUE UN NUEVO SITIO SOLO CAMBIA SU CELDA

Al añadir un sitio, su celda se la quita a sus vecinos, así que las celdas vecinas **también cambian**. Lo que no cambia son las celdas de los sitios que no son vecinos del nuevo. Además, se pierden vértices antiguos (los que quedan dentro de la nueva celda) y aparecen otros. No te limites a pintar la celda nueva: rehaz los límites de las celdas que rodean al sitio nuevo y revisa qué vértices se mantienen.

Resumen

- Un diagrama de Voronói divide el plano en **celdas**: la de cada **sitio** reúne los puntos más cercanos a él que a los demás.
- La frontera entre dos celdas vecinas es un trozo de la **mediatriz** de sus sitios: punto medio y pendiente perpendicular, $m' = -\frac{1}{m}$.
- Un **vértice** es el punto donde se encuentran varias aristas; es equidistante de tres sitios. Para hallarlo basta cortar dos mediatrices y comprobar con la tercera.
- Para ver qué sitio es el más cercano a un punto, mira en qué celda cae o compara distancias (vecino más cercano).
- El punto más alejado de todos los sitios se busca entre los vértices (y, si el terreno está limitado, también entre las esquinas del recinto).
- Al añadir un sitio, su celda se la quita a sus vecinos; se rehacen las aristas vecinas y desaparecen los vértices que quedan dentro.
- En el examen, escribe punto medio, pendiente y ecuación de cada mediatriz, y comprueba las distancias aunque uses la CPG.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 4

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

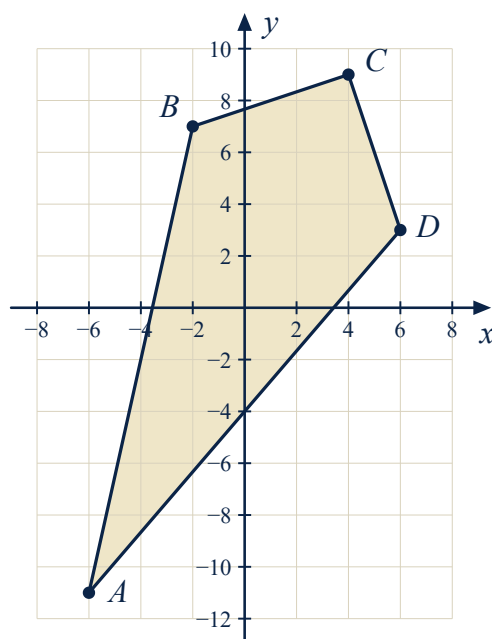
Distancia, punto medio y coordenadas

EJERCICIO 1

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2014

Los cuatro puntos $A(-6, -11)$, $B(-2, 7)$, $C(4, 9)$ y $D(6, 3)$ definen los vértices de una cometa.



x (de -8 a 8 , marcas cada 2) e y (de -12 a 10 , marcas cada 2), líneas de cuadrícula discontinuas cada 2 unidades. Cuadrilátero (cometa) de lados rectos con vértices rotulados: $A(-6, -11)$ abajo a la izquierda, $B(-2, 7)$ arriba a la izquierda del eje y , $C(4, 9)$ arriba a la derecha y $D(6, 3)$ a la derecha. Lados: AB , BC , CD y DA (este último atraviesa el eje y por $(0, -4)$ aproximadamente).">

a) Calcule la distancia entre los puntos B y D .

La distancia entre los puntos A y C es $\sqrt{500}$.

b) Calcule el área de la cometa $ABCD$.

a)

$$BD = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} \approx 8,94.$$

Resultado: $BD = \sqrt{80} \approx 8,94$

b)

1. Las diagonales de una cometa son perpendiculares: $m_{AC} = \frac{9 + 11}{4 + 6} = 2$ y $m_{BD} = \frac{3 - 7}{6 - 2} = -\frac{1}{2}$, con producto -1 .

2. Como además B y D están en lados opuestos de la recta AC , el área es la mitad del producto de las diagonales:

$$\text{Área} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{500} \cdot \sqrt{80}}{2} = \frac{\sqrt{40000}}{2} = \frac{200}{2} = 100.$$

Resultado: área de $ABCD = 100$

Resultado: a) $\sqrt{80} \approx 8,94$; b) 100

EJERCICIO 2

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2006

Se dan tres puntos $A(0, 4)$, $B(6, 0)$ y $C(8, 3)$.

- Calcule la pendiente de la recta AB .
- Encuentre las coordenadas del punto medio, M , del segmento AC .
- Calcule la longitud del segmento AC .
- Encuentre la ecuación de la recta BM dando su respuesta en la forma $ax + by + d = 0$ donde a , b y $d \in \mathbb{Z}$.
- Indique si la recta AB es perpendicular a la recta BC mostrando claramente su razonamiento.

a) Con $A(0, 4)$ y $B(6, 0)$:

$$m_{AB} = \frac{0 - 4}{6 - 0} = -\frac{2}{3} \approx -0,667.$$

Resultado: $m_{AB} = -\frac{2}{3}$

b) El punto medio se obtiene promediando las coordenadas de $A(0, 4)$ y $C(8, 3)$:

$$M = \left(\frac{0 + 8}{2}, \frac{4 + 3}{2} \right) = (4; 3,5).$$

Resultado: $M(4; 3,5)$

c) Longitud de AC :

$$AC = \sqrt{(8 - 0)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65} \approx 8,06.$$

Resultado: $AC = \sqrt{65} \approx 8,06$

d) Recta BM con $B(6, 0)$ y $M(4; 3,5)$.

- Pendiente: $m_{BM} = \frac{3,5 - 0}{4 - 6} = \frac{3,5}{-2} = -\frac{7}{4}$.
- Punto-pendiente con B : $y - 0 = -\frac{7}{4}(x - 6)$.
- Multiplicamos por 4: $4y = -7x + 42$.
- Pasamos todo al primer miembro: $7x + 4y - 42 = 0$.

Resultado: $7x + 4y - 42 = 0$

e) Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1 .

- Pendiente de AB : $-\frac{2}{3}$.
- Pendiente de BC , con $B(6, 0)$ y $C(8, 3)$: $\frac{3 - 0}{8 - 6} = \frac{3}{2}$.
- Producto: $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$.

Como el producto es -1 , la recta AB sí es perpendicular a la recta BC .

Resultado: a) $-\frac{2}{3}$; b) $M(4; 3,5)$; c) $\sqrt{65} \approx 8,06$; d) $7x + 4y - 42 = 0$; e) sí son perpendiculares, porque $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$

EJERCICIO 3 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

El punto medio, M , de la línea que une $A(s, 8)$ con $B(-2, t)$ tiene coordenadas $M(2, 3)$.

- Calcule los valores de s y t .
- Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a AB , que pasa por el punto M .

a) El punto medio tiene como coordenadas el promedio de las de los extremos.

- Coordenada x : $\frac{s + (-2)}{2} = 2 \Rightarrow s - 2 = 4 \Rightarrow s = 6$.
- Coordenada y : $\frac{8 + t}{2} = 3 \Rightarrow 8 + t = 6 \Rightarrow t = -2$.

Resultado: $s = 6, t = -2$

b) Ahora $A(6, 8)$ y $B(-2, -2)$.

- Pendiente de AB : $m_{AB} = \frac{-2 - 8}{-2 - 6} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4}$.
- Pendiente de la perpendicular: $-\frac{4}{5}$.
- Pasa por $M(2, 3)$: $y - 3 = -\frac{4}{5}(x - 2)$.
- Despejamos: $y = -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5} + 3 = -\frac{4}{5}x + \frac{23}{5}$.

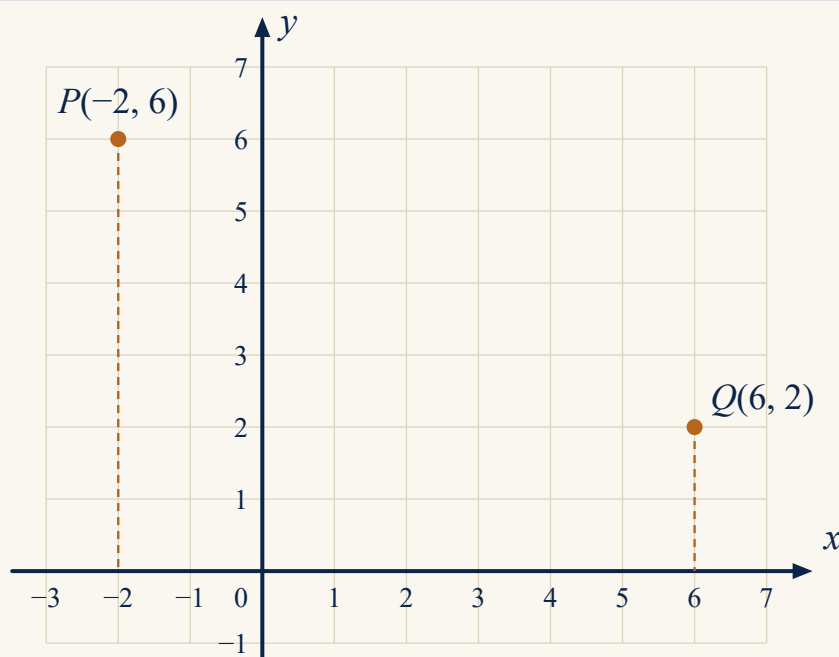
Resultado: a) $s = 6, t = -2$; b) $y = -\frac{4}{5}x + \frac{23}{5}$

EJERCICIO 4 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Mayo 2004

Las coordenadas de los vértices de un triángulo son $P(-2, 6)$, $Q(6, 2)$ y $R(-8, a)$.

- En papel milimetrado y sobre un sistema de ejes coordenados, marque los puntos P y Q . Utilice 1 cm para representar una unidad en cada eje.
- Calcule la distancia PQ .
 - Halle la pendiente de la recta PQ .
 - Si el ángulo RPQ es un ángulo recto, ¿cuál es la pendiente de la recta PR ?
- Utilice la respuesta del apartado (b)(iii), o cualquier otro método, para hallar el valor de « a ».
- La longitud de PR es $\sqrt{180}$. Halle el área del triángulo PQR .

a) Se marca el punto P dos unidades a la izquierda del eje y y seis unidades hacia arriba, y el punto Q seis unidades a la derecha y dos hacia arriba.



x e y (1 cm por unidad). Punto $P(-2, 6)$ marcado en el segundo cuadrante con su rótulo y punto $Q(6, 2)$ marcado en el primer cuadrante con su rótulo."> b)

1. (i) $PQ = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,94$.

2. (ii) $m_{PQ} = \frac{2 - 6}{6 - (-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.

3. (iii) Si RPQ es recto, $PR \perp PQ$, luego $m_{PR} \cdot m_{PQ} = -1$ y $m_{PR} = -\frac{1}{-1/2} = 2$.

4. (iv) La pendiente de PR con $R(-8, a)$ es $\frac{a - 6}{-8 - (-2)} = \frac{a - 6}{-6}$. Igualando a 2: $a - 6 = -12$, luego $a = -6$.

Comprobación: con $R(-8, -6)$, $PR = \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2} = \sqrt{180}$, que coincide con el dato del apartado (c).

Resultado: (i) $\sqrt{80} \approx 8,94$; (ii) $-\frac{1}{2}$; (iii) 2; (iv) $a = -6$

c) Como el ángulo en P es recto, PQ y PR son la base y la altura del triángulo:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR = \frac{1}{2} \sqrt{80} \cdot \sqrt{180} = \frac{1}{2} \sqrt{14400} = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60.$$

Resultado: a) (gráfico); b) (i) $\sqrt{80} \approx 8,94$, (ii) $-\frac{1}{2}$, (iii) 2, (iv) $a = -6$; c) 60

Pendiente y ecuaciones de la recta

EJERCICIO 5 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2011

La línea recta L pasa por los puntos $A(-1, 4)$ y $B(5, 8)$.

- a) Calcule la pendiente de L .
b) Encuentre la ecuación de L .

La recta L también pasa por el punto $P(8, y)$.

- c) Encuentre el valor de y .

a)

$$m = \frac{8 - 4}{5 - (-1)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,667.$$

Resultado: $m = \frac{2}{3} \approx 0,667$

b)

1. Punto-pendiente con $A(-1, 4)$: $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 1)$.

2. Despejamos y : $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + 4 = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$.

Resultado: $y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$

c) Sustituimos $x = 8$ en la ecuación de L :

$$y = \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{14}{3} = \frac{16 + 14}{3} = 10.$$

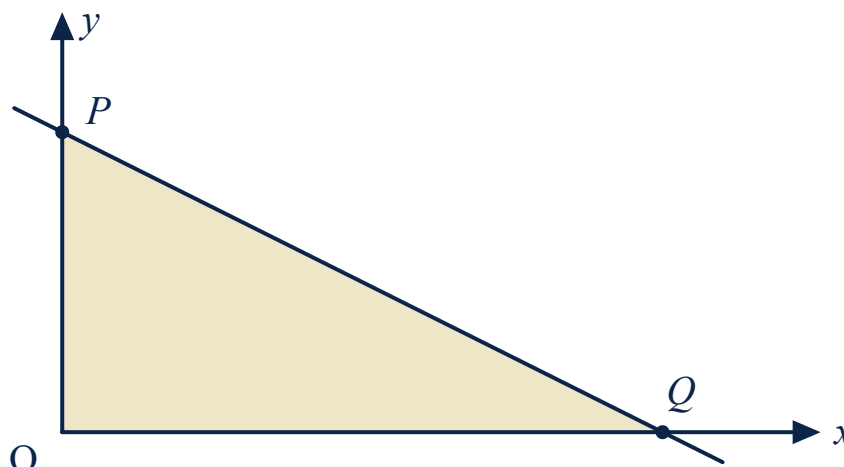
Resultado: a) $\frac{2}{3}$; b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$; c) $y = 10$

EJERCICIO 6

★ Básico

IB · P2 TZ2 Mayo 2009

El siguiente diagrama muestra la recta PQ , cuya ecuación es $x + 2y = 12$. La recta intercepta los ejes en P y Q respectivamente.



a) Encuentre las coordenadas de P y de Q .

b) Una segunda recta con ecuación $x - y = 3$ corta a la recta PQ en el punto A .

Encuentre las coordenadas de A .

a)

1. P está en el eje y , así que $x = 0$: $2y = 12$, $y = 6$. Luego $P(0, 6)$.

2. Q está en el eje x , así que $y = 0$: $x = 12$. Luego $Q(12, 0)$.

Resultado: $P(0, 6)$, $Q(12, 0)$

b) Resolvemos el sistema (a mano o con la CPG):

$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Restando la segunda ecuación de la primera: $3y = 9$, así que $y = 3$. Entonces $x = 3 + y = 6$.

Resultado: $A(6, 3)$

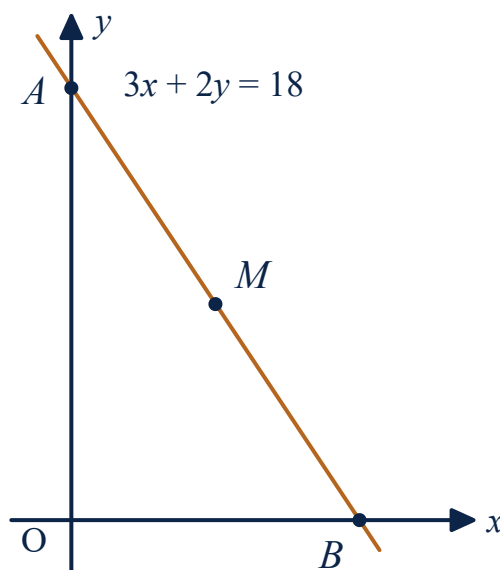
Resultado: a) $P(0, 6)$, $Q(12, 0)$; b) $A(6, 3)$

EJERCICIO 7

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2002

En la figura a continuación se muestra la recta de ecuación $3x + 2y = 18$. Los puntos A y B son las intersecciones con los ejes y y x respectivamente. M es el punto medio de $[AB]$.



