

Álgebra y aritmética básicas

Base de IB Aplicaciones e Interpretación NM: conjuntos, redondeo, notación científica, error, potencias, logaritmos, ecuaciones, cuadrática y divisas, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-aplicaciones-e-interpretacion-nm/algebra-y-aritmetica-basicas.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

Este tema reúne las herramientas básicas de número y álgebra que se usan en todo el curso de **Aplicaciones e Interpretación NM: conjuntos y diagramas de Venn, redondeo y notación científica, porcentajes de error, potencias y logaritmos, ecuaciones y sistemas y cambio de divisas**. En el examen casi todos estos cálculos se hacen con la calculadora de pantalla gráfica, pero hay que saber qué se le pide y cómo escribir el resultado.

Orden recomendado

Si ya dominas los conjuntos y el redondeo, ve directo a **potencias y logaritmos** y a **ecuaciones**. Al final del tema tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo, para practicar cada técnica por separado.

APARTADO 1

Conjuntos, diagramas de Venn y conjuntos numéricos

IDEA CLAVE

Un conjunto es una colección de objetos bien definida, y los diagramas de Venn sirven para ver cómo se solapan varios conjuntos. En este apartado aprendes el lenguaje de conjuntos (pertenencia, unión, intersección, complemento) y la clasificación de los números en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Es la base de la probabilidad y de muchas preguntas del examen del IB.

Qué es un conjunto

DEFINICIÓN · CONJUNTO, ELEMENTO Y CARDINAL

Un **conjunto** es una colección de objetos bien determinada: dado un objeto, siempre se puede decir si está o no en ella. Los objetos se llaman **elementos**. Se nombran con letras mayúsculas y se escriben entre llaves, sin importar el orden ni las repeticiones.

- $x \in A$ se lee « x pertenece a A »; $x \notin A$, « x no pertenece a A ».
- $n(A)$ es el **cardinal** de A : el número de elementos que tiene.

Por ejemplo, si P es el conjunto de las vocales de la palabra «examen», entonces $P = \{a, e\}$, $a \in P$, $x \notin P$ y $n(P) = 2$. Aunque la «e» aparezca dos veces en la palabra, en el conjunto se escribe una sola vez.

Hay dos maneras de describir un conjunto:

- **Por extensión:** listando los elementos, $A = \{1, 3, 5, 7\}$.
- **Por comprensión:** dando la condición que cumplen, $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \text{ impar}, 0 < x < 8\}$, que se lee «los x tales que x es entero impar y está entre 0 y 8».

Dos conjuntos especiales:

- El **conjunto vacío**, $\emptyset$ (o $\{\}$), no tiene elementos: $n(\emptyset) = 0$.
- El **conjunto universal**, U , contiene todos los elementos que se consideran en el problema. Siempre hay que saber cuál es U para poder hablar del complemento.

Relaciones y operaciones entre conjuntos

DEFINICIÓN · SUBCONJUNTO, INTERSECCIÓN, UNIÓN Y COMPLEMENTO

Sean A y B dos conjuntos dentro de un universal U .

- **Subconjunto:** $B \subseteq A$ si cada elemento de B está también en A .
- **Intersección:** $A \cap B$ es el conjunto de los elementos que están en A y en B .
- **Unión:** $A \cup B$ es el conjunto de los elementos que están en A o en B (o en los dos).
- **Complemento:** A' es el conjunto de los elementos de U que **no** están en A .
- A y B son **disjuntos** si no comparten ningún elemento, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

La «o» de la unión es inclusiva: un elemento que está en los dos conjuntos también está en la unión. Y como A y A' no se solapan y juntos llenan U , se cumple $A \cup A' = U$ y $A \cap A' = \emptyset$.

Cómo se calcula con elementos

Con $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$:

- $A \cap B = \{3, 4\}$ (lo que aparece en las dos listas).
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (todo lo que aparece en alguna lista, sin repetir).
- $A' = \{5, 6\}$ y $B' = \{1, 2, 6\}$ (lo que le falta a cada uno para llegar a U).

Diagramas de Venn

Un **diagrama de Venn** dibuja U como un rectángulo y cada conjunto como una región cerrada (casi siempre un círculo) dentro de él. Con dos conjuntos que se solapan aparecen **cuatro regiones**:

1. solo en A : $A \cap B'$;
2. en los dos: $A \cap B$;
3. solo en B : $A' \cap B$;
4. fuera de ambos: $(A \cup B)'$.

Con tres conjuntos aparecen ocho regiones (siete dentro de los círculos y una fuera). Para sombrear una operación, se sombrea la región que cumple la condición: la unión es todo lo que está dentro de alguno de los círculos; la intersección, la parte común; el complemento, todo lo del rectángulo que queda fuera del círculo.

PROPIEDAD • CARDINAL DE UNA UNIÓN

Para dos conjuntos cualesquiera A y B ,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Por qué. Al sumar $n(A) + n(B)$, los elementos de la intersección se cuentan dos veces, una en cada conjunto. Restando una vez $n(A \cap B)$ cada elemento queda contado una sola vez. Si los conjuntos son disjuntos, $n(A \cap B) = 0$ y el cardinal de la unión es simplemente la suma.

También se cumple, dentro de U , que $n(A') = n(U) - n(A)$.

PROPIEDAD • COMPLEMENTO DE UNA UNIÓN Y DE UNA INTERSECCIÓN

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Intuición: no estar en A ni en B (fuera de la unión) es lo mismo que no estar en A y no estar en B . Y no estar en los dos a la vez (fuera de la intersección) significa fallar en A o fallar en B . Al «romper» el paréntesis del complemento, la unión se cambia por intersección y al revés.

NOTA • DESCRIBIR REGIONES DEL DIAGRAMA

Cuando el examen da un diagrama sombreado y pide la expresión de la región, mira primero qué círculos intervienen y después si la zona está dentro o fuera de cada uno. Por ejemplo, la región «dentro de A , fuera de B » es $A \cap B'$; «dentro de B pero fuera de A » es $A' \cap B$; «fuera de los dos» es $(A \cup B)'$, que también se puede escribir $A' \cap B'$. Hay varias expresiones correctas para la misma región.

Conjuntos numéricos

Los números se han ido ampliando para poder resolver operaciones que antes no tenían respuesta.

DEFINICIÓN • LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

- **Naturales:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Sirven para contar y ordenar. En el IB el 0 sí es natural.
- **Enteros:** $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Permiten restar siempre. Se usan $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ para los enteros positivos y $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ para los negativos.
- **Racionales:** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$. Permiten dividir (salvo entre 0).
- **Reales:** $\mathbb{R}$, formado por los racionales y los irracionales. Cada punto de la recta numérica corresponde a un número real.

Los **números irracionales** son los reales que no son racionales, es decir, los que no se pueden escribir como fracción de enteros. Se puede designar su conjunto como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ejemplos típicos son $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ y π .

Cada conjunto contiene al anterior, y eso se escribe

$$\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

(en un diagrama de Venn son círculos metidos unos dentro de otros, con los irracionales en la parte de $\mathbb{R}$ que queda fuera de $\mathbb{Q}$). Por eso un mismo número puede pertenecer a varios conjuntos a la vez: $-4 \in \mathbb{Z}$, y por tanto también $-4 \in \mathbb{Q}$ y $-4 \in \mathbb{R}$, pero $-4 \notin \mathbb{N}$.

Cómo reconocer un racional por su decimal

- Un decimal **exacto** (como $-2,5$) es racional: $-2,5 = -\frac{5}{2}$.
- Un decimal **periódico** (como $0,\overline{6} = 0,666\dots$ o $0,\overline{34} = 0,3434\dots$) es racional: $0,\overline{6} = \frac{2}{3}$.
- Un decimal con infinitas cifras que **no se repiten con ningún periodo** es irracional.

Para pasar un decimal periódico a fracción se multiplica por una potencia de 10 que desplace el periodo y se restan las dos expresiones. Con $x = 0,\overline{27}$: $100x = 27,\overline{27}$, luego $100x - x = 27$, es decir, $99x = 27$ y $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

NOTA • CON LA CPG

La calculadora de pantalla gráfica (CPG), que puedes usar en las dos pruebas, convierte un decimal en fracción y escribe $\sqrt{49}$ como 7. Pero muestra solo unas cuantas cifras: ver 0,3333333 o 1,414213562 en pantalla **no** demuestra nada. Para decidir si un número es racional hay que razonar con su definición (¿es una fracción de enteros?, ¿su decimal se repite?), no con las cifras que enseña la pantalla. Además, una aproximación como $3,14$ o $\frac{22}{7}$ de π es racional, pero π no lo es.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1

★ Básico

Operaciones con conjuntos de números

Sea el conjunto universal $U = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+, x \leq 12\}$ y sean $A = \{x \in U \mid x \text{ es múltiplo de } 3\}$ y $B = \{x \in U \mid x \text{ es par}\}$.

- Escribe $A \cap B$.
- Escribe $A \cup B$.
- Escribe $(A \cup B)'$.
- Halla $n(A' \cap B)$.

Primero escribimos los conjuntos por extensión: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $A = \{3, 6, 9, 12\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

- Los elementos comunes son $A \cap B = \{6, 12\}$.
- Juntamos los elementos de los dos conjuntos sin repetir: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$.
- El complemento de la unión son los elementos de U que no están en $A \cup B$: $(A \cup B)' = \{1, 5, 7, 11\}$.
- A' es lo que no está en A : $A' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11\}$. Los elementos de B que están en A' son $A' \cap B = \{2, 4, 8, 10\}$, así que $n(A' \cap B) = 4$. Comprobación: los pares que **no** son múltiplos de 3 son 2, 4, 8, 10.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Clasificar números

Considera los números

$$-4, \quad 0, \quad \sqrt{25}, \quad \frac{3}{8}, \quad \sqrt{20}, \quad 0,\overline{27}, \quad \pi$$

- Indica cuáles pertenecen a $\mathbb{N}$.
- Indica cuáles pertenecen a $\mathbb{Z}$.
- Indica cuáles pertenecen a $\mathbb{Q}$.
- Indica cuáles son irracionales.

Antes de clasificar, simplificamos cada número:

- $\sqrt{25} = 5$, que es un entero positivo.
- $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ y 5 no es un cuadrado perfecto, luego $\sqrt{20}$ no es una fracción: es irracional.
- $0,\overline{27} = \frac{3}{11}$ (periódico, así que es racional).
- $\frac{3}{8} = 0,375$ es racional, y π es irracional.

- Naturales (enteros no negativos): 0 y $\sqrt{25} = 5$. El número -4 es negativo, así que queda fuera.
- Enteros: -4 , 0 y 5. Las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{3}{11}$ no son enteras.
- Racionales: -4 , 0, 5, $\frac{3}{8}$ y $0,\overline{27}$. Recuerda que todo entero es racional, porque $-4 = \frac{-4}{1}$.
- Irracionales: $\sqrt{20}$ y π .

Son los cinco racionales más los dos irracionales: $5 + 2 = 7$ números en total, todos reales.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un problema de contexto con Venn

En un grupo de 50 estudiantes, 30 estudian francés, 24 estudian alemán y 8 no estudian ninguno de los dos idiomas. Sea F el conjunto de los que estudian francés y G el de los que estudian alemán, dentro del universal U formado por los 50 estudiantes.

- Halla $n(F \cup G)$.
- Halla $n(F \cap G)$.
- Halla el número de estudiantes que estudian francés pero no alemán.
- Halla el número de estudiantes que estudian **exactamente uno** de los dos idiomas.

Idea: hay cuatro regiones en el diagrama (solo francés, los dos, solo alemán, ninguno) y sus cardinales suman $n(U) = 50$.

- Los 8 que no estudian ninguno son el complemento de la unión, $n((F \cup G)') = 8$. Por tanto

$$n(F \cup G) = n(U) - n((F \cup G)') = 50 - 8 = 42$$
- Usamos $n(F \cup G) = n(F) + n(G) - n(F \cap G)$:

$$42 = 30 + 24 - n(F \cap G) \Rightarrow n(F \cap G) = 54 - 42 = 12$$
- «Francés pero no alemán» es $F \cap G'$. Del total de 30 que estudian francés quitamos los 12 que también estudian alemán: $30 - 12 = 18$.
- «Exactamente uno» son los que solo estudian francés más los que solo estudian alemán. Solo alemán: $24 - 12 = 12$. Entonces $18 + 12 = 30$.

Comprobación con el diagrama: 18 (solo francés) + 12 (los dos) + 12 (solo alemán) + 8 (ninguno) = 50.

En el examen: al rellenar un diagrama de Venn se empieza siempre por la región de la **intersección** (aquí, 12) y se va hacia fuera restando; si empiezas poniendo 30 y 24 dentro de los círculos, contarás dos veces a los 12. Comprobar que las regiones suman el total evita perder puntos.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • CREER QUE EL CERO NO ES NATURAL, O QUE $\mathbb{Z}^+$ LO INCLUYE

En el IB, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ **incluye** el 0, mientras que $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ no lo incluye. Confundirlos hace que se dé por falsa la afirmación « $0 \in \mathbb{N}$ » o por verdadera « $0 \in \mathbb{Z}^+$ ». Tampoco se debe decir que «0 es positivo»: no es ni positivo ni negativo.

ERROR TÍPICO • SUMAR LOS CARDINALES SIN RESTAR LA INTERSECCIÓN

Con $n(A) = 20$, $n(B) = 15$ y $n(A \cap B) = 6$, el cardinal de la unión no es 35 sino $20 + 15 - 6 = 29$. Los 6 elementos comunes se habrían contado dos veces. Lo mismo pasa en un diagrama de Venn: los números que se escriben en los círculos son los de cada **región**, no los totales $n(A)$ y $n(B)$.

ERROR TÍPICO • COMPLEMENTAR LA UNIÓN COMO SI FUESE CADA CONJUNTO POR SEPARADO

$(A \cup B)'$ **no** es $A' \cup B'$. El primero (fuera de los dos conjuntos) es $A' \cap B'$, y el segundo (fuera de al menos uno) es $(A \cap B)'$. Con $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$: $(A \cup B)' = \{4\}$, pero $A' \cup B' = \{1, 3, 4\}$. Al sombrear, es útil sombrear primero lo de dentro del paréntesis y complementar al final.

Resumen

- Un conjunto se escribe entre llaves; $x \in A$ es pertenecer, $n(A)$ es el número de elementos, $\emptyset$ es el conjunto vacío y U el universal. Se describe por extensión o por comprensión, $\{x \mid \text{condición}\}$.
- $A \cap B$: elementos en ambos. $A \cup B$: en alguno de los dos (o en los dos). A' : lo de U que no está en A . $B \subseteq A$: todo elemento de B está en A . Disjuntos: $A \cap B = \emptyset$.
- Diagrama de Venn: rectángulo para U y una región por conjunto. Dos conjuntos que se solapan dan cuatro regiones; se rellena empezando por la intersección.
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ y $n(A') = n(U) - n(A)$. Leyes del complemento: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ y $(A \cap B)' = A' \cup B'$.
- $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ en el IB. Los irracionales forman $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Racionales: decimal exacto o periódico; irracionales: infinitos decimales sin periodo. Lo que muestra la CPG no demuestra nada: se razona con la definición.

APARTADO 2

Aproximación, notación científica y porcentaje de error

IDEA CLAVE

En el examen del IB casi todos los resultados numéricos hay que darlos con una precisión concreta, y muchos problemas piden comparar un valor aproximado con el exacto. En este apartado aprendes a redondear (a lugares decimales y a cifras significativas), a escribir números muy grandes o muy pequeños en notación científica y a medir cuánto se equivoca una estimación con el porcentaje de error.

Redondear: decimales y cifras significativas

Redondear es sustituir un número por otro más corto que se le parezca, con una precisión fijada de antemano. Hay dos formas de fijar esa precisión.

- **Lugares decimales (l. d.):** cuántas cifras quedan a la derecha de la coma. Redondear a 2 l. d. es quedarse con los centésimos.
- **Cifras significativas (c. s.):** cuántas cifras útiles queremos, contando desde la primera que no es cero, sin importar dónde esté la coma.

MÉTODO • REDONDEAR A UN LUGAR DADO

1. Localiza la cifra que se va a conservar en último lugar (la que ocupa el lugar pedido).
2. Mira la cifra **siguiente** (la de su derecha).
3. Si esa cifra es **menor que 5**, la cifra conservada no cambia. Si es **5 o mayor**, se le suma 1.
4. Se eliminan las cifras que sobran: si estaban a la derecha de la coma, simplemente se quitan; si estaban a la izquierda (parte entera), se sustituyen por ceros.

Redondear a la decena, a la centena o al millar sigue el mismo método, contando hacia la izquierda de la coma: 4 736 a la centena es 4 700, y 4 750 a la centena es 4 800.

DEFINICIÓN • CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Las **cifras significativas** de un número son las que aportan información sobre su valor. Se identifican así:

- Toda cifra distinta de cero es significativa.
- Un cero situado entre dos cifras significativas también lo es.
- Cuando un número empieza por ceros (como 0,0042), esos ceros iniciales **no** cuentan como cifras significativas: solo sirven para colocar la coma.
- Un cero a la derecha de la coma, detrás de una cifra distinta de cero, **sí** es significativo.

Por ejemplo, 6 205 tiene 4 c. s.; 0,0068 tiene 2 c. s. (los tres primeros ceros no cuentan); 0,5400 tiene 4 c. s. (los dos ceros finales indican que esa precisión se midió) y 12,0 tiene 3 c. s.

Para redondear a n cifras significativas se cuentan n cifras desde la primera no nula y se aplica el método anterior con la cifra $(n + 1)$ -ésima. Los ceros que aparecen al redondear la parte entera son relleno, no cifras significativas: 48 317 a 2 c. s. es 48 000.

NOTA · PRECISIÓN POR DEFECTO Y REDONDEO AL FINAL

Si el enunciado no indica la precisión, el IB espera la respuesta **exacta** o redondeada a **3 cifras significativas**. Además, nunca redondees los resultados intermedios: guarda en la calculadora los valores completos y redondea solo la respuesta final. Si redondeas en cada paso, los errores se acumulan y el resultado final puede salirse de lo que el examen admite.

Límites de un valor redondeado

Una medida redondeada no es un número exacto: es un representante de todo un intervalo de valores. Si una medida se ha redondeado a un cierto lugar, el valor real puede estar hasta **media unidad de ese lugar** por debajo o por encima. El extremo inferior del intervalo es el **límite inferior** y el superior es el **límite superior**.

Por ejemplo, una longitud dada como 7,4 m (redondeada a décimas, así que media unidad son 0,05 m) cumple $7,35 \leq L < 7,45$. Una masa de 250 g redondeada a la unidad cumple $249,5 \leq m < 250,5$.

Estimar

Estimar es calcular a ojo un valor lo bastante próximo al verdadero, redondeando antes los datos para que las cuentas sean sencillas. En el IB, cuando se pide una estimación, se redondea **cada dato a 1 cifra significativa** y con esos valores se hace el cálculo.

Notación científica

La **notación científica** (o forma estándar) permite escribir cantidades enormes o diminutas sin una fila de ceros.

DEFINICIÓN · NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número positivo está en notación científica si se escribe como

$$a \times 10^k, \quad 1 \leq a < 10, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si el número es negativo, se antepone el signo menos. El exponente k es positivo para números grandes y negativo para números cercanos a cero.

Para pasar a notación científica se desplaza la coma hasta dejar **una sola cifra distinta de cero a su izquierda**, y el exponente cuenta cuántos lugares se ha movido: a la izquierda, exponente positivo; a la derecha, negativo. Así, $93\,000\,000 = 9,3 \times 10^7$ y $0,00072 = 7,2 \times 10^{-4}$.

Atención: 25×10^3 o $0,4 \times 10^6$ valen lo que valen, pero **no** están en notación científica, porque a no está entre 1 y 10.

MÉTODO · OPERAR CON NOTACIÓN CIENTÍFICA

1. **Producto y cociente:** multiplica o divide por separado los números a y las potencias de 10 (se suman o se restan los exponentes).
2. **Suma y resta:** pon ambos sumandos con la misma potencia de 10 y opera los números a .
3. **Renormaliza:** si el número a resultante no está entre 1 y 10, desplaza la coma y corrige el exponente.

NOTA • CON LA CPG

La calculadora de pantalla gráfica (CPG) muestra la notación científica con una letra E: $3,2E5$ significa $3,2 \times 10^5$. Puedes pedirle que dé los resultados siempre en notación científica o en decimal desde los ajustes de formato. Al escribir la respuesta en el examen, **no copies la letra E**: escríbela como $3,2 \times 10^5$. También puedes fijar el número de cifras significativas o de decimales que muestra, pero eso solo cambia la pantalla; sigue siendo tu trabajo redondear bien la respuesta final.

Error y porcentaje de error

Cuando se aproxima una cantidad, interesa saber cuánto nos hemos desviado.

DEFINICIÓN • ERROR Y PORCENTAJE DE ERROR

Si v_E es el valor **exacto** y v_A el valor **aproximado**, el **error** es $v_A - v_E$. El **porcentaje de error** compara el tamaño de ese error con el valor exacto:

$$\varepsilon = \left| \frac{v_A - v_E}{v_E} \right| \times 100\%$$

El valor absoluto hace que ε sea siempre positivo: nos dice cuánto se falla, no en qué sentido. El **denominador es siempre el valor exacto**, nunca la aproximación, porque el error se mide en relación con la cantidad real.

Intuición: un error de 2 unidades es enorme si el valor exacto es 10 (un 20 %) y casi invisible si el valor exacto es 5 000 (un 0,04 %). El porcentaje de error recoge esa diferencia.

NOTA • ERROR Y CALCULADORA

En una cuenta como $\left| \frac{v_A - v_E}{v_E} \right| \times 100$, escribe todo entre paréntesis para que la CPG divida el numerador entero entre v_E . Si el valor exacto sale de un cálculo previo, no lo teclees redondeado: usa el valor completo almacenado en la calculadora, y redondea solo el porcentaje final.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Redondear a distintas precisiones

Redondea el número 5 287,046 de tres formas:

- a 3 cifras significativas;
- a 2 lugares decimales;
- a la centena más cercana.
- Redondea 0,004052 a 2 cifras significativas.

- Las tres primeras cifras son 5, 2, 8 y la siguiente es $7 \geq 5$, así que 528 pasa a 529. Las cifras que faltan de la parte entera se sustituyen por ceros: 5 290.
- Los dos primeros decimales son 0, 4 y la cifra siguiente es $6 \geq 5$, así que 0,04 pasa a 0,05: 5 287,05.
- La centena es la cifra 2 (de 5 2...) y la cifra siguiente es $8 \geq 5$, así que 52 centenas pasan a 53: 5 300.

- d) Los ceros iniciales no son significativos. La primera cifra significativa es 4, la segunda es 0 y la siguiente es 5 ≥ 5 , así que 0,0040 pasa a 0,0041.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Operaciones en notación científica

Sean $m = 3,6 \times 10^6$ y $n = 4,5 \times 10^{-2}$. Calcula, con el resultado en notación científica:

- $m \cdot n$
- $\frac{m}{n}$
- m^2

Después escribe cada resultado como número entero.

- a) Se multiplican los números y se suman los exponentes:

$$m \cdot n = (3,6 \cdot 4,5) \times 10^{6+(-2)} = 16,2 \times 10^4$$

Como 16,2 no está entre 1 y 10, se desplaza la coma una posición y se suma 1 al exponente: $m \cdot n = 1,62 \times 10^5 = 162\,000$.

- b) Se dividen los números y se restan los exponentes:

$$\frac{m}{n} = \frac{3,6}{4,5} \times 10^{6-(-2)} = 0,8 \times 10^8$$

Ahora el número 0,8 es menor que 1: se desplaza la coma una posición a la derecha y se resta 1 al exponente.
 $\frac{m}{n} = 8 \times 10^7 = 80\,000\,000$.

- c) Se eleva al cuadrado el número y se duplica el exponente:

$$m^2 = 3,6^2 \times 10^{12} = 12,96 \times 10^{12} = 1,296 \times 10^{13}$$

Es decir, 12 960 000 000 000.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Estimar y medir el error

Una sala rectangular mide 4,8 m de largo, 6,3 m de ancho y 2,6 m de alto.

- Calcula su volumen exacto y dalo con 3 cifras significativas.
- Para estimar el volumen, Marta redondea cada dimensión a 1 cifra significativa y multiplica. ¿Qué volumen estima?
- Calcula con 3 cifras significativas el porcentaje de error que comete Marta al estimar.
- Pablo calcula el volumen con las medidas exactas y redondea solo el resultado a 1 cifra significativa. ¿Qué porcentaje de error tiene su valor? Compáralo con el de Marta.

- a) $V = 4,8 \cdot 6,3 \cdot 2,6 = 30,24 \cdot 2,6 = 78,624 \text{ m}^3$. A 3 c. s.: $78,6 \text{ m}^3$.

- b) Cada dato a 1 c. s.: $4,8 \rightarrow 5$, $6,3 \rightarrow 6$ y $2,6 \rightarrow 3$. La estimación es $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90 \text{ m}^3$.

- c) El valor exacto es $v_E = 78,624$ (sin redondear) y el aproximado $v_A = 90$:

$$\varepsilon = \left| \frac{90 - 78,624}{78,624} \right| \times 100\% = \frac{11,376}{78,624} \times 100\% \approx 14,47\%$$

A 3 c. s.: $\varepsilon \approx 14,5\%$.

d) Redondeado a 1 c. s., 78,624 pasa a 80. Entonces

$$\varepsilon = \frac{80 - 78,624}{78,624} \times 100\% = \frac{1,376}{78,624} \times 100\% \approx 1,75\%$$

Pablo comete un error unas ocho veces menor. Esto es lo que ocurre cuando se redondea al principio y no al final: los redondeos de las tres medidas se acumulan en el producto.

En el examen: usa siempre el valor exacto sin redondear en el denominador y en la resta. Si el enunciado dice «estima», redondea los datos a 1 c. s. antes de operar; si no lo dice, redondea solo al final. Escribe la fórmula antes de sustituir: suele puntuarse.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · CONTAR MAL LAS CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Dos fallos muy comunes: contar los ceros iniciales (0,0072 tiene 2 cifras significativas, no 5) y quitar los ceros finales de un decimal (4,30 a 3 c. s. es 4,30, no 4,3). Al redondear 2 468 a 2 c. s. la respuesta es 2 500, no 25: los ceros de relleno de la parte entera hay que escribirlos.

ERROR TÍPICO · DIVIDIR ENTRE EL VALOR APROXIMADO, O REDONDEAR ANTES DE TIEMPO

En el porcentaje de error el denominador es el valor **exacto**. Si divides entre la estimación, el resultado cambia y se pierde la puntuación del método. Tampoco conviene calcular el error con valores ya redondeados: si $v_E = 78,624$ y escribes 78,6, el porcentaje sale distinto. Y el resultado se da en positivo: un porcentaje de error negativo indica que se ha olvidado el valor absoluto.

ERROR TÍPICO · NOTACIÓN CIENTÍFICA MAL NORMALIZADA O COPIADA DE LA PANTALLA

Tras multiplicar, $16,2 \times 10^4$ **no** es una respuesta en notación científica: hay que pasar a $1,62 \times 10^5$. Al sumar números con distinto exponente, no se suman los exponentes (eso es solo para el producto): primero se igualan las potencias de 10. Por último, nunca escribas «E» en la respuesta final: 1,62E5 solo es lo que enseña la pantalla.

Resumen

- Redondeo: si la cifra siguiente es menor que 5, la cifra conservada no cambia; si es 5 o mayor, aumenta en 1. Se puede redondear a lugares decimales o a cifras significativas.
- Cifras significativas: cuentan las cifras no nulas, los ceros intermedios y los ceros finales tras la coma; no cuentan los ceros iniciales.
- Sin indicación en el enunciado, el IB espera la respuesta exacta o con 3 c. s.; redondea solo el resultado final.
- Un valor redondeado admite media unidad del último lugar por arriba y por abajo (límites inferior y superior). Estimar es operar con datos a 1 c. s.
- Notación científica: $a \times 10^k$ con $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$. Tras operar, renormaliza el resultado.
- Porcentaje de error: $\varepsilon = \left| \frac{v_A - v_E}{v_E} \right| \times 100\%$, con el valor exacto en el denominador.
- En la CPG, la letra E de la pantalla no se copia: se escribe $\times 10^k$.

APARTADO 3

Potencias de exponente entero y logaritmos

IDEA CLAVE

Una potencia abrevia una multiplicación repetida y un logaritmo hace el camino inverso: dice qué exponente hace falta. Aquí aprendes las reglas para manejar potencias con exponente entero y a usar $\log$ y $\ln$ para despejar una incógnita que está en el exponente, algo muy frecuente en problemas de crecimiento, inversiones y desintegración del examen del IB.