Halle las coordenadas de:

- a) el punto A ;
- b) el punto B ;
- c) el punto M .

a) A está en el eje y , así que $x = 0$: $2y = 18 \Rightarrow y = 9$.

b) B está en el eje x , así que $y = 0$: $3x = 18 \Rightarrow x = 6$.

c) M es el punto medio de $A(0, 9)$ y $B(6, 0)$:

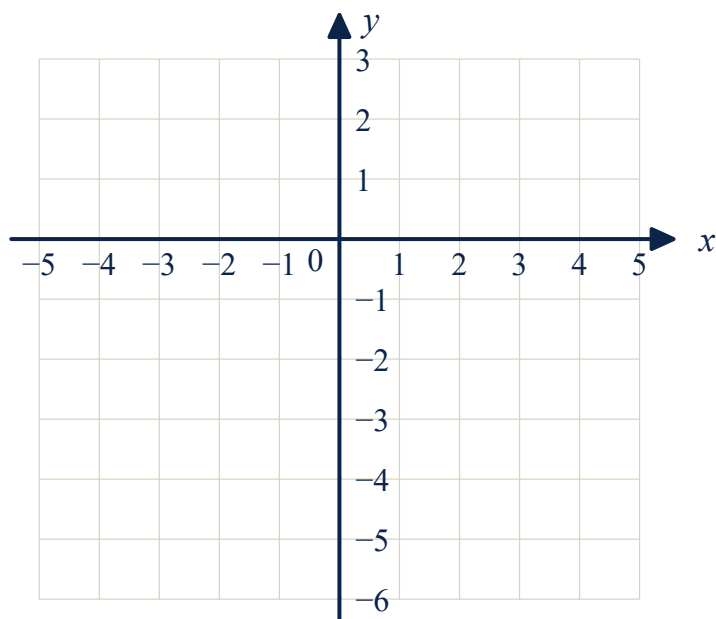
$$M = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{9+0}{2} \right) = (3; 4,5).$$

Resultado: a) $A(0, 9)$; b) $B(6, 0)$; c) $M(3; 4,5)$

EJERCICIO 8

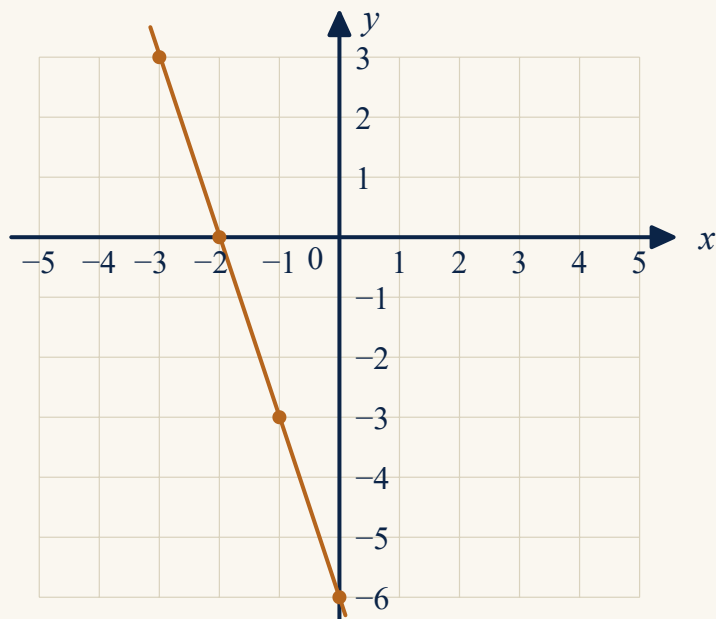
★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2005



- a) Dibuje en la cuadrícula superior una recta que tenga pendiente -3 y que pase por el punto $(-2, 0)$.
b) Halle la ecuación de esa recta.

a) Partimos del punto $(-2, 0)$. Una pendiente de -3 significa que, al avanzar 1 a la derecha, la recta baja 3. Obtenemos así los puntos $(-1, -3)$ y $(0, -6)$. Hacia la izquierda, al retroceder 1 la recta sube 3: el punto $(-3, 3)$. Se unen con una recta.



- b) Con pendiente $m = -3$ y punto $(-2, 0)$:
1. Punto-pendiente: $y - 0 = -3(x - (-2))$.
 2. $y = -3(x + 2) = -3x - 6$.

Comprobación: la recta corta al eje y en -6 , como se ve en el dibujo.

Resultado: a) recta que pasa por $(-3, 3)$, $(-2, 0)$, $(-1, -3)$ y $(0, -6)$; b) $y = -3x - 6$

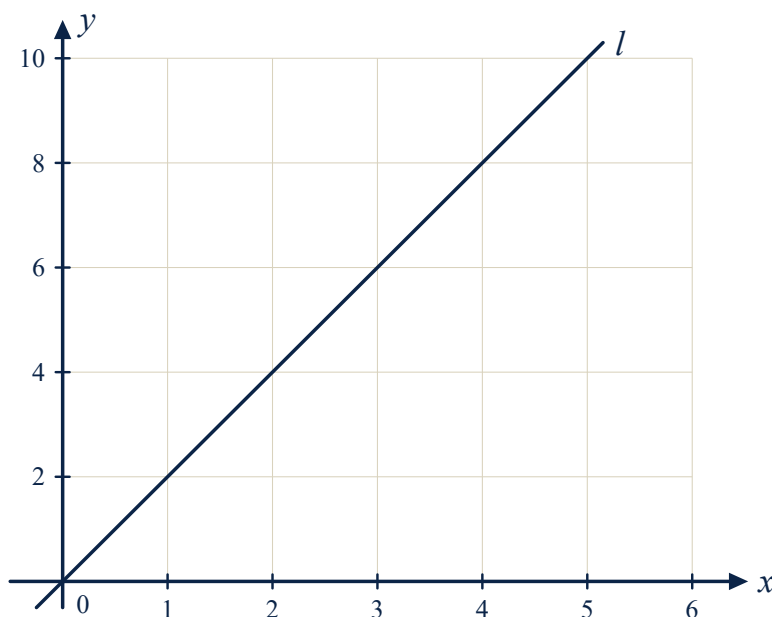
EJERCICIO 9

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2000

La siguiente figura muestra una línea recta l .

- Halle la ecuación de la recta l .
- La recta n es paralela a l y pasa por el punto $(0, 8)$. Escriba la ecuación de la recta n .
- La recta n corta al eje horizontal en el punto P . Halle las coordenadas de P .



- Leemos en la figura dos puntos de l con coordenadas claras: $(0, 0)$ y $(5, 10)$ (también pasa por $(1, 2)$, $(2, 4)$, ...).

- Pendiente: $m = \frac{10 - 0}{5 - 0} = 2$.

- Pasa por el origen, así que la ordenada en el origen es 0: $y = 2x$.

Resultado: $l : y = 2x$

- Las rectas paralelas tienen la misma pendiente, 2. Como n pasa por $(0, 8)$, la ordenada en el origen es 8:

$$n : y = 2x + 8.$$

Resultado: $n : y = 2x + 8$

- P está en el eje horizontal, así que $y = 0$:

$$0 = 2x + 8 \Rightarrow x = -4.$$

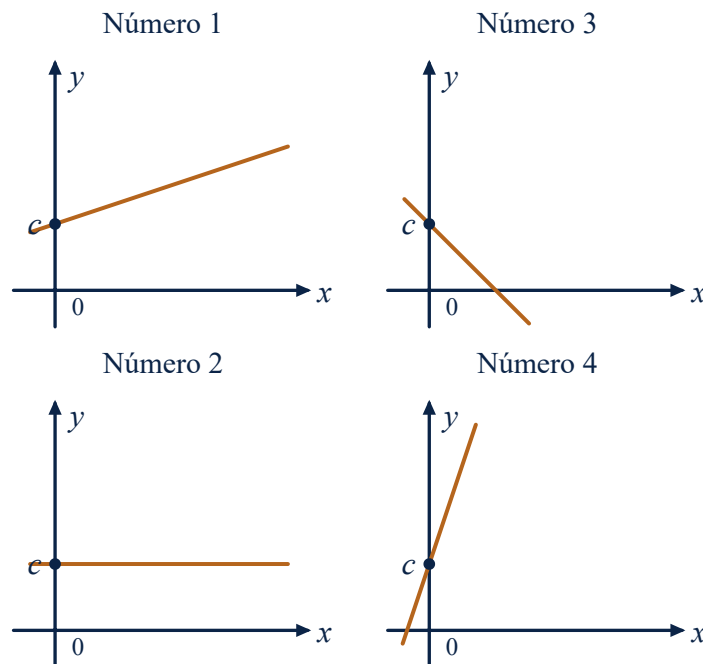
Resultado: a) $y = 2x$; b) $y = 2x + 8$; c) $P(-4, 0)$

EJERCICIO 10

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2003

Los cuatro diagramas a continuación muestran las gráficas de cuatro rectas distintas, todas trazadas a la misma escala. Cada diagrama tiene un número y c es una constante positiva.



x, y (origen «0»), todos a la misma escala, dispuestos en dos filas y dos columnas, cada uno con una recta que corta al eje y en el punto marcado « c » (positivo, por encima del origen). Diagrama «Número 1» (arriba a la izquierda): recta que sube suavemente hacia la derecha, pendiente positiva pequeña (aprox. $\frac{1}{3}$). Diagrama «Número 2» (abajo a la izquierda): recta horizontal a la altura c . Diagrama «Número 3» (arriba a la derecha): recta que baja hacia la derecha con pendiente aprox. -1 , que corta al eje x a la derecha del origen. Diagrama «Número 4» (abajo a la derecha): recta muy inclinada que sube hacia la derecha, pendiente positiva grande (aprox. 3), cortando al eje x a la izquierda del origen."> Escriba, en la tabla que sigue, el número del diagrama cuya recta corresponde a la ecuación de la tabla.

Ecuación Número de diagrama

$y = c$

$y = -x + c$

$y = 3x + c$

$y = \frac{1}{3}x + c$

En $y = mx + c$, la constante c es la ordenada en el origen (la misma en los cuatro diagramas) y la pendiente m decide la inclinación.

1. $y = c$: pendiente 0, recta horizontal. Es el diagrama 2.
2. $y = -x + c$: pendiente -1 , recta que baja hacia la derecha. Es el diagrama 3.
3. $y = 3x + c$: pendiente 3, positiva y grande: la recta más inclinada hacia arriba. Es el diagrama 4.
4. $y = \frac{1}{3}x + c$: pendiente $\frac{1}{3}$, positiva y pequeña: sube suavemente. Es el diagrama 1.

Ecuación Número de diagrama

$$y = c \quad 2$$

$$y = -x + c \quad 3$$

$$y = 3x + c \quad 4$$

$$y = \frac{1}{3}x + c \quad 1$$

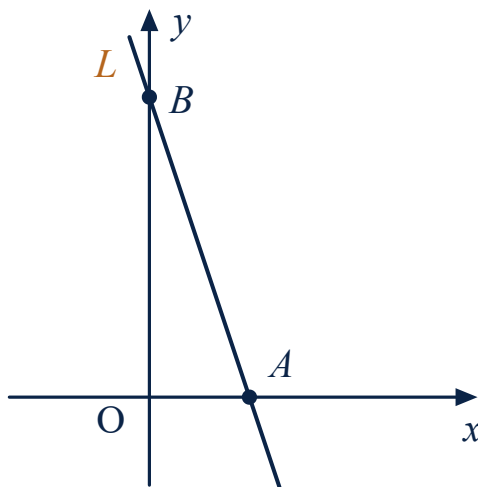
Resultado: $y = c: 2; y = -x + c: 3; y = 3x + c: 4; y = \frac{1}{3}x + c: 1$

EJERCICIO 11

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2017

La recta L corta al eje x en el punto A y al eje y en el punto B , tal y como se muestra en la figura.



x e y con origen rotulado O , sin escala. La recta L es decreciente y muy inclinada: corta el eje y positivo en el punto B (arriba, cerca del extremo superior del eje) y el eje x positivo en el punto A (cerca del origen, a su derecha); la recta se prolonga un poco por encima de B (con el rótulo L a su izquierda) y por debajo de A . La longitud del segmento de recta OB es tres veces la longitud del segmento de recta OA , donde O es el origen.

a) Halle la pendiente de L .

El punto $(2, 6)$ pertenece a L .

b) Halle la ecuación de L en la forma $y = mx + c$.

c) Halle la coordenada x del punto A .

a)

1. Sea $OA = t$ con $t > 0$. Entonces $A(t, 0)$ y, como $OB = 3t$, $B(0, 3t)$ (según la figura, A está en el semieje x positivo y B en el semieje y positivo).

2. La pendiente es $m = \frac{3t - 0}{0 - t} = -3$.

Resultado: $m = -3$

b)

1. Con $m = -3$: $y = -3x + c$.

2. Como $(2, 6)$ está en L : $6 = -3 \cdot 2 + c$, de donde $c = 12$.

Resultado: $y = -3x + 12$

c) En A se cumple $y = 0$: $0 = -3x + 12$, luego $x = 4$.

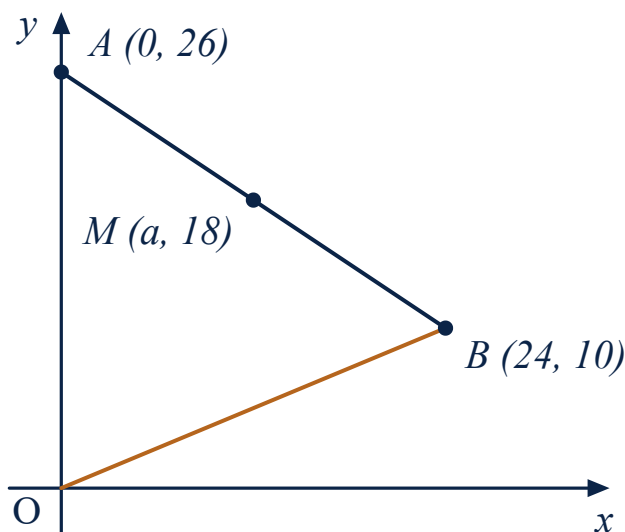
Resultado: a) -3 ; b) $y = -3x + 12$; c) $x = 4$

EJERCICIO 12

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2014

El diagrama muestra los puntos $M(a, 18)$ y $B(24, 10)$. La línea recta BM corta el eje y en $A(0, 26)$. M es el punto medio del segmento de línea AB .



x e y con el origen rotulado O . Punto $A(0, 26)$ sobre el eje y (arriba, rotulado «A (0, 26)»); punto $B(24, 10)$ a la derecha (rotulado «B (24, 10)»); entre ambos, sobre el segmento AB , el punto M rotulado «M (a, 18)». El segmento AB está dibujado completo (descendente de izquierda a derecha) y también el segmento OB que une el origen con B . No hay escala numérica en los ejes.">

- Escriba el valor de a .
- Encuentre la pendiente de la recta AB .
- Decida si el triángulo OAM es un triángulo rectángulo. Justifique su respuesta.

a) M es el punto medio de AB , así que su abscisa es la media de las de A y B : $a = \frac{0 + 24}{2} = 12$.

(Comprobación con la ordenada: $\frac{26 + 10}{2} = 18$.)

Resultado: $a = 12$

b)

$$m_{AB} = \frac{10 - 26}{24 - 0} = \frac{-16}{24} = -\frac{2}{3} \approx -0,667.$$

Resultado: $m_{AB} = -\frac{2}{3} \approx -0,667$

c)

- Con $a = 12$, $M(12, 18)$ y $O(0, 0)$: pendiente de $OM = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$.
- AM está sobre la recta AB , de pendiente $-\frac{2}{3}$.
- El producto de las pendientes es $\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$, así que $OM \perp AM$.
- Por tanto, el triángulo OAM tiene un ángulo recto en M : **sí** es rectángulo.

Resultado: sí es rectángulo (ángulo recto en M), porque $\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$

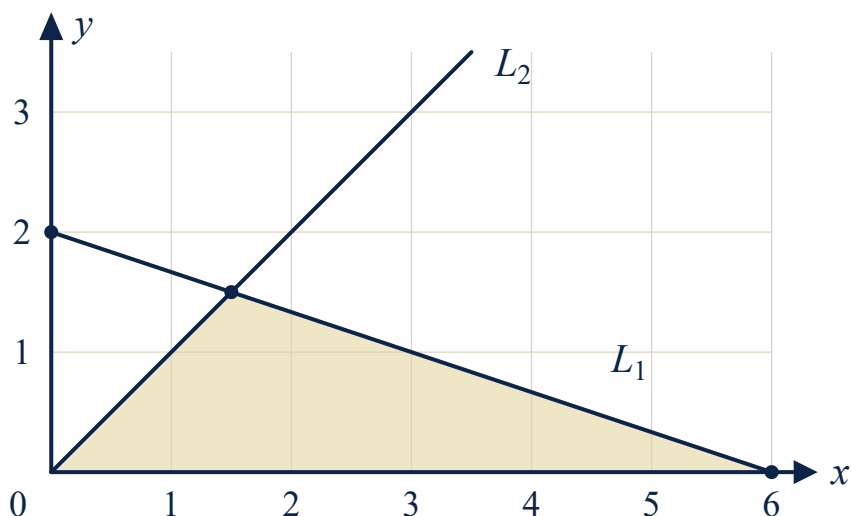
Resultado: a) $a = 12$; b) $-\frac{2}{3}$; c) sí es rectángulo, con el ángulo recto en M

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2011

El diagrama muestra las líneas rectas L_1 y L_2 . La ecuación de L_2 es $y = x$.



- a) Calcule
- la pendiente de L_1 ;
 - la ecuación de L_1 .
- b) Encuentre el área del triángulo sombreado.

a) Del diagrama, L_1 pasa por $(0, 2)$ y por $(6, 0)$.