Potencias de exponente entero

DEFINICIÓN • POTENCIA

Si x es un número real y n es un entero positivo, x^n es el resultado de multiplicar x por sí mismo n veces:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ factores}}$$

El número x es la **base** y n es el **exponente**.

Para ampliar la idea a exponentes cero y negativos se exige que las reglas de abajo sigan funcionando. Así se obtiene que $x^0 = 1$ (si $x \neq 0$) y que un exponente negativo significa «dar la vuelta» a la potencia.

PROPIEDAD • PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Para bases $x, y \neq 0$ y exponentes enteros m, n :

Regla	Fórmula
Exponente cero	$x^0 = 1$
Producto de la misma base	$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
Cociente de la misma base	$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
Potencia de una potencia	$(x^m)^n = x^{mn}$
Potencia de un producto	$(xy)^n = x^n y^n$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
Exponente negativo	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Fracción con exponente negativo	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$

Por qué son ciertas. Con exponentes positivos, $x^m \cdot x^n$ junta m factores con otros n factores, y en total hay $m + n$. Si en el cociente x^m / x^n se simplifican factores iguales, quedan $m - n$. Cuando $m = n$ el cociente vale 1, y eso obliga a que $x^0 = 1$. Y si $m = 0$, la regla del cociente da $x^{-n} = 1/x^n$.

Un ejemplo con todas las ideas juntas: $\frac{2^5 \cdot 2^{-2}}{2^4} = \frac{2^3}{2^4} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

NOTA • LAS REGLAS PIDEN LA MISMA BASE

Las reglas del producto y del cociente solo funcionan si las dos potencias tienen **la misma base**. Para $2^3 \cdot 3^2$ no hay regla que junte los exponentes: se calcula $8 \cdot 9 = 72$. Con la CPG puedes comprobar cualquier potencia, pero conviene saber simplificar a mano para dejar bien explicado el procedimiento.

Logaritmos

El logaritmo responde a la pregunta inversa a la de una potencia: ¿a qué exponente hay que elevar la base para obtener un número dado?

DEFINICIÓN • LOGARITMO

Sean $a > 0$ con $a \neq 1$ y $b > 0$. El **logaritmo en base a de b** , que se escribe $\log_a b$, es el número x que cumple $a^x = b$, es decir, la potencia a la que debes subir a para obtener b :

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

Por ejemplo, $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$; $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ porque $5^{-2} = \frac{1}{25}$; y $\log_9 9 = 1$ porque $9^1 = 9$. De la definición salen estos hechos:

- $\log_a 1 = 0$ (porque $a^0 = 1$) y $\log_a a = 1$.
- Solo se pueden calcular logaritmos de números **positivos**: ninguna potencia de una base positiva da un resultado cero o negativo.
- $\log_a (a^k) = k$ y $a^{\log_a b} = b$: elevar a a y tomar $\log_a$ se deshacen mutuamente.

DEFINICIÓN • LOGARITMO DECIMAL Y LOGARITMO NEPERIANO

Hay dos bases tan usadas que tienen símbolo propio y tecla en la calculadora:

- El **logaritmo decimal** es el de base 10 y se escribe $\log x$ (es decir, $\log x = \log_{10} x$).
- El **logaritmo neperiano** (o natural) es el de base e y se escribe $\ln x$ (es decir, $\ln x = \log_e x$), donde $e \approx 2,71828$ es un número irracional.

Con las dos definiciones se cumple $\log(10^k) = k$, $\ln(e^k) = k$, $10^{\log x} = x$ y $e^{\ln x} = x$ para todo $x > 0$. Por ejemplo, $\log 1000 = 3$, $\log \frac{1}{10} = -1$, $\ln e^4 = 4$ y $\ln 1 = 0$.

Ecuaciones con la incógnita en el exponente

Para despejar una incógnita que está en un exponente se aísla primero la potencia y después se aplica la definición de logaritmo.

MÉTODO • RESOLVER UNA ECUACIÓN EXPONENCIAL

1. Aísla la potencia: deja $10^{(\dots)}$ o $e^{(\dots)}$ sola en un miembro (dividiendo por el coeficiente que la multiplica).
2. Aplica la definición: si $10^u = k$, entonces $u = \log k$; si $e^u = k$, entonces $u = \ln k$. Exige $k > 0$.
3. Despeja la incógnita de la ecuación de primer grado que queda.
4. Redondea solo al final, con la precisión que pide el enunciado (por defecto, tres cifras significativas).

Por ejemplo, para $4e^{2x} = 20$ se divide entre 4 y queda $e^{2x} = 5$. Entonces $2x = \ln 5$ y $x = \frac{\ln 5}{2} \approx 0,805$.

NOTA • CON LA CPG

En las dos pruebas del examen puedes usar la calculadora de pantalla gráfica. Sirve para obtener $\log x$, $\ln x$ y potencias de 10 o de e con muchas cifras, y también para resolver la ecuación sin despejar: se dibujan los dos miembros como funciones y se lee el punto de corte. Aun así, escribe la ecuación que planteas y el paso con el logaritmo, y redondea al final: guardar el resultado sin redondear en la memoria de la CPG evita errores de redondeo acumulados. Para interpretar el resultado, recuerda las unidades del problema (años, horas, euros...).

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Simplificar potencias

Calcula, dando el resultado como entero o como fracción:

- a) 5^{-2}
- b) $\frac{6^9}{6^7}$
- c) $(2^3)^2 \cdot 2^{-4}$
- d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

- a) Un exponente negativo invierte la potencia: $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$.
- b) Misma base, así que se restan los exponentes: $6^{9-7} = 6^2 = 36$.
- c) Primero la potencia de una potencia, $(2^3)^2 = 2^6$, y después el producto de la misma base: $2^6 \cdot 2^{-4} = 2^{6-4} = 2^2 = 4$.
- d) Se invierte la fracción y el exponente pasa a ser positivo: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Calcular y despejar con logaritmos

- a) Calcula, sin calculadora, $\log 10000$.
- b) Calcula, sin calculadora, $\log \frac{1}{1000}$.
- c) Calcula, sin calculadora, $\ln \frac{1}{\sqrt{e}}$.
- d) Resuelve $10^x = 250$ y da x con tres cifras significativas.

- a) $10^4 = 10000$, luego $\log 10000 = 4$.
- b) $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$, luego $\log \frac{1}{1000} = -3$.
- c) Como $\sqrt{e} = e^{1/2}$, se tiene $\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2}$ y, por tanto, $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2}$.

- d) Por la definición de logaritmo decimal, $x = \log 250$. Con la CPG, $\log 250 = 2,39794 \dots$, que con tres cifras significativas es $x \approx 2,40$. Comprobación: $10^{2,4} \approx 251$, un valor muy cercano a 250.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Una inversión que crece con el tiempo

Una inversión de 2500 euros se hace en un fondo cuyo valor, en euros, tras t años es

$$V(t) = 2500 e^{0,03t}$$

- Calcula el valor de la inversión a los 10 años, redondeado al euro más cercano.
- Halla en cuánto tiempo el valor llegará a 5000 euros. Da t con tres cifras significativas.
- ¿Cuál es el primer año completo en el que el valor ya supera los 5000 euros?

- Se sustituye $t = 10$: $V(10) = 2500 e^{0,3}$. Con la CPG, $e^{0,3} = 1,34986 \dots$, así que $V(10) = 3374,65 \dots \approx 3375$ euros.
- Se plantea $2500 e^{0,03t} = 5000$.
 - Se aísla la potencia, dividiendo entre 2500: $e^{0,03t} = 2$.
 - Se aplica la definición de logaritmo neperiano: $0,03t = \ln 2$.
 - Se despeja: $t = \frac{\ln 2}{0,03} = \frac{0,693147 \dots}{0,03} = 23,1049 \dots \approx 23,1$ años.
- El valor llega a 5000 euros a los 23,1 años, así que a los 23 años todavía no lo supera y a los 24 años sí. Comprobación: $V(23) = 2500 e^{0,69} \approx 4984$ euros (menos de 5000) y $V(24) = 2500 e^{0,72} \approx 5136$ euros (más de 5000). El primer año completo es el 24.

En el examen: en problemas de contexto se puntúa por separado el planteamiento de la ecuación, el paso con el logaritmo y el resultado con las cifras pedidas. En c) el redondeo de 23,1 a 23 sería un error: la pregunta exige superar los 5000 euros, así que hay que subir al año siguiente.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • APLICAR LAS REGLAS CON BASES DISTINTAS O SUMAR DONDE SE MULTIPLICA

Es falso que $2^3 \cdot 3^3 = 6^6$, y también que $x^2 + x^3 = x^5$. Al multiplicar potencias de la misma base se **suman** los exponentes, pero eso no sirve con bases diferentes ni para sumas de potencias. En el primer caso, $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216$: se juntan las bases cuando coinciden los exponentes, no se suman.

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR EXPONENTE NEGATIVO CON RESULTADO NEGATIVO

2^{-3} no es -8 ni -6 : es $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. El signo del exponente indica «invertir», no «cambiar de signo». Del mismo modo, $(-2)^0 = 1$ y $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$, no 0.

ERROR TÍPICO • LOGARITMOS DE NÚMEROS NO POSITIVOS Y REDONDEOS A MITAD DE CAMINO

$\log(-5)$ y $\ln 0$ no existen: la base es positiva y ninguna potencia suya da cero o un número negativo. Si al aplicar el método sale $e^u = -3$ o $10^u = 0$, la ecuación no tiene solución. Otro fallo habitual es redondear $\ln 2$ o $\log 250$ antes de dividir: usa el valor completo de la CPG y redondea solo el resultado final.

Resumen

- Potencia: x^n es multiplicar x por sí mismo n veces; $x^0 = 1$ y $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.
- Con la misma base: $x^m x^n = x^{m+n}$, $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $(x^m)^n = x^{mn}$; además $(xy)^n = x^n y^n$ y $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$.
- Logaritmo: $\log_a b = x \iff a^x = b$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$; cumple $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.
- $\log x$ es el logaritmo en base 10 y $\ln x$ el de base $e \approx 2,71828$; $\log 10^k = k$ y $\ln e^k = k$.
- Para resolver $10^u = k$ o $e^u = k$ se aísla la potencia y se toma $u = \log k$ o $u = \ln k$ (con $k > 0$).
- En el examen se puede usar la CPG, pero se escribe el planteamiento y se redondea solo al final.

APARTADO 4

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas

IDEA CLAVE

Resolver una ecuación es encontrar los valores de la incógnita que hacen cierta una igualdad. En este apartado repasas las ecuaciones e inecuaciones lineales, los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (a mano y con la calculadora de pantalla gráfica, CPG) y la ecuación cuadrática. Aparecen en todo el curso, casi siempre dentro de un problema con contexto.

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es la que se puede dejar en la forma $ax + b = 0$ con $a \neq 0$. Para resolverla hay que conseguir que x quede sola en un miembro, y la regla de oro es que **lo que haces a un lado lo haces al otro**: sumar o restar la misma cantidad, multiplicar o dividir por el mismo número distinto de cero. Cada operación produce una ecuación equivalente, con la misma solución.

MÉTODO • RESOLVER UNA ECUACIÓN LINEAL

1. Quita los paréntesis aplicando la propiedad distributiva (cuidado con los signos negativos delante).
2. Si hay fracciones, multiplica los dos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. Pasa los términos con x a un miembro y los números al otro, sumando o restando en ambos lados.
4. Divide entre el coeficiente de x .
5. Comprueba sustituyendo en la ecuación original.

Por ejemplo, $4(x - 2) = 2x + 6$ se convierte en $4x - 8 = 2x + 6$, luego $2x = 14$ y $x = 7$. Al comprobar: $4 \cdot 5 = 20$ y $2 \cdot 7 + 6 = 20$. Una ecuación lineal tiene normalmente una única solución. Si al simplificar queda algo falso como $0 = 3$, no tiene solución, y si queda algo siempre cierto como $0 = 0$, tiene infinitas.

Inecuaciones lineales

Una inecuación usa $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$ en lugar del signo igual. Se resuelve con los mismos pasos que una ecuación, con una excepción:

PROPIEDAD • MULTIPLICAR O DIVIDIR POR UN NÚMERO NEGATIVO

Si multiplicas o divides los dos miembros de una inecuación por un número **negativo**, el sentido de la desigualdad se invierte. Sumar o restar, o multiplicar por un número positivo, no lo cambia.

La razón es sencilla: $2 < 5$ es cierto, pero al multiplicar por -1 queda -2 y -5 , y ahora -2 es el mayor, por lo que hay que escribir $-2 > -5$.

La solución de una inecuación es un conjunto de infinitos valores, y se escribe con **intervalos**. En la notación del IB, un corchete que mira hacia fuera, como en $]3, \infty[$, deja el extremo fuera del intervalo, y un corchete que mira hacia dentro, como en $[-1, 4]$, lo incluye. Con desigualdad estricta ($<$, $>$) el extremo no entra; con $\leq$ o $\geq$, sí entra. Infinito

nunca lleva corchete cerrado. En la recta numérica, el extremo incluido se marca con un punto relleno y el excluido con un punto vacío.

Desigualdad Intervalo

$$x > 3 \quad]3, \infty[$$

$$x \leq -1 \quad]-\infty, -1]$$

$$-3 < x \leq 2 \quad]-3, 2]$$

Por ejemplo, $9 - 2x \geq 3$ da $-2x \geq -6$ y, al dividir entre -2 , $x \leq 3$: el conjunto solución es $] - \infty, 3]$.

Sistemas de dos ecuaciones lineales

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas pide un par (x, y) que cumpla las dos ecuaciones a la vez.

Geométricamente, cada ecuación es una recta, y la solución es su punto de corte. Hay tres posibilidades:

- Las rectas se cortan en un punto: **solución única**.
- Las rectas son paralelas: **ninguna solución**, como en $x + y = 3$ junto con $2x + 2y = 8$.
- Las dos ecuaciones describen la misma recta: **infinitas soluciones**, como en $x + y = 3$ junto con $2x + 2y = 6$.

Casi todos los sistemas de examen tienen solución única. A mano hay dos métodos.

MÉTODO • MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1. Despeja una incógnita en la ecuación en que resulte más fácil.
2. Sustituye esa expresión en la otra ecuación: queda una ecuación con una sola incógnita.
3. Resuélvela.
4. Lleva el valor obtenido a la expresión del paso 1 para calcular la otra incógnita.
5. Comprueba el par en las dos ecuaciones.

Con $x + 2y = 7$ y $3x - y = 7$: de la primera, $x = 7 - 2y$. En la segunda, $3(7 - 2y) - y = 7$, es decir, $21 - 7y = 7$, luego $y = 2$ y $x = 7 - 4 = 3$. La solución es $(3, 2)$.

MÉTODO • MÉTODO DE ELIMINACIÓN (REDUCCIÓN)

1. Multiplica cada ecuación por el número adecuado para que una incógnita tenga coeficientes opuestos (o iguales) en las dos.
2. Suma (o resta) las ecuaciones: esa incógnita desaparece.
3. Resuelve la ecuación que queda.
4. Sustituye en una de las ecuaciones originales para hallar la otra incógnita.
5. Comprueba el par en las dos ecuaciones.

Con $2x + 3y = 12$ y $5x - 2y = 11$ eliminamos y : multiplicamos la primera por 2 y la segunda por 3, y queda $4x + 6y = 24$ y $15x - 6y = 33$. Al sumar, $19x = 57$, de donde $x = 3$, y al sustituir en la primera, $6 + 3y = 12$, luego $y = 2$. De nuevo $(3, 2)$.

NOTA · CON LA CPG

En el examen del IB puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG), y para un sistema lineal suele ser lo más seguro. Tienes dos caminos: el módulo de resolución de sistemas, donde introduces los coeficientes de cada ecuación y obtienes x e y , y la representación gráfica de las dos rectas, buscando su punto de intersección. Ten en cuenta que el resultado de la CPG es un número, no un procedimiento: si el enunciado dice «resuelva algebraicamente», debes mostrar el método a mano. Si solo pide la solución, basta con escribir qué sistema has resuelto y la respuesta, y en un problema con contexto interpretar cada valor con su unidad.

La ecuación cuadrática

Una **ecuación cuadrática** tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, y sus soluciones se llaman **raíces**. Antes de resolverla hay que pasar todo a un miembro y dejar 0 en el otro.

Si la ecuación es incompleta, se resuelve sin fórmula:

- Si falta el término en x ($ax^2 + c = 0$): despeja $x^2 = -\frac{c}{a}$. Hay dos raíces opuestas si $-\frac{c}{a} > 0$ y ninguna raíz real si es negativo.
- Si falta el término independiente ($ax^2 + bx = 0$): saca factor común, $x(ax + b) = 0$. Un producto vale cero solo si alguno de sus factores vale cero, así que $x = 0$ o $x = -\frac{b}{a}$.

Si la ecuación es completa, puedes factorizar (buscando dos números de producto c y suma b cuando $a = 1$) o aplicar la fórmula, que sirve siempre.

TEOREMA · FÓRMULA CUADRÁTICA

Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, en $2x^2 - 7x + 3 = 0$ tenemos $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$, y

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow x = 3 \text{ o } x = \frac{1}{2}$$

DEFINICIÓN · DISCRIMINANTE

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** y es el número que queda dentro de la raíz cuadrada de la fórmula. Su signo indica cuántas raíces reales tiene la ecuación:

- $\Delta > 0$: dos raíces reales distintas.
- $\Delta = 0$: una raíz real (raíz doble), $x = -\frac{b}{2a}$.
- $\Delta < 0$: ninguna raíz real.

Esto tiene una lectura gráfica: la parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta al eje x en dos puntos, lo toca en uno solo (su vértice) o no lo alcanza, según el signo de Δ . Por ejemplo, $x^2 + 2x + 5 = 0$ tiene $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, y por eso no tiene soluciones reales.

NOTA • CON LA CPG

Las raíces de una ecuación cuadrática se pueden obtener con la CPG de dos formas: con el módulo de resolución de polinomios, introduciendo a , b y c , o dibujando $y = ax^2 + bx + c$ y leyendo los **ceros** de la gráfica. Si no se indica otra cosa, da el resultado con tres cifras significativas. Con la gráfica, además, ves a la vez el número de raíces, el vértice y el signo de la expresión. Aun así, en las preguntas con contexto las raíces no siempre sirven: hay que comprobar que tengan sentido (un tiempo o una longitud negativos se descartan).

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Ecuaciones e inecuaciones lineales

Resuelve:

- $3(2x - 1) = 5x + 7$
- $\frac{x+1}{2} = \frac{2x-3}{3}$
- $5 - 3(x - 2) < 2$, y escribe la solución como intervalo.

- Se quitan los paréntesis: $6x - 3 = 5x + 7$. Pasando términos, $6x - 5x = 7 + 3$, luego $x = 10$.
Comprobación: $3 \cdot 19 = 57$ y $5 \cdot 10 + 7 = 57$.
- El mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6. Multiplicando los dos miembros por 6: $3(x + 1) = 2(2x - 3)$, es decir, $3x + 3 = 4x - 6$. Entonces $9 = x$. Comprobación: $\frac{10}{2} = 5$ y $\frac{15}{3} = 5$.
- Se quitan los paréntesis: $5 - 3x + 6 < 2$, luego $11 - 3x < 2$ y $-3x < -9$. Al dividir entre -3 **se invierte el signo**: $x > 3$. En notación de intervalo, $]3, \infty[$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un sistema en un contexto

En un cine, 3 entradas de adulto y 2 de menor cuestan 31 euros en total, mientras que 2 de adulto y 5 de menor cuestan 39 euros.

- Plantea un sistema y resuélvelo por eliminación para hallar el precio de cada tipo de entrada.
- Calcula cuánto costarán 4 entradas de adulto y 3 de menor.

- Sea x el precio de una entrada de adulto e y el de una de menor, en euros:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 31 \\ 2x + 5y = 39 \end{cases}$$

Para eliminar y , multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda por 2:

$$\begin{cases} 15x + 10y = 155 \\ 4x + 10y = 78 \end{cases}$$

Restando, $11x = 77$ y $x = 7$. En la primera ecuación, $21 + 2y = 31$, luego $y = 5$. Comprobación en la segunda: $14 + 25 = 39$.

La entrada de adulto cuesta 7 euros y la de menor, 5 euros.

- b) $4 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 28 + 15 = 43$. Costarán 43 euros.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un lanzamiento y el discriminante

Un balón se lanza hacia arriba desde una plataforma. Su altura sobre el suelo, en metros, a los t segundos del lanzamiento es $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, para $t \geq 0$.

- Halla en qué instante el balón llega al suelo.
- Halla en qué instantes está a 30 m de altura.
- Determina cuántas veces alcanza los 40 m de altura.
- Halla la altura máxima que alcanza el balón, usando el discriminante de la ecuación $h(t) = H$.

- Llega al suelo cuando $h(t) = 0$: $-5t^2 + 15t + 20 = 0$. Dividiendo entre -5 : $t^2 - 3t - 4 = 0$, que se factoriza como $(t - 4)(t + 1) = 0$. Las raíces son $t = 4$ y $t = -1$. El tiempo no puede ser negativo, así que se descarta $t = -1$: el balón llega al suelo a los **4 s**. Comprobación: $h(4) = -80 + 60 + 20 = 0$.
- Se resuelve $-5t^2 + 15t + 20 = 30$, es decir, $-5t^2 + 15t - 10 = 0$, y dividiendo entre -5 , $t^2 - 3t + 2 = 0 = (t - 1)(t - 2)$. El balón está a 30 m en $t = 1$ s (subiendo) y en $t = 2$ s (bajando). Comprobación: $h(1) = -5 + 15 + 20 = 30$ y $h(2) = -20 + 30 + 20 = 30$.
- La ecuación $-5t^2 + 15t + 20 = 40$ equivale a $-5t^2 + 15t - 20 = 0$, o a $t^2 - 3t + 4 = 0$. Su discriminante es $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$, así que no tiene raíces reales: **el balón no llega nunca a 40 m**, es decir, 0 veces.
- Para una altura H , la ecuación es $-5t^2 + 15t + (20 - H) = 0$, o $5t^2 - 15t + (H - 20) = 0$. Su discriminante es

$$\Delta = 225 - 4 \cdot 5 \cdot (H - 20) = 225 - 20H + 400 = 625 - 20H$$

El balón alcanza esa altura si $\Delta \geq 0$, es decir, $H \leq \frac{625}{20} = \frac{125}{4}$. La altura máxima es $\Delta = 0$: $H = 31,25$ m, que ocurre en el instante $t = \frac{15}{10} = 1,5$ s. Coincide con la gráfica: el vértice de la parábola.

En el examen: en un problema de este tipo se puntúa el planteamiento de la ecuación, la elección de la solución con sentido (aquí, descartar $t = -1$) y la respuesta con su unidad. Si usas la CPG, indica qué ecuación has resuelto o qué gráfica has dibujado.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · NO INVERTIR LA DESIGUALDAD

Al pasar de $-2x \geq 6$ a $x \geq -3$ se comete el error más frecuente en las inecuaciones: al dividir entre un número negativo hay que invertir el signo, y el resultado correcto es $x \leq -3$. Un buen hábito es probar un valor: con $x = 0$ no se cumple $-2x \geq 6$, y 0 no está en $]-\infty, -3]$.

ERROR TÍPICO · OPERAR SOLO EN UNA PARTE DE LA ECUACIÓN

Al eliminar en un sistema hay que multiplicar **todos** los términos de la ecuación, incluido el término independiente, y al quitar un paréntesis con un signo menos delante hay que cambiar el signo de todos los términos de dentro: $5 - 3(x - 2) = 5 - 3x + 6$, no $5 - 3x - 6$. Tras resolver, sustituye siempre la solución en las ecuaciones originales.

ERROR TÍPICO · DIVIDIR ENTRE x O ACEPTAR TODAS LAS RAÍCES

En $x^2 = 5x$ no se puede dividir entre x , porque se pierde la raíz $x = 0$: hay que escribir $x(x - 5) = 0$. En un problema con contexto, el otro fallo es dar como respuesta todas las raíces sin comprobarlas: un tiempo, una longitud o un número de personas negativos no tienen sentido y se descartan, indicando el motivo.

Resumen

- Ecuación lineal: haz lo mismo en los dos miembros hasta despejar x y comprueba la solución.
- Inecuación lineal: igual que una ecuación, pero al multiplicar o dividir por un número negativo se invierte la desigualdad. La solución se escribe como intervalo, con $]$ $[$ para excluir un extremo y $[$ $]$ para incluirlo.
- Sistema 2×2 : por sustitución o por eliminación a mano, o con la CPG (módulo de sistemas o punto de corte de las gráficas). Solución única, ninguna o infinitas, según las rectas se corten, sean paralelas o coincidan.
- Cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$: factorizar o $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Las incompletas se resuelven despejando o sacando factor común.
- Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$: $\Delta > 0$ dos raíces reales, $\Delta = 0$ una (doble), $\Delta < 0$ ninguna.
- En un contexto, comprueba que las soluciones tengan sentido, da las unidades y, con la CPG, tres cifras significativas salvo otra indicación.

APARTADO 5

Cambio de divisas

IDEA CLAVE

Cambiar de moneda es una regla de tres con un factor fijo, el tipo de cambio, al que a veces se le suma una comisión. Aprenderás cuándo se multiplica y cuándo se divide, cómo se aplica una comisión fija o porcentual y por qué cambiar y volver a cambiar hace perder dinero: son situaciones frecuentes en los problemas de contexto del examen del IB.

Tipo de cambio

DEFINICIÓN • DIVISA Y TIPO DE CAMBIO

Una **divisa** es la moneda de un país o de una zona (euro, dólar, libra...). El **tipo de cambio** entre dos divisas A y B es el número r de unidades de B que se obtienen por cada unidad de A:

$$1 A = r B$$

Fíjate en qué moneda está «a la izquierda»: es la que vale 1. Si $1 \text{ EUR} = 1,25 \text{ CHF}$, el euro es la moneda de referencia y 1,25 es lo que cuesta un euro medido en francos.

Con ese dato todo se reduce a una proporción. Para pasar de A a B, la cantidad en A se **multiplica** por r ; para volver de B a A, la cantidad en B se **divide** entre r :

$$\text{cantidad en B} = r \cdot (\text{cantidad en A}) \quad \text{cantidad en A} = \frac{\text{cantidad en B}}{r}$$

La comprobación de sentido común es útil: si la moneda a la que llegas «vale menos» (obienes más unidades que las que entregas), el número debe crecer; si vale más, debe disminuir.

Compra y venta

Un banco o una casa de cambio no paga lo mismo por una divisa que lo que cobra por ella, y así obtiene su beneficio. Por eso en sus pizarras aparecen dos tipos de cambio:

- **Venta:** el establecimiento te **vende** divisa extranjera (la necesitas para viajar). Recibes pocas unidades de la moneda extranjera por cada unidad de la tuya.
- **Compra:** el establecimiento te **compra** la divisa extranjera que te ha sobrado. Te hace falta entregar más unidades de la moneda extranjera por cada unidad de la tuya.

Lo importante es leer la tabla desde el punto de vista del establecimiento y elegir la columna que corresponde a lo que haces tú. Cuando compra y venta están expresadas en las mismas unidades, el número de la venta es el que te deja menos dinero extranjero por cada unidad de tu moneda, y el de la compra el que te exige devolver más.

Comisiones

Además del tipo de cambio, muchos establecimientos cobran una **comisión** por la operación. Hay dos formas:

- **Comisión porcentual** de $p\%$: se descuenta esa fracción de la cantidad. Lo que queda es $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ veces la cantidad. Con una comisión del 3% queda el 97% , es decir, un factor $0,97$.
- **Comisión fija**: se resta una cantidad concreta por operación, sin importar lo que cambies.

MÉTODO • CAMBIAR DINERO CON COMISIÓN

1. Anota el sentido de la operación (de A a B o de B a A) y el tipo de cambio que corresponde (compra o venta, si hay tabla).
2. **Aplica la comisión primero**, sobre la cantidad que entregas y en su misma moneda: multiplica por $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ si es porcentual, o resta la cantidad fija. Salvo que el enunciado diga otra cosa, la comisión se cobra antes de convertir.
3. Convierte lo que queda: multiplica por r (A a B) o divide entre r (B a A).
4. Redondea solo al final, a la precisión que pide el enunciado (para dinero, normalmente dos cifras decimales).

Si lo que se pregunta es al revés (cuánto hay que entregar para recibir una cantidad dada), se deshacen los pasos en orden inverso: primero se divide o multiplica por el tipo de cambio y después se deshace la comisión. Con una comisión fija se escribe una ecuación y se despeja. Por ejemplo, con tipo r y comisión fija f se tiene $s = r(b - f)$, donde b es lo entregado y s lo recibido.