1. (i) Pendiente:

$$m_1 = \frac{0 - 2}{6 - 0} = -\frac{1}{3} \approx -0,333.$$

2. (ii) La ordenada en el origen es 2, así que

$$y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

Resultado: (i) $-\frac{1}{3}$; (ii) $y = -\frac{1}{3}x + 2$

b)

1. El triángulo sombreado tiene vértices $O(0,0)$, $B(6,0)$ y el punto P donde se cortan L_1 y L_2 .

2. Para hallar P igualamos $y = x$ con $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

$$x = -\frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow \frac{4}{3}x = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{3}{2}.$$

3. Tomamos como base el lado sobre el eje x , de longitud 6, y como altura la ordenada de P , que es $\frac{3}{2}$:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Resultado: Área = $\frac{9}{2} = 4,5$

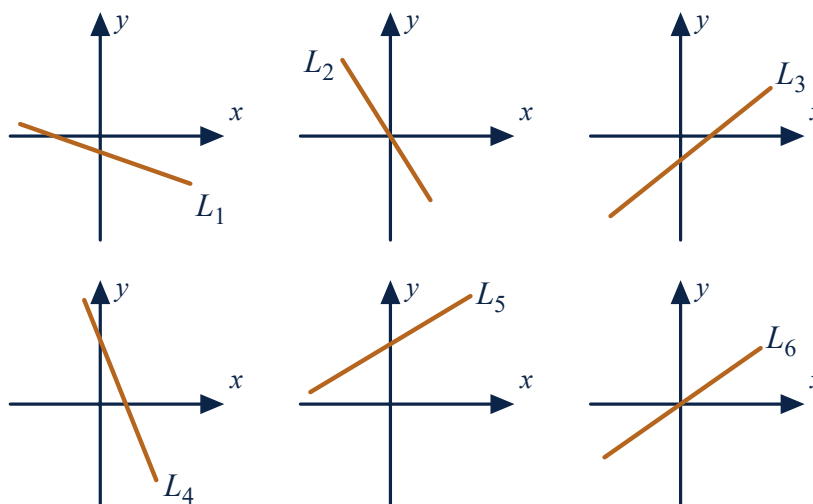
Resultado: a) (i) $-\frac{1}{3}$, (ii) $y = -\frac{1}{3}x + 2$; b) $\frac{9}{2} = 4,5$

EJERCICIO 14

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

En las siguientes figuras se muestran seis rectas cuyas ecuaciones son de la forma $y = mx + c$.



En la siguiente tabla aparecen cuatro posibles condiciones para el par de valores m y c .

Indique a cuál de las seis rectas anteriores corresponde cada una de estas condiciones.

Condición Recta

$m > 0$ y $c > 0$

$m < 0$ y $c > 0$

$m < 0$ y $c < 0$

$m > 0$ y $c < 0$

En $y = mx + c$, m es la pendiente (positiva si la recta sube hacia la derecha, negativa si baja) y c es la ordenada en el origen (positiva si corta al eje y por encima del origen, negativa si lo corta por debajo, y cero si pasa por el origen). Clasificamos las seis rectas:

Recta	Pendiente	Corte con el eje y
L_1	negativa (baja)	por debajo del origen: $c < 0$
L_2	negativa (baja)	en el origen: $c = 0$
L_3	positiva (sube)	por debajo del origen: $c < 0$
L_4	negativa (baja)	por encima del origen: $c > 0$
L_5	positiva (sube)	por encima del origen: $c > 0$
L_6	positiva (sube)	en el origen: $c = 0$

L_2 y L_6 no cumplen ninguna de las cuatro condiciones, porque en ellas $c = 0$. Asignamos las demás:

1. $m > 0$ y $c > 0$: sube y corta al eje y por encima del origen, L_5 .
2. $m < 0$ y $c > 0$: baja y corta al eje y por encima del origen, L_4 .
3. $m < 0$ y $c < 0$: baja y corta al eje y por debajo del origen, L_1 .
4. $m > 0$ y $c < 0$: sube y corta al eje y por debajo del origen, L_3 .

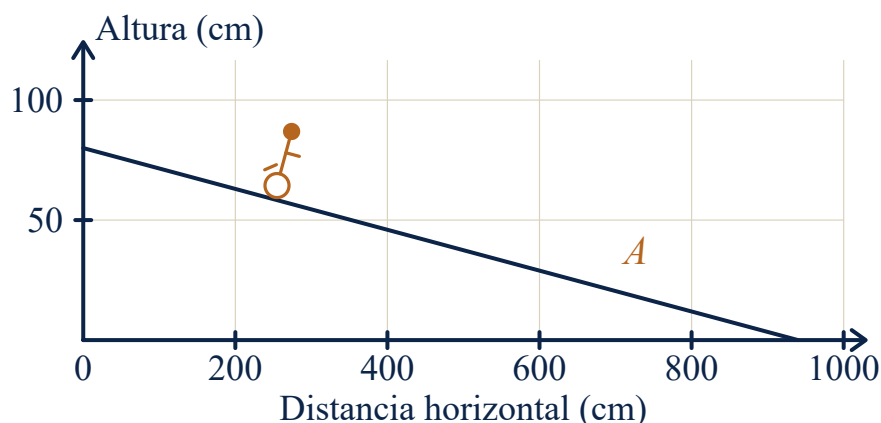
Resultado: $m > 0$, $c > 0$: L_5 ; $m < 0$, $c > 0$: L_4 ; $m < 0$, $c < 0$: L_1 ; $m > 0$, $c < 0$: L_3

EJERCICIO 15

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2014

El diagrama muestra una rampa, A, para sillas de ruedas. La rampa está diseñada para descender desde una altura de 80 cm.



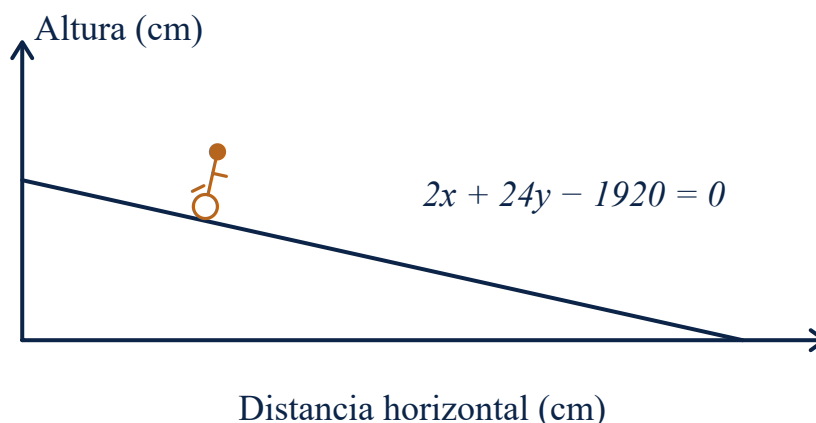
(0, 80) sobre el eje vertical hasta cortar al eje horizontal aproximadamente en (940, 0). Sobre la recta, cerca de $x = 250$, hay un pequeño icono de persona en silla de ruedas.">

a) Utilice el diagrama anterior para calcular la pendiente de la rampa.

La pendiente de una rampa para sillas de ruedas descendente y segura es $-\frac{1}{12}$.

b) Utilizando la respuesta obtenida en el apartado (a), comente por qué la rampa A para sillas de ruedas no es segura.

La ecuación de una segunda rampa para sillas de ruedas, B, es $2x + 24y - 1920 = 0$.



$2x + 24y - 1920 = 0$ » junto a la recta y un icono de persona en silla de ruedas sobre ella.">

c) (i) Determine si la rampa B para sillas de ruedas es o no segura. Justifique su respuesta.

(ii) Halle la distancia horizontal de la rampa B para sillas de ruedas.

a) Del diagrama, la rampa pasa por (0, 80) y corta al eje horizontal en (940, 0):

$$m = \frac{0 - 80}{940 - 0} = -\frac{80}{940} = -\frac{4}{47} \approx -0,0851.$$

Resultado: $m \approx -0,0851$

b) La pendiente segura es $-\frac{1}{12} \approx -0,0833$. La rampa A tiene pendiente $-0,0851$, que es menor (más negativa) que $-0,0833$: baja más deprisa de lo permitido, es decir, es demasiado inclinada y, por tanto, no es segura.

Resultado: No es segura, porque $-0,0851 < -\frac{1}{12} \approx -0,0833$ (es más empinada).

c) (i) Despejamos y en $2x + 24y - 1920 = 0$:

$$24y = -2x + 1920 \Rightarrow y = -\frac{1}{12}x + 80.$$

La pendiente de la rampa B es $-\frac{1}{12}$, justo la pendiente segura, así que la rampa B es segura (y parte de la misma altura de 80 cm).

(ii) La rampa llega al suelo cuando $y = 0$:

$$-\frac{1}{12}x + 80 = 0 \Rightarrow x = 960.$$

La distancia horizontal es de 960 cm.

Resultado: (i) sí es segura, pues su pendiente es $-\frac{1}{12}$; (ii) 960 cm

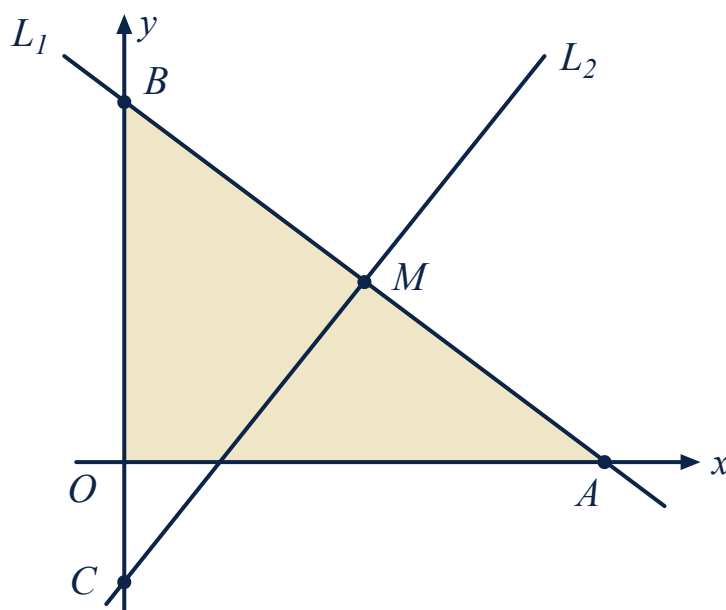
Resultado: a) $-0,0851$; b) no es segura, porque $-0,0851 < -\frac{1}{12}$; c) (i) es segura (pendiente $-\frac{1}{12}$), (ii) 960 cm

EJERCICIO 16

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Mayo 2000

La recta L_1 que se muestra en el conjunto de ejes a continuación tiene la ecuación $3x + 4y = 24$. L_1 corta al eje x en A y corta al eje y en B .



L_1 baja hacia la derecha: corta al eje y en el punto B (parte alta del eje y , positivo) y al eje x en el punto A (a la derecha del origen). Una segunda recta L_2 sube hacia la derecha, corta al eje y por debajo del origen en el punto C (rotulado «C», en el eje y negativo) y corta a L_1 en el punto M , situado entre B y A (a mitad de camino sobre L_1). Rótulos: « L_1 » junto al extremo izquierdo de la recta L_1 , « L_2 » junto al extremo superior derecho de la recta L_2 , y las letras O, A, B, C, M junto a sus puntos.»

a) Escriba las coordenadas de A y B .

M es el punto medio del segmento de recta $[AB]$.

b) Escriba las coordenadas de M .

La recta L_2 pasa por el punto M y el punto $C(0, -2)$.

c) Escriba la ecuación de L_2 .

d) Encuentre la longitud de

(i) MC ;

(ii) AC .

e) La longitud de AM es 5. Encuentre

(i) el tamaño del ángulo $\hat{CMA}$;

(ii) el área del triángulo con vértices C, M y A .

a) A está en el eje x ($y = 0$): $3x = 24 \Rightarrow x = 8$, luego $A(8, 0)$. B está en el eje y ($x = 0$): $4y = 24 \Rightarrow y = 6$, luego $B(0, 6)$.

Resultado: $A(8, 0), B(0, 6)$

b) Punto medio: $M = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+6}{2} \right) = (4, 3)$.

Resultado: $M(4, 3)$

c)

1. Pendiente de L_2 por $M(4, 3)$ y $C(0, -2)$: $m = \frac{3 - (-2)}{4 - 0} = \frac{5}{4}$.

2. Corta al eje y en -2 , así que $y = \frac{5}{4}x - 2$.

Comprobación con M : $\frac{5}{4} \cdot 4 - 2 = 3$, correcto.

Resultado: $y = \frac{5}{4}x - 2$

d)

1. (i) $MC = \sqrt{(4-0)^2 + (3-(-2))^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} \approx 6,40$.

2. (ii) $AC = \sqrt{(8-0)^2 + (0-(-2))^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} \approx 8,25$.

Resultado: (i) $\sqrt{41} \approx 6,40$; (ii) $\sqrt{68} \approx 8,25$

e) En el triángulo CMA conocemos los tres lados: $MC = \sqrt{41}$, $MA = 5$ y $AC = \sqrt{68}$.

1. (i) Teorema del coseno para el ángulo en M (opuesto a AC):

$$\cos \hat{CMA} = \frac{MC^2 + MA^2 - AC^2}{2 \cdot MC \cdot MA} = \frac{41 + 25 - 68}{2\sqrt{41} \cdot 5} = \frac{-2}{10\sqrt{41}} \approx -0,0312.$$

Por tanto $\hat{CMA} = \arccos(-0,0312 \dots) \approx 91,8^\circ$ (con la CPG en grados).

2. (ii) Área = $\frac{1}{2} \cdot MC \cdot MA \cdot \sin \hat{CMA} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{41} \cdot 5 \cdot \sin 91,79^\circ \approx 16,0$.

(Se puede comprobar con coordenadas: $\overrightarrow{CM} = (4, 5)$, $\overrightarrow{CA} = (8, 2)$ y el área es $\frac{1}{2}|4 \cdot 2 - 5 \cdot 8| = 16$.)

Resultado: (i) $\hat{CMA} \approx 91,8^\circ$; (ii) área $\approx 16,0$

Resultado: a) $A(8, 0)$, $B(0, 6)$; b) $M(4, 3)$; c) $y = \frac{5}{4}x - 2$; d) (i) $\sqrt{41} \approx 6,40$, (ii) $\sqrt{68} \approx 8,25$; e) (i) $91,8^\circ$, (ii) $16,0$

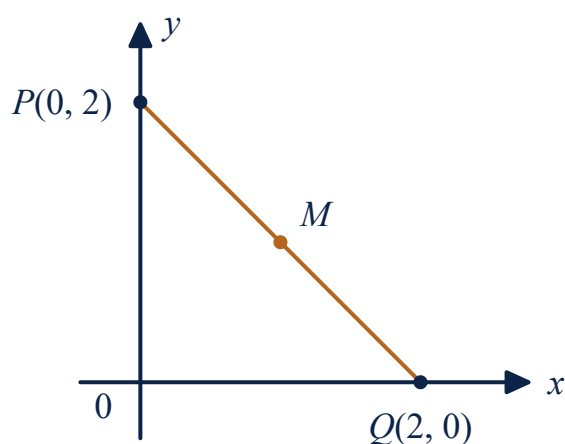
Rectas paralelas y perpendiculares

EJERCICIO 17

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2000

El siguiente diagrama muestra los puntos P , Q y M . M es el punto medio de $[PQ]$.



a) Escriba la ecuación de la recta PQ .

b) Escriba la ecuación de la recta que pasa por M y es perpendicular a la recta PQ .

a) La recta corta al eje y en $P(0, 2)$, así que la ordenada en el origen es 2. La pendiente es

$$m_{PQ} = \frac{0-2}{2-0} = -1.$$

Por tanto $y = -x + 2$.

Resultado: $y = -x + 2$

b) 1. Punto medio: $M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (1, 1)$.

2. La pendiente de una perpendicular a PQ es el opuesto del inverso de -1 , es decir, 1 .

3. Punto-pendiente: $y - 1 = 1 \cdot (x - 1)$, es decir, $y = x$.

Resultado: a) $y = -x + 2$; b) $y = x$

EJERCICIO 18

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2001

A es el punto $(2, 3)$ y B es el punto $(4, 9)$.

- Encuentre la pendiente del segmento de recta $[AB]$.
- Encuentre la pendiente de una recta perpendicular al segmento de recta $[AB]$.
- La recta $2x + by - 12 = 0$ es perpendicular al segmento de recta $[AB]$. ¿Cuál es el valor de b ?

a) $m_{AB} = \frac{9-3}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$.

Resultado: $m_{AB} = 3$

b) Dos rectas perpendiculares cumplen $m_1 \cdot m_2 = -1$, así que la pendiente de la perpendicular es $m = -\frac{1}{3}$.

Resultado: $-\frac{1}{3}$

c) Despejamos y en $2x + by - 12 = 0$: $y = -\frac{2}{b}x + \frac{12}{b}$, cuya pendiente es $-\frac{2}{b}$.

Como es perpendicular a $[AB]$, su pendiente es $-\frac{1}{3}$:

$$-\frac{2}{b} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = 6.$$

Resultado: $b = 6$

Resultado: a) 3 ; b) $-\frac{1}{3}$; c) $b = 6$

EJERCICIO 19

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2019

La recta L_1 pasa por los puntos $A(-3, 0,5)$ y $B(9, -3,5)$.

a) Encuentre la pendiente de L_1 .