Cambiar y volver a cambiar

Si cambias dinero y, sin gastarlo, lo vuelves a cambiar a tu moneda original, **no recuperas lo mismo**. Cada operación pasa por una comisión, y además las tasas de compra y de venta no coinciden. La diferencia es una pérdida, que se mide así:

$$\text{pérdida} = \text{cantidad inicial} - \text{cantidad final}, \quad \text{pérdida porcentual} = \frac{\text{pérdida}}{\text{cantidad inicial}} \cdot 100\%$$

Aunque el tipo de cambio fuese idéntico en los dos sentidos, las comisiones bastarían para perder dinero. Con una comisión porcentual del 2% cada vez, por ejemplo, el factor total es $0,98 \cdot 0,98 = 0,9604$: se conserva el $96,04\%$, no el 96% .

NOTA • CON LA CPG O CON UNA HOJA DE CÁLCULO

En el examen del IB puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG), también en problemas de divisas. No hay un menú especial: se trata de operaciones encadenadas. Recomendaciones:

- Guarda el resultado de cada paso en la memoria de la calculadora o usa la respuesta anterior, para no escribir de nuevo cifras redondeadas.
- Escribe en tu respuesta la operación que has hecho (por ejemplo, $500 \cdot 0,985 \cdot 0,865$) y no solo el resultado final: si te equivocas en una cifra, se puede seguir puntuando el método.
- Si hay que repetir el mismo cálculo con muchas cantidades, una hoja de cálculo (o una tabla de la CPG) permite escribir la fórmula una vez y rellenar el resto.
- Interpreta el resultado: indica la moneda y comprueba que el orden de magnitud tiene sentido.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Yenes y euros

Un viajero cambia euros (EUR) por yenes (JPY). El tipo de cambio es $1 \text{ EUR} = 162,4 \text{ JPY}$ y no hay comisión.

- ¿Cuántos yenes recibe por 650 EUR?
- De vuelta en casa le sobran 40 000 JPY. ¿Cuántos euros le dan con el mismo tipo de cambio? Redondea a dos cifras decimales.

- Se pasa de euros a yenes, así que se **multiplica** por el tipo de cambio:

$$650 \cdot 162,4 = 105\,560 \text{ JPY}$$

- Ahora se pasa de yenes a euros, así que se **divide** entre el tipo de cambio:

$$\frac{40\,000}{162,4} \approx 246,31 \text{ EUR}$$

Comprobación: un yen vale menos que un euro, por lo que el número de euros debe ser mucho menor que el de yenes.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Dos casas de cambio

Lucía quiere cambiar 500 EUR a libras esterlinas (GBP). El tipo de cambio es $1 \text{ EUR} = 0,8650 \text{ GBP}$. Dos casas de cambio le ofrecen:

- Casa P: comisión del 1,5 % sobre los euros entregados.
- Casa F: comisión fija de 4 EUR por operación.

En ambas la comisión se cobra antes de convertir. Da los resultados con dos cifras decimales.

- ¿Cuántas libras recibe en la casa P?
- ¿Cuántas libras recibe en la casa F?
- En la casa F, ¿cuántos euros debe entregar para recibir exactamente 300 GBP?

- La comisión deja el 98,5 % de los euros:

$$500 \cdot 0,985 = 492,5 \text{ EUR}$$

Se convierte multiplicando por el tipo de cambio:

$$492,5 \cdot 0,8650 = 426,0125 \approx 426,01 \text{ GBP}$$

- Se resta la comisión fija y se convierte:

$$(500 - 4) \cdot 0,8650 = 496 \cdot 0,8650 = 429,04 \text{ GBP}$$

Para esta cantidad la casa F es mejor. Con cantidades pequeñas, una comisión fija pesa mucho; con cantidades muy grandes, la porcentual crece más y deja de compensar.

- Sea b la cantidad entregada en euros. Las libras recibidas son $0,8650(b - 4)$. Se plantea la ecuación y se despeja:

$$0,8650(b - 4) = 300 \Rightarrow b - 4 = \frac{300}{0,8650} \approx 346,8208 \Rightarrow b \approx 350,82 \text{ EUR}$$

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Ida y vuelta con tabla de compra y venta

Una casa de cambio publica estos tipos entre el euro (EUR) y el dólar canadiense (CAD), expresados en CAD por cada 1 EUR:

Compra Venta

CAD por 1 EUR 1,5600 1,4800

«Venta» se usa cuando la casa te vende dólares canadienses, y «compra» cuando te los compra. En cada operación cobra una comisión del 2 % sobre la cantidad que le entregas. Da los resultados con dos cifras decimales.

- Diego cambia 800 EUR a CAD. ¿Cuántos dólares canadienses recibe?
- En el viaje gasta 960 CAD y cambia lo que le queda de nuevo a euros. ¿Cuántos euros recibe?
- Si Diego no hubiera gastado nada y hubiera deshecho el cambio de inmediato con todos los CAD del apartado a), ¿qué porcentaje de los 800 EUR habría perdido? Da el resultado con tres cifras significativas.

1. **Elegir bien la columna.** En a) la casa **vende** CAD, así que se usa $1 \text{ EUR} = 1,4800 \text{ CAD}$. En b) la casa **compra** CAD, y se usa $1 \text{ EUR} = 1,5600 \text{ CAD}$ (para recibir un euro hay que entregar 1,56 CAD).

- Comisión del 2 % sobre los euros, y luego conversión (multiplicación, porque se pasa a CAD):

$$800 \cdot 0,98 \cdot 1,4800 = 784 \cdot 1,4800 = 1160,32 \text{ CAD}$$

- Quedan $1160,32 - 960 = 200,32 \text{ CAD}$. La comisión se cobra sobre los CAD entregados:

$$200,32 \cdot 0,98 = 196,3136 \text{ CAD}$$

Se pasa de CAD a EUR, así que se **divide** entre 1,5600:

$$\frac{196,3136}{1,5600} \approx 125,84 \text{ EUR}$$

- Con los 1160,32 CAD de a), de nuevo con comisión y con la tasa de compra:

$$\frac{1160,32 \cdot 0,98}{1,5600} = \frac{1137,1136}{1,5600} \approx 728,919 \text{ EUR}$$

La pérdida es $800 - 728,919 = 71,081 \text{ EUR}$, y en porcentaje:

$$\frac{71,081}{800} \cdot 100 \approx 8,89 \%$$

Aunque no ha pasado nada entre las dos operaciones, Diego pierde casi el 9 %: el 4 % de las dos comisiones y el resto por la diferencia entre la tasa de venta y la de compra.

En el examen: es habitual que el enunciado dé una tabla con las dos columnas y que sea la elección de columna, junto con el orden comisión–conversión, lo que se puntúa. Indica siempre la moneda de cada resultado y no redondees los pasos intermedios.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • MULTIPLICAR CUANDO HAY QUE DIVIDIR

Con $1 \text{ EUR} = 162,4 \text{ JPY}$, quien pasa de yenes a euros y multiplica por 162,4 obtiene millones de euros por unos pocos miles de yenes. El tipo de cambio siempre se lee «unidades de B por una de A»: de A a B se multiplica, de B a A se divide. Haz la comprobación de magnitud antes de dar el resultado.

ERROR TÍPICO · APLICAR LA COMISIÓN EN EL SITIO EQUIVOCADO

Si el enunciado dice que la comisión se cobra sobre la cantidad entregada, debe aplicarse a esa cantidad y en su moneda **antes** de convertir. Sumar o restar la comisión de la moneda de destino, o usar una comisión fija de euros sobre un importe en otra divisa, da un resultado distinto. Y una comisión del 3 % no se aplica multiplicando por 0,03 (eso es la comisión misma), sino por 0,97 (lo que queda).

ERROR TÍPICO · CREER QUE IDA Y VUELTA DEVUELVE LO MISMO

Cambiar a otra moneda y volver, sin gastar nada, **siempre** da menos que lo inicial: las comisiones se cobran dos veces y las tasas de compra y venta son distintas. Tampoco se pueden usar el mismo tipo en los dos sentidos si el enunciado da una tabla, ni redondear a dos decimales cada paso intermedio, porque la cifra final puede cambiar en el último decimal.

Resumen

- Tipo de cambio: $1 A = r B$. De A a B se multiplica por r ; de B a A se divide entre r .
- Venta: la casa te vende divisa extranjera. Compra: la casa te compra la que te sobra. En una tabla, elige la columna según lo que hagas tú.
- Comisión porcentual de $p\%$: factor $1 - \frac{p}{100}$. Comisión fija: se resta. Salvo indicación contraria, se aplica antes de convertir.
- Para saber cuánto entregar para recibir una cantidad dada, se invierten los pasos o se plantea una ecuación.
- Cambiar y volver a cambiar siempre supone una pérdida: $\frac{\text{inicial} - \text{final}}{\text{inicial}} \cdot 100\%$.
- En el examen del IB, usa la CPG sin redondear pasos intermedios, escribe la operación, indica la moneda y da el resultado con la precisión pedida.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema I

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

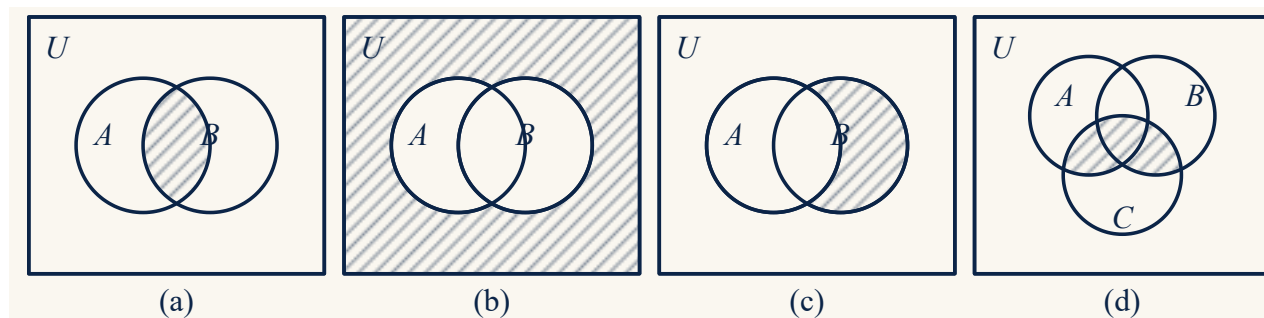
Conjuntos y diagramas de Venn

EJERCICIO 1

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

Escriba la expresión correspondiente al área sombreada en los siguientes diagramas de Venn:



Se identifica cada zona rayada.

1. (a) Solo la zona común de los dos círculos: $A \cap B$.
2. (b) Todo lo que queda fuera de los dos círculos: complemento de la unión, $(A \cup B)'$.
3. (c) La parte de B que no está en A : $B \cap A'$.
4. (d) Se rayan $A \cap C$ y $B \cap C$, incluida la zona donde se cruzan los tres. Es la unión de las dos intersecciones: $(A \cap C) \cup (B \cap C)$, que equivale a $(A \cup B) \cap C$.

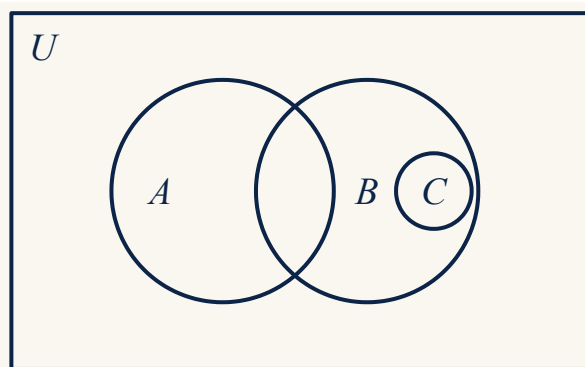
Resultado: (a) $A \cap B$; (b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$; (c) $A' \cap B$; (d) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

EJERCICIO 2

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2003

El siguiente diagrama de Venn muestra los conjuntos U , A , B y C :



Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos de acuerdo a la información ofrecida en el diagrama de Venn.

- a) $A \cap C = \emptyset$
- b) $C \cup B = C$
- c) $C \subset A \cup B$
- d) $A \subset C'$

En el diagrama C está dentro de B y no toca a A .

1. (a) $A \cap C = \emptyset$: A y C no se solapan, no tienen elementos comunes. **Verdadero.**
2. (b) $C \cup B = C$: como $C \subset B$, la unión es el conjunto mayor, B , y $B \neq C$ (hay elementos de B fuera de C). **Falso.**
3. (c) $C \subset A \cup B$: todo C está en B , y B está en $A \cup B$. **Verdadero.**
4. (d) $A \subset C'$: C' es todo lo que no está en C ; como A no tiene nada de C , todo A está en C' . **Verdadero.**

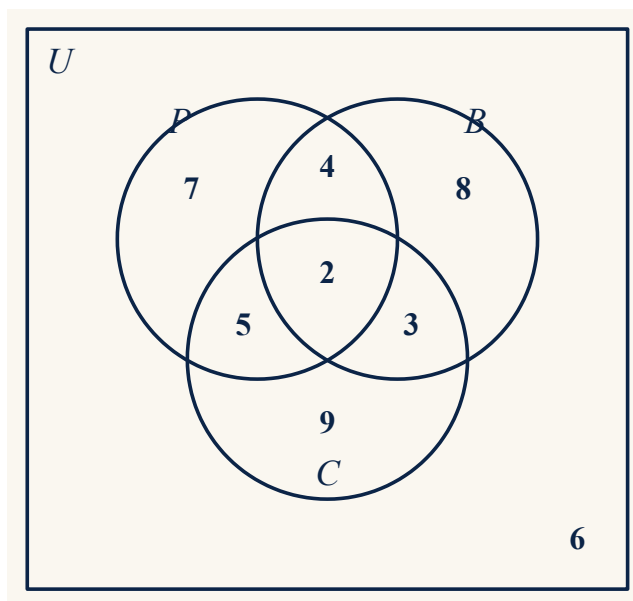
Resultado: (a) Verdadero; (b) Falso; (c) Verdadero; (d) Verdadero.

EJERCICIO 3

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

El siguiente diagrama de Venn muestra el número de alumnos de un colegio que estudian ciencias: Física (P), Química (C) y Biología (B).



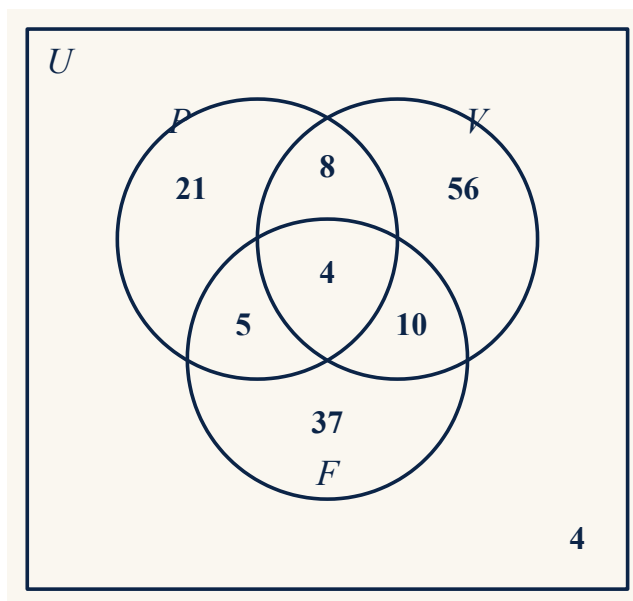
- Escriba el número de alumnos que sólo estudian Química.
- Escriba el número de alumnos que estudian exactamente dos asignaturas de ciencias.
- Escriba el número de alumnos que no estudian Física.
- Halle $n[(P \cup B) \cap C]$.

- a) Los que estudian solo Química es la región de C que no toca a P ni a B : 9.
- b) Exactamente dos asignaturas son las tres zonas de dos conjuntos sin el tercero: $4 + 5 + 3 = 12$ (no se cuentan los 2 del centro, que estudian las tres).
- c) No estudian Física: todos los que están fuera de P , es decir, solo B (8), $B \cap C$ (3), solo C (9) y los de fuera (6): $8 + 3 + 9 + 6 = 26$.
- d) $(P \cup B) \cap C$: los de Química que estudian además Física o Biología. Son las regiones de C que tocan a P o a B : $P \cap C$ sin B (5), los tres (2) y $B \cap C$ sin P (3): $5 + 2 + 3 = 10$.

Resultado: a) 9. b) 12. c) 26. d) 10.

EJERCICIO 4 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2012

El colegio ofrece a los alumnos clases de música de Piano (P), de Violín (V) y de Flauta (F). El diagrama de Venn muestra el número de alumnos que están aprendiendo a tocar cada tipo de instrumento.



- Escriba el número total de alumnos que hay en el colegio.
- Escriba el número de alumnos que
 - están aprendiendo a tocar el violín únicamente;
 - están aprendiendo a tocar el piano, la flauta o ambos;
 - no están aprendiendo a tocar la flauta.
- Explique, con palabras, el significado de la parte del diagrama que representa el conjunto $P \cap F'$.

- a) El total es la suma de todas las regiones, incluidos los de fuera: $21 + 8 + 56 + 5 + 4 + 10 + 37 + 4 = 145$.
- b) (i) Solo violín: 56. (ii) Piano, flauta o ambos es $P \cup F$: todas las regiones dentro de P o de F , es decir $21 + 8 + 5 + 4 + 10 + 37 = 85$. (iii) No flauta es todo menos F : solo P (21), $P \cap V$ (8), solo V (56) y fuera (4): $21 + 8 + 56 + 4 = 89$.
- c) $P \cap F'$ son los que están en P y no en F : los alumnos que aprenden piano pero no flauta (solo piano, o piano y violín). Son $21 + 8 = 29$ alumnos.

Resultado: a) 145. b) (i) 56; (ii) 85; (iii) 89. c) Alumnos que aprenden piano pero no flauta (29 alumnos).

EJERCICIO 5 ★ Básico IB · P2 TZ0 Noviembre 2006

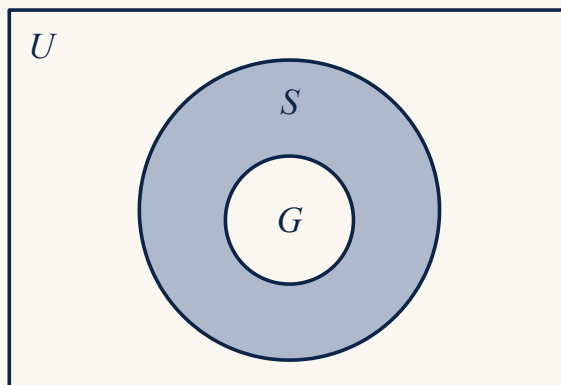
Dado un conjunto universal $U = \{\text{coches}\}$, $S = \{\text{coches deportivos}\}$, $G = \{\text{coches deportivos verdes}\}$.

- Dibuje un diagrama de Venn para ilustrar esta información.
- Sombree el conjunto $S \cap G'$ en su diagrama.
- Escriba en palabras el significado de $S \cap G'$.

1. Todo coche deportivo verde es un coche deportivo, así que G está totalmente contenido en S ($G \subset S$). 2. Dibujamos un rectángulo U , dentro un círculo S y, dentro de S , un círculo más pequeño G .

b) 1. G' son los coches que no son deportivos verdes (todo lo que está fuera de G). 2. $S \cap G'$ es lo que está a la vez en S y fuera de G : sombreamos la parte de S que queda fuera del círculo G (la «corona» entre ambos círculos).

c) Son los coches que son deportivos pero no son verdes, es decir, los deportivos de cualquier otro color.



Resultado: a) b) diagrama de arriba c) Los coches deportivos que no son de color verde

EJERCICIO 6

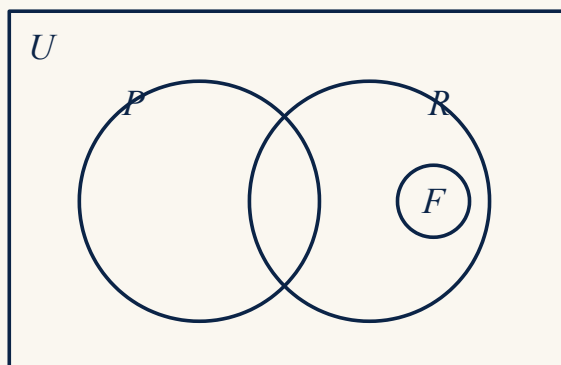
★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2001

Un comité U tiene tres subcomités: investigación R , finanzas F y compras P . Ningún miembro pertenece a los subcomités de finanzas y compras. Algunos miembros pertenecen a ambos comités de investigación y compras. Todos los miembros del subcomité de finanzas también pertenecen al subcomité de investigación. Dibuje un diagrama de Venn que muestre la relación entre los conjuntos U , R , F y P .

Se razona cada condición como una relación entre círculos:

1. «Ningún miembro pertenece a finanzas y compras»: $F \cap P = \emptyset$, así que los círculos F y P no se tocan.
2. «Algunos pertenecen a investigación y compras»: $R \cap P \neq \emptyset$, así que R y P se solapan parcialmente.
3. «Todos los de finanzas también están en investigación»: $F \subset R$, así que F se dibuja completamente dentro de R .
4. Los tres círculos van dentro del rectángulo U . Como F está dentro de R y R solo toca a P en su zona exterior a F , el círculo F queda dentro de R sin tocar P .



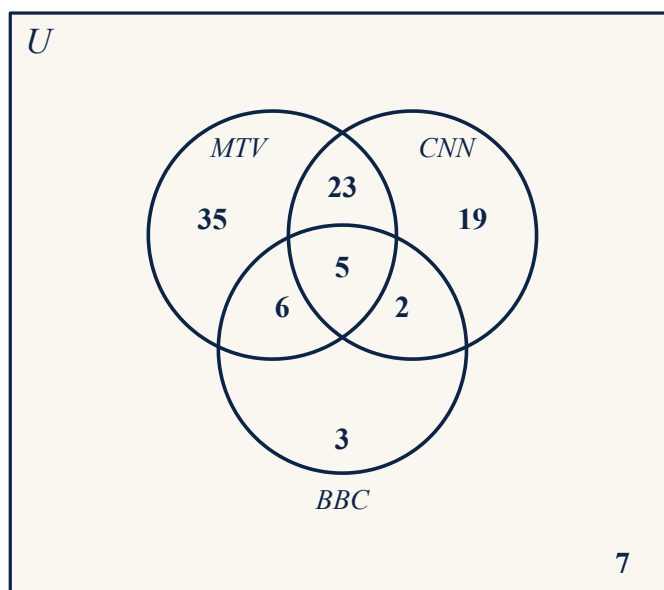
Resultado: diagrama de arriba

EJERCICIO 7

★ Básico

IB · P2 TZ0 Noviembre 2001

Se preguntó a 100 estudiantes qué canal de televisión (MTV, CNN o BBC) habían visto la noche anterior. Los resultados se muestran en el diagrama de Venn de abajo.



De la información en el diagrama de Venn, anote el número de estudiantes que vieron

- a) tanto MTV como BBC;
- b) MTV o BBC;
- c) CNN y BBC pero no MTV;
- d) MTV o CNN pero no BBC.

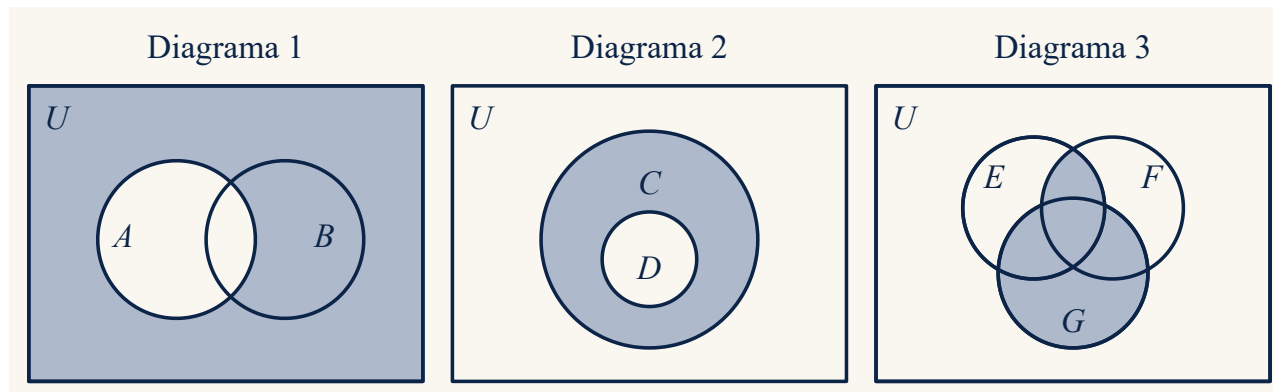
Se leen las regiones directamente del diagrama.

- a) MTV y BBC: MTV $\cap$ BBC sin CNN (6) más las tres (5): $6 + 5 = 11$.
- b) MTV o BBC (unión): todas las regiones de ambos círculos: $35 + 23 + 6 + 5 + 2 + 3 = 74$. (Equivale a $100 - 19 - 7 = 74$, quitando solo CNN y el exterior.)
- c) CNN y BBC pero no MTV: la región de solo esos dos: 2.
- d) MTV o CNN, pero no BBC: regiones de esos dos círculos fuera de BBC: $35 + 23 + 19 = 77$.

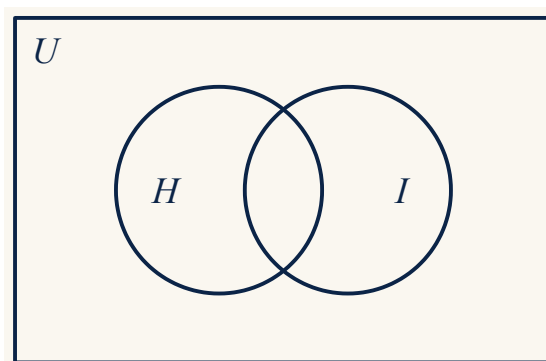
Resultado: a) Vieron tanto MTV como BBC = 11 estudiantes b) Vieron MTV o BBC = 74 estudiantes
c) Vieron CNN y BBC pero no MTV = 2 estudiantes d) Vieron MTV o CNN pero no BBC = 77 estudiantes

EJERCICIO 8 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2018

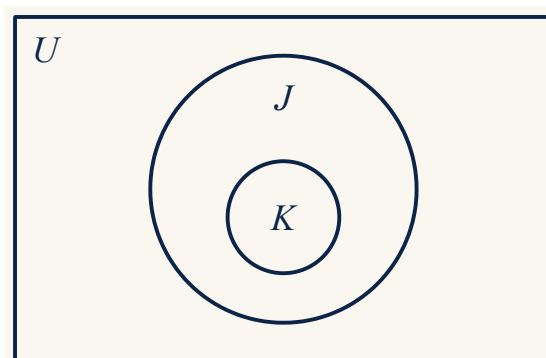
Considere los siguientes diagramas de Venn.



- a) Escriba una expresión, utilizando notación de conjuntos, que represente la región sombreada del
- (i) Diagrama 1;
 - (ii) Diagrama 2;
 - (iii) Diagrama 3.
- b) En cada uno de los siguientes diagramas de Venn, sombree la región que representa al conjunto
- (i) $(H \cup I)'$;



- (ii) $J \cap K$.



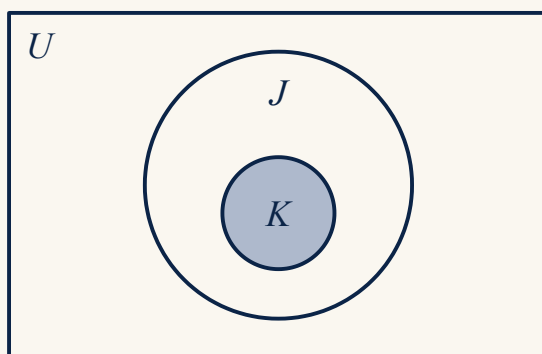
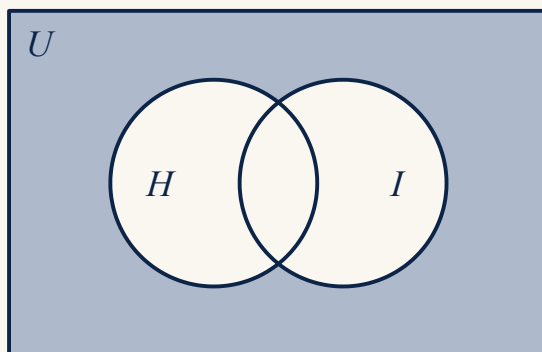
- a) Para cada diagrama se identifica qué zona está sombreada y se traduce con las operaciones de conjuntos (complemento $'$, unión $\cup$, intersección $\cap$).