La recta L_2 pasa por el punto $C(3, 1)$ y es paralela a L_1 .

- Determine la ecuación de L_2 . Dé su respuesta en la forma $ax + by + d = 0$, donde a , b y d son números enteros.
- Encuentre las coordenadas de la intersección con el eje x de L_2 .

a) La pendiente es el cociente entre la variación de y y la variación de x :

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3,5 - 0,5}{9 - (-3)} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Resultado: $m_1 = -\frac{1}{3}$

b)

1. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente, así que L_2 tiene pendiente $-\frac{1}{3}$.
2. Usamos la forma punto-pendiente con $C(3, 1)$: $y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$.
3. Multiplicamos por 3 para quitar el denominador: $3y - 3 = -(x - 3) = -x + 3$.
4. Pasamos todo al primer miembro: $x + 3y - 6 = 0$.

Resultado: $x + 3y - 6 = 0$

c) El corte con el eje x ocurre cuando $y = 0$:

$$x + 3 \cdot 0 - 6 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

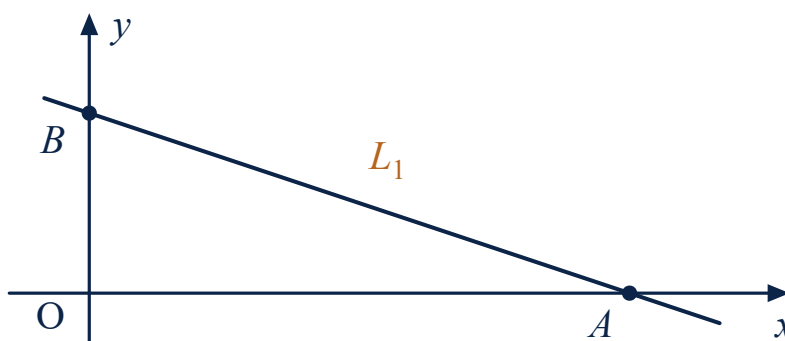
Resultado: a) $-\frac{1}{3}$; b) $x + 3y - 6 = 0$; c) $(6, 0)$

EJERCICIO 20

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2015

El diagrama muestra la línea recta L_1 , que corta el eje x en $A(6, 0)$ y al eje y en $B(0, 2)$.



x e y , sin escala numérica. La recta L_1 es decreciente y poco inclinada; corta el eje y en el punto B (rotulado a la izquierda del eje, por encima del origen) y el eje x en el punto A (rotulado cerca del extremo derecho del eje x); lleva el rótulo L_1 sobre la recta, entre B y A , y se prolonga un poco más allá de A .

- a) Escriba las coordenadas de M , el punto medio del segmento de línea AB .
- b) Calcule la pendiente de L_1 .

La recta L_2 es paralela a L_1 y pasa por el punto $(3, 2)$.

- c) Encuentre la ecuación de L_2 . Dé su respuesta en la forma $y = mx + c$.

- a) El punto medio es la media de las coordenadas:

$$M = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (3, 1).$$

Resultado: $M(3, 1)$

b)

$$m_1 = \frac{2-0}{0-6} = -\frac{1}{3}.$$

Resultado: $m_1 = -\frac{1}{3}$

c)

1. Paralela a L_1 : $m_2 = -\frac{1}{3}$, así que $y = -\frac{1}{3}x + c$.
2. Pasa por $(3, 2)$: $2 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + c = -1 + c$, luego $c = 3$.

Resultado: $y = -\frac{1}{3}x + 3$

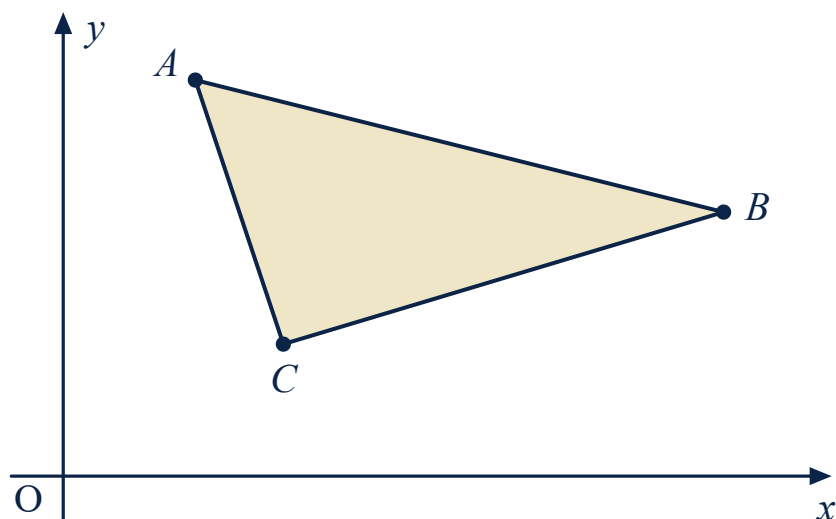
Resultado: a) $M(3, 1)$; b) $-\frac{1}{3}$; c) $y = -\frac{1}{3}x + 3$

EJERCICIO 21

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

La figura muestra un triángulo que está definido por los puntos $A(3, 9)$, $B(15, 6)$ y $C(5, 3)$.



x e y , sin escala numérica. Triángulo con A arriba a la izquierda (el vértice más alto), B a la derecha (a media altura, el vértice más a la derecha) y C abajo, algo a la derecha de A (el vértice más bajo). Lados: AB (larguísimo, descendente suave), BC (casi horizontal, ligeramente ascendente hacia B) y AC (muy inclinado, descendente hacia C). Los vértices están rotulados.">

- a) Calcule la pendiente de la recta AC .
b) Determine, dando una razón, si el ángulo ACB es un ángulo recto.

La recta L es paralela a BC y pasa por A .

- c) Halle la ecuación de L . Dé la respuesta en la forma $ax + by + d = 0$, donde a , b y d son números enteros.

a)

$$m_{AC} = \frac{3 - 9}{5 - 3} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Resultado: $m_{AC} = -3$

b)

- El ángulo ACB tiene su vértice en C y sus lados son CA y CB , que están sobre las rectas AC y BC .
- $m_{BC} = \frac{3 - 6}{5 - 15} = \frac{-3}{-10} = \frac{3}{10}$.
- Las rectas son perpendiculares si el producto de las pendientes es -1 : $m_{AC} \cdot m_{BC} = -3 \cdot \frac{3}{10} = -\frac{9}{10} \neq -1$.
- Por tanto, AC y BC no son perpendiculares y el ángulo ACB **no** es recto.

Resultado: no es recto, porque $-3 \cdot \frac{3}{10} = -\frac{9}{10} \neq -1$

c)

- $L \parallel BC$, así que su pendiente es $\frac{3}{10}$.

2. Pasa por $A(3, 9)$: $y - 9 = \frac{3}{10}(x - 3)$.
3. Multiplicamos por 10: $10y - 90 = 3x - 9$.
4. Pasamos todo al primer miembro: $3x - 10y + 81 = 0$.

Resultado: $3x - 10y + 81 = 0$

Resultado: a) -3 ; b) no es recto ($-\frac{9}{10} \neq -1$); c) $3x - 10y + 81 = 0$

EJERCICIO 22

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2016

La ecuación de la recta L_1 es $y = 2,5x + k$. El punto $A(3, -2)$ se encuentra en L_1 .

a) Encuentre el valor de k .

La recta L_2 es perpendicular a L_1 y se corta con L_1 en el punto A .

b) Escriba la pendiente de L_2 .

c) Encuentre la ecuación de L_2 . Dé su respuesta en la forma $y = mx + c$.

d) Escriba su respuesta al apartado (c) en la forma $ax + by + d = 0$ donde a, b y $d \in \mathbb{Z}$.

a) Sustituimos $A(3, -2)$ en $y = 2,5x + k$: $-2 = 2,5 \cdot 3 + k = 7,5 + k$, luego $k = -9,5$.

Resultado: $k = -9,5$

b) La pendiente de L_1 es $2,5 = \frac{5}{2}$; la de una perpendicular es su inverso cambiado de signo:

$$m_2 = -\frac{1}{2,5} = -0,4 = -\frac{2}{5}.$$

Resultado: $m_2 = -0,4$

c)

1. $y = -0,4x + c$ y pasa por $A(3, -2)$: $-2 = -0,4 \cdot 3 + c = -1,2 + c$.

2. Luego $c = -0,8$.

Resultado: $y = -0,4x - 0,8$

d)

1. Multiplicamos por 5: $5y = -2x - 4$.

2. Pasamos todo al primer miembro: $2x + 5y + 4 = 0$.

Resultado: a) $k = -9,5$; b) $-0,4$; c) $y = -0,4x - 0,8$; d) $2x + 5y + 4 = 0$

EJERCICIO 23

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

La ecuación de la recta L_1 es $y = 2x - 3$.

- a) Escriba cuál es la intersección de L_1 con el eje y .
- b) Escriba la pendiente de L_1 .

La recta L_2 es paralela a L_1 y pasa por el punto $(0, 3)$.

- c) Escriba la ecuación de L_2 .

La recta L_3 es perpendicular a L_1 y pasa por el punto $(-2, 6)$.

- d) Escriba la pendiente de L_3 .
- e) Halle la ecuación de L_3 . Dé la respuesta en la forma $ax + by + d = 0$, donde a , b y d son números enteros.

a) La intersección con el eje y se da en $x = 0$: $y = -3$, es decir, el punto $(0, -3)$.

Resultado: $(0, -3)$

b) En $y = 2x - 3$ el coeficiente de x es la pendiente: $m_1 = 2$.

Resultado: $m_1 = 2$

c) L_2 tiene pendiente 2 y corta el eje y en 3 (pasa por $(0, 3)$), luego $y = 2x + 3$.

Resultado: $y = 2x + 3$

d) Perpendicular a L_1 : $m_3 = -\frac{1}{2}$.

Resultado: $m_3 = -\frac{1}{2}$

e)

1. Punto-pendiente con $(-2, 6)$: $y - 6 = -\frac{1}{2}(x + 2)$.
2. Multiplicamos por 2: $2y - 12 = -x - 2$.
3. Pasamos todo al primer miembro: $x + 2y - 10 = 0$.

Resultado: $x + 2y - 10 = 0$

Resultado: a) $(0, -3)$; b) 2; c) $y = 2x + 3$; d) $-\frac{1}{2}$; e) $x + 2y - 10 = 0$

EJERCICIO 24

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2013

La ecuación de una recta L_1 es $2x + 5y = -4$.

- a) Escriba la pendiente de la recta L_1 .

Una segunda recta L_2 es perpendicular a L_1 .

- b) Escriba la pendiente de L_2 .

El punto $(5, 3)$ está en L_2 .

- c) Determine la ecuación de L_2 .

Las rectas L_1 y L_2 se cortan en el punto P .

- d) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica o de cualquier otro modo, halle las coordenadas de P .

a) Despejamos y : $5y = -2x - 4$, es decir, $y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$. La pendiente es $-\frac{2}{5}$.

Resultado: $m_1 = -\frac{2}{5}$

b) Perpendicular: $m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{5}{2}$.

Resultado: $m_2 = \frac{5}{2}$

c)

1. Punto-pendiente con $(5, 3)$: $y - 3 = \frac{5}{2}(x - 5)$.

2. Multiplicamos por 2: $2y - 6 = 5x - 25$.

3. Reordenamos: $5x - 2y = 19$.

Resultado: $5x - 2y = 19$

d)

1. Resolvemos el sistema $2x + 5y = -4$ y $5x - 2y = 19$ (con la CPG o a mano).

2. A mano: multiplicamos la primera por 2 y la segunda por 5, y sumamos: $4x + 10y = -8$ y $25x - 10y = 95$, luego $29x = 87$ y $x = 3$.

3. Entonces $y = \frac{-4 - 2 \cdot 3}{5} = -2$.

Resultado: $P(3, -2)$

Resultado: a) $-\frac{2}{5}$; b) $\frac{5}{2}$; c) $5x - 2y = 19$; d) $P(3, -2)$

EJERCICIO 25

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2009

Las coordenadas de los vértices de un triángulo ABC son $A(4, 3)$, $B(7, -3)$ y $C(0, 5, p)$.

a) Calcule la pendiente de la recta AB .

b) Sabiendo que la recta AC es perpendicular a la recta AB

(i) anote la pendiente de la recta AC ;

(ii) encuentre el valor de p .

a)

$$m_{AB} = \frac{-3 - 3}{7 - 4} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Resultado: $m_{AB} = -2$

b)

1. (i) Perpendicular a AB : $m_{AC} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

2. (ii) La pendiente de AC calculada con los puntos es $\frac{p - 3}{0,5 - 4} = \frac{p - 3}{-3,5}$. La igualamos a $\frac{1}{2}$: $p - 3 = -1,75$, luego $p = 1,25$.

Resultado: (i) $m_{AC} = \frac{1}{2}$; (ii) $p = 1,25$

Resultado: a) -2 ; b) (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $p = 1,25$

EJERCICIO 26

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2013

La línea recta, L_1 , tiene la ecuación $2y - 3x = 11$. El punto A tiene coordenadas $(6, 0)$.

a) Dé una razón por la que L_1 no pasa por A .

b) Encuentre la pendiente de L_1 .

L_2 es una recta perpendicular a L_1 . La ecuación de L_2 es $y = mx + c$.

c) Escriba el valor de m .

L_2 pasa por A .

d) Encuentre el valor de c .

a) Si L_1 pasara por $A(6, 0)$, las coordenadas de A cumplirían la ecuación. Sustituimos $x = 6, y = 0$:

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot 6 = -18 \neq 11.$$

No se cumple la igualdad, así que A no está en L_1 .

Resultado: al sustituir $A(6, 0)$ se obtiene $-18 \neq 11$, luego $A \notin L_1$.

b) Despejamos y en $2y - 3x = 11$:

$$2y = 3x + 11 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2}.$$

La pendiente es el coeficiente de x .

Resultado: $m_{L_1} = \frac{3}{2}$

c) Para rectas perpendiculares, el producto de pendientes es -1 :

$$m = -\frac{1}{3/2} = -\frac{2}{3}.$$

Resultado: $m = -\frac{2}{3}$

d) L_2 es $y = -\frac{2}{3}x + c$ y pasa por $A(6, 0)$. Sustituimos:

$$0 = -\frac{2}{3} \cdot 6 + c = -4 + c \Rightarrow c = 4.$$

Resultado: $c = 4$

Resultado: a) $-18 \neq 11$, luego $A \notin L_1$; b) $\frac{3}{2}$; c) $m = -\frac{2}{3}$; d) $c = 4$

EJERCICIO 27

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

La recta L viene dada por la ecuación $3y + 2x = 9$ y el punto P tiene coordenadas $(6, -5)$.

a) Explique por qué el punto P no está en la recta L .

b) Encuentre la pendiente de la recta L .

c) (i) Escriba la pendiente de una recta perpendicular a la recta L .

(ii) Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a L y que pasa por el punto P .

a) Sustituimos las coordenadas de $P(6, -5)$ en el primer miembro de la ecuación de L :

$$3 \cdot (-5) + 2 \cdot 6 = -15 + 12 = -3 \neq 9.$$

No cumple la ecuación, así que P no pertenece a L .

Resultado: $3 \cdot (-5) + 2 \cdot 6 = -3 \neq 9$, luego $P \notin L$.

b) Despejamos y :

$$3y = -2x + 9 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 3,$$

y la pendiente es $-\frac{2}{3}$.

Resultado: $m_L = -\frac{2}{3}$

c)

1. (i) La pendiente de una perpendicular es la opuesta de la inversa: $-\frac{1}{-2/3} = \frac{3}{2}$.

2. (ii) Recta de pendiente $\frac{3}{2}$ por $P(6, -5)$, en forma punto-pendiente:

$$y - (-5) = \frac{3}{2}(x - 6) \Rightarrow y + 5 = \frac{3}{2}x - 9 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 14.$$

Resultado: (i) $\frac{3}{2}$; (ii) $y = \frac{3}{2}x - 14$

Resultado: a) $-3 \neq 9$, luego $P \notin L$; b) $-\frac{2}{3}$; c) (i) $\frac{3}{2}$, (ii) $y = \frac{3}{2}x - 14$

EJERCICIO 28

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

La línea recta, L_1 , tiene la ecuación $y = -2x + 5$.

a) Escriba la pendiente de L_1 .

La recta L_2 es perpendicular a la recta L_1 y pasa por el punto $(4, 5)$.

b) (i) Escriba la pendiente de L_2 .

(ii) Encuentre la ecuación de L_2 .

c) Escriba las coordenadas del punto de intersección de L_1 y L_2 .

a) La ecuación $y = -2x + 5$ está en forma explícita, así que la pendiente es -2 .

Resultado: $m_1 = -2$

b)

1. (i) La perpendicular tiene pendiente $m_2 = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

2. (ii) Por $(4, 5)$ con pendiente $\frac{1}{2}$:

$$y - 5 = \frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2 + 5 = \frac{1}{2}x + 3.$$

Resultado: (i) $\frac{1}{2}$; (ii) $y = \frac{1}{2}x + 3$

c) En el punto de intersección coinciden las dos ecuaciones (o lo calculamos con la CPG resolviendo el sistema):

$$-2x + 5 = \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow 2 = \frac{5}{2}x \Rightarrow x = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Sustituimos en L_1 : $y = -2 \cdot 0,8 + 5 = 3,4$.

Resultado: $(0,8; 3,4)$

Resultado: a) -2 ; b) (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $y = \frac{1}{2}x + 3$; c) $(0,8; 3,4)$

EJERCICIO 29

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2011

La ecuación de la recta R_1 es $2x + y - 8 = 0$. La recta R_2 es perpendicular a R_1 .

a) Calcule la pendiente de R_2 .

El punto de intersección de R_1 y R_2 es $(4, k)$.

b) Encuentre

(i) el valor de k ;

(ii) la ecuación de R_2 .

a)

1. Despejamos y en R_1 : $y = -2x + 8$, así que $m_{R_1} = -2$.

2. La pendiente de la perpendicular es $m_{R_2} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Resultado: $m_{R_2} = \frac{1}{2}$

b)

1. (i) El punto $(4, k)$ está en R_1 , así que cumple $2x + y - 8 = 0$: $2 \cdot 4 + k - 8 = 0$, de donde $k = 0$.

2. (ii) R_2 pasa por $(4, 0)$ con pendiente $\frac{1}{2}$:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2.$$

Resultado: (i) $k = 0$; (ii) $y = \frac{1}{2}x - 2$

Resultado: a) $\frac{1}{2}$; b) (i) $k = 0$, (ii) $y = \frac{1}{2}x - 2$

EJERCICIO 30

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2010

La recta L_1 tiene por ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

a) Escriba la intersección de L_1 con el eje y .

b) Escriba la pendiente de L_1 .

La recta L_2 es perpendicular a L_1 y pasa por el punto $(3, 7)$.

c) Escriba la pendiente de la recta L_2 .

d) Halle la ecuación de L_2 . Dé su respuesta en la forma $ax + by + d = 0$, donde $a, b, d \in \mathbb{Z}$.

a) La ecuación está en la forma $y = mx + n$, donde n es la ordenada en el origen: la recta corta al eje y en $(0, -2)$.

Resultado: $(0, -2)$

b) La pendiente es el coeficiente de x : $-\frac{1}{2}$.

Resultado: $m_1 = -\frac{1}{2}$

c) Para ser perpendicular, $m_2 = -\frac{1}{-1/2} = 2$.

Resultado: $m_2 = 2$

d)

1. Recta de pendiente 2 por (3, 7):

$$y - 7 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x + 1.$$

2. Pasamos todos los términos al primer miembro: $2x - y + 1 = 0$. Los coeficientes $a = 2$, $b = -1$, $d = 1$ son enteros.

Resultado: $2x - y + 1 = 0$

Resultado: a) (0, -2); b) $-\frac{1}{2}$; c) 2; d) $2x - y + 1 = 0$

EJERCICIO 31

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2008

- Escriba la pendiente de la recta $y = 3x + 4$.
- Encuentre la pendiente de la recta que es perpendicular a la recta $y = 3x + 4$.
- Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a $y = 3x + 4$ y que pasa por el punto (6, 7).
- Encuentre las coordenadas del punto de intersección de estas dos rectas.

a) En $y = 3x + 4$ la pendiente es el coeficiente de x : 3.

Resultado: 3

b) La perpendicular tiene pendiente $-\frac{1}{3}$.

Resultado: $-\frac{1}{3}$

c) Recta de pendiente $-\frac{1}{3}$ por (6, 7):

$$y - 7 = -\frac{1}{3}(x - 6) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 2 + 7 = -\frac{1}{3}x + 9.$$

Resultado: $y = -\frac{1}{3}x + 9$

d) Igualamos las dos ecuaciones (o resolvemos el sistema con la CPG):

$$3x + 4 = -\frac{1}{3}x + 9 \Rightarrow \frac{10}{3}x = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Entonces $y = 3 \cdot 1,5 + 4 = 8,5$.

Resultado: (1,5; 8,5)

Resultado: a) 3; b) $-\frac{1}{3}$; c) $y = -\frac{1}{3}x + 9$; d) (1,5; 8,5)

EJERCICIO 32

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

Una línea recta, L_1 , tiene por ecuación $x + 4y + 34 = 0$.

a) Halle la pendiente de L_1 .

La ecuación de la recta L_2 es $y = mx$. L_2 es perpendicular a L_1 .

b) Halle el valor de m .

c) Halle las coordenadas del punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 .

a) Despejamos y en $x + 4y + 34 = 0$:

$$4y = -x - 34 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{17}{2}.$$

La pendiente de L_1 es $-\frac{1}{4}$.

Resultado: $m_{L_1} = -\frac{1}{4}$

b) Si L_2 es perpendicular a L_1 , el producto de las pendientes es -1 :

$$m \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \Rightarrow m = 4.$$

Resultado: $m = 4$

c) Resolvemos el sistema formado por $y = 4x$ y $x + 4y + 34 = 0$.

1. Sustituimos: $x + 4(4x) + 34 = 0$, es decir, $17x + 34 = 0$.

2. Entonces $x = -2$.

3. $y = 4 \cdot (-2) = -8$.

(También se puede resolver con la CPG.)

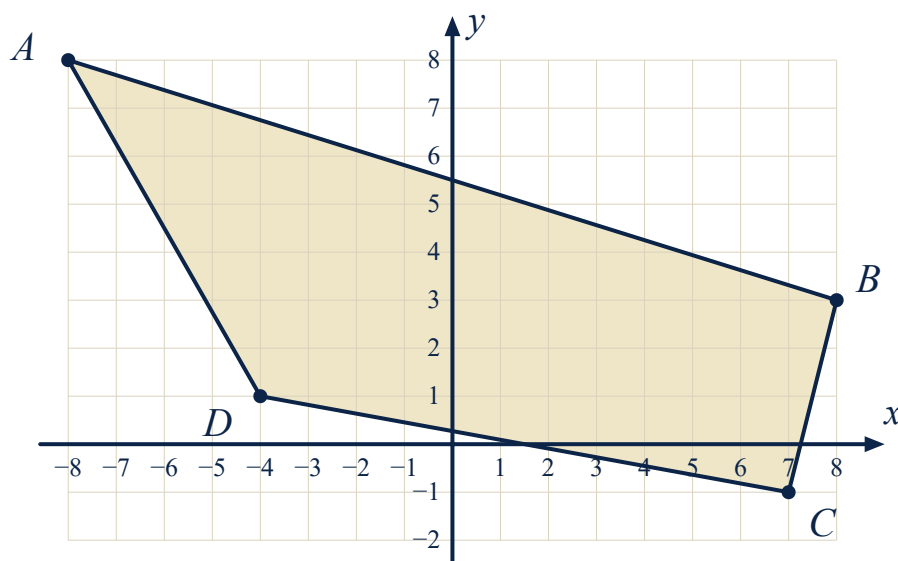
Resultado: a) $-\frac{1}{4}$; b) $m = 4$; c) $(-2, -8)$

EJERCICIO 33

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2005

Los vértices del cuadrilátero ABCD que aparece en el siguiente diagrama son $A(-8, 8)$, $B(8, 3)$, $C(7, -1)$ y $D(-4, 1)$.



x numerado de -8 a 8 y eje y numerado de -2 a 8 , con una marca numerada por cada unidad. Cuadrilátero ABCD dibujado con segmentos rectos: A en $(-8, 8)$ arriba a la izquierda, B en $(8, 3)$ a la derecha, C en $(7, -1)$ abajo a la derecha, D en $(-4, 1)$ a la izquierda del origen. Lados AB, BC, CD y DA. Cada vértice marcado con un punto y con su letra al lado."> La pendiente de la recta AB es $-\frac{5}{16}$.

a) Calcule la pendiente de la recta DC.

b) Determine si DC es paralela a AB y justifique su respuesta.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y C es $3x + 5y = 16$.

c) Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos B y D, expresando la respuesta en la forma $ax + by = c$, con a, b y $c \in \mathbb{Z}$.

Las rectas AC y BD se cortan en el punto T.

d) Calcule las coordenadas de T.

a) La pendiente de la recta que pasa por $D(-4, 1)$ y $C(7, -1)$ es

$$m_{DC} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{-1 - 1}{7 - (-4)} = \frac{-2}{11} = -\frac{2}{11}.$$

Resultado: $m_{DC} = -\frac{2}{11}$

b) Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente. Aquí $m_{AB} = -\frac{5}{16} \approx -0,3125$ y $m_{DC} = -\frac{2}{11} \approx -0,1818$, que son distintas.

Resultado: DC no es paralela a AB, porque sus pendientes son distintas.

c) Se pide la recta por $B(8, 3)$ y $D(-4, 1)$.

1. Pendiente: $m = \frac{1 - 3}{-4 - 8} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}.$

2. Ecuación punto-pendiente con el punto B : $y - 3 = \frac{1}{6}(x - 8).$

3. Multiplicamos por 6 para quitar el denominador: $6y - 18 = x - 8.$

4. Pasamos las variables al primer miembro: $x - 6y = -10.$

Comprobación con D : $-4 - 6 \cdot 1 = -10$, correcto.

Resultado: $x - 6y = -10$

d) T es la solución del sistema formado por las rectas AC y BD:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 16 \\ x - 6y = -10 \end{cases}$$

1. De la segunda ecuación: $x = 6y - 10.$

2. Sustituimos en la primera: $3(6y - 10) + 5y = 16 \Rightarrow 23y - 30 = 16 \Rightarrow y = 2.$

3. Entonces $x = 6 \cdot 2 - 10 = 2.$

(El sistema también se puede resolver directamente con la CPG.)

Resultado: $T(2, 2)$

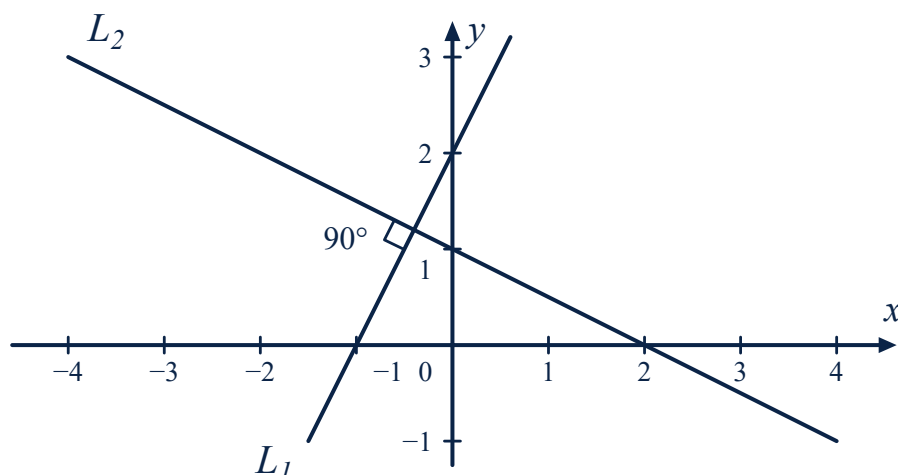
Resultado: a) $-\frac{2}{11}$; b) no son paralelas (pendientes distintas); c) $x - 6y = -10$; d) $T(2, 2)$

EJERCICIO 34

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2004

Un alumno ha dibujado las gráficas de dos rectas L_1 y L_2 y ha señalado el ángulo entre ellas como un ángulo recto, según se muestra a continuación. El alumno ha dibujado una de las rectas de forma incorrecta.



x marcado de -4 a 4 y eje y marcado de -1 a 3 (una marca por unidad). Recta L_1 , rotulada « L_1 » en su extremo inferior, que sube hacia la derecha pasando aproximadamente por $(-1, 0)$ y $(0, 2)$ (pendiente 2). Recta L_2 , rotulada « L_2 » en su extremo superior izquierdo, que baja hacia la derecha pasando por $(0, 1)$ y cortando al eje x en $(2, 0)$ (pendiente $-\frac{1}{2}$). Se cortan cerca del punto $(-0,4; 1,2)$, donde hay un pequeño cuadrado de ángulo recto con el rótulo « 90° ». La ecuación de L_1 es $y = 2x + 2$ y la ecuación de L_2 es $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

- Escriba las pendientes de L_1 y L_2 según las ecuaciones dadas.
- ¿Cuál de las dos rectas es la que el alumno ha dibujado de forma incorrecta?
- ¿Por qué se puede afirmar, a partir de las respuestas del apartado (a), que el ángulo formado por L_1 y L_2 no es de 90° ?
- En el diagrama, dibuje en forma correcta la recta que ha sido erróneamente representada.

a) Las ecuaciones están en la forma $y = mx + n$, así que la pendiente es el coeficiente de x :

$$m_1 = 2 \text{ y } m_2 = -\frac{1}{4}.$$

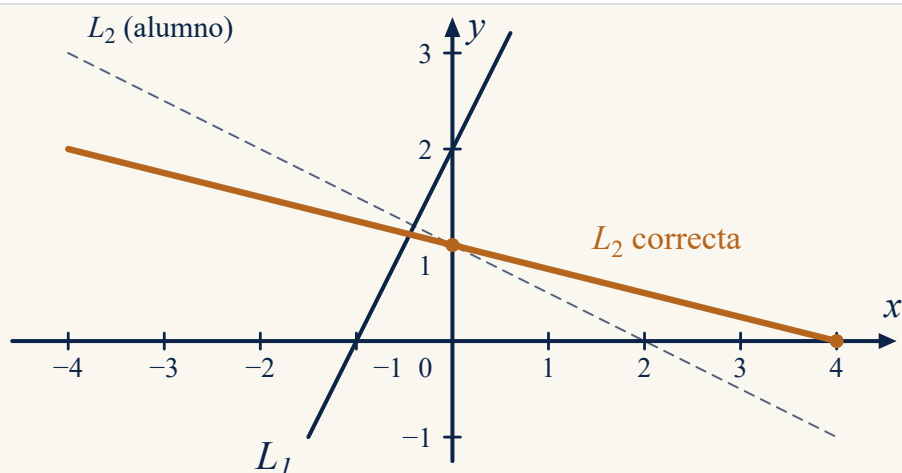
b) L_1 está bien dibujada: corta al eje y en 2 y sube 2 unidades por cada unidad que avanza a la derecha. En cambio, L_2 debería cortar al eje y en 1 y bajar solo $\frac{1}{4}$ de unidad por cada unidad hacia la derecha (cortaría al eje x en $x = 4$), y el alumno la ha dibujado con una inclinación mayor (corta al eje x en $x = 2$). La recta mal dibujada es L_2 .

c) Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1 . Aquí

$$m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} \neq -1,$$

así que las rectas no son perpendiculares y el ángulo entre ellas no es de 90° .

d) Se corrige L_2 dibujando $y = -\frac{1}{4}x + 1$. Basta con dos puntos: para $x = 0$, $y = 1$, es decir $(0, 1)$; para $x = 4$, $y = -\frac{1}{4} \cdot 4 + 1 = 0$, es decir $(4, 0)$. Se traza la recta que une $(0, 1)$ y $(4, 0)$.



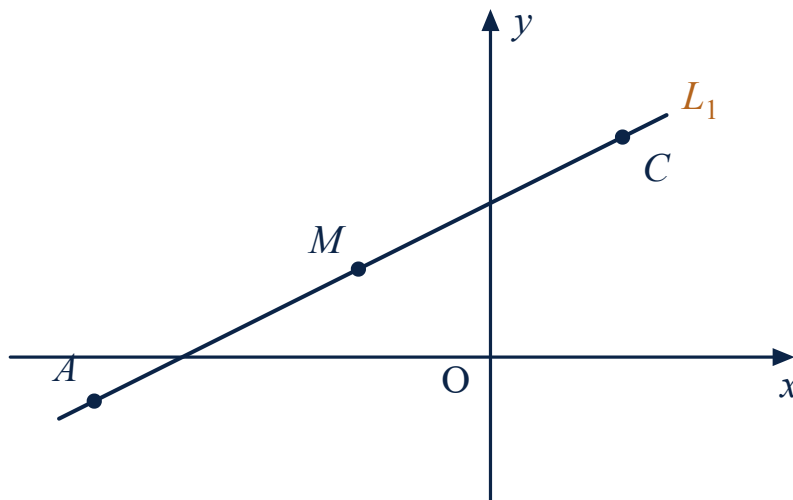
L_1 ($y = 2x + 2$, pasa por $(-1, 0)$ y $(0, 2)$). La recta L_2 correcta se dibuja resaltada (más gruesa y gris) pasando por los puntos $(0, 1)$ y $(4, 0)$, con pendiente $-\frac{1}{4}$, y rotulada « L_2 correcta». La L_2 dibujada por el alumno (por $(0, 1)$ y $(2, 0)$) queda en trazo fino como referencia."> **Resultado:** a) $m_1 = 2$, $m_2 = -\frac{1}{4}$; b) L_2 ; c) porque $m_1 m_2 = -\frac{1}{2} \neq -1$; d) L_2 pasa por $(0, 1)$ y $(4, 0)$.