1. Diagrama 1: está sombreado todo el universo salvo el círculo A , es decir, lo que no está en A : el complemento A' .

2. Diagrama 2: D está dentro de C y se sombrea la parte de C que queda fuera de D : elementos que están en C y no están en D , es decir, $C \cap D'$.
3. Diagrama 3: se sombrea dos cosas a la vez, la intersección $E \cap F$ y todo el círculo G . «Una cosa o la otra» es una unión: $(E \cap F) \cup G$.

b) Se razona qué zona hay que colorear.

1. $(H \cup I)'$: primero $H \cup I$ es la zona que cubren los dos círculos juntos. Su complemento es todo lo que queda fuera de ambos círculos, dentro del rectángulo U . Se sombrea esa zona exterior y no se sombrea ningún círculo.
2. $J \cap K$: es la zona común a J y K . Como K está completamente dentro de J , lo común es todo el círculo pequeño K . Se sombrea el círculo K .



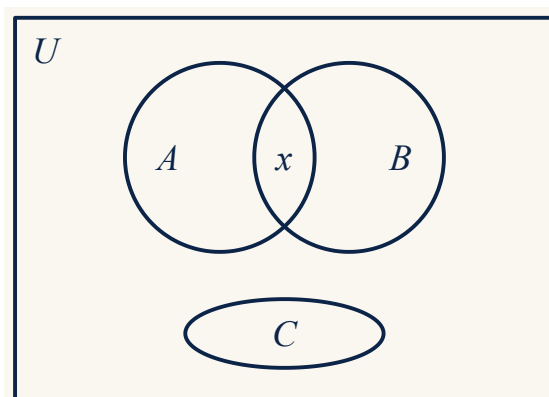
Resultado: a) (i) A' ; (ii) $C \cap D'$; (iii) $G \cup (E \cap F)$. b) (i) exterior de ambos círculos; (ii) el círculo K .

EJERCICIO 9

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

El siguiente diagrama de Venn muestra los conjuntos A , B , C y U . Además, x es un elemento de U .



a) Indique en la siguiente tabla si los enunciados que aparecen son Verdaderos o Falsos.

Enunciado Verdadero o Falso

$x \in C$

$x \subset B$

$A \cup B \neq \emptyset$

$A \cap B \subset C$

$A \cap C = \emptyset$

b) En el diagrama de Venn sombree la región $A \cap (B \cup C)'$.

a) Hay que distinguir entre pertenecer a un conjunto ($\in$, para un elemento), estar contenido en un conjunto ($\subset$, para un conjunto) y conjunto vacío.

1. $x \in C$: x está en la intersección de A y B , y C es un óvalo separado. Falso.
2. $x \subset B$: x es un elemento, no un conjunto, por lo que el símbolo correcto sería $x \in B$. Escrito con $\subset$ es Falso.
3. $A \cup B \neq \emptyset$: $A \cup B$ contiene al menos a x , así que no es vacío. Verdadero.
4. $A \cap B \subset C$: $A \cap B$ contiene a x , que no está en C . Falso.
5. $A \cap C = \emptyset$: C está separado de A , no tienen nada en común. Verdadero.

Enunciado Verdadero o Falso

$x \in C$ Falso

$x \subset B$ Falso

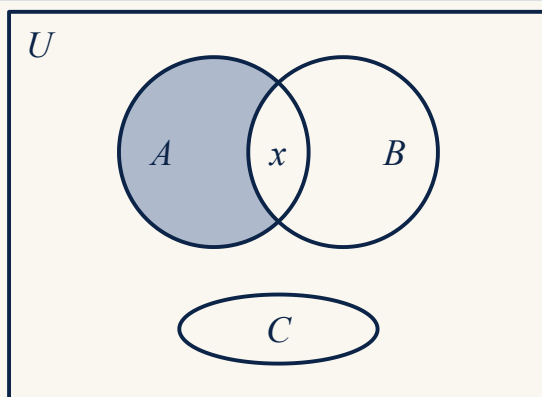
$A \cup B \neq \emptyset$ Verdadero

$A \cap B \subset C$ Falso

$A \cap C = \emptyset$ Verdadero

b) Se construye la región por partes.

1. $B \cup C$ es todo lo que está en B o en C .
2. $(B \cup C)'$ es todo lo que no está en ninguno de ellos.
3. Se pide $A \cap (B \cup C)'$: la parte de A que no está en B ni en C . Como C no toca a A , solo hay que quitar a A la parte que comparte con B . Se sombrea la parte de A que queda fuera de B (la «media luna» de A).



Resultado: a) Falso, Falso, Verdadero, Falso, Verdadero. b) La parte de A que no pertenece a B .

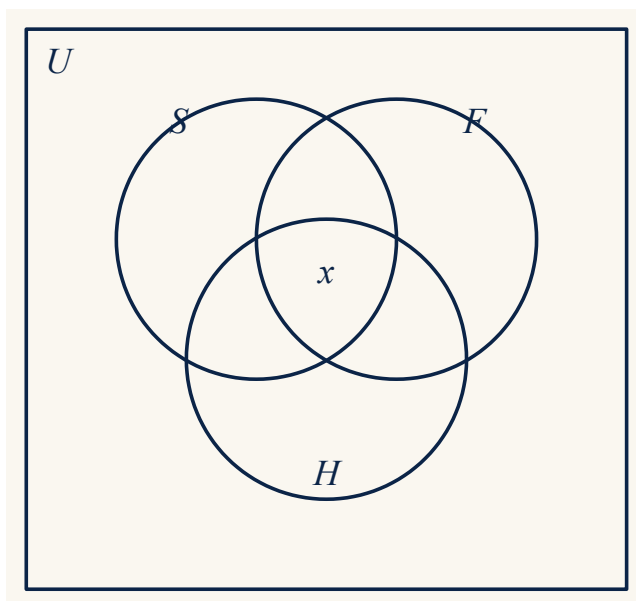
EJERCICIO 10

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2018

Un grupo de 60 entusiastas del deporte visitó los Juegos Olímpicos de Invierno de PyeongChang 2018 para ver una variedad de eventos deportivos. Los deportes más populares fueron el snowboard (S), el patinaje artístico (F) y el hockey sobre hielo (H). Para este grupo de 60 personas: 4 no vio ninguno de los deportes más populares, x vio los tres deportes más populares, 9 vieron solo snowboard, 11 vieron patinaje artístico solamente, 15 solo vieron hockey sobre hielo, 7 vieron snowboard y patinaje artístico, 13 vieron patinaje artístico y hockey sobre hielo, 11 vieron snowboard y hockey sobre hielo.

a) Complete el diagrama de Venn usando la información dada.



b) Encuentre el valor de x .

c) Escriba el valor de $n((F \cup H) \cap S')$.

a) Se rellena desde el centro hacia fuera, restando lo que ya está contado.

1. Centro ($S \cap F \cap H$): x .
2. Solo $S \cap F$ (sin H): $7 - x$, porque las 7 personas de $S \cap F$ incluyen las del centro.
3. Solo $F \cap H$: $13 - x$.
4. Solo $S \cap H$: $11 - x$.
5. Solo S : 9. Solo F : 11. Solo H : 15.

6. Fuera de los tres: 4.

b) El total de personas es 60, así que la suma de todas las regiones debe ser 60:

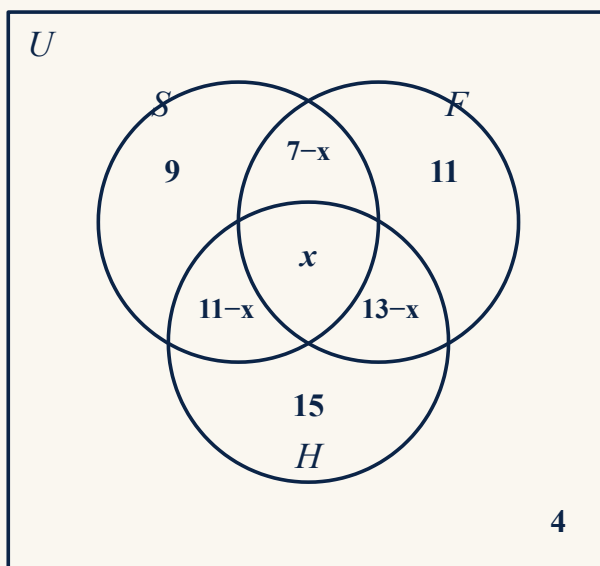
$$9 + 11 + 15 + (7 - x) + (13 - x) + (11 - x) + x + 4 = 60$$

$$70 - 2x = 60 \Rightarrow x = 5.$$

Con $x = 5$ las regiones valen: $S \cap F$ solo, 2; $F \cap H$ solo, 8; $S \cap H$ solo, 6; centro, 5.

c) $(F \cup H) \cap S'$ son las personas que vieron patinaje o hockey y no vieron snowboard: solo F (11), solo H (15) y $F \cap H$ sin S (8):

$$n = 11 + 15 + 8 = 34.$$



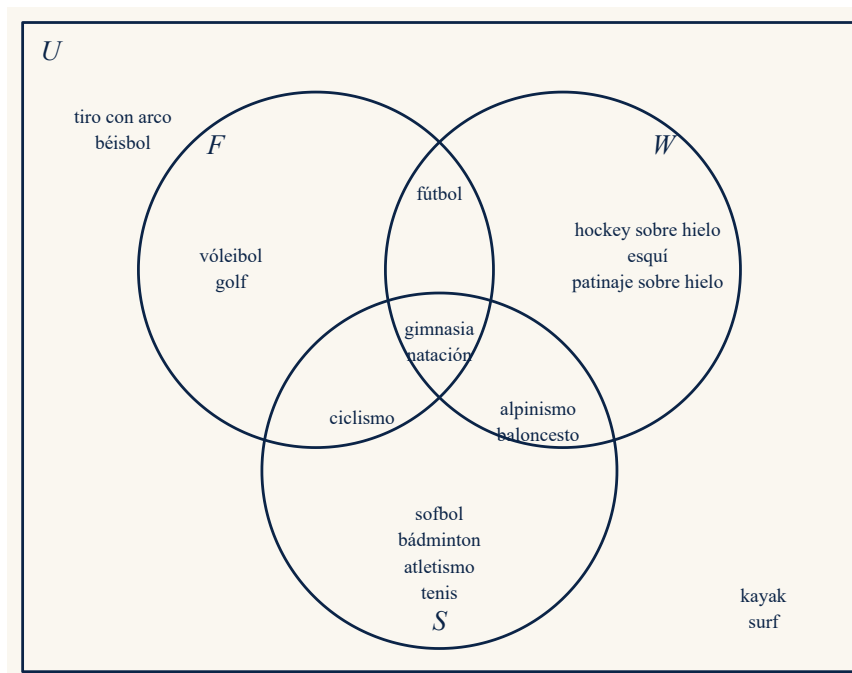
Resultado: a) centro 5; $S \cap F$ solo 2; $F \cap H$ solo 8; $S \cap H$ solo 6; solo S 9; solo F 11; solo H 15; fuera 4. b) $x = 5$. c) 34.

EJERCICIO 11

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

Dune Canyon High School organiza su año escolar en tres trimestres: otoño / caída del otoño (F), invierno (W) y primavera (S). La escuela ofrece una variedad de actividades deportivas durante y fuera del año escolar. Las actividades que ofrece la escuela se resumen en el siguiente diagrama de Venn.



- Escriba el número de actividades deportivas que ofrece la escuela durante su año escolar.
- Determine si la escuela ofrece alpinismo en el trimestre de otoño / caída del otoño.
- Anote
 - los elementos del conjunto $F \cap W'$;
 - $n(W \cap S)$.
- Escriba, en función de F , W y S , una expresión para el conjunto que contiene solo tiro con arco, béisbol, kayak y surf.

- a) Las actividades que se ofrecen durante el año escolar son las que están dentro de F , W o S (las 4 de fuera no se ofrecen en ningún trimestre). Se suman las regiones: $2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 4 = 15$.
- b) El alpinismo está en $W \cap S$, fuera de F . Por tanto no se ofrece en otoño: **No**.
- c) (i) $F \cap W'$ son las actividades de otoño que no están en invierno: vóleybol, golf y ciclismo. (ii) $W \cap S$ contiene gimnasia, natación, alpinismo y baloncesto, así que $n(W \cap S) = 4$.
- d) Tiro con arco, béisbol, kayak y surf no están en ningún trimestre: son lo que queda fuera de la unión de los tres, $(F \cup W \cup S)'$.

Resultado: a) 15. b) No. c) (i) {vóleybol, golf, ciclismo}; (ii) 4. d) $(F \cup W \cup S)'$.

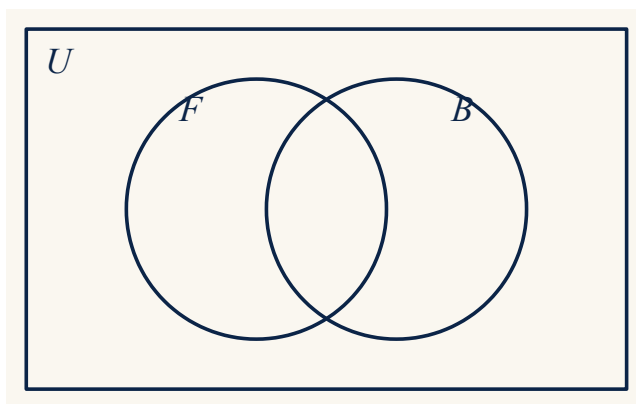
EJERCICIO 12

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2017

En un campamento de verano, todos los niños han de practicar al menos un deporte. Pueden elegir entre fútbol (F) y baloncesto (B). Hay 15 niños que practican los dos deportes. El número de niños que juegan solo al fútbol es el doble que el número de niños que juegan solo al baloncesto. Sea x el número de niños que juegan solo al fútbol.

- Escriba una expresión, en función de x , para representar el número de niños que juegan solo al baloncesto.
- Complete el diagrama de Venn utilizando los datos anteriores.



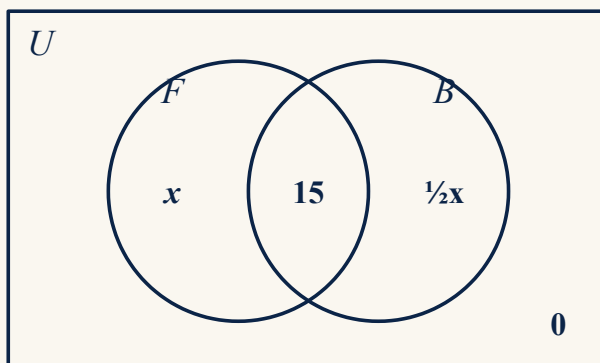
En este campamento de verano hay 120 niños.

- Halle el número de niños que juegan solo al fútbol.
- Escriba el valor de $n(F)$.

- a) Solo fútbol es el doble que solo baloncesto, y solo fútbol vale x . Entonces solo baloncesto vale $\frac{x}{2}$.
- b) Se rellena el diagrama: F solo: x ; $F \cap B$: 15; B solo: $\frac{x}{2}$. Fuera de ambos hay 0 niños, porque todos practican al menos un deporte.
- c) Hay 120 niños en total y todos están en alguna región:

$$x + 15 + \frac{x}{2} = 120 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 105 \Rightarrow x = 70.$$

- d) F incluye los que juegan solo al fútbol y los que juegan a los dos: $n(F) = 70 + 15 = 85$.



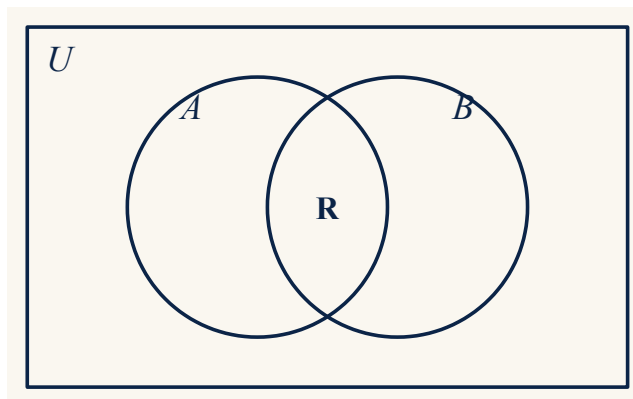
Resultado: a) $\frac{x}{2}$. b) F solo x , intersección 15, B solo $\frac{x}{2}$, fuera 0. c) 70. d) 85.

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2014

Tuti tiene los siguientes polígonos para clasificar: rectángulo (R), rombo (H), triángulo isósceles (I), pentágono regular (P) y triángulo escaleno (T). En el diagrama de Venn a continuación, el conjunto A consta de los polígonos que tienen al menos un par de lados paralelos, y el conjunto B consta de polígonos que tienen al menos un par de lados iguales.

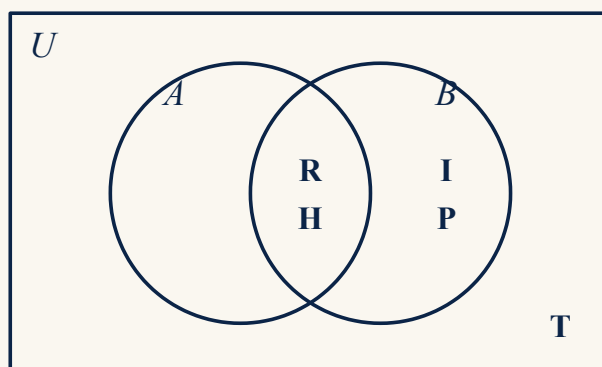


- a) Complete el diagrama de Venn colocando la letra correspondiente a cada polígono en la región apropiada. Por ejemplo, R ya se ha colocado y representa el rectángulo.
- b) Indique qué polígonos de la lista de Tuti son elementos de
- (i) $A \cap B$;
- (ii) $(A \cup B)'$.

Se examina cada polígono con las dos propiedades: al menos un par de lados paralelos (A) y al menos un par de lados iguales (B).

1. Rectángulo (R): lados opuestos paralelos e iguales. Está en $A \cap B$ (ya colocado).
2. Rombo (H): lados opuestos paralelos y los cuatro lados iguales. Está en $A \cap B$.
3. Triángulo isósceles (I): ningún par de lados paralelos (un triángulo no tiene lados paralelos), pero tiene dos lados iguales. Está en B fuera de A .
4. Pentágono regular (P): no tiene lados paralelos, pero sus cinco lados son iguales. Está en B fuera de A .
5. Triángulo escaleno (T): ni lados paralelos ni lados iguales. Está fuera de A y de B .

- b) $A \cap B$ es la zona común: R y H. $(A \cup B)'$ es lo que queda fuera de los dos círculos: T.



Resultado: a) $A \cap B$: R, H; solo B : I, P; solo A : ninguno; fuera: T. b) (i) R, H; (ii) T.

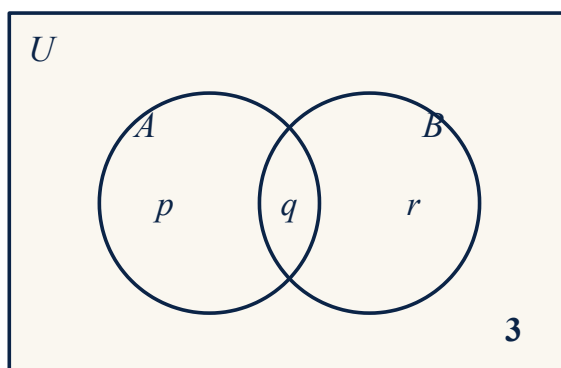
EJERCICIO 14

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

Se preguntó a un grupo de 33 personas sobre los pasaportes que tienen. 21 tienen pasaporte australiano, 15 tienen pasaporte británico y 3 no tienen ninguno.

- a) Encuentre el número de los que tienen pasaportes tanto australianos como británicos. En el diagrama de Venn a continuación, el conjunto A representa a las personas del grupo con pasaportes australianos y B a aquellos con pasaportes británicos.



- b) Escriba el valor de
- (i) q ;
- (ii) p y de r .
- c) Encuentre $n(A \cup B')$.

- a) Hay $33 - 3 = 30$ personas con al menos un pasaporte. Si se suman los de cada pasaporte, los que tienen los dos se cuentan dos veces: $21 + 15 = 36$. El exceso es el número de los que tienen ambos: $36 - 30 = 6$.
- b) (i) $q = n(A \cap B) = 6$. (ii) Solo australiano: $p = 21 - 6 = 15$. Solo británico: $r = 15 - 6 = 9$.
Comprobación: $15 + 6 + 9 + 3 = 33$.
- c) $A \cup B'$ son los que tienen pasaporte australiano o no tienen británico: todos salvo los que tienen solo el británico. $n(A \cup B') = 33 - r = 33 - 9 = 24$ (equivalente a $p + q + 3 = 15 + 6 + 3$).

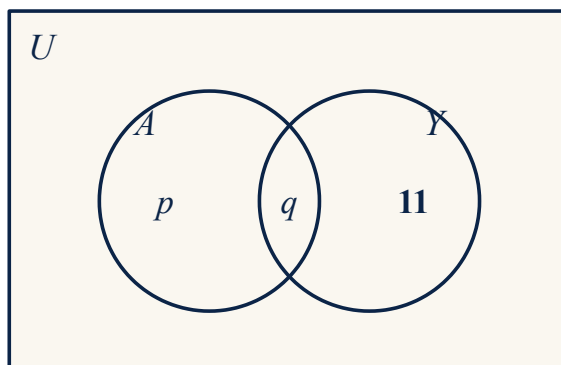
Resultado: a) 6. b) (i) $q = 6$; (ii) $p = 15$, $r = 9$. c) 24.

EJERCICIO 15

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2010

Un gimnasio tiene 60 miembros. 35 de los socios asisten al curso de aeróbic del club (A) y 28 miembros asisten al curso de yoga del club (Y). 17 miembros asisten a ambos cursos. Se utiliza un diagrama de Venn para ilustrar esta situación.



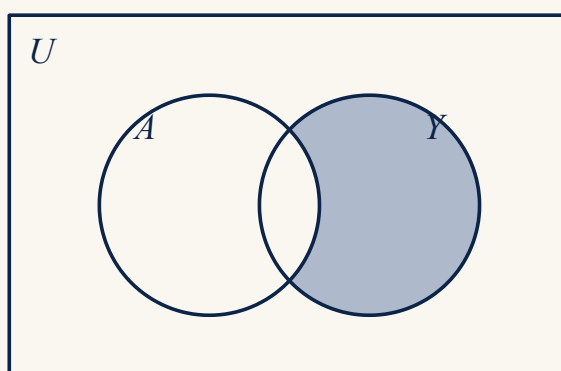
- Escriba el valor de q .
- Encuentre el valor de p .
- Calcule el número de miembros del gimnasio que no asisten ni al curso de aeróbic (A) ni al curso de yoga (Y).
- Sombree, en su diagrama de Venn, $A' \cap Y$.

a) 1. q es el número de miembros de la intersección $A \cap Y$, es decir, los que asisten a ambos cursos. 2. Del enunciado: $q = 17$.

b) 1. Los 35 socios de aeróbic se reparten entre «solo A » (p) y « A e Y » (q): $p + q = 35$. 2. $p = 35 - 17 = 18$.

c) 1. Socios dentro de algún círculo: $p + q + 11 = 18 + 17 + 11 = 46$. (Comprobación: yoga = $17 + 11 = 28$, correcto.) 2. Los que no asisten a ninguno son los que quedan fuera de los círculos: $60 - 46 = 14$.

d) $A' \cap Y$ son los que están en Y y no en A : se sombrea la parte de Y que queda fuera de A (la región con el 11).



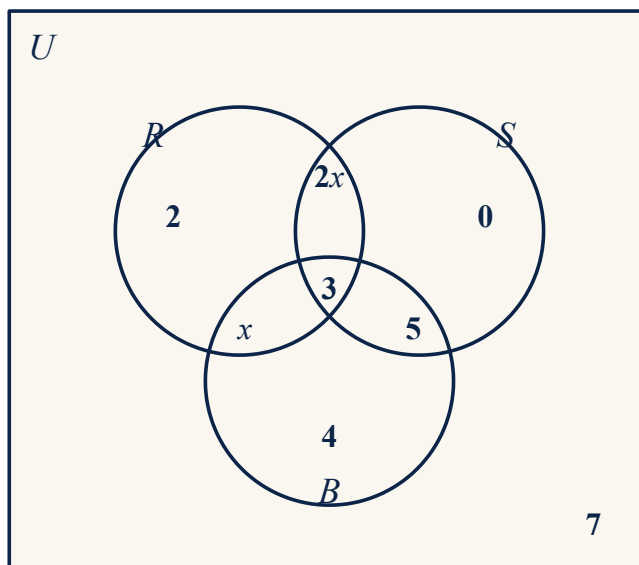
Resultado: a) $q = 17$ socios b) $p = 18$ socios c) 14 socios d) diagrama de arriba

EJERCICIO 16

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2009

- (ii) Se realizó una encuesta en una clase de 12 años. Se preguntó a los alumnos qué grupos de pop les gustan de los Rockers (R), los Salseros (S) y los Bluers (B). Los resultados se muestran en el siguiente diagrama.



- Escriba $n(R \cap S \cap B)$.
- Encuentre $n(R')$.
- Describe qué grupos les gustan a los alumnos del conjunto $S \cap B$.
- Utilice la notación de conjuntos para describir el grupo de alumnos a los que les gustan los Rockers y los Bluers pero no les gustan los Salseros. Hay 33 alumnos en la clase.
- (i) Encuentre x .
- (ii) Encuentre el número de alumnos a los que les gustan los Rockers.

- a) $R \cap S \cap B$ es la región común a los tres círculos, que contiene 3 alumnos. Luego $n(R \cap S \cap B) = 3$.
- b) 1. R' son los alumnos que no están en el círculo R . 2. Son las regiones: solo S (0), S y B sin R (5), solo B (4) y fuera de los círculos (7). 3. $n(R') = 0 + 5 + 4 + 7 = 16$.
- c) $S \cap B$ son los alumnos que están a la vez en S y en B : les gustan los Salseros y los Bluers (algunos, además, los Rockers).
- d) Rockers y Bluers: $R \cap B$; pero no Salseros: S' . Luego $R \cap B \cap S'$.
- e) (i) 1. Sumamos todas las regiones e igualamos al total de 33:

$$2 + 2x + 0 + x + 3 + 5 + 4 + 7 = 33 \Rightarrow 21 + 3x = 33.$$
2. $3x = 12$, por tanto $x = 4$.
- (ii) 1. A los Rockers pertenecen las cuatro regiones del círculo R : $2 + 2x + x + 3 = 5 + 3x$. 2. Con $x = 4$: $5 + 12 = 17$.

Resultado: a) $n(R \cap S \cap B) = 3$ alumnos b) $n(R') = 16$ alumnos c) Los Bluers y los Salseros d) $R \cap B \cap S'$ e) (i) $x = 4$ alumnos (ii) $n(R) = 17$ alumnos

EJERCICIO 17

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2002

Se realizó una encuesta acerca de las actividades que realizan en su tiempo libre 90 estudiantes. 60 estudiantes miran TV (T), 60 estudiantes leen (R), 70 estudiantes van al cine (C). 26 estudiantes miran TV, leen y además van al cine. 20 estudiantes sólo miran TV y van al cine. 18 estudiantes sólo leen y van al cine. 10 estudiantes sólo leen y miran TV.

- a) Dibuje un diagrama de Venn para ilustrar la información dada anteriormente.
- b) Calcule cuántos estudiantes
- (i) sólo miran TV;
- (ii) sólo van al cine.

a) Se empieza por el centro y se va hacia fuera.

1. $T \cap R \cap C = 26$.

2. Regiones de exactamente dos: $T \cap C \text{ sin } R = 20$, $R \cap C \text{ sin } T = 18$, $R \cap T \text{ sin } C = 10$.

3. Solo T : $60 - 20 - 10 - 26 = 4$.

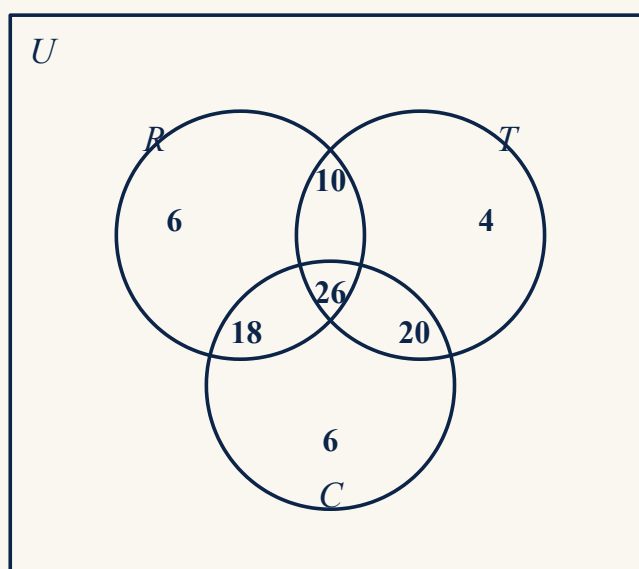
4. Solo R : $60 - 18 - 10 - 26 = 6$.

5. Solo C : $70 - 20 - 18 - 26 = 6$.

6. Comprobación del exterior: $4 + 6 + 6 + 20 + 18 + 10 + 26 = 90$, así que fuera de los círculos hay $90 - 90 = 0$ estudiantes.

b) (i) Solo miran TV: 4 (paso 3).

(ii) Solo van al cine: 6 (paso 5).



Resultado: a) diagrama de arriba

b) (i) Sólo miran TV = 4

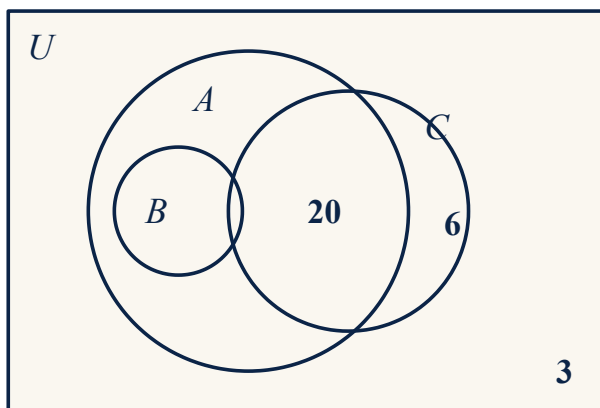
(ii) Sólo van al cine = 6

EJERCICIO 18

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2009

El siguiente diagrama de Venn representa a los alumnos que estudian en un colegio Matemáticas (A), Ampliación de Matemáticas (B) y Física (C). 50 alumnos estudian Matemáticas 38 estudian Física 20 estudian Matemáticas y Física, pero no Ampliación de Matemáticas 10 estudian Ampliación de Matemáticas, pero no Física 12 estudian Ampliación de Matemáticas y Física 6 estudian Física, pero no Matemáticas 3 no estudian ninguna de estas tres asignaturas.



- Copie y complete el diagrama de Venn en su hoja de respuestas.
- Escriba el número de alumnos que estudian Matemáticas pero no Ampliación de Matemáticas.
- Escriba el número total de alumnos que hay en el colegio.
- Escriba $n(B \cup C)$.

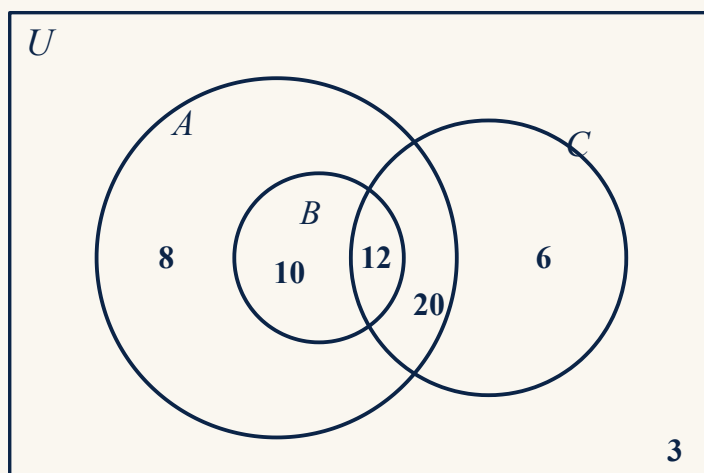
a) El diagrama indica que B está dentro de A (quien estudia Ampliación estudia Matemáticas). Esto se usa para rellenar.

- Como $B \subset A$, « B y C » es la región $A \cap B \cap C$: 12. « B sin C »: 10.
- $A \cap C$ sin B : 20. Solo C (fuera de A): 6. Fuera de los círculos: 3.
- Solo A (sin B ni C): al total de A le quitamos las demás regiones de A : $50 - 10 - 12 - 20 = 8$.
- Comprobación con Física: $20 + 12 + 6 = 38$. Correcto.

b) Matemáticas pero no Ampliación: solo A más $A \cap C$ sin B : $8 + 20 = 28$.

c) Sumamos todas las regiones: $8 + 10 + 12 + 20 + 6 + 3 = 59$.

d) $B \cup C$: regiones de B ($10 + 12$) más las de C que no están en B ($20 + 6$): $10 + 12 + 20 + 6 = 48$. Equivale a $n(C) + n(B \sin C) = 38 + 10 = 48$.



Resultado: a) diagrama de arriba b) 28 alumnos estudian Matemáticas pero no Ampliación de Matemáticas c) Número total de alumnos = 59 d) $n(B \cup C) = 38 + 10 = 48$ alumnos

EJERCICIO 19

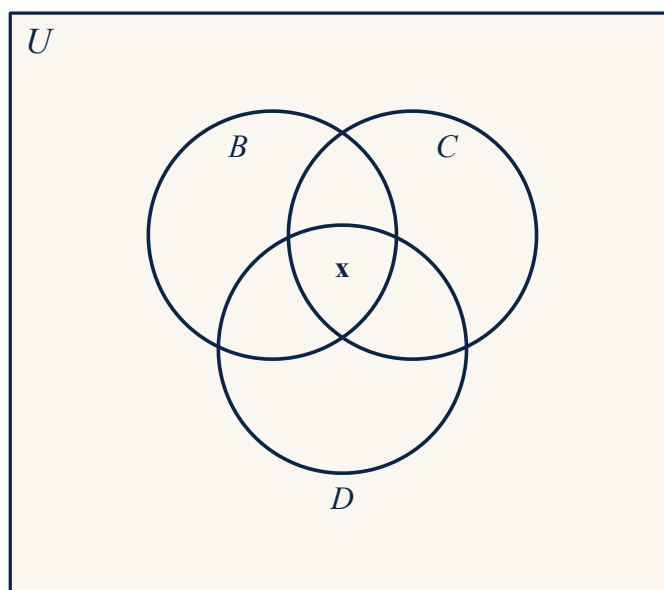
★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

Una escuela ofrece tres actividades, baloncesto (B), coro (C) y teatro (D). Todo estudiante debe participar en al menos una actividad.

- 16 estudiantes juegan baloncesto solamente.
- 18 estudiantes juegan baloncesto y cantan en el coro, pero no hacen teatro.
- 34 estudiantes juegan baloncesto y hacen teatro, pero no cantan en el coro.
- 27 estudiantes están en el coro y hacen teatro, pero no juegan baloncesto.

a) Ingrese la información anterior en el siguiente diagrama de Venn.



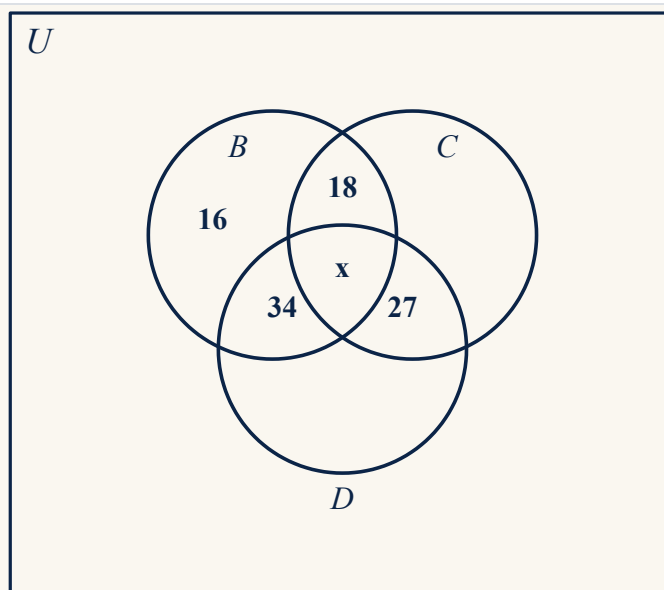
99 de los estudiantes juegan baloncesto, 88 cantan en el coro y 110 hacen teatro.

- b) Calcule el número de estudiantes x que participan en las tres actividades.
c) Calcule el número total de estudiantes en la escuela.

a) Se colocan los datos tal cual: solo $B = 16$, $B \cap C$ sin $D = 18$, $B \cap D$ sin $C = 34$, $C \cap D$ sin $B = 27$, y la región central es x . «Solo C» y «solo D» se calculan en los apartados siguientes.

b) 1. En B hay cuatro regiones: $16 + 18 + 34 + x = 99$. 2. $68 + x = 99$, por tanto $x = 31$.

c) 1. Solo C: de los 88 del coro quitamos las demás regiones de C: $88 - 18 - 31 - 27 = 12$. 2. Solo D: de los 110 de teatro: $110 - 34 - 31 - 27 = 18$. 3. Como todo estudiante participa en al menos una actividad, el total es la suma de las siete regiones: $16 + 12 + 18 + 18 + 34 + 27 + 31 = 156$.



Resultado: a) diagrama de arriba b) $x = 31$ estudiantes c) Número total de estudiantes = 156 estudiantes

EJERCICIO 20

★★ Medio

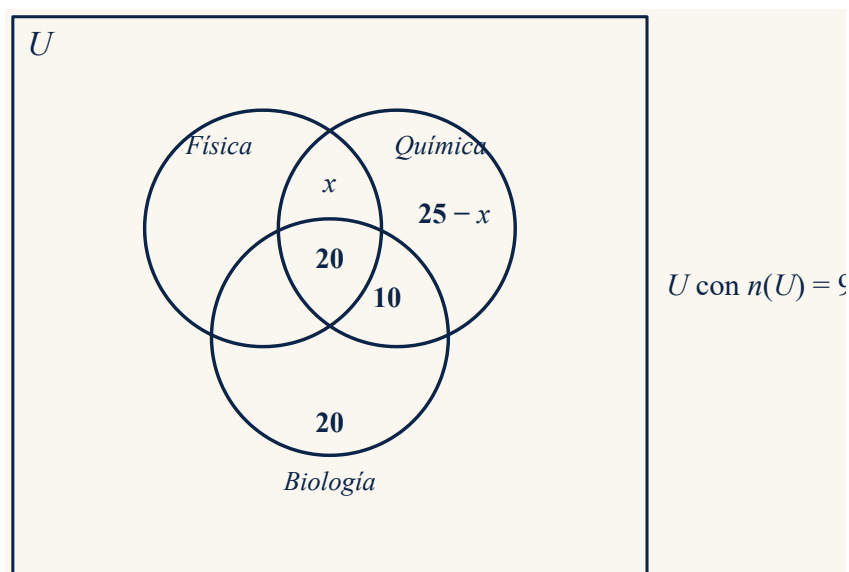
IB · P1 TZ0 Mayo 2006

En un colegio hay 90 alumnos matriculados en el Programa del Diploma del BI. Deben estudiar al menos una de estas asignaturas: Física, Biología y Química.

- 50 alumnos estudian Física,
- 60 alumnos estudian Biología,
- 55 alumnos estudian Química,
- 30 alumnos estudian Física y Biología,
- 10 alumnos estudian Biología y Química pero no Física,
- 20 alumnos estudian las tres asignaturas.

Si x representa el número de alumnos que estudian Física y Química pero no Biología, entonces $25 - x$ es el número de alumnos que estudian solamente Química.

La siguiente figura muestra parte de esta información y puede emplearse para las operaciones.



- Expresar el número de alumnos que estudian Física solamente, en función de x .
- Hallar x .
- Determinar el número de alumnos que estudian al menos dos de estas asignaturas.

- Los 50 de Física se reparten en cuatro regiones: solo Física, Física y Biología sin Química, Física y Química sin Biología (x) y las tres (20). 2. Física y Biología son 30 en total, y 20 de ellos estudian además Química. Luego Física y Biología sin Química: $30 - 20 = 10$. 3. Solo Física = $50 - 10 - x - 20 = 20 - x$.
1. Todos estudian al menos una asignatura, así que la suma de las siete regiones es 90. Solo Biología = $60 - 10 - 20 - 10 = 20$ (de acuerdo con la figura). 2. Suma: $(20 - x) + 10 + x + 20 + 20 + 10 + (25 - x) = 90$. 3. $105 - x = 90$, por tanto $x = 15$.
- Al menos dos asignaturas: las tres regiones de dos asignaturas más la de tres: 10 (F y B) + 15 (F y Q) + 10 (B y Q) + 20 (las tres) = 55.

Resultado: a) Estudian sólo Física = $20 - x$ alumnos b) $x = 15$ alumnos c) Estudian al menos dos de estas asignaturas = 55 alumnos

EJERCICIO 21

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2005

Los siguientes resultados se obtuvieron de una encuesta sobre los hábitos de lectura de los estudiantes.

- 60% lee la revista P
- 50% lee la revista Q
- 50% lee la revista R
- 30% lee las revistas P y Q
- 20% lee revistas Q y R
- 30% lee revistas P y R
- 10% lee las tres revistas

- Represente toda esta información en un diagrama de Venn.
- ¿Qué porcentaje de estudiantes leen exactamente dos revistas?
- ¿Qué porcentaje de estudiantes leen al menos dos revistas?
- ¿Qué porcentaje de estudiantes no lee ninguna de las revistas?

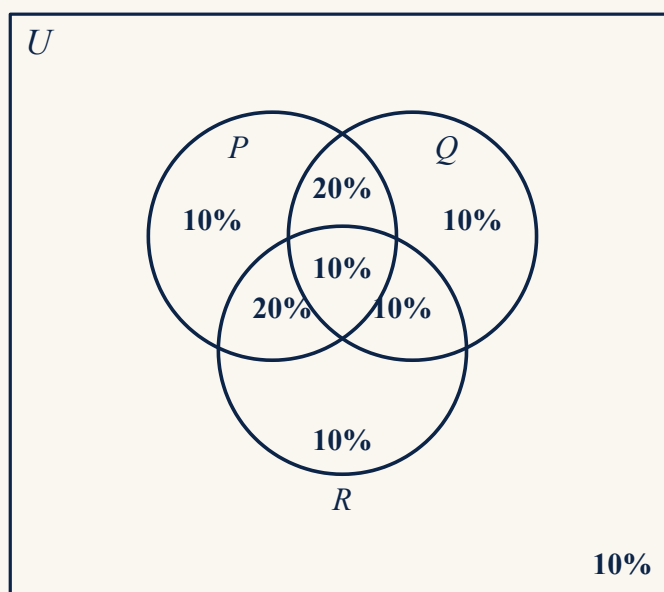
a) Se empieza por el centro. Un porcentaje de «P y Q» incluye la parte que también lee R.

- Los tres: 10%.
- Exactamente dos: P y Q sin $R = 30 - 10 = 20$; Q y R sin $P = 20 - 10 = 10$; P y R sin $Q = 30 - 10 = 20$.
- Solo $P = 60 - 20 - 20 - 10 = 10$; solo $Q = 50 - 20 - 10 - 10 = 10$; solo $R = 50 - 10 - 20 - 10 = 10$.
- Suma de los círculos: $10 + 10 + 10 + 20 + 10 + 20 + 10 = 90$, luego fuera quedan $100 - 90 = 10\%$.

b) Exactamente dos: $20 + 10 + 20 = 50\%$.

c) Al menos dos: exactamente dos más las tres: $50 + 10 = 60\%$.

d) Ninguna: la región exterior, 10%.



Resultado: a) diagrama de arriba b) Leen exactamente 2 revistas el 50% c) Leen al menos 2 revistas el 60%
d) No leen ninguna el 10%

EJERCICIO 22

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2003

Los conjuntos U , P , R y S se definen como sigue:

$$U = \{\text{todos los cuadriláteros}\}$$

$$P = \{\text{todos los paralelogramos}\}$$

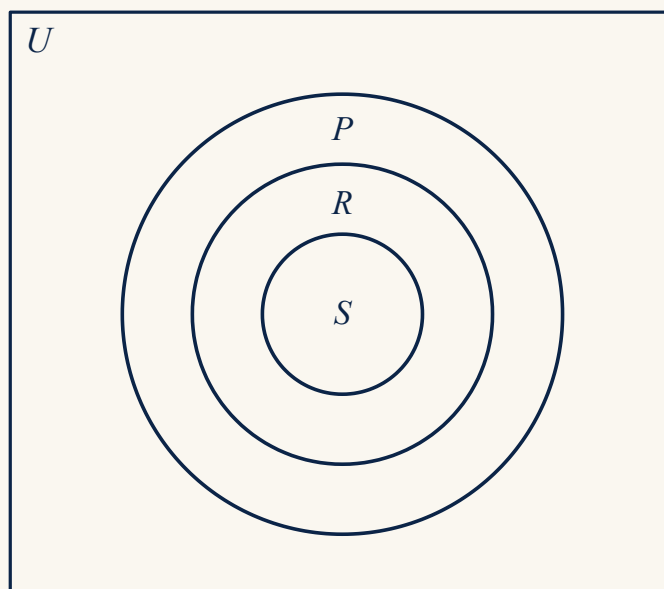
$$R = \{\text{todos los rectángulos}\}$$

$$S = \{\text{todos los cuadrados}\}$$

- a) Trace un diagrama de Venn que muestre las relaciones entre los conjuntos anteriores.
- b) Trace un diagrama de Venn aparte para cada uno de los ejemplos que siguen. Indique, usando sombreado, cada uno de los siguientes:
- (i) $(P \cup S)'$
- (ii) $(R \cup S) \cap P$

a)

1. Todo cuadrado es un rectángulo (4 ángulos rectos) y, además, tiene los lados opuestos paralelos: $S \subset R$.
2. Todo rectángulo es un paralelogramo (lados opuestos paralelos): $R \subset P$.
3. Todo paralelogramo es un cuadrilátero: $P \subset U$.
4. Por tanto los conjuntos están anidados: $S \subset R \subset P \subset U$. Se dibuja un rectángulo U y dentro tres círculos concéntricos: el exterior es P , el intermedio R y el interior S .

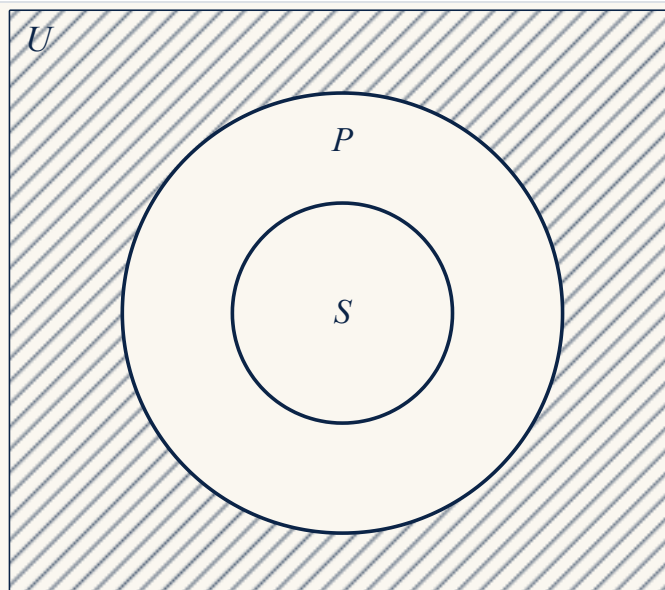


Resultado: diagrama con $S \subset R \subset P \subset U$ (círculos concéntricos, P el mayor y S el menor).

b)

(i) $(P \cup S)'$

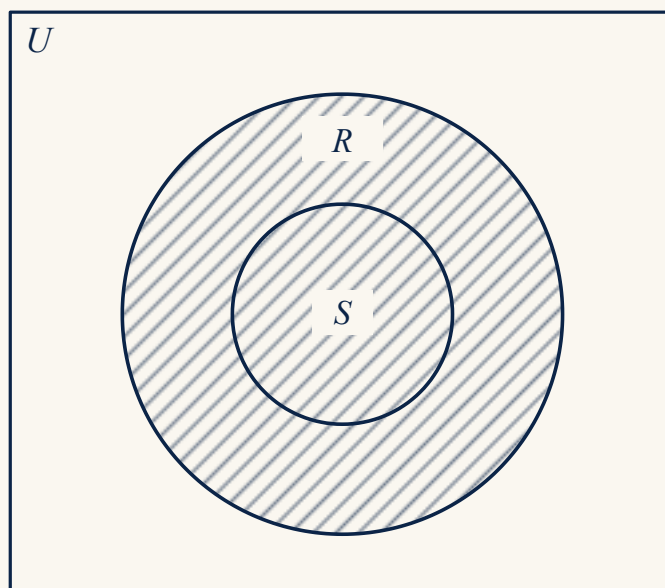
1. Como $S \subset P$, la unión $P \cup S$ es simplemente P .
2. El complementario $(P \cup S)' = P'$ son los elementos de U que no están en P .
3. Se dibujan dos círculos concéntricos (P exterior y S interior) y se sombrea toda la región de U situada fuera del círculo P .



Resultado: se sombrea todo lo que queda fuera de P .

(ii) $(R \cup S) \cap P$

1. Como $S \subset R$, se tiene $R \cup S = R$.
2. Como $R \subset P$, la intersección $R \cap P = R$ (la parte común de R y P es todo R).
3. Se dibujan dos círculos concéntricos (R exterior y S interior) y se sombrea todo el interior de R , incluido S . Lo de fuera de R queda sin sombreado.



Resultado: se sombrea todo el interior de R , incluido S .

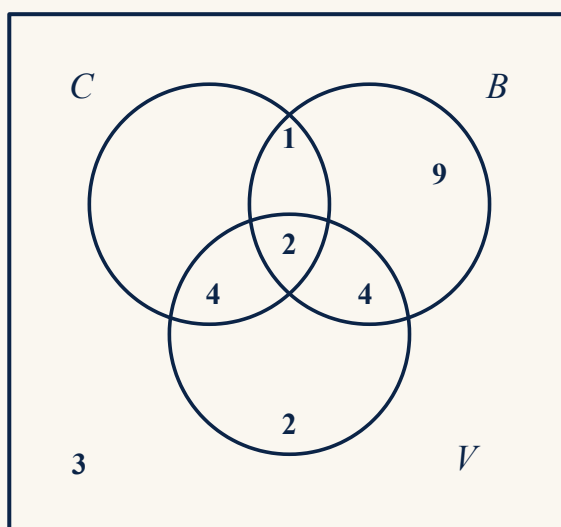
EJERCICIO 23

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2000

- (i) Se encuesta a un grupo de 30 niños para averiguar cuál de los tres deportes cricket (C), baloncesto (B) o voleibol (V) juegan. Los resultados son:
- 3 niños no practican ninguno de estos deportes
 - 2 niños juegan los tres deportes
 - 6 juegan voleibol y baloncesto
 - 3 juegan al cricket y baloncesto
 - 6 juegan al cricket y al voleibol
 - 16 juegan baloncesto
 - 12 juegan voleibol.
- a) Dibuje un diagrama de Venn para ilustrar la relación entre los tres deportes jugados.
- b) En su diagrama de Venn, indique el número de niños que pertenecen a cada región.
- c) ¿Cuántos niños juegan solo al cricket?

1. Se dibujan tres círculos que se solapan, C , B y V , dentro de un rectángulo (los 30 niños). Se rellena de dentro hacia fuera.
2. **Los tres deportes:** $C \cap B \cap V = 2$.
3. **Exactamente dos deportes** (a cada intersección de dos conjuntos se le resta la región central de 2):
 - $B \cap V$ sin C : $6 - 2 = 4$.
 - $C \cap B$ sin V : $3 - 2 = 1$.
 - $C \cap V$ sin B : $6 - 2 = 4$.
4. **Un solo deporte:**
 - Solo B : $16 - (4 + 1 + 2) = 9$.
 - Solo V : $12 - (4 + 4 + 2) = 2$.
5. **Fuera de los círculos:** 3 niños no practican ninguno, así que entre los círculos hay $30 - 3 = 27$ niños.
6. **Solo cricket:** $27 - (9 + 2 + 4 + 1 + 4 + 2) = 27 - 22 = 5$.



Resultado: a) y b) diagrama con regiones: solo C 5; $C \cap B$ sin V 1; solo B 9; los tres 2; $C \cap V$ sin B 4; $B \cap V$ sin C 4; solo V 2; fuera 3. c) Juegan sólo al cricket = 5 niños.

EJERCICIO 24

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2019

Considere los siguientes conjuntos: El conjunto universal U consta de todos los números enteros positivos menores de 15; A es el conjunto de todos los números que son múltiplos de 3; B es el conjunto de todos los números pares.

- Escriba los elementos que pertenecen a $A \cap B$.
- Escriba
 - los elementos que pertenecen a $A \cap B'$;
 - $n(A \cap B')$.

1. Universo: $U = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$.

2. Múltiplos de 3: $A = \{3, 6, 9, 12\}$. Pares: $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.

a) $A \cap B$ son los elementos que están en A y en B : múltiplos de 3 que son pares, $\{6, 12\}$.

b)

1. B' son los elementos de U que no son pares, es decir, los impares: $B' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$.

2. (i) $A \cap B'$: los elementos de A que son impares, $\{3, 9\}$.

3. (ii) $n(A \cap B')$ es el número de elementos: 2.

Resultado: a) $A \cap B = \{6, 12\}$ b) i) $A \cap B' = \{3, 9\}$ ii) $n(A \cap B') = 2$

EJERCICIO 25

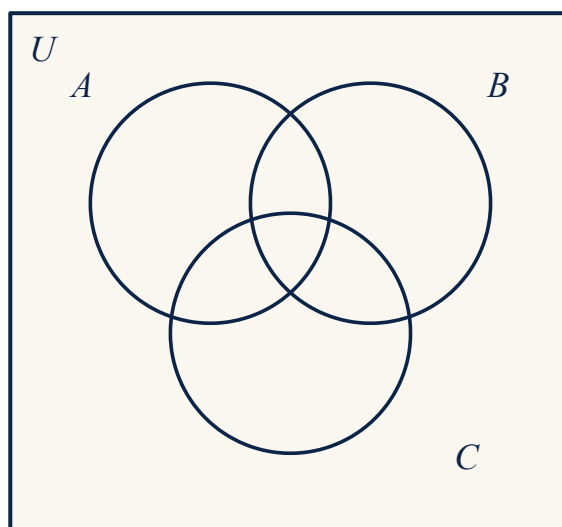
★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2013

U es el conjunto de números enteros positivos menores o iguales que 10. A , B y C son subconjuntos de U .

$A = \{\text{enteros pares}\}$ $B = \{\text{múltiplos de 3}\}$ $C = \{6, 7, 8, 9\}$.

- Enumere los elementos de A .
- Enumere los elementos de B .
- Complete el siguiente diagrama de Venn, incluyendo todos los elementos de U .

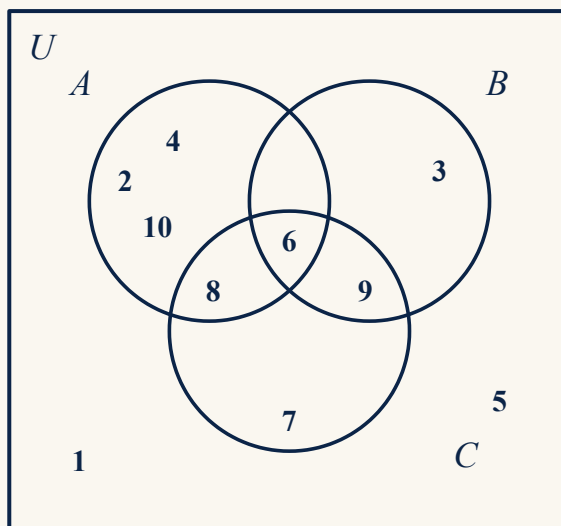


a) Los enteros pares entre 1 y 10: $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

b) Los múltiplos de 3 hasta 10: $B = \{3, 6, 9\}$.

c) Se rellena el diagrama de dentro hacia fuera, mirando para cada elemento de $U = \{1, \dots, 10\}$ en qué conjuntos está:

1. Los tres a la vez ($A \cap B \cap C$): el 6 está en A , en B y en C .
2. $A \cap C$ sin B : el 8 (par, está en C , no es múltiplo de 3).
3. $B \cap C$ sin A : el 9 (múltiplo de 3, está en C , es impar).
4. $A \cap B$ sin C : ninguno (el único común a A y B es el 6, que ya está en C).
5. Solo A : 2, 4, 10. Solo B : 3. Solo C : 7.
6. Fuera de los tres círculos (dentro de U): los que faltan, 1 y 5.
7. Comprobación: $3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 10$ elementos, todos los de U .



Resultado: a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ b) $B = \{3, 6, 9\}$ c) diagrama con: solo A $\{2, 4, 10\}$, solo B $\{3\}$, solo C $\{7\}$, $A \cap B \cap C = \{6\}$, $A \cap C$ sin B $\{8\}$, $B \cap C$ sin A $\{9\}$, fuera $\{1, 5\}$.