EJERCICIO 35

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2019

La siguiente figura muestra la recta L_1 . Los puntos $A(-9, -1)$, $M(-3, 2)$ y C pertenecen a L_1 .



x (horizontal) e y (vertical) con origen O , sin escala numérica. La recta L_1 es creciente (pendiente positiva moderada): empieza abajo a la izquierda, atraviesa el eje x a la izquierda del origen (alrededor de $x = -7$), corta el eje y por encima del origen (alrededor de $y = 3,5$) y termina arriba a la derecha con el rótulo L_1 . Sobre la recta hay tres puntos rotulados: A (abajo a la izquierda, justo por debajo del eje x), M (más arriba, a la izquierda del eje y) y C (arriba a la derecha del eje y), en ese orden."

a) Halle la pendiente de L_1 .

M es el punto medio de AC .

b) Halle las coordenadas del punto C .

La recta L_2 es perpendicular a L_1 y pasa por el punto M .

c) Halle la ecuación de L_2 . Dé la respuesta en la forma $ax + by + d = 0$, donde $a, b, d \in \mathbb{Z}$.

El punto $N(k, 4)$ pertenece a L_2 .

d) Halle el valor de k .

e) Halle la distancia que hay entre los puntos M y N .

f) Sabiendo que la longitud de AM es $\sqrt{45}$, halle el área del triángulo ANC .

a) Como A y M están en L_1 :

$$m_1 = \frac{2 - (-1)}{-3 - (-9)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Resultado: $m_1 = \frac{1}{2}$

b)

1. Si M es el punto medio de AC , sus coordenadas son la media de las de A y C : $-3 = \frac{-9 + x_C}{2}$ y $2 = \frac{-1 + y_C}{2}$.

2. Despejamos: $x_C = -6 + 9 = 3$ e $y_C = 4 + 1 = 5$.

Resultado: $C(3, 5)$

c)

1. Perpendicular a L_1 : $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$.

2. Pasa por $M(-3, 2)$: $y - 2 = -2(x + 3)$, es decir, $y = -2x - 4$.

3. Pasamos todo al primer miembro: $2x + y + 4 = 0$.

Resultado: $2x + y + 4 = 0$

d) Como $N(k, 4)$ está en L_2 , sustituimos en su ecuación: $2k + 4 + 4 = 0$, luego $k = -4$.

Resultado: $k = -4$

e) Con $M(-3, 2)$ y $N(-4, 4)$:

$$MN = \sqrt{(-4 + 3)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2,24.$$

Resultado: $MN = \sqrt{5} \approx 2,24$

f)

1. M es el punto medio de AC , así que $AC = 2AM = 2\sqrt{45}$.

2. L_2 es perpendicular a L_1 y pasa por M , que está en L_1 ; por tanto MN es perpendicular a AC y es la altura del triángulo ANC sobre la base AC .

3. Área = $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{45} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{225} = 15$.

Resultado: área de $ANC = 15$

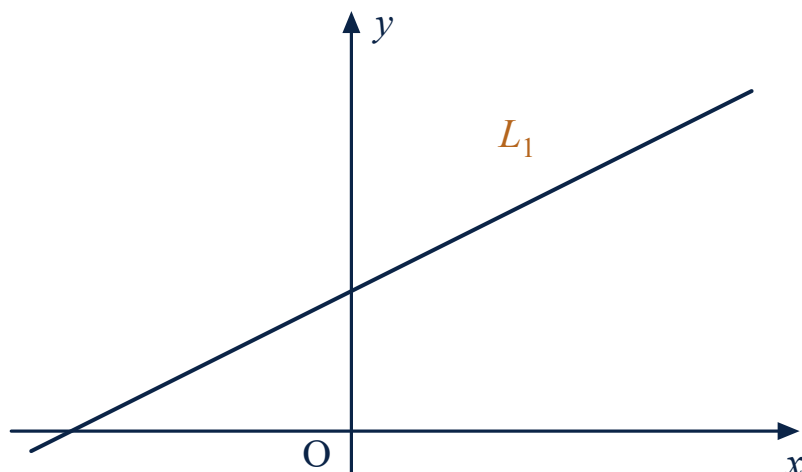
Resultado: a) $\frac{1}{2}$; b) $C(3, 5)$; c) $2x + y + 4 = 0$; d) $k = -4$; e) $\sqrt{5} \approx 2,24$; f) 15

EJERCICIO 36

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2016

La recta L_1 tiene por ecuación $2y - x - 7 = 0$ y se muestra en la siguiente figura.



x e y , sin escala numérica. La recta L_1 es creciente (pendiente $\frac{1}{2}$): corta el eje y por encima del origen (aprox. $y = 3,5$), pasa por la parte superior derecha del primer cuadrante y lleva el rótulo L_1 sobre la recta, cerca de su parte media; se prolonga a la izquierda más allá del eje y y a la derecha hasta el extremo del dibujo." El punto A tiene coordenadas $(1, 4)$.

a) Muestre que A pertenece a L_1 .

El punto C tiene coordenadas $(5, 12)$. M es el punto medio de AC .

b) Halle las coordenadas de M .

c) Halle la longitud de AC .

La línea recta L_2 es perpendicular a AC y pasa por M .

d) Muestre que la ecuación de L_2 es $2y + x - 19 = 0$.

El punto D es la intersección de L_1 y L_2 .

e) Halle las coordenadas de D .

La longitud de MD es $\frac{\sqrt{45}}{2}$.

f) Escriba la longitud de MD redondeando a cinco cifras significativas.

El punto B es tal que $ABCD$ es un rombo.

g) Halle el área de $ABCD$.

a) Sustituimos $(1, 4)$ en $2y - x - 7$: $2 \cdot 4 - 1 - 7 = 8 - 8 = 0$. Se cumple la ecuación, así que $A \in L_1$.

Resultado: A pertenece a L_1 , pues $2 \cdot 4 - 1 - 7 = 0$

b)

$$M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+12}{2} \right) = (3, 8).$$

Resultado: $M(3, 8)$

c)

$$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,94.$$

Resultado: $AC = \sqrt{80} \approx 8,94$

d)

1. Pendiente de AC : $\frac{12-4}{5-1} = 2$.

2. L_2 es perpendicular a AC , luego su pendiente es $-\frac{1}{2}$.

3. Pasa por $M(3, 8)$: $y - 8 = -\frac{1}{2}(x - 3)$.

4. Multiplicamos por 2: $2y - 16 = -x + 3$, es decir, $2y + x - 19 = 0$, como se quería mostrar.

Resultado: $L_2 : 2y + x - 19 = 0$

e)

1. Resolvemos el sistema $2y - x - 7 = 0$ y $2y + x - 19 = 0$ (también se puede hacer con la calculadora).

2. Sumando las dos ecuaciones: $4y - 26 = 0$, luego $y = 6,5$.

3. Sustituimos en la primera: $x = 2y - 7 = 13 - 7 = 6$.

Resultado: $D(6, 6,5)$

f) $MD = \frac{\sqrt{45}}{2} = 3,354101 \dots \approx 3,3541$.

(Comprobación: $M(3, 8)$ y $D(6; 6,5)$ dan $\sqrt{3^2 + 1,5^2} = \sqrt{11,25}$.)

Resultado: $MD \approx 3,3541$

g)

1. En un rombo las diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio. Aquí las diagonales son AC y BD , y se cortan en M (que es el punto medio de AC).

2. Como M también es el punto medio de BD , $BD = 2MD = \sqrt{45}$.

3. Área = $\frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{80} \cdot \sqrt{45}}{2} = \frac{\sqrt{3600}}{2} = \frac{60}{2} = 30$.

Resultado: área de $ABCD = 30$

Resultado: a) comprobado; b) $M(3, 8)$; c) $\sqrt{80} \approx 8,94$; d) comprobado; e) $D(6; 6,5)$; f) 3,3541; g) 30

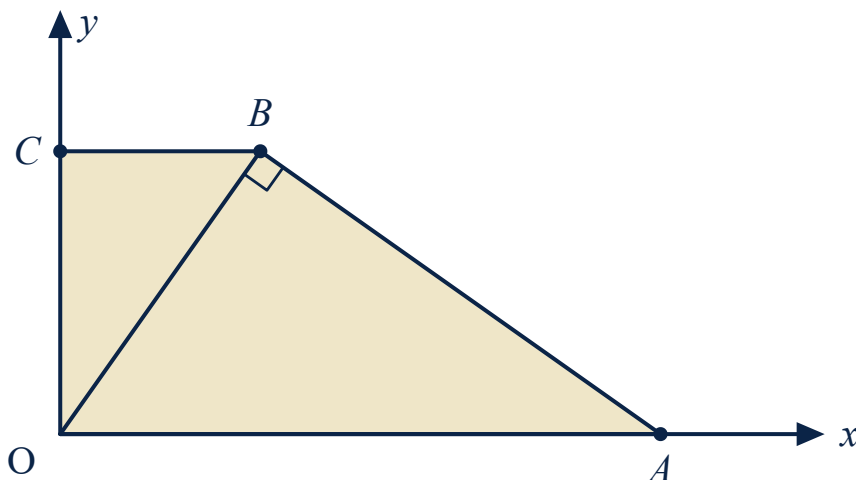
EJERCICIO 37

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2014

El siguiente diagrama muestra dos triángulos, OBC y OBA , en un conjunto de ejes.

El punto C se encuentra en el eje y , y O es el origen.



La ecuación de la recta BC es $y = 4$.

a) Escriba las coordenadas del punto C .

La coordenada x del punto B es a .

b) (i) Escriba las coordenadas del punto B ;

(ii) Escriba la pendiente de la recta OB .

El punto A se encuentra en el eje x y la recta AB es perpendicular a la recta OB .

c) (i) Escriba la pendiente de la recta AB .

(ii) Muestre que la ecuación de la recta AB es $4y + ax - a^2 - 16 = 0$.

El área del triángulo AOB es tres veces el área del triángulo OBC .

d) Encuentre una expresión, en función de a , para

(i) el área del triángulo OBC ;

(ii) la coordenada x del punto A .

e) Calcule el valor de a .

a) C está en el eje y y en la recta $y = 4$, luego su abscisa es 0 y su ordenada es 4.

Resultado: $C(0, 4)$

b)

1. (i) B está en la recta BC , de ecuación $y = 4$, y su abscisa es a : $B(a, 4)$.

2. (ii) La recta OB pasa por $O(0, 0)$ y por $B(a, 4)$, así que su pendiente es

$$m_{OB} = \frac{4 - 0}{a - 0} = \frac{4}{a}.$$

Resultado: (i) $B(a, 4)$; (ii) $m_{OB} = \frac{4}{a}$

c)

1. (i) Dos rectas perpendiculares cumplen $m_1 m_2 = -1$. Entonces

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{OB}} = -\frac{a}{4}.$$

2. (ii) Escribimos la recta AB en forma punto-pendiente, usando el punto $B(a, 4)$:

$$y - 4 = -\frac{a}{4}(x - a).$$

Multiplicamos por 4 para quitar el denominador:

$$4y - 16 = -a(x - a) = -ax + a^2.$$

Pasamos todo al primer miembro:

$$4y + ax - a^2 - 16 = 0,$$

que es la ecuación pedida.

Resultado: (i) $m_{AB} = -\frac{a}{4}$; (ii) queda demostrado que $4y + ax - a^2 - 16 = 0$

d)

1. (i) El triángulo OBC tiene su ángulo recto en C (porque CB es horizontal y OC está en el eje y).

Tomamos como base $CB = a$ y como altura $OC = 4$:

$$\text{Área}(OBC) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 4 = 2a.$$

2. (ii) A está en el eje x , así que su ordenada es 0. Sustituimos $y = 0$ en la ecuación de AB :

$$ax - a^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2 + 16}{a}.$$

Resultado: (i) $\text{Área}(OBC) = 2a$; (ii) $x_A = \frac{a^2 + 16}{a}$

e)

1. El triángulo AOB tiene base $OA = \frac{a^2 + 16}{a}$ sobre el eje x y altura igual a la ordenada de B , que es 4:

$$\text{Área}(AOB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + 16}{a} \cdot 4 = \frac{2(a^2 + 16)}{a}.$$

2. Por el enunciado, $\text{Área}(AOB) = 3 \cdot \text{Área}(OBC) = 3 \cdot 2a = 6a$. Igualamos:

$$\frac{2(a^2 + 16)}{a} = 6a.$$

3. Multiplicamos por a (con $a \neq 0$): $2a^2 + 32 = 6a^2$, es decir, $4a^2 = 32$ y $a^2 = 8$.

4. Como B está a la derecha del eje y (según el diagrama), $a > 0$ y

$$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83.$$

Resultado: $a = 2\sqrt{2} \approx 2,83$

Resultado: a) $C(0, 4)$; b) (i) $B(a, 4)$, (ii) $\frac{4}{a}$; c) (i) $-\frac{a}{4}$, (ii) demostrado; d) (i) $2a$, (ii) $\frac{a^2 + 16}{a}$; e) $a = 2\sqrt{2} \approx 2,83$

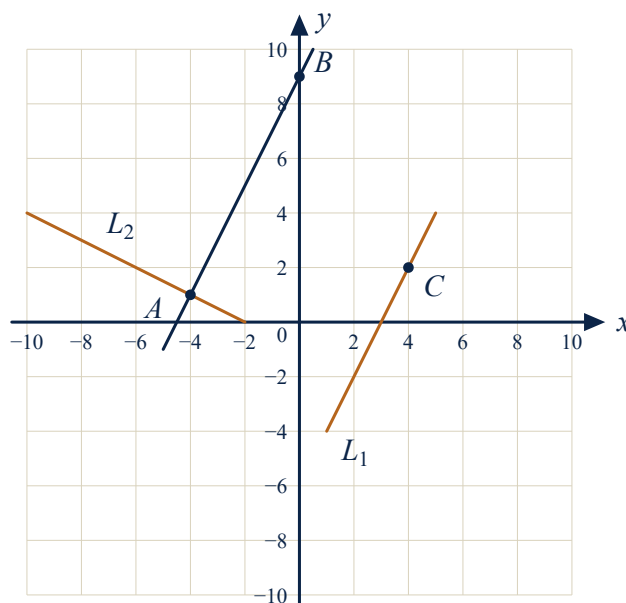
EJERCICIO 38

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2010

Los puntos $A(-4, 1)$, $B(0, 9)$ y $C(4, 2)$ están representados en el siguiente diagrama.

El diagrama también muestra las rectas AB , L_1 y L_2 .



a) Halle la pendiente de AB .

L_1 pasa por C y es paralela a AB .

b) Escriba cuál es el punto de corte de L_1 con el eje y .

L_2 pasa por A y es perpendicular a AB .

c) Escriba la ecuación de L_2 . Dé la respuesta en la forma $ax + by + d = 0$ donde a, b y $d \in \mathbb{Z}$.

d) Escriba las coordenadas de D , el punto donde se cortan L_1 y L_2 .

R es un punto perteneciente a L_1 , de forma tal que $ABRD$ es un rectángulo.

e) Escriba las coordenadas de R .

La distancia entre A y D es igual a $\sqrt{45}$.

f) (i) Halle la distancia que hay entre D y R .

(ii) Halle el área del triángulo BDR .

a) La pendiente de la recta que pasa por $A(-4, 1)$ y $B(0, 9)$ es

$$m_{AB} = \frac{9 - 1}{0 - (-4)} = \frac{8}{4} = 2.$$

Resultado: $m_{AB} = 2$

b) L_1 es paralela a AB , así que tiene la misma pendiente, 2, y pasa por $C(4, 2)$.

1. Ecuación punto-pendiente: $y - 2 = 2(x - 4)$.

2. Despejamos: $y = 2x - 6$.

3. El corte con el eje y se obtiene con $x = 0$: $y = -6$.

Resultado: $(0, -6)$

c) L_2 es perpendicular a AB , así que su pendiente es el opuesto del inverso de 2, es decir, $-\frac{1}{2}$, y pasa por $A(-4, 1)$.

$$1. y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 4).$$

$$2. \text{ Multiplicamos por 2: } 2y - 2 = -x - 4.$$

$$3. \text{ Pasamos todo al mismo miembro: } x + 2y + 2 = 0.$$

Resultado: $x + 2y + 2 = 0$

d) D está en las dos rectas: $y = 2x - 6$ y $x + 2y + 2 = 0$.

$$1. \text{ Sustituimos la primera en la segunda: } x + 2(2x - 6) + 2 = 0.$$

$$2. \text{ Operamos: } 5x - 10 = 0, \text{ luego } x = 2.$$

$$3. \text{ Entonces } y = 2 \cdot 2 - 6 = -2.$$

(También se puede obtener con la función de intersección de la CPG.)