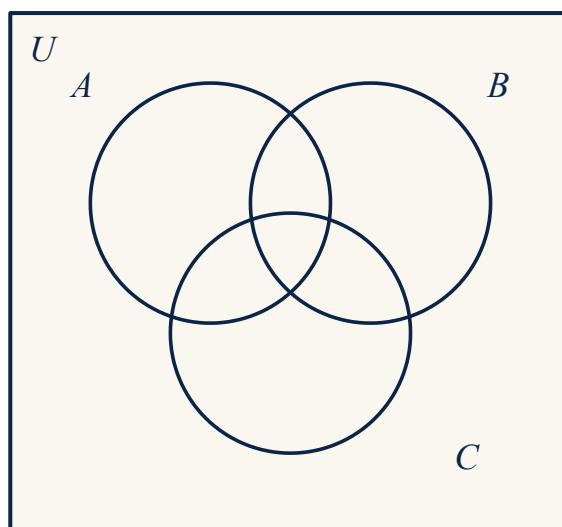
EJERCICIO 26

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2019

Sea U (conjunto universal) el conjunto de todos los números enteros x tales que $1 \leq x < 11$. A , B y C son subconjuntos de U . $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ $B = \{2, 3, 5, 7\}$ $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

- a) Escriba $n(B)$.
- b) Complete el siguiente diagrama de Venn utilizando todos los elementos de U .

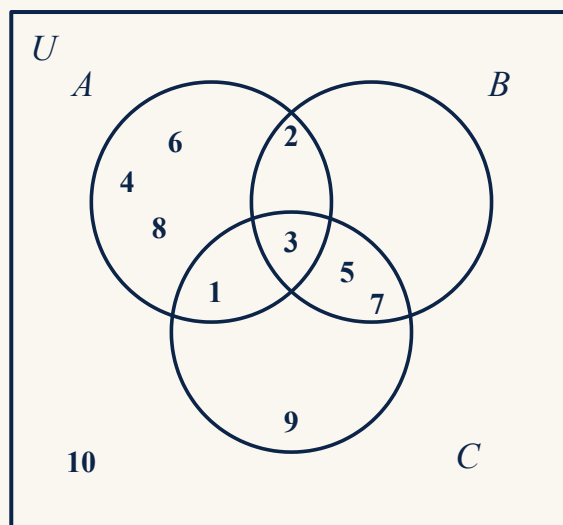


- c) Escriba un elemento que pertenezca a $(A \cup B)' \cap C$.

a) $B = \{2, 3, 5, 7\}$ tiene 4 elementos: $n(B) = 4$.

b) Universo: $U = \{1, 2, \dots, 10\}$. Para cada elemento se mira en qué conjuntos está:

1. $A \cap B \cap C$: está en los tres solo el 3.
2. $A \cap B$ sin C : el 2.
3. $A \cap C$ sin B : el 1.
4. $B \cap C$ sin A : el 5 y el 7.
5. Solo A : 4, 6, 8. Solo B : ninguno. Solo C : 9.
6. Fuera de los tres: el 10.
7. Comprobación: A tiene $3 + 1 + 1 + 1 = 6$ elementos, B tiene $1 + 1 + 2 = 4$ y C tiene $1 + 1 + 2 + 1 = 5$, como en el enunciado.



c)

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, así que $(A \cup B)' = \{9, 10\}$ (lo que queda fuera de A y B).
2. Se intersecta con $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$: de $\{9, 10\}$ solo el 9 está en C.

Resultado: a) $n(B) = 4$ b) diagrama con: solo A $\{4, 6, 8\}$, $A \cap B$ sin C $\{2\}$, los tres $\{3\}$, $A \cap C$ sin B $\{1\}$, $B \cap C$ sin A $\{5, 7\}$, solo C $\{9\}$, fuera $\{10\}$ c) 9

EJERCICIO 27

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2007

B y C son subconjuntos de un conjunto universal U, tal que $U = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x < 10\}$ $B = \{\text{números primos} < 10\}$ $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 < x \leq 6\}$.

a) Enumere los miembros de los siguientes conjuntos

- (i) B
- (ii) $C \cap B$
- (iii) $B \cup C'$

1. Universo: $U = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

(i) Números primos menores que 10 (el 1 no es primo): $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

(ii) Primero C: enteros con $1 < x \leq 6$, es decir $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. $C \cap B$ son los elementos comunes: $\{2, 3, 5\}$.

(iii)

1. C' son los elementos de U que no están en C: $C' = \{0, 1, 7, 8, 9\}$.

2. $B \cup C'$ reúne todos los elementos de ambos conjuntos, sin repetir: $\{2, 3, 5, 7\} \cup \{0, 1, 7, 8, 9\} = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$.

Resultado: i) $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ii) $C \cap B = \{2, 3, 5\}$ iii) $B \cup C' = \{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$

EJERCICIO 28

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

El conjunto universal U es el conjunto de números enteros del 1 al 20 inclusive. A y B son subconjuntos de U donde: A es el conjunto de números pares entre 7 y 17. B es el conjunto de múltiplos de 3. Enumere los elementos de los siguientes conjuntos:

- a) A ,
- b) B ,
- c) $A \cup B$,
- d) $A \cap B'$.

El conjunto universal es $U = \{1, 2, \dots, 20\}$.

- a) «Pares entre 7 y 17»: los pares mayores que 7 y menores que 17 son 8, 10, 12, 14 y 16.
- b) Múltiplos de 3 hasta 20: $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 6 = 18$ (el siguiente, 21, se sale de U).
- c) $A \cup B$ reúne los elementos que están en A o en B (o en ambos), sin repetir el 12, que está en los dos: se ordenan todos de menor a mayor.
- d) B' son los elementos de U que no son múltiplos de 3. $A \cap B'$ son los elementos de A que no están en B : de $\{8, 10, 12, 14, 16\}$ se quita el 12 (que sí es múltiplo de 3).

Resultado: a) $A = \{8, 10, 12, 14, 16\}$; b) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$; c) $A \cup B = \{3, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$; d) $A \cap B' = \{8, 10, 14, 16\}$.

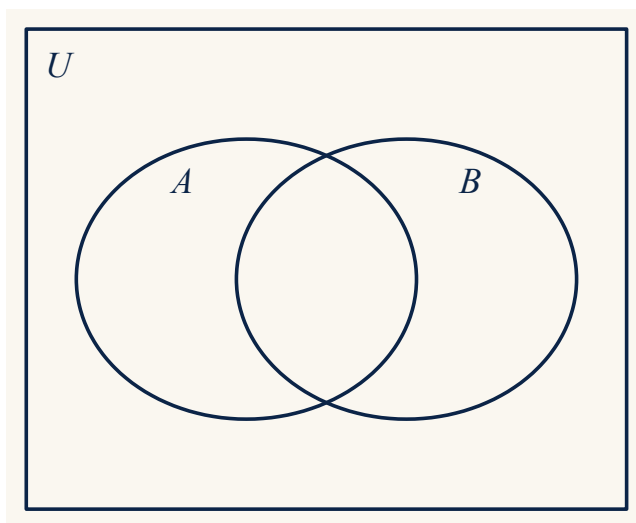
EJERCICIO 29

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2013

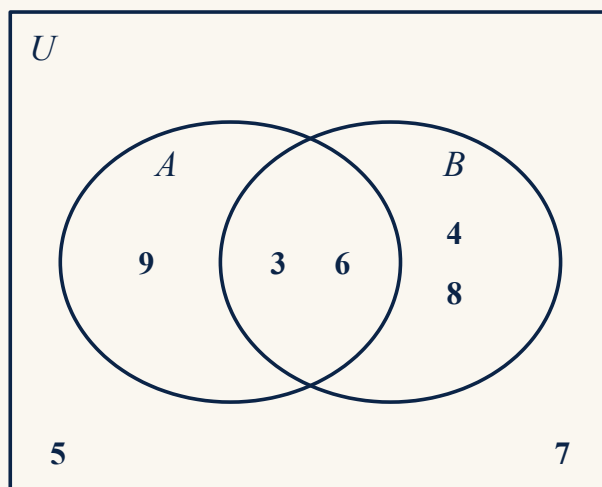
$U = \{x \mid x \text{ en un entero, } 2 < x < 10\}$. A y B son subconjuntos de U tales que $A = \{\text{múltiplos de } 3\}$, $B = \{\text{factores de } 24\}$.

- a) Enumere los elementos de
- U ;
 - B .
- b) Escriba los elementos de U en el diagrama de Venn.



- c) Escriba $n(A \cap B)$.

- a) (i) U son los enteros x con $2 < x < 10$ (desigualdades estrictas, no entran ni el 2 ni el 10): $U = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- (ii) Los factores de 24 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Como B es subconjunto de U , solo cuentan los que están en U : $B = \{3, 4, 6, 8\}$.
- b) Primero se escribe A (múltiplos de 3 en U): $A = \{3, 6, 9\}$. Después se reparte cada elemento de U en una región:
- 3 y 6 están en A y en B : van en la zona común $A \cap B$.
 - 9 está en A pero no en B : solo en A .
 - 4 y 8 están en B pero no en A : solo en B .
 - 5 y 7 no están en ninguno: dentro del rectángulo U pero fuera de las dos elipses.



c) $A \cap B = \{3, 6\}$ tiene 2 elementos.

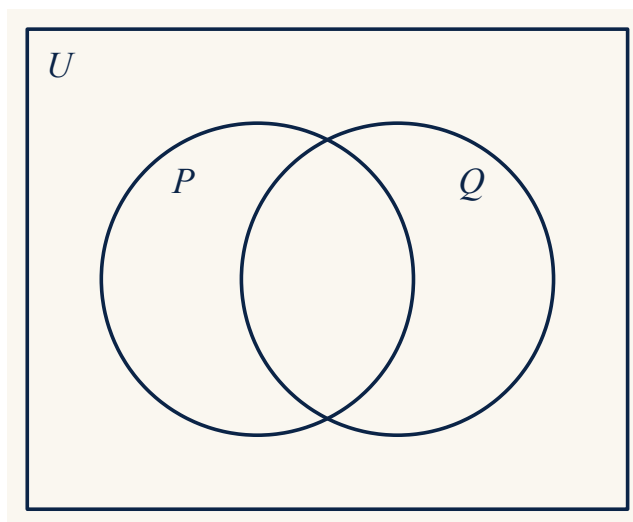
Resultado: a) i) $U = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, ii) $B = \{3, 4, 6, 8\}$; b) diagrama de arriba; c) $n(A \cap B) = 2$.

EJERCICIO 30

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2010

Los conjuntos P , Q y U se definen como $U = \{\text{Números reales}\}$, $P = \{\text{Números positivos}\}$ y $Q = \{\text{Números racionales}\}$.

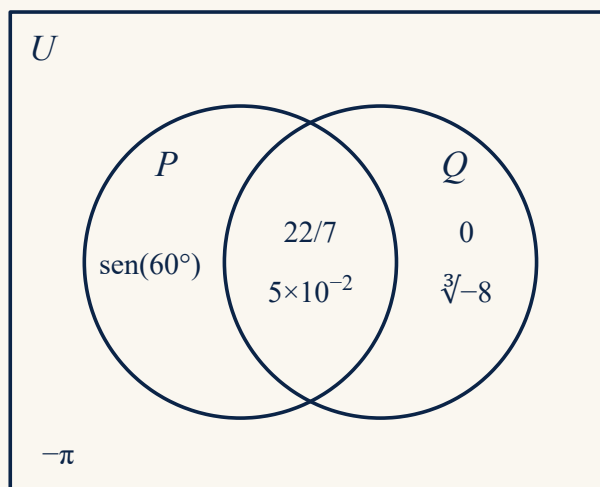


Anote en la región correcta en el diagrama de Venn los números

$$\frac{22}{7}, \quad 5 \times 10^{-2}, \quad \sin(60^\circ), \quad 0, \quad \sqrt[3]{-8}, \quad -\pi$$

Cada número se coloca según dos preguntas: ¿es positivo? (pertenece a P) y ¿es racional? (pertenece a Q). Todos son reales, así que están dentro de U .

1. $\frac{22}{7}$: positivo y es una fracción, luego está en $P \cap Q$.
2. $5 \times 10^{-2} = 0,05 = \frac{5}{100}$: positivo y racional, en $P \cap Q$.
3. $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$: positivo, pero irracional (por la $\sqrt{3}$): solo en P .
4. 0: no es positivo (no es mayor que 0) pero sí es racional ($\frac{0}{1}$): solo en Q .
5. $\sqrt[3]{-8} = -2$: negativo y entero, luego racional: solo en Q .
6. $-\pi$: negativo e irracional: en U pero fuera de P y de Q .

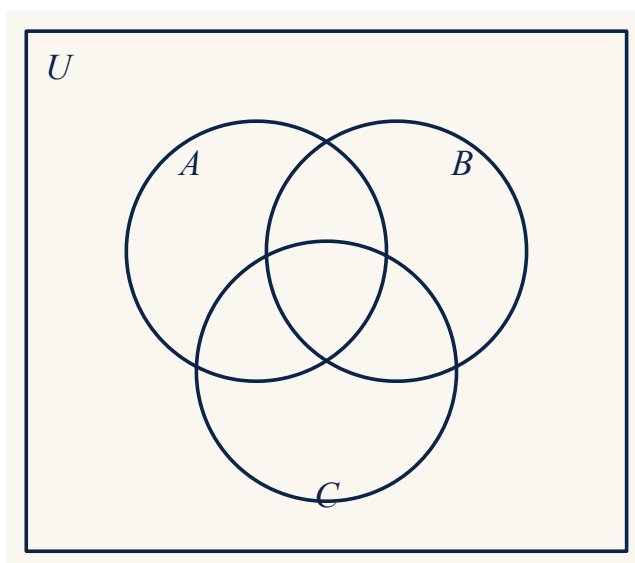


Resultado: $P \cap Q$: $\frac{22}{7}$ y 5×10^{-2} ; solo P : $\text{sen } 60^\circ$; solo Q : 0 y $\sqrt[3]{-8}$; fuera de ambos: $-\pi$.

EJERCICIO 31 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2011

U es el conjunto de todos los números enteros positivos menores o iguales que 12. A , B y C son subconjuntos de U . $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ $B = \{\text{números enteros impares}\}$ $C = \{5, 6, 8\}$

- Escriba el número de elementos en $A \cap C$.
- Enumere los elementos de B .
- Complete el siguiente diagrama de Venn con todos los elementos de U .

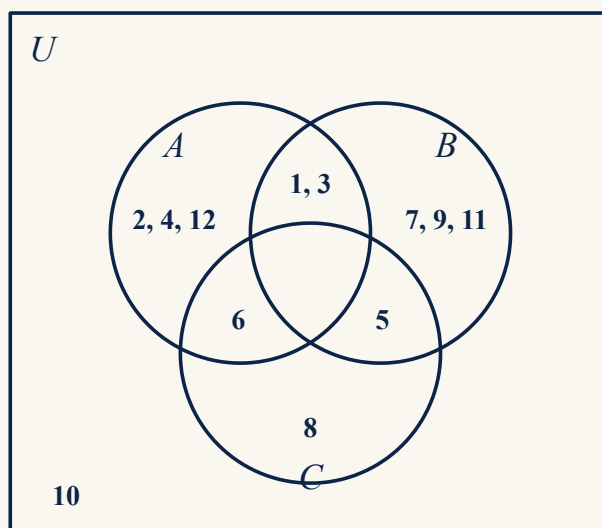


$U = \{1, 2, \dots, 12\}$.

- $A \cap C$ son los elementos comunes: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y $C = \{5, 6, 8\}$ solo comparten el 6. Por tanto $n(A \cap C) = 1$.
- Los impares de U son $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$.
- Se coloca cada elemento de U mirando en qué conjuntos está:
 - 1 y 3: en A y en B , no en C .
 - 2, 4 y 12: solo en A .
 - 5: en B y en C , no en A .

- 6: en A y en C , no en B (es par).
- 7, 9 y 11: solo en B .
- 8: solo en C .
- 10: no está en ninguno, va fuera de los tres círculos.

La zona $A \cap B \cap C$ queda vacía (ningún elemento está en los tres).



Resultado: a) $n(A \cap C) = 1$; b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$; c) diagrama de arriba.

EJERCICIO 32 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

Considere el conjunto universal $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 13\}$, y los subconjuntos $A = \{\text{múltiplos de } 3\}$ y $B = \{4, 6, 12\}$.

- a) Enumere los elementos pertenecientes a los siguientes conjuntos. (i) A (ii) $A \cap B'$
- b) Escriba un elemento de $(A \cup B)'$.
- c) Uno de los enunciados de la siguiente tabla es falso. Indique con una X el enunciado que es falso. Dé una respuesta razonada.

$$n(A \cup B) = 4$$

$$15 \in A'$$

$$A \subset A \cup B$$

Primero se escribe el universo: $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 13\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

- a) (i) Los múltiplos de 3 que están en U son $A = \{6, 9, 12\}$ (el 3 no entra porque $3 < x$).
- (ii) B' son los elementos de U que no están en $B = \{4, 6, 12\}$. $A \cap B'$ son los de A que no están en B : de $\{6, 9, 12\}$ se quitan 6 y 12, y queda $\{9\}$.
- b) $A \cup B = \{4, 6, 9, 12\}$. Su complemento son los elementos de U que no están ahí: $(A \cup B)' = \{5, 7, 8, 10, 11\}$. Un elemento válido es, por ejemplo, el 5.
- c) Se comprueba cada enunciado:
- $n(A \cup B) = 4$: $A \cup B = \{4, 6, 9, 12\}$ tiene 4 elementos. Verdadero.
 - $15 \in A'$: A' está formado por elementos de U que no están en A , y $15 \notin U$ (porque $15 > 13$). Por tanto $15 \notin A'$. Falso.
 - $A \subset A \cup B$: todo elemento de A está en la unión. Verdadero.

$$n(A \cup B) = 4$$

$$15 \in A' \quad \text{X}$$

$$A \subset A \cup B$$

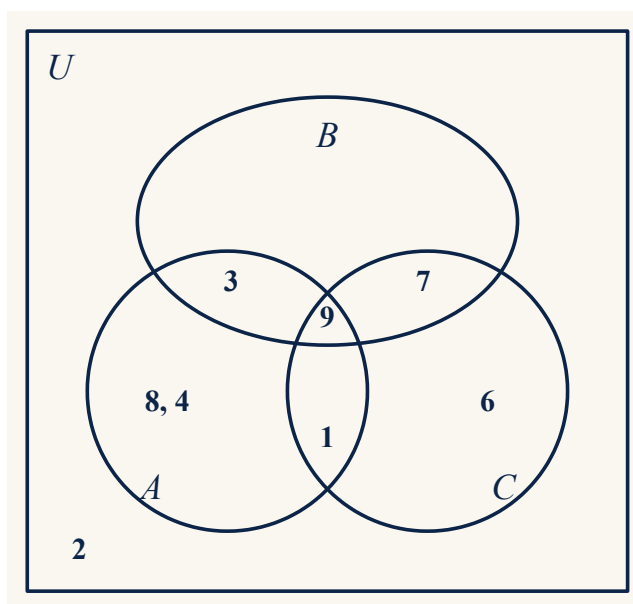
Resultado: a) (i) $A = \{6, 9, 12\}$, (ii) $A \cap B' = \{9\}$; b) $(A \cup B)' = \{5, 7, 8, 10, 11\}$ (por ejemplo, el 5); c) es falso « $15 \in A'$ », porque 15 no pertenece a U .

EJERCICIO 33

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2003

En el diagrama de Venn a continuación, A , B y C son subconjuntos de un conjunto universal $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$



Enumere los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

- $A \cup B$
- $A \cap B \cap C$
- $(A' \cap C) \cup B$

Primero leemos del diagrama los elementos de cada conjunto (cada conjunto incluye todas las regiones que están dentro de su curva).

- A contiene: solo en A (8 y 4), en $A \cap B$ fuera de C (3), en $A \cap B \cap C$ (9) y en $A \cap C$ fuera de B (1). Así $A = \{1, 3, 4, 8, 9\}$.
- B contiene: $A \cap B$ fuera de C (3), $B \cap C$ fuera de A (7) y $A \cap B \cap C$ (9). Así $B = \{3, 7, 9\}$.
- C contiene: $A \cap C$ fuera de B (1), $B \cap C$ fuera de A (7), $A \cap B \cap C$ (9) y solo en C (6). Así $C = \{1, 6, 7, 9\}$.

a) $A \cup B$ reúne los elementos que están en A , en B o en ambos, sin repetir: $\{1, 3, 4, 8, 9\} \cup \{3, 7, 9\} = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$.

b) $A \cap B \cap C$ son los elementos comunes a los tres conjuntos, es decir, la región central: solo está el 9.

c) Paso a paso:

- A' son los elementos de U que no están en A : $A' = \{2, 6, 7\}$.
- $A' \cap C$: elementos de A' que también están en $C = \{1, 6, 7, 9\}$, es decir $\{6, 7\}$.
- Unimos con $B = \{3, 7, 9\}$: $\{6, 7\} \cup \{3, 7, 9\} = \{3, 6, 7, 9\}$.

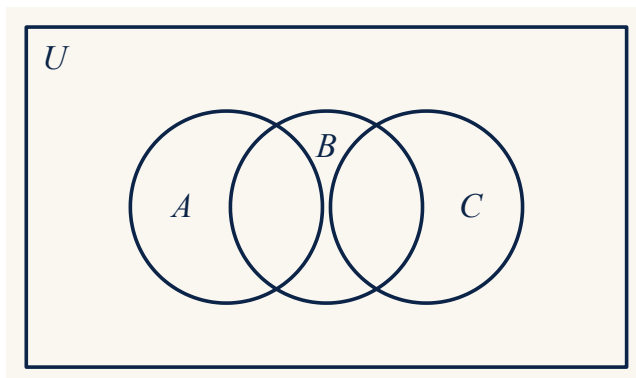
Resultado: a) $A \cup B = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$; b) $A \cap B \cap C = \{9\}$; c) $(A' \cap C) \cup B = \{3, 6, 7, 9\}$

EJERCICIO 34

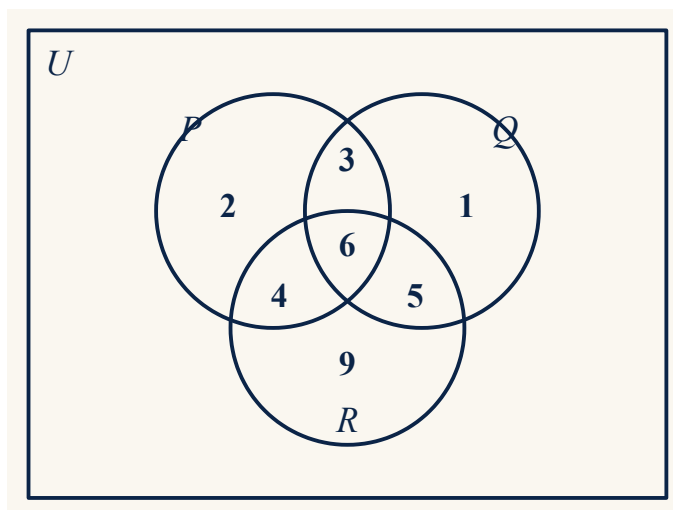
★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2008

a) Sombrear $(A \cup B) \cap C'$ en el siguiente diagrama.



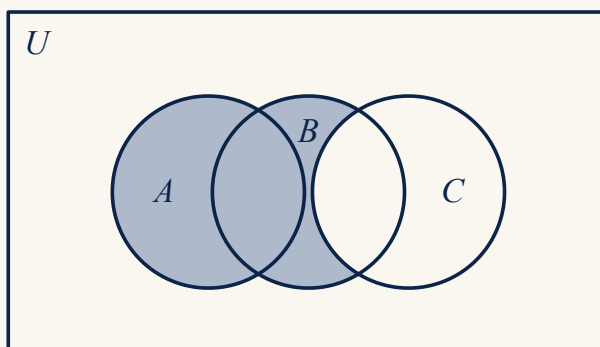
b) En el siguiente diagrama de Venn, se da el número de elementos en cada región. Encuentre $n((P \cap Q) \cup R)$.



c) U es el conjunto de números enteros positivos, $\mathbb{Z}^+$. E es el conjunto de números pares. M es el conjunto de múltiplos de 3. (i) Enumere los primeros seis elementos del conjunto M . (ii) Enumere los primeros seis elementos del conjunto $E' \cap M$.

a) Razonamos por regiones:

1. $A \cup B$ es todo lo que está dentro de A o de B : los dos círculos completos.
2. C' es todo lo que queda fuera de C .
3. La intersección $(A \cup B) \cap C'$ pide los puntos que están a la vez en $A \cup B$ y fuera de C . Por tanto sombreamos A y B enteros, **excepto** la parte de B que se solapa con C (la intersección $B \cap C$ queda sin sombrear). El círculo C queda sin sombrear.



b) Contamos los elementos de cada parte:

1. $P \cap Q$ comprende la región solo $P \cap Q$ (3) y la central $P \cap Q \cap R$ (6): $n(P \cap Q) = 3 + 6 = 9$.
2. R comprende: solo R (9), $P \cap R$ fuera de Q (4), $Q \cap R$ fuera de P (5) y la central (6): $n(R) = 9 + 4 + 5 + 6 = 24$.
3. En $(P \cap Q) \cup R$ la región central ya está contada dentro de R ; solo añadimos la región $P \cap Q$ fuera de R (3):

$$n((P \cap Q) \cup R) = 24 + 3 = 27.$$

c)

- (i) M son los múltiplos de 3 en los enteros positivos: 3, 6, 9, 12, 15, 18.
- (ii) E' es el complementario de los pares, es decir, los impares. $E' \cap M$ son los múltiplos de 3 que además son impares. De la lista de múltiplos de 3 (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, ...) nos quedamos con los impares: 3, 9, 15, 21, 27, 33.

Resultado: a) ver el diagrama; b) $n((P \cap Q) \cup R) = 27$; c) (i) $M = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\}$; (ii) $E' \cap M = \{3, 9, 15, 21, 27, 33, \dots\}$

EJERCICIO 35

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

En la ciudad canadiense de Ottawa: El 97% de la población habla inglés, 38% de la población habla francés, El 36% de la población habla inglés y francés.

- a) Calcule el porcentaje de la población de Ottawa que habla inglés pero no Francés. La población total de Ottawa es 985000.
- b) Calcule el número de personas en Ottawa que hablan inglés y francés.
- c) Escriba su respuesta al apartado (b) en la forma $a \times 10^k$ donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. El 97 % habla inglés, y de ellos el 36 % habla también francés. Los que hablan inglés pero no francés son los que hablan inglés quitando la intersección:

$$97\% - 36\% = 61\%$$

b)

1. El 36 % de la población habla inglés y francés:

$$0,36 \times 985\,000 = 354\,600$$

2. Redondeando a 3 cifras significativas: $\approx 355\,000$ personas.

c)

1. Pasamos a notación científica: $354\,600 = 3,546 \times 10^5 \approx 3,55 \times 10^5$ (3 cifras significativas, como en el apartado anterior).

Resultado: a) 61 % b) $\approx 355\,000$ c) $3,55 \times 10^5$

EJERCICIO 36

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2012

Beartown tiene tres periódicos locales: The Art Journal, The Beartown News, y The Currier. Una encuesta muestra que El 32% de la población de la ciudad lee The Art Journal, 46% leyó The Beartown News, 54% leyó The Currier, El 3% solo lee The Art Journal y The Beartown News, El 8% solo lee The Art Journal y The Currier, El 12% lee solo The Beartown News y The Currier, y El 5% de la población lee los tres periódicos.

- Dibuje un diagrama de Venn para representar esta información. Etiquete A el conjunto que representa a los lectores de The Art Journal, B el conjunto que representa a The Beartown News lectores, y C el conjunto que representa a los lectores de The Currier.
- Encuentre el porcentaje de la población que no lee ninguno de los tres periódicos.
- Encuentre el porcentaje de la población que lee exactamente un periódico.
- Encuentre el porcentaje de la población que lee The Art Journal o The Beartown News pero no The Currier. Una estación de radio local afirma que el 83% de la población lee The Beartown News o El Currier.
- Utilice su diagrama de Venn para decidir si el enunciado es verdadero. Justifique su respuesta. La población de Beartown es de 120.000 habitantes. La estación de radio local afirmó que 34.000 de los ciudadanos de la ciudad leen al menos dos de los periódicos locales.
- Encuentre el porcentaje de error en esta afirmación.

a) Se rellena el diagrama de dentro hacia fuera: primero la región central (los tres periódicos) y después las regiones de dos conjuntos, que ya nos dan «solo» esos dos. Por último se calcula lo que falta de cada círculo restando.