Resultado: $D(2, -2)$

e) En el rectángulo $ABRD$ los lados AB y DR son paralelos e iguales, y también BR y AD . Por tanto, para llegar de B a R hay que hacer el mismo desplazamiento que de A a D .

$$1. \text{ Desplazamiento de } A \text{ a } D: (2 - (-4), -2 - 1) = (6, -3).$$

$$2. R = B + (6, -3) = (0 + 6, 9 - 3) = (6, 6).$$

$$3. \text{ Comprobación: } R \text{ está en } L_1, \text{ porque } 2 \cdot 6 - 6 = 6.$$

Resultado: $R(6, 6)$

f) (i) Distancia entre $D(2, -2)$ y $R(6, 6)$:

$$DR = \sqrt{(6 - 2)^2 + (6 - (-2))^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} \approx 8,94.$$

(ii) En el rectángulo, el ángulo en R es recto, así que BR y DR son los catetos del triángulo BDR . Además $BR = AD = \sqrt{45}$.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot BR \cdot DR = \frac{1}{2} \sqrt{45} \sqrt{80} = \frac{1}{2} \sqrt{3600} = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30.$$

Resultado: (i) $DR = \sqrt{80} \approx 8,94$; (ii) área = 30

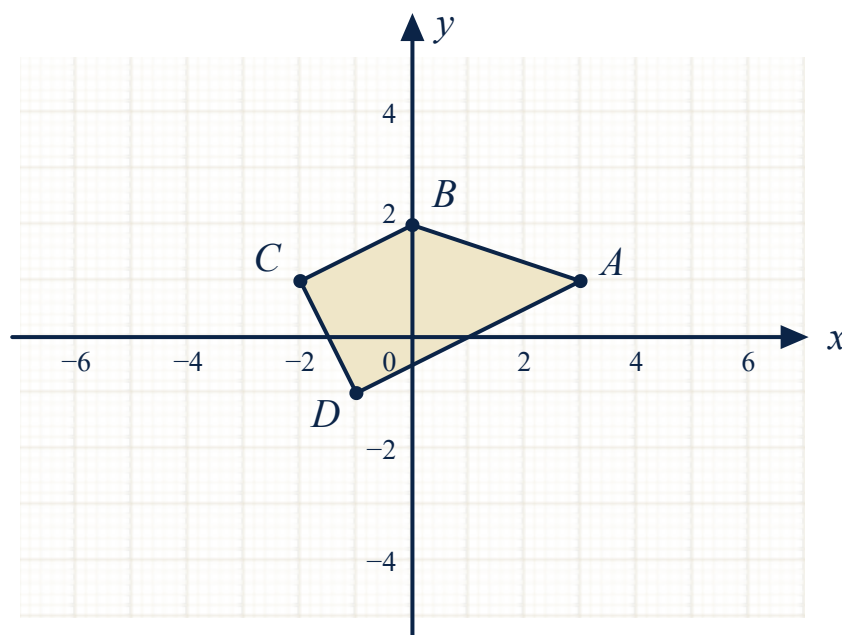
Resultado: a) 2; b) $(0, -6)$; c) $x + 2y + 2 = 0$; d) $D(2, -2)$; e) $R(6, 6)$; f) (i) $\sqrt{80} \approx 8,94$, (ii) 30

EJERCICIO 39

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2009

Los vértices del cuadrilátero $ABCD$ como se muestra en el diagrama son $A(3, 1)$, $B(0, 2)$, $C(-2, 1)$ y $D(-1, -1)$.



- Calcule la pendiente de la recta CD .
- Muestre que la recta AD es perpendicular a la recta CD .
- Encuentre la ecuación de la recta CD . Dé su respuesta en la forma $ax + by = c$ donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Las rectas AB y CD se cortan en el punto E . La ecuación de la recta AB es $x + 3y = 6$.

- Encuentre las coordenadas de E .
- Encuentre la distancia entre A y D .

La distancia entre D y E es $\sqrt{20}$.

- Halle el área del triángulo ADE .

- Con $C(-2, 1)$ y $D(-1, -1)$:

$$m_{CD} = \frac{-1 - 1}{-1 - (-2)} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Resultado: $m_{CD} = -2$

- Calculamos la pendiente de AD con $A(3, 1)$ y $D(-1, -1)$:

$$m_{AD} = \frac{-1 - 1}{-1 - 3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Rectas perpendiculares: producto de pendientes igual a -1 . Aquí

$$m_{CD} \cdot m_{AD} = (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1,$$

luego AD es perpendicular a CD .

- Recta CD : pendiente -2 y pasa por $C(-2, 1)$.

$$1. y - 1 = -2(x + 2).$$

$$2. y = -2x - 3.$$

$$3. \text{Pasamos la } x \text{ al primer miembro: } 2x + y = -3.$$

Resultado: $2x + y = -3$

d) E es la intersección de $x + 3y = 6$ y $2x + y = -3$.

1. De la segunda: $y = -3 - 2x$.
2. Sustituimos en la primera: $x + 3(-3 - 2x) = 6$, es decir, $x - 9 - 6x = 6$.
3. Entonces $-5x = 15$, de donde $x = -3$.
4. $y = -3 - 2(-3) = 3$.

(También puede resolverse el sistema con la CPG.)

Resultado: $E(-3, 3)$

e)

$$AD = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \approx 4,47.$$

Resultado: $AD = \sqrt{20} \approx 4,47$

f) E está en la recta CD , y $AD \perp CD$ (apartado b), así que el triángulo ADE tiene el ángulo recto en D y sus catetos son $AD = \sqrt{20}$ y $DE = \sqrt{20}$.

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10.$$

Resultado: a) -2 ; b) $m_{AD} \cdot m_{CD} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$, luego son perpendiculares; c) $2x + y = -3$; d) $E(-3, 3)$; e) $\sqrt{20} \approx 4,47$; f) 10

Distancia a una recta y mediatriz

EJERCICIO 40

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2009

Una recta une los puntos $A(2, 1)$ y $B(4, 5)$.

a) Halle la pendiente de la recta AB .

Sea M el punto medio del segmento de recta AB .

b) Escriba las coordenadas de M .

c) Halle la ecuación de la recta que es perpendicular a AB y pasa por M .

a)

$$m_{AB} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Resultado: $m_{AB} = 2$

b) El punto medio tiene como coordenadas la media de las coordenadas de los extremos:

$$M = \left(\frac{2 + 4}{2}, \frac{1 + 5}{2} \right) = (3, 3).$$

Resultado: $M(3, 3)$

c)

1. La pendiente de la perpendicular es $-\frac{1}{2}$.

2. Pasa por $M(3, 3)$:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}.$$

(Esta recta es la mediatriz del segmento AB .)

Resultado: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

Resultado: a) 2; b) $M(3, 3)$; c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

EJERCICIO 41

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2007

Dados los puntos $P(4, 1)$ y $Q(0, -5)$ situados sobre el plano cartesiano.

a) Determine

(i) las coordenadas de M , el punto medio de P y Q .

(ii) la pendiente de la recta que pasa por P y por Q .

(iii) la pendiente de la recta que pasa por M y es perpendicular a PQ .

Dicha recta perpendicular que pasa por M , además corta al eje y en $R(0, k)$.

b) Halle k .

a)

1. (i) Punto medio:

$$M = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{1+(-5)}{2} \right) = (2, -2).$$

2. (ii) Pendiente de PQ :

$$m_{PQ} = \frac{1 - (-5)}{4 - 0} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

3. (iii) La perpendicular tiene pendiente

$$-\frac{1}{3/2} = -\frac{2}{3} \approx -0,667.$$

Resultado: (i) $M(2, -2)$; (ii) $\frac{3}{2}$; (iii) $-\frac{2}{3}$

b)

1. La recta perpendicular por $M(2, -2)$, con pendiente $-\frac{2}{3}$, es

$$y + 2 = -\frac{2}{3}(x - 2).$$

2. Corta al eje y cuando $x = 0$:

$$y + 2 = -\frac{2}{3}(0 - 2) = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}.$$

Por tanto $R\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ y $k = -\frac{2}{3}$.

Resultado: $k = -\frac{2}{3}$

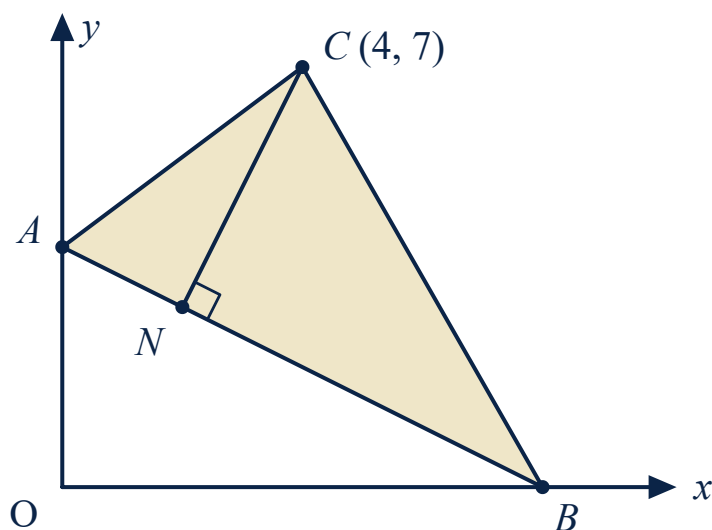
Resultado: a) (i) $M(2, -2)$, (ii) $\frac{3}{2}$, (iii) $-\frac{2}{3}$; b) $k = -\frac{2}{3}$

EJERCICIO 42

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2010

El diagrama muestra el triángulo ABC . El punto C tiene coordenadas $(4, 7)$, y la ecuación de la recta AB es $x + 2y = 8$.



- Encuentre las coordenadas de
 - A ;
 - B .
 - Demuestre que la distancia entre A y B es 8,94 aproximada a 3 cifras significativas. N se encuentra en la recta AB . La recta CN es perpendicular a la recta AB .
 - Encuentre
 - la pendiente de CN ;
 - la ecuación de CN .
 - Calcule las coordenadas de N .
- Se sabe que $AC = 5$ y $BC = 8,06$.
- Calcule el tamaño del ángulo ACB .
 - Calcule el área del triángulo ACB .

a) A está en el eje y ($x = 0$) y B en el eje x ($y = 0$); ambos están en la recta $x + 2y = 8$.

1. (i) Con $x = 0$: $2y = 8$, $y = 4$. Luego $A(0, 4)$.

2. (ii) Con $y = 0$: $x = 8$. Luego $B(8, 0)$.

Resultado: (i) $A(0, 4)$; (ii) $B(8, 0)$

b) Distancia entre $A(0, 4)$ y $B(8, 0)$:

$$AB = \sqrt{(8-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 8,9442\dots$$

Redondeando a tres cifras significativas (la cuarta cifra es 4, no se sube): $AB \approx 8,94$.

Resultado: $AB = \sqrt{80} \approx 8,94$ (demostrado)

c)

1. (i) De $x + 2y = 8$ se obtiene $y = -\frac{1}{2}x + 4$, así que $m_{AB} = -\frac{1}{2}$. Como $CN \perp AB$, $m_{CN} = -\frac{1}{-1/2} = 2$.

2. (ii) Recta de pendiente 2 por $C(4, 7)$:

$$y - 7 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 1 \Rightarrow 2x - y = 1.$$

Resultado: (i) 2; (ii) $y = 2x - 1$, es decir, $2x - y = 1$

d) N es la intersección de AB y CN . Resolvemos el sistema (a mano o con la CPG):

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Sustituimos la segunda en la primera: $x + 2(2x - 1) = 8$, o sea $5x - 2 = 8$ y $x = 2$. Entonces $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Resultado: $N(2, 3)$

e) Conocemos los tres lados del triángulo: $AC = 5$, $BC = 8,06 \dots = \sqrt{65}$ y $AB = \sqrt{80}$. Aplicamos el teorema del coseno al ángulo C , opuesto al lado AB :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cos C$$

$$80 = 25 + 65 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{65} \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{10}{10\sqrt{65}} = \frac{1}{\sqrt{65}} \approx 0,1240.$$

Con la CPG en grados: $C = \arccos(0,1240 \dots) \approx 82,87^\circ$.

Resultado: $\widehat{ACB} \approx 82,9^\circ$

f) Tomamos AB como base y CN como altura (porque $CN \perp AB$).

$$1. CN = \sqrt{(4-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4,472.$$

2. Área:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{20} = \frac{1}{2} \sqrt{1600} = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20.$$

(Comprobación con el apartado e): $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8,06 \cdot \sin 82,87^\circ \approx 20,0$.)

Resultado: Área = 20

Resultado: a) (i) $A(0, 4)$, (ii) $B(8, 0)$; b) $AB = \sqrt{80} \approx 8,94$; c) (i) 2, (ii) $y = 2x - 1$; d) $N(2, 3)$; e) $\approx 82,9^\circ$; f) 20

Diagramas de Voronói

EJERCICIO 43

★★ Medio

IB · Examen IB

Sean los puntos $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ y $C(3, 5)$.

Vamos a hallar las bisectrices perpendiculares entre cada par de puntos, y utilizar el algoritmo incremental para completar el diagrama de Voronói para los sitios indicados.

Dibujamos las mediatrices de cada par de sitios y las recortamos con el algoritmo incremental.

1. **Sitios A y B .** Están a la misma altura ($y = 1$), así que su mediatriz es vertical y pasa por el punto medio $(2, 1)$: la recta $x = 2$. Con solo estos dos sitios, el diagrama es la recta $x = 2$ (A a la izquierda, B a la derecha).

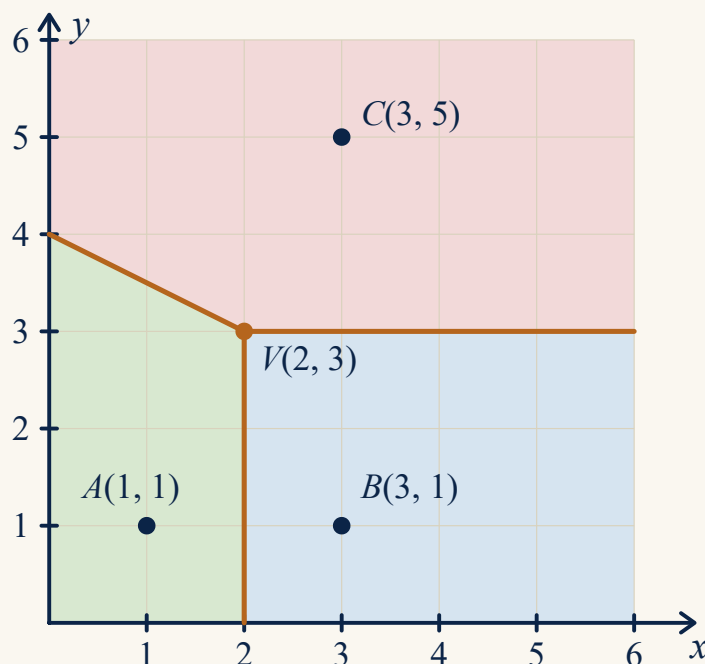
2. **Se añade C .** Hay que hallar las mediatrices de C con cada sitio anterior.

- Mediatriz de BC : $B(3, 1)$ y $C(3, 5)$ están en la misma vertical, luego la mediatriz es horizontal por el punto medio $(3, 3)$: la recta $y = 3$.
- Mediatriz de AC : punto medio $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (2, 3)$ y pendiente de $AC = \frac{5-1}{3-1} = 2$, luego la perpendicular tiene pendiente $-\frac{1}{2}$: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, es decir, $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

3. **Vértice de Voronói.** Las tres mediatrices se cortan en un punto: en $x = 2$, la recta $y = 3$ da $y = 3$ y la recta $y = -\frac{1}{2}x + 4$ da $y = 3$. El vértice es $V(2, 3)$, equidistante de los tres sitios: $VA = VB = VC = \sqrt{5}$.

4. **Qué parte de cada mediatriz se conserva.** Solo vale el trozo de mediatriz que separa las celdas realmente vecinas:

- $x = 2$ (entre A y B): solo por debajo de V (por encima, el punto más cercano es C).
- $y = 3$ (entre B y C): solo a la derecha de V .
- $y = -\frac{1}{2}x + 4$ (entre A y C): solo a la izquierda de V (hacia arriba).



x (de 0 a 6) e y (de 0 a 6). Sitios marcados con puntos y rotulados: $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ y $C(3, 5)$. Vértice de Voronói $V(2, 3)$ marcado con un punto. Tres semirrectas parten de V : una vertical hacia abajo ($x = 2$, hasta $y = 0$), una horizontal hacia la derecha ($y = 3$, hasta $x = 6$) y una oblicua hacia la izquierda y arriba ($y = -\frac{1}{2}x + 4$, que pasa por $(0, 4)$). Las tres celdas coloreadas: celda de A a la izquierda de $x = 2$ y por debajo de la oblicua (verde), celda de B abajo a la derecha, bajo $y = 3$ y a la derecha de $x = 2$ (azul claro), celda de C arriba, sobre $y = 3$ y sobre la oblicua (rosa)."
Resultado: mediatrices $x = 2$, $y = 3$ e $y = -\frac{1}{2}x + 4$; vértice de Voronói $V(2, 3)$; las celdas de A , B y C quedan separadas por las semirrectas descritas.