- Región $A \cap B \cap C$: 5.
- Regiones de exactamente dos periódicos: $A \cap B \text{ sin } C = 3$, $A \cap C \text{ sin } B = 8$, $B \cap C \text{ sin } A = 12$.
- Solo A : al total de A le quitamos todo lo que ya está dentro de A : $32 - 3 - 8 - 5 = 16$.
- Solo B : $46 - 3 - 12 - 5 = 26$.
- Solo C : $54 - 8 - 12 - 5 = 29$.

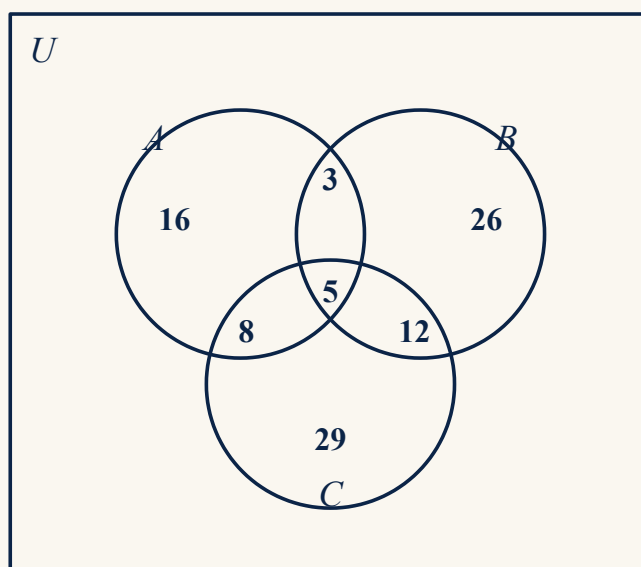
b) 1. La población total es el 100%. Sumamos todas las regiones de los círculos: $16 + 26 + 29 + 3 + 8 + 12 + 5 = 99$. 2. Lo que queda fuera de los tres círculos es $100 - 99 = 1$.

c) Exactamente un periódico = regiones «solo A », «solo B » y «solo C »: $16 + 26 + 29 = 71$.

d) « A o B pero no C » son las regiones de $A \cup B$ que quedan fuera de C : solo A , solo B y $A \cap B \text{ sin } C$. Así: $16 + 26 + 3 = 45$.

e) 1. Sumamos todas las regiones que están dentro de B o de C (es decir, todo salvo «solo A » y el exterior): $26 + 29 + 3 + 8 + 12 + 5 = 83$. 2. Se obtiene el 83%, que coincide con lo que dice la emisora. Equivalentemente, $100 - 16 - 1 = 83$. El enunciado es verdadero.

f) 1. Leen al menos dos periódicos las regiones de dos y de tres conjuntos: $3 + 8 + 12 + 5 = 28\%$. 2. Valor exacto: 28% de $120\,000 = 0,28 \cdot 120\,000 = 33\,600$ personas. 3. Valor afirmado: 34 000. Error porcentual = $\frac{|\text{valor aproximado} - \text{valor exacto}|}{\text{valor exacto}} \cdot 100 = \frac{|34\,000 - 33\,600|}{33\,600} \cdot 100 = \frac{400}{33\,600} \cdot 100 \approx 1,19\%$.



Resultado: a) diagrama de arriba b) 1% c) 71% d) 45% e) Sí es cierto f) 1,19%

Conjuntos numéricos

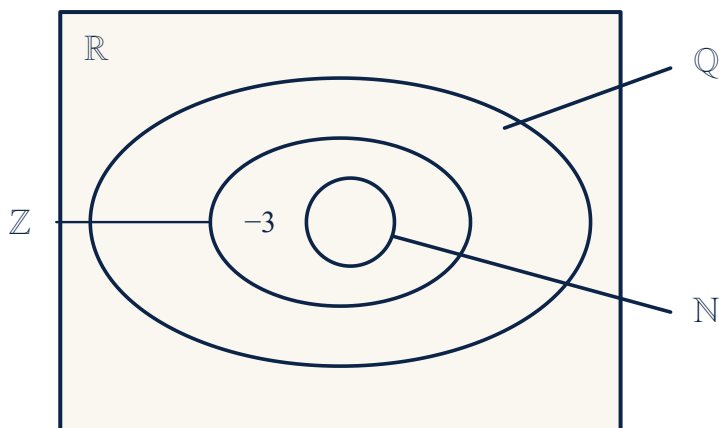
EJERCICIO 37

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2014

El siguiente diagrama de Venn muestra la relación entre los conjuntos de números $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$.

El número -3 pertenece a los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pero no a $\mathbb{N}$, y está situado en la zona adecuada del diagrama de Venn a modo de ejemplo.

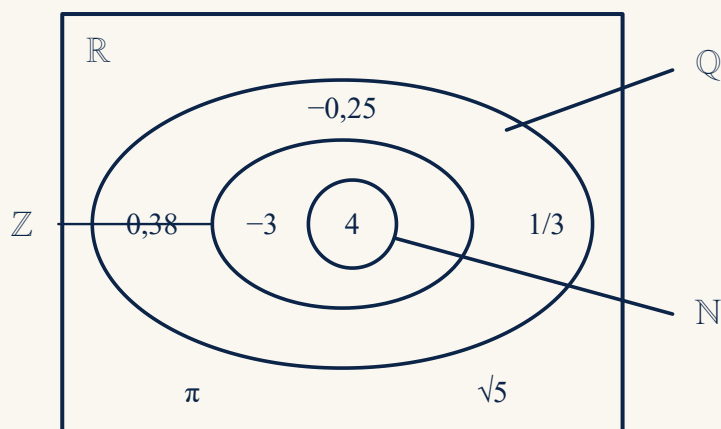


Escriba cada uno de los siguientes números en el lugar apropiado del diagrama de Venn.

- a) 4
- b) $\frac{1}{3}$
- c) π
- d) 0,38
- e) $\sqrt{5}$
- f) $-0,25$

Los conjuntos están anidados: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Cada número se coloca en el conjunto **más pequeño** al que pertenece.

1. 4 es entero positivo: va en $\mathbb{N}$.
2. $\frac{1}{3}$ es una fracción, no es entero: va en $\mathbb{Q}$, fuera de $\mathbb{Z}$.
3. π tiene infinitos decimales sin periodo: es irracional, va en $\mathbb{R}$, fuera de $\mathbb{Q}$.
4. $0,38 = \frac{38}{100}$: decimal exacto, racional, va en $\mathbb{Q}$ fuera de $\mathbb{Z}$.
5. $\sqrt{5}$ no es raíz exacta: es irracional, va en $\mathbb{R}$ fuera de $\mathbb{Q}$.
6. $-0,25 = -\frac{1}{4}$: decimal exacto, racional, va en $\mathbb{Q}$ fuera de $\mathbb{Z}$.



Resultado: $4 \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{3}, 0,38, -0,25 \in \mathbb{Q}$ (fuera de $\mathbb{Z}$); $\pi, \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ (fuera de $\mathbb{Q}$).

EJERCICIO 38

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2018

La siguiente tabla muestra cuatro conjuntos distintos de números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Conjunto Ejemplo de un número perteneciente al conjunto

$\mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

- Complete la segunda columna de la tabla dando un ejemplo de un número que pertenezca a cada conjunto. Josh afirma: "Todos los números enteros son números naturales".
- Escriba si la afirmación de Josh es correcta. Justifique su respuesta.

a) Se elige un número de cada conjunto (vale cualquiera que cumpla la definición):

- $\mathbb{N}$ (naturales: $0, 1, 2, \dots$ o $1, 2, 3, \dots$): 5.
- $\mathbb{Z}$ (enteros, incluyen los negativos): -3 .
- $\mathbb{Q}$ (rationales, cociente de enteros): $\frac{3}{5}$.
- $\mathbb{R}$ (reales; para dar un ejemplo claro se toma un irracional): $\sqrt{2}$.

b) Para refutar una afirmación basta un contraejemplo. -3 es un número entero, pero no es natural (los naturales no tienen signo negativo). Por tanto la afirmación es falsa; lo correcto es lo contrario: todos los naturales son enteros ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

Resultado:

Conjunto Ejemplo de un número perteneciente al conjunto

$\mathbb{N}$

5

$\mathbb{Z}$

-3

$\mathbb{Q}$

$\frac{3}{5}$

$\mathbb{R}$

$\sqrt{2}$

- No es correcta, lo correcto sería al revés. Por ejemplo, -3 es entero pero no es natural.

EJERCICIO 39

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

Considere los números -1 ; 4 ; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$; $0,35$ y -2^2 . Complete la siguiente tabla. En cada casilla, ponga un tic ($\checkmark$) si el número pertenece a ese conjunto de números. Hemos completado la primera fila a modo de ejemplo.

	N	Z	Q	R
-1	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
4				
$\frac{2}{3}$				
$\sqrt{2}$				
$0,35$				
-2^2				

Se simplifica cada número y se marcan todos los conjuntos a los que pertenece (recuerda $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

1. 4 : natural, y por tanto entero, racional y real.
2. $\frac{2}{3}$: fracción no entera, así que es racional y real.
3. $\sqrt{2}$: raíz no exacta, irracional: solo real.
4. $0,35 = \frac{35}{100}$: decimal exacto, racional y real.
5. $-2^2 = -(2^2) = -4$ (el exponente actúa antes que el signo menos): entero negativo, así que es entero, racional y real, pero no natural.

Resultado:

	N	Z	Q	R
-1	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
4	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
$\frac{2}{3}$			$\checkmark$	$\checkmark$
$\sqrt{2}$				$\checkmark$
$0,35$			$\checkmark$	$\checkmark$
-2^2		$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$

EJERCICIO 40

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

Complete la tabla que aparece a continuación, colocando los tics (✓) necesarios para indicar a cuáles de los conjuntos de números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pertenece cada uno de estos números. Hemos completado la primera fila a modo de ejemplo.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
0,8			✓	✓
$\sqrt{14}$				
$\sin 30^\circ$				
4				
-3				
$4,12 \times 10^1$				
$3\frac{1}{3}$				

Para cada número se decide primero cómo es realmente (se simplifica si hace falta) y luego se miran los conjuntos: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ (o $\{1, 2, \dots\}$), $\mathbb{Z}$ enteros, $\mathbb{Q}$ fracciones de enteros y $\mathbb{R}$ todos los reales.

1. $\sqrt{14}$: 14 no es un cuadrado perfecto, así que $\sqrt{14}$ es irracional (decimales infinitos sin periodo). Solo está en $\mathbb{R}$.
2. $\sin 30^\circ$: es un valor exacto conocido, $\sin 30^\circ = 0,5 = \frac{1}{2}$. Es una fracción, pero no un entero: está en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.
3. 4: es natural, y por tanto entero, racional y real ($4 = \frac{4}{1}$). Está en los cuatro conjuntos.
4. -3: es negativo, así que no es natural. Es entero, racional ($-\frac{3}{1}$) y real.
5. $4,12 \times 10^1 = 41,2 = \frac{412}{10}$: tiene decimales finitos, luego es racional pero no entero. Está en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.
6. $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$: es una fracción que no da un entero (decimal periódico $3,\bar{3}$). Está en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{14}$				✓
$\sin 30^\circ$			✓	✓
4	✓	✓	✓	✓
-3		✓	✓	✓
$4,12 \times 10^1$			✓	✓
$3\frac{1}{3}$			✓	✓

Resultado: $\sqrt{14}$: solo $\mathbb{R}$; $\sin 30^\circ$, $4,12 \times 10^1$ y $3\frac{1}{3}$: $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$; 4: los cuatro conjuntos; -3: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ (tabla de arriba).

EJERCICIO 41

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2008

Considere los números 2 ; $\sqrt{3}$; $-\frac{2}{3}$ y los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Complete la tabla siguiente marcando con un tick la casilla correspondiente si el número es un elemento del conjunto, y con una cruz si no lo es.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
(i) 2				
(ii) $\sqrt{3}$				
(iii) $-\frac{2}{3}$				

Se clasifica cada número y se marca ✓ si pertenece al conjunto y X si no.

1. 2 es natural, luego también entero, racional ($\frac{2}{1}$) y real.
2. $\sqrt{3}$ no es un cuadrado perfecto, así que es irracional: solo pertenece a $\mathbb{R}$.
3. $-\frac{2}{3}$ es negativo (no natural) y no es entero, pero es una fracción de enteros: racional y real.

$\mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{R}$

2 ✓ ✓ ✓ ✓

$\sqrt{3}$ X X X ✓

$-\frac{2}{3}$ X X ✓ ✓

Resultado: 2: los cuatro conjuntos; $\sqrt{3}$: solo $\mathbb{R}$; $-\frac{2}{3}$: $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ (tabla de arriba).

EJERCICIO 42

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2013

Considere los números 3, -5 , $\sqrt{7}$, 2^{-3} y 1,75. Complete la tabla que aparece a continuación, colocando los tics (✓) necesarios para indicar a cuáles de los conjuntos de números, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, pertenece cada uno de estos números. Se ha completado la primera fila a modo de ejemplo.

$\mathbb{N} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{R}$

3 ✓ ✓ ✓

-5

$\sqrt{7}$

2^{-3}

1,75

Aquí no hay columna de $\mathbb{Z}$, pero hay que seguir razonando con ella: todo entero es racional.

1. -5 : negativo, no es natural. Es entero y por tanto racional ($-\frac{5}{1}$) y real.
2. $\sqrt{7}$: 7 no es cuadrado perfecto, es irracional: solo $\mathbb{R}$.
3. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$: es una fracción y no es entero, luego es racional y real, no natural.
4. $1,75 = \frac{175}{100} = \frac{7}{4}$: decimal finito, racional y real.

$\mathbb{N} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{R}$

3 ✓ ✓ ✓

-5 ✓ ✓

$\sqrt{7}$ ✓

2^{-3} ✓ ✓

1,75 ✓ ✓

Resultado: -5 , 2^{-3} y 1,75: $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$; $\sqrt{7}$: solo $\mathbb{R}$ (tabla de arriba).

EJERCICIO 43

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2002

Considere los números 5, 0,5, $\sqrt{5}$ y -5 . Rellene la tabla a continuación, mostrando a cuál de los conjuntos de números, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ pertenecen estos números.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$
5		✓	
0,5	X		
$\sqrt{5}$	X		
-5		✓	

- 5 es natural, y por tanto real y racional ($\frac{5}{1}$).
- $0,5 = \frac{1}{2}$: no es natural, es racional y real.
- $\sqrt{5}$: 5 no es cuadrado perfecto, es irracional: real, ni racional ni natural.
- 5: es negativo, no es natural, pero es racional ($-\frac{5}{1}$) y real.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$
5	✓	✓	✓
0,5	X	✓	✓
$\sqrt{5}$	X	✓	X
-5	X	✓	✓

Resultado: 5: $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$; 0,5 y -5 : $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$; $\sqrt{5}$: solo $\mathbb{R}$ (tabla de arriba).

EJERCICIO 44

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2008

Considere los números, $\sqrt{3}$, 6, $2\frac{1}{2}$, π , -5 y los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$. Completa la siguiente tabla colocando una marca en la casilla correspondiente si el número es un elemento del conjunto.

	$\sqrt{3}$	6	$2\frac{1}{2}$	π	-5
$\mathbb{N}$					
$\mathbb{Z}$					
$\mathbb{Q}$					

Se clasifica cada número (se marca con X si pertenece al conjunto):

- $\sqrt{3}$: irracional, no está en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ni $\mathbb{Q}$.
- 6: natural, y por tanto también entero y racional.
- $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$: fracción no entera, solo está en $\mathbb{Q}$.
- π : irracional, en ninguno de los tres.
- 5: entero negativo, está en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Q}$, no en $\mathbb{N}$.

	$\sqrt{3}$	6	$2\frac{1}{2}$	π	-5
$\mathbb{N}$		X			
$\mathbb{Z}$		X			X
$\mathbb{Q}$		X	X		X

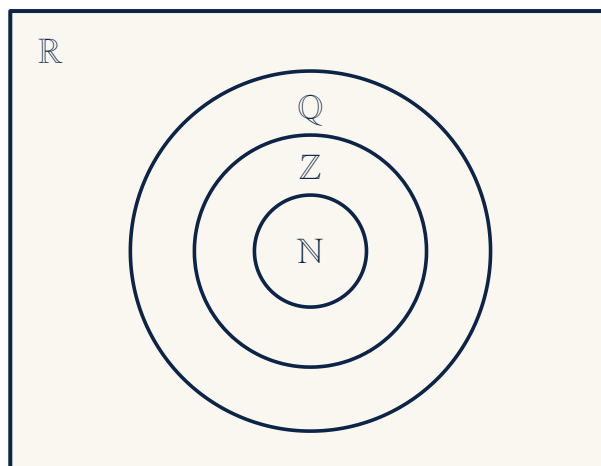
Resultado: $6 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$; $-5 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$; $2\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{3}$ y π en ninguno de los tres (tabla de arriba).

EJERCICIO 45

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2019

- a) Coloque los números 2π , -5 , 3^{-1} y $2^{\frac{3}{2}}$ en la posición correcta en el diagrama de Venn.



- b) En la tabla, indique cuáles de las dos afirmaciones dadas son verdaderas colocando una marca (✓) en la columna de la derecha.

Afirmación Verdadera

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

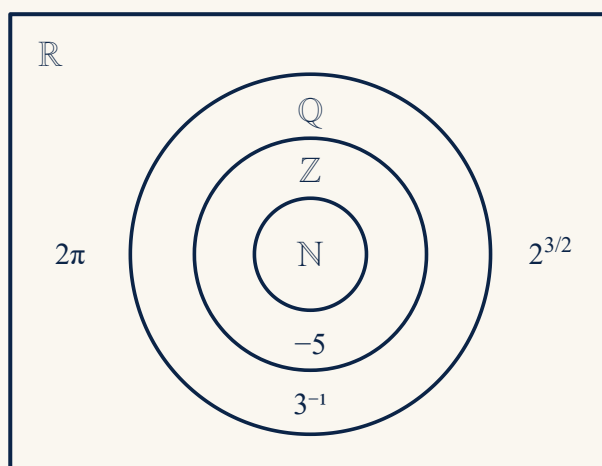
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}'$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{Z}'$$

- a) Se simplifica cada número y se coloca en el conjunto más pequeño al que pertenece.

1. 2π : es un múltiplo no nulo de π , luego irracional. Va en $\mathbb{R}$, fuera de $\mathbb{Q}$.
2. -5 : entero negativo. Va en $\mathbb{Z}$, fuera de $\mathbb{N}$.
3. $3^{-1} = \frac{1}{3}$: fracción que no es entera. Va en $\mathbb{Q}$, fuera de $\mathbb{Z}$.
4. $2^{3/2} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$: la raíz no es exacta, es irracional. Va en $\mathbb{R}$, fuera de $\mathbb{Q}$.



- b) Se analiza cada afirmación:

1. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$: todo entero se escribe como fracción ($n = \frac{n}{1}$). **Verdadera.**
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}'$: $\mathbb{Q}'$ son los irracionales, y los naturales son racionales. **Falsa.**

3. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$: como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, lo común es todo $\mathbb{N}$. **Verdadera.**

4. $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{Z}'$: como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, la unión es $\mathbb{R}$, y $\mathbb{Z}'$ (los reales que no son enteros) no es $\mathbb{R}$: por ejemplo $-5 \in \mathbb{R}$ pero $-5 \notin \mathbb{Z}'$. **Falsa.**

Resultado: a) $3^{-1} \in \mathbb{Q}$ fuera de $\mathbb{Z}$; $-5 \in \mathbb{Z}$ fuera de $\mathbb{N}$; 2π y $2^{3/2}$ en $\mathbb{R}$ fuera de $\mathbb{Q}$. b) Son verdaderas $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

Afirmación Verdadera

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad \checkmark$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}'$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N} \quad \checkmark$$

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{Z}'$$

EJERCICIO 46

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2004

Sea $U = \left\{ -4; -\frac{2}{3}; 1; \pi; 13; 26,7; 69; 10^{33} \right\}$. A es el conjunto de todos los enteros que pertenecen a U . B es el conjunto de todos los números racionales que pertenecen a U .

- Escriba todos los números primos que pertenecen a U .
- Escriba todos los elementos de A .
- Escriba todos los elementos de B .
- Escriba todos los elementos del conjunto $A \cap B$.

Elementos de U : $-4; -\frac{2}{3}; 1; \pi; 13; 26,7; 69; 10^{33}$.

a) Un primo es un natural mayor que 1 con solo dos divisores (1 y él mismo).

- 1 no es primo. 13 sí lo es. $69 = 3 \cdot 23$ no es primo. 10^{33} es múltiplo de 2 y no es primo. Los negativos y los no enteros no pueden ser primos.
- Solo 13.

b) A : los enteros de U son $-4, 1, 13, 69, 10^{33}$ (se descartan $-\frac{2}{3}, \pi$ y $26,7$, que no son enteros).

c) B : racionales (se pueden escribir como fracción de enteros). Todos los elementos lo son excepto π , que es irracional. Los enteros son racionales y $26,7 = \frac{267}{10}$.

d) Todo entero es racional, luego $A \subset B$ y $A \cap B = A$.

Resultado: a) Primos de $U = \{13\}$ b) $A = \{-4; 1; 13; 69; 10^{33}\}$ c) $B = \left\{ -4; -\frac{2}{3}; 1; 13; 26,7; 69; 10^{33} \right\}$ d) $A \cap B = \{-4; 1; 13; 69; 10^{33}\}$

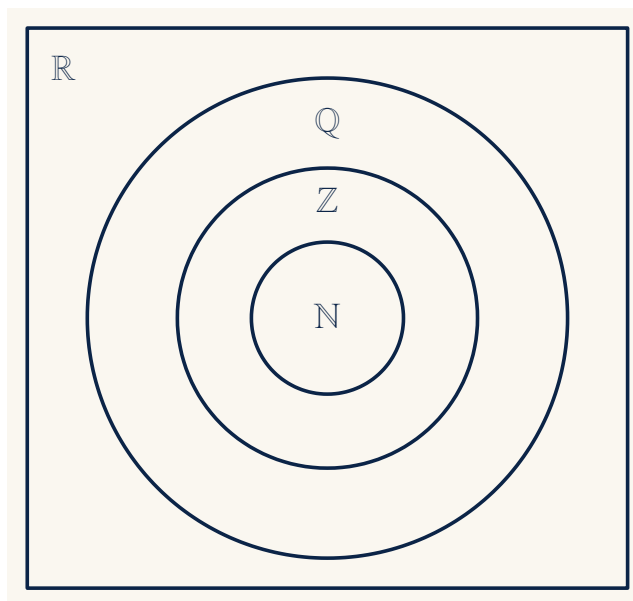
EJERCICIO 47

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2009

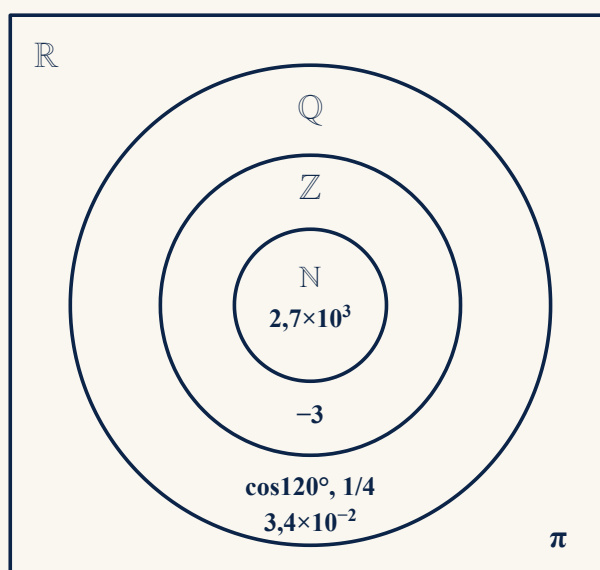
El siguiente diagrama muestra los conjuntos de números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Coloque cada uno de los siguientes números en la zona apropiada del diagrama de Venn.

$$\frac{1}{4}; -3; \pi; \cos 120^\circ; 2,7 \times 10^3; 3,4 \times 10^{-2}$$



Los conjuntos están anidados: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Cada número se coloca en el conjunto más pequeño al que pertenece.

1. $\frac{1}{4}$: fracción que no es entero, está en $\mathbb{Q}$ fuera de $\mathbb{Z}$.
2. -3 : entero negativo, está en $\mathbb{Z}$ fuera de $\mathbb{N}$.
3. π : irracional, está en $\mathbb{R}$ fuera de $\mathbb{Q}$.
4. $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$: racional no entero, en $\mathbb{Q}$ fuera de $\mathbb{Z}$.
5. $2,7 \times 10^3 = 2700$: entero positivo, está en $\mathbb{N}$.
6. $3,4 \times 10^{-2} = 0,034 = \frac{34}{1000}$: racional no entero, en $\mathbb{Q}$ fuera de $\mathbb{Z}$.



Resultado: $\mathbb{N}$: $2,7 \times 10^3$; $\mathbb{Z}$ (fuera de $\mathbb{N}$): -3 ; $\mathbb{Q}$ (fuera de $\mathbb{Z}$): $\frac{1}{4}$, $\cos 120^\circ$ y $3,4 \times 10^{-2}$; $\mathbb{R}$ (fuera de $\mathbb{Q}$): π .

EJERCICIO 48

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2005

- a) Suponiendo que $x = 2,6 \times 10^4$ e $y = 5,0 \times 10^{-8}$, calcule el valor de $w = x \cdot y$. Exprese la respuesta en la forma $a \times 10^k$, con $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.
- b) Dos de las siguientes afirmaciones acerca de la naturaleza de x , y y w son incorrectas. Indique cuáles son.
- (i) $x \in \mathbb{N}$
 - (ii) $y \in \mathbb{Z}$
 - (iii) $y \in \mathbb{Q}$
 - (iv) $w < y$
 - (v) $x + y \in \mathbb{R}$
 - (vi) $\frac{1}{w} < x$

a)

1. Multiplicamos: $w = x \cdot y = (2,6 \times 10^4)(5,0 \times 10^{-8})$.
2. Multiplicamos los coeficientes y sumamos los exponentes: $2,6 \cdot 5,0 = 13$ y $10^4 \cdot 10^{-8} = 10^{-4}$, luego $w = 13 \times 10^{-4}$.
3. Para tener $1 \leq a < 10$: $13 \times 10^{-4} = 1,3 \times 10^{-3}$.

b) Valores: $x = 26000$, $y = 0,00000005$, $w = 0,0013$.

1. (i) 26000 es natural: correcta.
2. (ii) y no es un entero (es un decimal entre 0 y 1): **incorrecta**.
3. (iii) y es decimal exacto, es decir, una fracción: $y \in \mathbb{Q}$, correcta.
4. (iv) $w < y$ sería $0,0013 < 0,00000005$, y no es cierto: **incorrecta**.
5. (v) La suma de dos reales es real: correcta.
6. (vi) $\frac{1}{w} = \frac{1}{0,0013} \approx 769 < 26000 = x$: correcta.

Resultado: a) $w = 1,3 \times 10^{-3}$; b) son incorrectas (ii) y (iv)

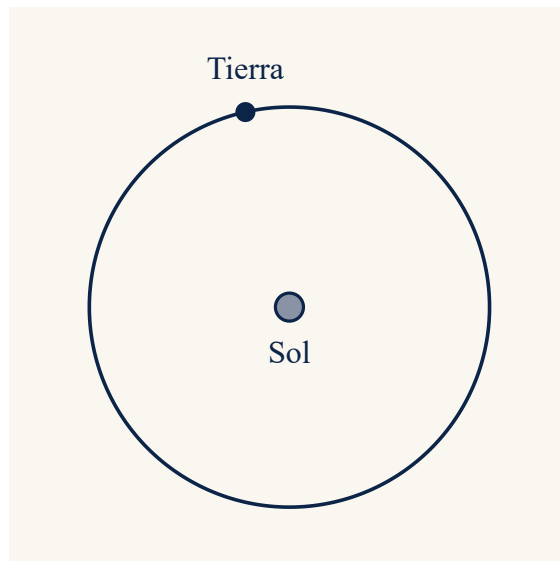
Aproximación, redondeo y notación científica

EJERCICIO 49

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2011

El planeta Tierra tarda un año en girar alrededor del Sol. Suponga que un año es 365 días y que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es la circunferencia de un círculo de radio 150000000 km.



- Calcule la distancia recorrida por la Tierra en un día.
- Dé su respuesta al apartado (a) en la forma $a \times 10^k$ donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a)

- Distancia en un año (una vuelta completa): $2\pi \times 150000000 = 9,42478 \times 10^8$ km (aprox.).
- Dividimos entre los 365 días del año: $\frac{9,42478 \times 10^8}{365} \approx 2582131$ km por día.
- Con tres cifras significativas: ≈ 2580000 km.

b) Escribimos con $1 \leq a < 10$: $2580000 = 2,58 \times 10^6$ km.