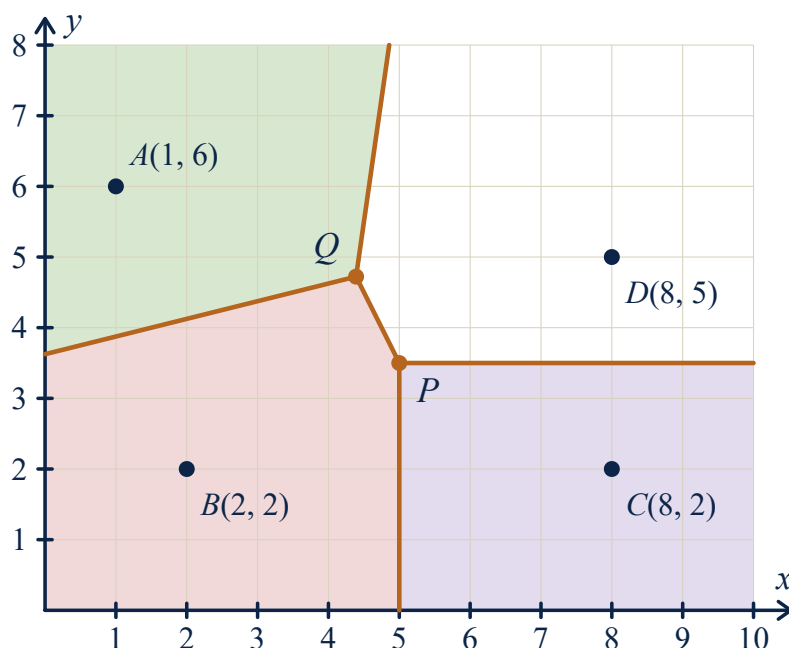
EJERCICIO 44

★★★ Difícil

IB · Examen IB

Una ciudad tiene cuatro tiendas. Un empresario desea abrir una nueva tienda en la ciudad, pero le gustaría que estuviera lo más lejos posible de las otras cuatro.

El siguiente diagrama de Voronói muestra las posiciones de las cuatro tiendas en unos ejes de coordenadas: $A(1, 6)$, $B(2, 2)$, $C(8, 2)$ y $D(8, 5)$, donde una unidad representa 1 km.



x (de 0 a 10) e y (de 0 a 8), una marca por unidad, con cuadrícula. Cuatro sitios con punto azul y rótulo: $A(1, 6)$ en la zona superior izquierda (celda verde clara), $B(2, 2)$ abajo a la izquierda (celda rosa), $C(8, 2)$ abajo a la derecha (celda morada) y $D(8, 5)$ arriba a la derecha (celda blanca). Dos vértices marcados: Q aprox. en $(4,4; 4,7)$ y P en $(5; 3,5)$. Aristas: desde el borde izquierdo (en $y \approx 3,6$) sube una arista hasta Q (frontera A-B); desde Q una arista casi vertical sube hasta el borde superior cerca de $x \approx 4,9$ (frontera A-D); de Q a P baja una arista corta (frontera B-D); de P sale una arista horizontal a la derecha en $y = 3,5$ hasta $x = 10$ (frontera C-D) y otra vertical hacia abajo en $x = 5$ hasta $y = 0$ (frontera B-C)."

- Encuentre las coordenadas de los vértices P y Q en el diagrama de Voronói.
- Determine dónde debe instalarse una quinta tienda de manera que esté ubicada lo más lejos posible de cualquier otra tienda, y a qué distancia estarán.

a) Cada vértice de Voronói es el punto donde se cortan las mediatrices de tres sitios.

Vértice P (equidistante de B , C y D):

- Mediatriz de BC : $B(2, 2)$ y $C(8, 2)$ tienen la misma y , luego la mediatriz es vertical por el punto medio $(5, 2)$: $x = 5$.
- Mediatriz de CD : $C(8, 2)$ y $D(8, 5)$ tienen la misma x , luego es horizontal por el punto medio $(8; 3,5)$: $y = 3,5$.
- Intersección: $P(5; 3,5)$.

Vértice Q (equidistante de A , B y D):

- Mediatriz de AB : punto medio $(1,5; 4)$; pendiente de $AB = \frac{2-6}{2-1} = -4$, así que la perpendicular tiene pendiente $\frac{1}{4}$: $y - 4 = \frac{1}{4}(x - 1,5)$, es decir, $y = \frac{x + 14,5}{4}$.

2. Mediatriz de AD : punto medio $(4,5; 5,5)$; pendiente de $AD = \frac{5-6}{8-1} = -\frac{1}{7}$, así que la perpendicular tiene pendiente 7: $y - 5,5 = 7(x - 4,5)$, es decir, $y = 7x - 26$.
3. Igualamos: $\frac{x + 14,5}{4} = 7x - 26 \Rightarrow 27x = 118,5 \Rightarrow x = \frac{79}{18} \approx 4,39$, y entonces $y = 7 \cdot \frac{79}{18} - 26 = \frac{85}{18} \approx 4,72$.

Con la CPG se obtiene el mismo resultado resolviendo el sistema.

Resultado: $P(5; 3,5)$, $Q(4,39; 4,72)$

b) El punto más alejado de todas las tiendas está en un vértice de Voronói (en un vértice las tres tiendas más próximas están a la misma distancia, y esa distancia es la que se quiere hacer máxima). Calculamos esa distancia en cada vértice, bastando una tienda de las tres.

- Desde P : $PD = \sqrt{(8-5)^2 + (5-3,5)^2} = \sqrt{9+2,25} = \sqrt{11,25} \approx 3,35$ km.
- Desde Q : $QA = \sqrt{\left(\frac{79}{18} - 1\right)^2 + \left(\frac{85}{18} - 6\right)^2} = \sqrt{\frac{4250}{324}} \approx 3,62$ km.

Como $3,62 > 3,35$, la mayor distancia mínima se consigue en Q : la nueva tienda debe construirse en el punto $Q(4,39; 4,72)$, a unos 3,62 km de las tiendas A , B y D más cercanas.

Resultado: a) $P(5; 3,5)$, $Q(4,39; 4,72)$; b) la nueva tienda en $Q(4,39; 4,72)$, a 3,62 km.

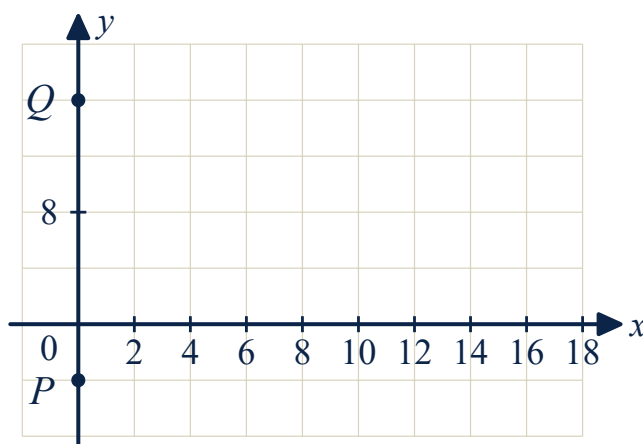
Otros problemas de geometría en el plano

EJERCICIO 45

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2006

Los puntos $P(0, -4)$, $Q(0, 16)$ se muestran en el siguiente diagrama

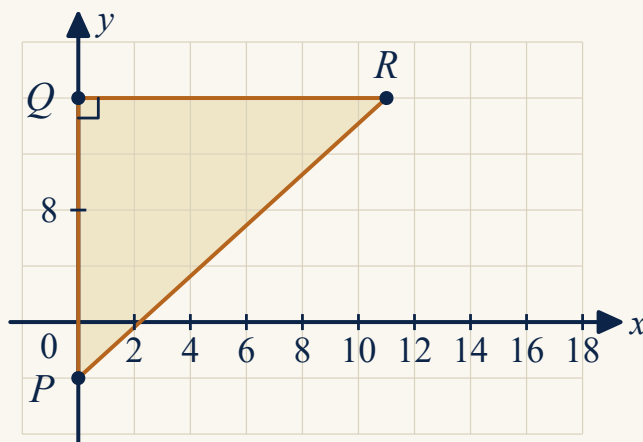


- a) Sitúe el punto $R(11, 16)$.
- b) Calcule el ángulo $Q\hat{P}R$.

M es un punto en la recta PR . M está a 9 unidades de P .

- c) Calcule el área del triángulo PQM .

a) Se marca R a la altura de Q ($y = 16$) y 11 unidades a la derecha del eje y (entre las marcas 10 y 12 del eje x , justo en la mitad). Así QR es un segmento horizontal de longitud 11.



b) El triángulo PQR tiene el ángulo recto en Q (porque PQ es vertical y QR es horizontal), con

$$PQ = 16 - (-4) = 20, \quad QR = 11.$$

En el ángulo $\hat{Q}PR$, QR es el cateto opuesto y PQ el adyacente:

$$\tan(\hat{Q}PR) = \frac{QR}{PQ} = \frac{11}{20} \Rightarrow \hat{Q}PR = \arctan \frac{11}{20} \approx 28,8^\circ.$$

Resultado: $\hat{Q}PR \approx 28,8^\circ$

c) M está en PR , a 9 unidades de P , de modo que $PM = 9$, y el ángulo en P del triángulo PQM es el mismo que antes, $\hat{Q}PM = \hat{Q}PR \approx 28,8^\circ$. Además $PQ = 20$.

Usamos la fórmula del área con dos lados y el ángulo entre ellos:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PM \cdot \sin(\hat{Q}PM) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 9 \cdot \sin 28,8^\circ \approx 43,4.$$

Con valores exactos: $PR = \sqrt{20^2 + 11^2} = \sqrt{521}$ y $\sin \hat{Q}PR = \frac{11}{\sqrt{521}}$, luego el área es $\frac{990}{\sqrt{521}} \approx 43,4$.

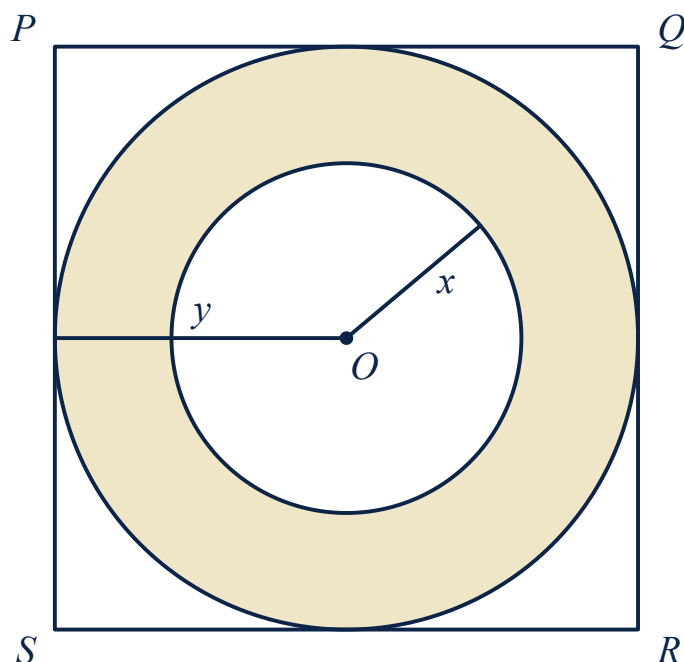
Resultado: b) $\hat{Q}PR \approx 28,8^\circ$; c) área $\approx 43,4$ unidades cuadradas

EJERCICIO 46

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2001

En el diagrama, la región sombreada representa una pista circular con centro O , dentro de un cuadrado campo $PQRS$. El borde exterior de la pista toca los lados del campo. Los radios del interior y del exterior de la pista tienen x m e y m respectivamente.



x »; desde O sale otro segmento horizontal hacia la izquierda hasta el lado PS del cuadrado (el borde exterior de la pista), rotulado « y ». O está rotulado.">

- a) Escriba una expresión para el área de la pista.
- b) El área del campo $PQRS$ es 4900 m^2 .
 - (i) Encuentre y .
 - (ii) Sabiendo que $x = 21$, encuentre el área de la pista.

a) La pista es la corona entre el círculo exterior (radio y) y el interior (radio x):

$$\text{Área} = \pi y^2 - \pi x^2 = \pi (y^2 - x^2).$$

Resultado: $\pi (y^2 - x^2)$

b)

1. (i) El campo es un cuadrado de área 4900 , así que su lado mide $\sqrt{4900} = 70$ m. El borde exterior de la pista toca los lados, por lo que el diámetro del círculo exterior es el lado del cuadrado: $2y = 70$, luego $y = 35$ m.
2. (ii) Con $x = 21$ e $y = 35$: $\text{Área} = \pi (35^2 - 21^2) = \pi (1225 - 441) = 784\pi \approx 2463 \text{ m}^2$, es decir, 2460 m^2 con tres cifras significativas.

Resultado: (i) $y = 35$ m; (ii) $784\pi \approx 2463 \text{ m}^2$ ($\approx 2460 \text{ m}^2$)

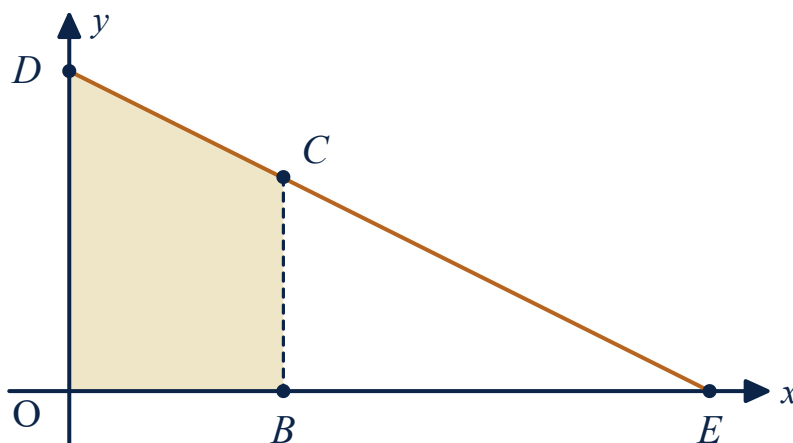
Resultado: a) $\pi (y^2 - x^2)$; b) (i) $y = 35$ m, (ii) $784\pi \approx 2463 \text{ m}^2$

EJERCICIO 47

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2008

En los ejes de coordenadas que se muestran a continuación, D es un punto en el eje y y E es un punto en el eje x . O es el origen. La ecuación de la recta DE es $y + \frac{1}{2}x = 4$.



a) Escriba las coordenadas del punto E .

C es un punto en la recta DE . B es un punto en el eje x tal que BC es paralelo al eje y . La coordenada x de C es t .

b) Muestre que la coordenada y de C es $4 - \frac{1}{2}t$.

$OBCD$ es un trapecio. La coordenada y del punto D es 4.

c) Demuestre que el área de $OBCD$ es $4t - \frac{1}{4}t^2$.

d) El área de $OBCD$ es 9,75 unidades cuadradas. Escriba una ecuación cuadrática que expresa esta información.

e) (i) Usando su calculadora de pantalla gráfica, o de otra manera, encuentre las dos soluciones de la ecuación cuadrática escrita en la parte (d).

(ii) Usando lo anterior, encuentre el valor correcto para t . Justifique su respuesta.

a) E está en el eje x , luego $y = 0$:

$$0 + \frac{1}{2}x = 4 \Rightarrow x = 8.$$

Resultado: $E(8, 0)$

b) C está en la recta DE y su coordenada x es t , así que sus coordenadas cumplen la ecuación de la recta:

$$y + \frac{1}{2}t = 4 \Rightarrow y = 4 - \frac{1}{2}t.$$

Es decir, $C\left(t, 4 - \frac{1}{2}t\right)$.

c) El trapecio $OBCD$ tiene dos lados paralelos verticales: OD y BC (ambos paralelos al eje y).

1. Base mayor: $OD = 4$ (la coordenada y de D).

2. Base menor: $BC = 4 - \frac{1}{2}t$ (la coordenada y de C).

3. Altura: la distancia entre esos dos lados verticales, $OB = t$.

4. Área de un trapecio = $\frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \cdot \text{altura}}{2}$:

$$A = \frac{(4 + 4 - \frac{1}{2}t)t}{2} = \frac{(8 - \frac{1}{2}t)t}{2} = 4t - \frac{1}{4}t^2.$$

d) Igualamos el área a 9,75:

$$9,75 = 4t - \frac{1}{4}t^2.$$

Resultado: $9,75 = 4t - \frac{1}{4}t^2$

e) (i) Pasamos todo a un miembro y multiplicamos por 4: $t^2 - 16t + 39 = 0$. Con la CPG (o con la fórmula de la ecuación de segundo grado):

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 156}}{2} = \frac{16 \pm 10}{2} \Rightarrow t = 13 \text{ o } t = 3.$$

(ii) C está en el segmento DE , así que su coordenada x está entre 0 y 8. El valor $t = 13$ queda fuera de ese intervalo (y daría $y < 0$), así que el valor correcto es $t = 3$.

Resultado: a) $E(8, 0)$; d) $9,75 = 4t - \frac{1}{4}t^2$; e) (i) $t = 13$ o $t = 3$, (ii) $t = 3$, porque $t = 13$ no está entre 0 y 8