Resultado: a) Distancia recorrida en un día ≈ 2580000 km; b) $2,58 \times 10^6$

EJERCICIO 50

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2003

Sea $x = 6,4 \times 10^7$ e $y = 1,6 \times 10^8$. Halle

- $\frac{x}{y}$.
- $y - 2x$, expresando sus respuestas de la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

- Dividimos los coeficientes y restamos los exponentes: $\frac{x}{y} = \frac{6,4 \times 10^7}{1,6 \times 10^8} = \frac{6,4}{1,6} \times 10^{7-8}$.
- $\frac{6,4}{1,6} = 4$, luego $\frac{x}{y} = 4 \times 10^{-1}$ (es 0,4, y $1 \leq 4 < 10$).

b)

- Calculamos $2x = 2 \cdot 6,4 \times 10^7 = 12,8 \times 10^7 = 1,28 \times 10^8$.
- Restamos con el mismo exponente: $y - 2x = 1,6 \times 10^8 - 1,28 \times 10^8 = 0,32 \times 10^8$.

3. Ajustamos para que $1 \leq a < 10$: $0,32 \times 10^8 = 3,2 \times 10^7$.

Resultado: a) $\frac{x}{y} = 4 \times 10^{-1}$; b) $y - 2x = 3,2 \times 10^7$

EJERCICIO 51

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2002

Un rectángulo tiene una longitud de $2,6 \times 10^4$ y un ancho de $1,9 \times 10^4$. Encuentre cada una de las siguientes, cuestiones dando su respuesta en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

- a) El área del rectángulo;
b) El perímetro del rectángulo.

a)

1. Área = largo $\times$ ancho = $(2,6 \times 10^4)(1,9 \times 10^4)$.
2. Coeficientes: $2,6 \cdot 1,9 = 4,94$. Potencias: $10^4 \cdot 10^4 = 10^8$.
3. Área = $4,94 \times 10^8$, que ya cumple $1 \leq a < 10$.

b)

1. Perímetro = $2(\text{largo} + \text{ancho}) = 2(2,6 \times 10^4 + 1,9 \times 10^4)$.
2. Sumamos con el mismo exponente: $2,6 + 1,9 = 4,5$, así que la suma es $4,5 \times 10^4$.
3. Multiplicamos por 2: $9,0 \times 10^4$ (es 90000).

Resultado: a) Área = $4,94 \times 10^8$; b) Perímetro = $9,0 \times 10^4$

EJERCICIO 52

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2009

Un rectángulo mide 2680 cm de largo y 1970 cm de ancho.

- a) Encuentre el perímetro del rectángulo, dando su respuesta en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.
b) Encuentre el área del rectángulo, dando su respuesta aproximada al millar más cercano de centímetros cuadrados.

a)

1. Perímetro = $2(\text{largo} + \text{ancho}) = 2(2680 + 1970) = 2 \cdot 4650 = 9300$ cm.
2. Escribimos en notación científica: la coma se mueve tres lugares a la izquierda, $9300 = 9,30 \times 10^3$.

b)

1. Área = $2680 \cdot 1970 = 5\,279\,600$ cm².
2. Al millar más cercano: miramos la cifra de las centenas, que es 6 (mayor o igual que 5), así que se sube el millar: $5\,280\,000$ cm².

Resultado: a) Perímetro = $9,30 \times 10^3$ cm; b) Área = 5280000 cm²

EJERCICIO 53

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2013

$$z = \frac{17x^2}{a-b}.$$

- a) Encuentre el valor de z cuando $x = 12.5$, $a = 0.572$ y $b = 0.447$. Anote el valor completo de la pantalla de su calculadora.
- b) Escriba su respuesta al apartado (a) (i) redondeado al 1000 más cercano; (ii) redondeado a tres cifras significativas.
- c) Escriba su respuesta al apartado (b) (ii) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$

a)

1. Sustituimos en la fórmula: $z = \frac{17 \times 12,5^2}{0,572 - 0,447}$.
2. Numerador: $12,5^2 = 156,25$ y $17 \times 156,25 = 2656,25$.
3. Denominador: $0,572 - 0,447 = 0,125$.
4. $z = \frac{2656,25}{0,125} = 21250$ (es el valor completo de la pantalla).

b)

- (i) Redondear al millar más cercano: 21250 está entre 21000 y 22000, y su cifra de las centenas es 2 (menor que 5), así que baja a 21000.
- (ii) A tres cifras significativas: las tres primeras cifras son 2, 1, 2 y la siguiente es 5, así que se redondea hacia arriba: 21300.

c) Para escribirlo en la forma $a \times 10^k$ con $1 \leq a < 10$, movemos la coma 4 lugares a la izquierda: $21300 = 2,13 \times 10^4$.

Resultado: a) $z = 21250$; b) (i) $z \approx 21000$; (ii) $z \approx 21300$; c) $z \approx 2,13 \times 10^4$

EJERCICIO 54

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2012

Considere $c = 5200$ y $d = 0,0000037$.

- a) Escriba el valor de $r = c \times d$.
- b) Escriba el valor de r de la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.
- c) Considere los siguientes enunciados sobre c , d y r . Únicamente tres de estos enunciados son verdaderos. Circule los enunciados verdaderos.

$$c \in \mathbb{N}$$

$$d \in \mathbb{Z}$$

$$d \in \mathbb{Q}$$

$$r < d$$

$$c + d \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{r} > c$$

a) $r = c \times d = 5200 \times 0,0000037 = 0,01924$.

b) Para que $1 \leq a < 10$ movemos la coma dos lugares a la derecha hasta obtener 1,924; eso equivale a multiplicar por 10^{-2} : $r = 1,924 \times 10^{-2}$.

c) Comprobamos cada enunciado:

1. $c \in \mathbb{N}$: 5200 es un entero positivo. **Verdadero.**
2. $d \in \mathbb{Z}$: $d = 0,0000037$ no es un número entero. Falso.
3. $d \in \mathbb{Q}$: es un decimal finito, luego se escribe como fracción $\frac{37}{10^7}$. **Verdadero.**
4. $r < d$: $r = 0,01924$ y $d = 0,0000037$, así que $r > d$. Falso.
5. $c + d \in \mathbb{R}$: la suma de dos números reales es real. **Verdadero.**
6. $\frac{1}{r} > c$: $\frac{1}{0,01924} \approx 51,97$, que es menor que 5200. Falso.

Resultado: a) $r = 0,01924$; b) $r = 1,924 \times 10^{-2}$; c) Son verdaderos: $c \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{Q}$ y $c + d \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 55

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

Ross es una estrella que se encuentra a 8241408000000 km de la Tierra. Una nave espacial lanzada desde la Tierra, viaja a 48000 kmh^{-1} hacia Ross.

- a) Calcule el tiempo exacto, en horas, para que la nave espacial llegue a la estrella Ross.
- b) Dé su respuesta al apartado (a) en años. (Suponga que 1 año = 365 días).
- c) Dé su respuesta al apartado (b) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a) Usamos tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$:

$$t = \frac{8241408000000}{48000} = 1716960000 \text{ horas.}$$

b)

1. Un año de 365 días tiene $365 \times 24 = 8760$ horas.

2. Pasamos horas a años dividiendo: $\frac{1716960000}{8760} = 196000$ años.

c) Movemos la coma 5 lugares a la izquierda: $196000 = 1,96 \times 10^5$.

Resultado: a) 1716960000 horas; b) 196000 años; c) $1,96 \times 10^5$

EJERCICIO 56

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2011

Un satélite viaja alrededor de la Tierra en una órbita circular a 500 kilómetros por encima de la superficie de la Tierra. El radio de la Tierra se toma como 6400 kilómetros.

- a) Escriba el radio de la órbita del satélite.
- b) Calcule la distancia recorrida por el satélite en una órbita de la Tierra. Dé su respuesta aproximada al km más cercano.
- c) Escriba su respuesta a (b) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) El radio de la órbita es el radio de la Tierra más la altura del satélite: $r = 6400 + 500 = 6900 \text{ km}$.

b) La distancia en una órbita es la longitud de la circunferencia, $2\pi r$:

$$2\pi \times 6900 = 13800\pi \approx 43353,98 \dots$$

Aproximando al km más cercano: 43354 km.

c) Movemos la coma 4 lugares a la izquierda: $43354 = 4,3354 \times 10^4 \text{ km}$.

Resultado: a) $r = 6900 \text{ km}$; b) Distancia órbita $\approx 43354 \text{ km}$; c) $4,3354 \times 10^4$

EJERCICIO 57

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2019

La forma de la luna se puede modelizar mediante una esfera de 3 474 000 metros de diámetro.

- Utilice este modelo para calcular la circunferencia de la luna en kilómetros. Escriba el valor completo que aparece en la pantalla de la calculadora.
- Dé la respuesta que dio en el apartado (a) redondeando a tres cifras significativas.
- Escriba la respuesta que dio en el apartado (b) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

- Pasamos el diámetro a kilómetros: $3\,474\,000\text{ m} = 3474\text{ km}$ (dividimos entre 1000).
- La circunferencia de una esfera (círculo máximo) es $C = \pi d = \pi \times 3474$.
- En la calculadora: $C = 10913,89288 \dots \text{ km}$.

b) A tres cifras significativas: las tres primeras son 1, 0, 9 y la siguiente es 1 (menor que 5), así que se mantiene el 9 y completamos con ceros: 10900 km.

c) Movemos la coma 4 lugares a la izquierda: $10900 = 1,09 \times 10^4 \text{ km}$.

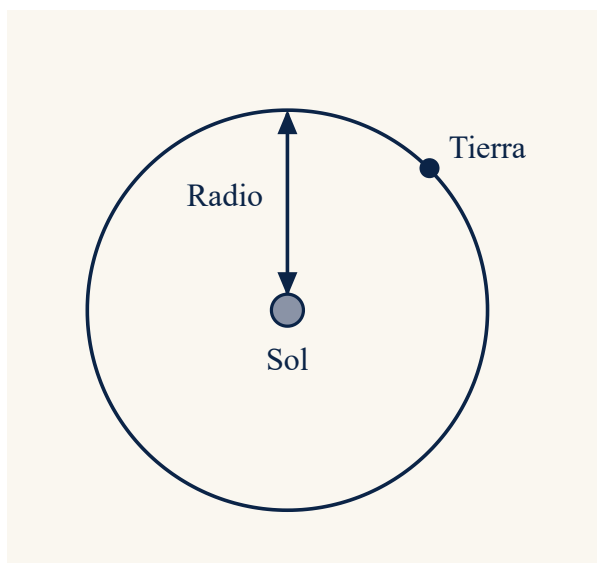
Resultado: a) 10913,89288 km; b) $\approx 10900 \text{ km}$; c) $\approx 1,09 \times 10^4 \text{ km}$

EJERCICIO 58

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2014

El radio promedio de la órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es igual a 150 millones de kilómetros.



- Escriba este radio, en kilómetros, de la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$. La Tierra da vueltas alrededor del Sol siguiendo una órbita, y tarda un año en completar dicha órbita.
- Calcule la distancia, en kilómetros, que recorre la Tierra alrededor del Sol en una órbita, suponiendo que la órbita sea una circunferencia. Hoy Anna celebra su 17º cumpleaños.
- Calcule la distancia total que ha recorrido Anna alrededor del Sol desde que nació.

a) 150 millones = $150\,000\,000 = 1,5 \times 10^8 \text{ km}$ (la coma se mueve 8 lugares a la izquierda).

b) La órbita es una circunferencia de radio $1,5 \times 10^8 \text{ km}$:

$$2\pi r = 2\pi \times 1,5 \times 10^8 = 3\pi \times 10^8 \approx 9,42 \times 10^8 \text{ km}.$$

c) Anna ha dado 17 vueltas completas al Sol (una por año vivido). Multiplicamos:

$$17 \times 9,424778 \times 10^8 \approx 1,602 \times 10^{10} \approx 1,60 \times 10^{10} \text{ km.}$$

Resultado: a) $1,5 \times 10^8$; b) Distancia de una órbita = $9,42 \times 10^8$; c) Distancia recorrida por Anna = $1,60 \times 10^{10}$

EJERCICIO 59

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2010

El volumen de una esfera es $V = \sqrt{\frac{S^3}{36\pi}}$, donde S es su superficie. El área la superficie de la esfera es de 500 cm^2 .

- Calcule el volumen de la esfera. Dé su respuesta aproximada con dos lugares decimales.
- Escriba su respuesta a (a) aproximada al número entero más cercano.
- Escriba su respuesta a (b) en la forma $a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$ y $n \in \mathbb{Z}$.

a)

1. Sustituimos $S = 500$: $V = \sqrt{\frac{500^3}{36\pi}}$.

2. $500^3 = 125\,000\,000$ y $36\pi \approx 113,097$, luego el radicando es $\approx 1\,105\,242,7$.

3. Raíz cuadrada con la calculadora: $V \approx 1051,305\dots$, que a dos decimales es $1051,31 \text{ cm}^3$.

b) Al entero más cercano: la parte decimal 0,31 es menor que 0,5, así que $V \approx 1051 \text{ cm}^3$.

c) Movemos la coma 3 lugares a la izquierda: $1051 = 1,051 \times 10^3$.

Resultado: a) $V = 1051,31 \text{ cm}^3$; b) $V \approx 1051 \text{ cm}^3$; c) $V \approx 1,051 \times 10^3$

EJERCICIO 60

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

Considere estos cuatro números que se muestran a continuación.

$$p = 0,00314 \quad ; \quad q = 0,00314 \times 10^2 \quad ; \quad r = \frac{\pi}{1000} \quad ; \quad s = 3,14 \times 10^{-2}$$

- Uno de estos números está escrito en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$. Escriba dicho número.
- Escriba el número más pequeño de los cuatro mostrados.
- Escriba el valor de $q + s$.
- Dé la respuesta al apartado (c) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a) La forma $a \times 10^k$ exige $1 \leq a < 10$:

- $p = 0,00314$ no está en esa forma.
- $q = 0,00314 \times 10^2$ tiene $a = 0,00314 < 1$: no vale.
- $r = \frac{\pi}{1000}$ no tiene esa forma.
- $s = 3,14 \times 10^{-2}$ tiene $a = 3,14$ y $k = -2$: sí.

b) Pasamos todos a decimales:

- $p = 0,00314$
- $q = 0,314$
- $r = \frac{\pi}{1000} = 0,00314159\dots$
- $s = 0,0314$

El menor es $p = 0,00314$ (es ligeramente menor que r).

c) $q + s = 0,314 + 0,0314 = 0,3454$.

d) Movemos la coma un lugar a la derecha para tener $a = 3,454$: $0,3454 = 3,454 \times 10^{-1}$.

Resultado: a) $s = 3,14 \times 10^{-2}$; b) El más pequeño es p ; c) $q + s = 0,3454$; d) $q + s = 3,454 \times 10^{-1}$

EJERCICIO 61

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

Sabiendo que $h = \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{4}}$.

- Calcule el valor exacto de h cuando $l = 0,03625$, y $d = 0,05$.
- Escriba la respuesta del apartado (a) redondeando a tres cifras decimales.
- Escriba la respuesta del apartado (a) redondeando a tres cifras significativas.
- Escriba la respuesta del apartado (a) de la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. Sustituimos los datos en la fórmula: $h = \sqrt{0,03625^2 - \frac{0,05^2}{4}}$.

2. Calculamos cada término: $0,03625^2 = 0,0013140625$ y $\frac{0,05^2}{4} = \frac{0,0025}{4} = 0,000625$.

3. Restamos: $0,0013140625 - 0,000625 = 0,0006890625$.

4. Raíz cuadrada: $\sqrt{0,0006890625} = 0,02625$ (se comprueba: $0,02625^2 = 0,0006890625$). Es un valor exacto, con pocos decimales.

b) Tres cifras decimales: miramos la cuarta decimal. En $0,02625$ las tres primeras decimales son $0,026$ y la siguiente es 2 (menor que 5), así que no se sube: $0,026$.

c) Tres cifras significativas: la primera cifra significativa es el 2 (los ceros iniciales no cuentan). Tomamos $2,6,2$ y miramos la siguiente, que es 5 : se redondea hacia arriba, $0,0263$.

d) Movemos la coma hasta que quede una sola cifra distinta de cero delante: $0,02625 = 2,625 \times 10^{-2}$ (dos lugares a la derecha, exponente -2).

Resultado: a) $h = 0,02625$; b) $h \approx 0,026$; c) $h \approx 0,0263$; d) $h = 2,625 \times 10^{-2}$

EJERCICIO 62

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Sea $x = 7,94$.

- Calcular el valor de $\frac{2x+1}{x^3}$.
- (i) Dé su respuesta aproximada con tres decimales.
(ii) Escriba su respuesta a (b) (i) como porcentaje.
- Dé su respuesta al apartado (b) (i) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. Numerador: $2x + 1 = 2 \cdot 7,94 + 1 = 16,88$.

2. Denominador: $x^3 = 7,94^3 = 500,566184$.

3. Cociente (con la calculadora): $\frac{16,88}{500,566184} = 0,03372 \dots \approx 0,0337$.

b)

1. (i) Tres decimales: $0,03372 \dots \rightarrow 0,034$ (la cuarta decimal es 7 , se sube).

2. (ii) Para pasar a porcentaje se multiplica por 100 , usando el valor del apartado (i): $0,034 \cdot 100 = 3,4\%$.

c) $0,034 = 3,4 \times 10^{-2}$ (la coma se mueve dos lugares a la derecha).

Resultado: a) 0,0337; b) (i) 0,034; (ii) 3,4%; c) $3,4 \times 10^{-2}$

EJERCICIO 63

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

Dada la ecuación $p = r^2 + 2qr$.

- Calcule el valor exacto de p cuando $q = 3,6$ y $r = 24$.
- Escriba la respuesta aproximada con dos cifras significativas.
- Expresa la respuesta del apartado (b) en la forma $a \times 10^k$, con $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

- Sustituimos: $p = 24^2 + 2 \cdot 3,6 \cdot 24$.
- Calculamos: $24^2 = 576$ y $2 \cdot 3,6 \cdot 24 = 172,8$.
- Sumamos: $p = 576 + 172,8 = 748,8$.

b) Dos cifras significativas: 7 y 4; la siguiente cifra es 8, así que se sube y queda 75. Como el número tiene tres cifras enteras, se completa con un cero: 750.

c) $750 = 7,5 \times 10^2$ (la coma se mueve dos lugares a la izquierda).

Resultado: a) $p = 748,8$; b) $p \approx 750$; c) $p \approx 7,5 \times 10^2$

EJERCICIO 64

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

El peso total de 256 lápices iguales es 4,24 kg. Calcule el peso, en kg, de un lápiz.

- Dé la respuesta exacta.
- Expresa la respuesta con tres cifras significativas.
- Expresa la respuesta del apartado (b) en la forma $a \times 10^k$, con $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

- Peso de un lápiz = peso total dividido entre el número de lápices (todos son iguales).
- $\frac{4,24}{256} = 0,0165625$ kg, valor exacto (la división termina).

b) Tres cifras significativas: empiezan en el 1 (los ceros iniciales no cuentan): 1, 6, 5; la siguiente cifra es 6, así que se sube el 5 a 6: 0,0166 kg.

c) $0,0166 = 1,66 \times 10^{-2}$ (la coma se mueve dos lugares a la derecha).

Resultado: a) 0,0165625 kg; b) $\approx 0,0166$ kg; c) $1,66 \times 10^{-2}$ kg

EJERCICIO 65

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2003

Utilizando la fórmula $V = \pi r^2(H - h)$, y el valor de π dado por la calculadora, halle el valor de V cuando $r = 4,26$; $H = 21,58$ y $h = 14,35$.

- Escriba el resultado completo que le muestra su calculadora.
- Expresa la respuesta con dos cifras decimales.
- Expresa la respuesta con dos cifras significativas.
- Escriba la respuesta del apartado (c) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. Sustituimos: $V = \pi \cdot 4,26^2 \cdot (21,58 - 14,35)$.
2. Calculamos $H - h = 7,23$ y $4,26^2 = 18,1476$.
3. Multiplicamos: $18,1476 \cdot 7,23 = 131,207148$.
4. Multiplicamos por π (el de la calculadora): $V = 412,1994123 \dots$

b) Dos decimales: la tercera decimal es 9, se sube: 412,20.

c) Dos cifras significativas: 4 y 1; la siguiente cifra es 2, no se sube, y se completa con ceros hasta la posición de las unidades: 410.

d) $410 = 4,10 \times 10^2$ (la coma se mueve dos lugares a la izquierda).

Resultado: a) $V = 412,1994123$; b) $V \approx 412,20$; c) $V \approx 410$; d) $V \approx 4,10 \times 10^2$

EJERCICIO 66 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2001

La velocidad del sonido en el aire se expresa como 300 m s^{-1} .

- a) ¿Cuántos metros viaja el sonido en el aire en una hora?
- b) Exprese su respuesta al apartado (a)
 - (i) aproximada a dos cifras significativas;
 - (ii) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. Una hora son $60 \cdot 60 = 3600 \text{ s}$.
2. Distancia = velocidad $\times$ tiempo = $300 \cdot 3600 = 1\,080\,000 \text{ m}$.

b)

1. (i) Dos cifras significativas: 1 y 0; la siguiente es 8, se sube: $1\,100\,000 \text{ m}$.
2. (ii) Partiendo del valor del apartado (a), la coma se mueve seis lugares a la izquierda: $1\,080\,000 = 1,08 \times 10^6 \text{ m}$.

Resultado: a) $1\,080\,000 \text{ m}$; b) (i) $1\,100\,000 \text{ m}$; (ii) $1,08 \times 10^6 \text{ m}$

EJERCICIO 67 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

El volumen, V , de una semiesfera viene dado por la fórmula $V = \sqrt{\frac{4S^3}{243\pi}}$, donde S es el área total de la superficie. El área total de la superficie de una semiesfera dada es igual a 350 cm^2 .

- a) Calcule el volumen en cm^3 de esta semiesfera. Dé la respuesta redondeando a un lugar decimal.
- b) Escriba la respuesta dada en el apartado (a) redondeando al número entero más próximo.
- c) Escriba la respuesta dada en el apartado (b) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. Sustituimos $S = 350$: $V = \sqrt{\frac{4 \cdot 350^3}{243\pi}}$.
2. Calculamos el numerador: $350^3 = 42\,875\,000$, y por 4 resulta $171\,500\,000$.
3. Con la calculadora (usando π de la calculadora), el cociente interior es $\approx 224\,651$ y su raíz cuadrada da $V \approx 473,97$.
4. Un lugar decimal: la segunda decimal es 7, se sube, y queda $V \approx 474,0 \text{ cm}^3$.

b) Al número entero más próximo: 474 cm^3 .

c) $474 = 4,74 \times 10^2 \text{ cm}^3$ (la coma se mueve dos lugares a la izquierda).

Resultado: a) $V \approx 474,0 \text{ cm}^3$; b) $V \approx 474 \text{ cm}^3$; c) $V = 4,74 \times 10^2 \text{ cm}^3$

EJERCICIO 68

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

La velocidad de la luz es igual a 300 000 kilómetros por segundo. La distancia promedio entre el Sol y la Tierra es igual a 149,6 millones de km.

- a) Calcule el tiempo, en minutos, que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año y es igual a 9 467 280 millones de km. Polaris es una estrella brillante que es visible desde el hemisferio norte. La distancia que hay entre la Tierra y Polaris es igual a 323 años luz.
- b) Halle la distancia que hay entre la Tierra y Polaris en millones de km. Dé la respuesta en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. Pasamos la distancia a km: 149,6 millones de km = $149,6 \times 10^6 \text{ km}$.

2. Tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$, así que en segundos:

$$t = \frac{149,6 \times 10^6}{300\,000} \approx 498,67 \text{ s}$$

3. Un minuto tiene 60 segundos, así que dividimos entre 60:

$$t = \frac{498,67}{60} \approx 8,311 \text{ min}$$

b)

1. La distancia es 323 años luz y cada año luz son 9 467 280 millones de km, así que multiplicamos:

$$323 \times 9\,467\,280 = 3\,057\,931\,440 \text{ millones de km}$$

2. Para escribirlo en forma $a \times 10^k$ con $1 \leq a < 10$, movemos la coma 9 lugares hacia la izquierda:

$$3\,057\,931\,440 = 3,05793 \dots \times 10^9$$

3. Redondeando a 3 cifras significativas: $3,06 \times 10^9$.

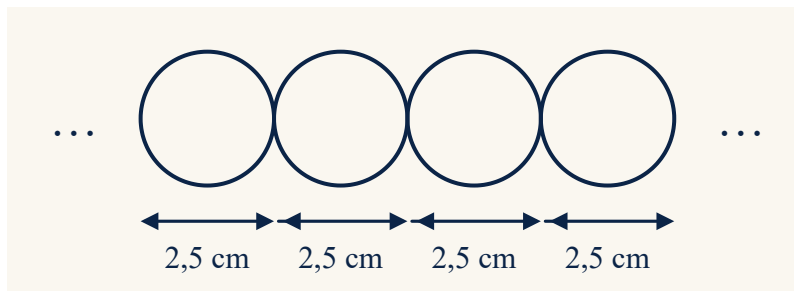
Resultado: a) $\approx 8,31$ minutos b) $\approx 3,06 \times 10^9$ millones de km

EJERCICIO 69

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2018

El año pasado, una fábrica de golosinas sudamericana vendió $4,8 \times 10^8$ caramelos esféricos. Cada caramelo tiene un diámetro de 2,5 cm. La fábrica está elaborando un anuncio donde muestra todos estos caramelos colocados en fila, formando una línea recta.



- a) Halle la longitud, en cm, que tiene esta recta. Dé la respuesta en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$. En el anuncio se afirma que la longitud de esta recta es igual a x veces la longitud del río Amazonas. El río Amazonas mide 6400 km de longitud.
- b) (i) Escriba la longitud del río Amazonas en cm.
(ii) Halle el valor de x .

a)

1. La longitud de la fila es el número de caramelos por lo que mide cada uno (están pegados, tangentes):

$$L = 4,8 \times 10^8 \times 2,5 = 12 \times 10^8 \text{ cm}$$

2. Para que a esté entre 1 y 10, escribimos $12 = 1,2 \times 10$:

$$L = 1,2 \times 10^9 \text{ cm}$$

b)

1. (i) Pasamos km a cm: $1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 100\,000 \text{ cm} = 10^5 \text{ cm}$. Entonces:

$$6400 \times 10^5 = 6,4 \times 10^3 \times 10^5 = 6,4 \times 10^8 \text{ cm}$$

2. (ii) La longitud de la fila es x veces la del Amazonas, así que

$$x = \frac{1,2 \times 10^9}{6,4 \times 10^8} = 1,875 \approx 1,88$$

Resultado: a) $1,2 \times 10^9 \text{ cm}$ b) i) $6,4 \times 10^8 \text{ cm}$ ii) $x = 1,88$

EJERCICIO 70

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

La velocidad de la luz es igual a 300 000 kilómetros por segundo. La distancia promedio entre el Sol y la Tierra es igual a 149,6 millones de km.

- a) Calcule el tiempo, en minutos, que tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año y es igual a 9 467 280 millones de km. Polaris es una estrella brillante que es visible desde el hemisferio norte. La distancia que hay entre la Tierra y Polaris es igual a 323 años luz.
- b) Halle la distancia que hay entre la Tierra y Polaris en millones de km. Dé la respuesta en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. Pasamos la distancia a km: $149,6 \text{ millones de km} = 149,6 \times 10^6 \text{ km}$.

2. Tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$, así que en segundos:

$$t = \frac{149,6 \times 10^6}{300\,000} \approx 498,67 \text{ s}$$

3. Un minuto tiene 60 segundos, así que dividimos entre 60:

$$t = \frac{498,67}{60} \approx 8,311 \text{ min}$$

b)

1. La distancia es 323 años luz y cada año luz son 9 467 280 millones de km, así que multiplicamos:

$$323 \times 9\,467\,280 = 3\,057\,931\,440 \text{ millones de km}$$

2. Para escribirlo en forma $a \times 10^k$ con $1 \leq a < 10$, movemos la coma 9 lugares hacia la izquierda:

$$3\,057\,931\,440 = 3,05793 \dots \times 10^9$$

3. Redondeando a 3 cifras significativas: $3,06 \times 10^9$.

Resultado: a) $\approx 8,31$ minutos b) $\approx 3,06 \times 10^9$ millones de km

EJERCICIO 71

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

a) Calcular $\frac{77,2 \times 3^3}{3,60 \times 2^2}$.

b) Exprese su respuesta al apartado (a) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Juan estima que el largo de una alfombra es de 12 metros y el ancho de 8 metros. Entonces él estima el área de la alfombra.

(i) Escriba su área estimada de la alfombra. Cuando la alfombra se mide con precisión, se encuentra que tiene un área de 90 metros cuadrados.

(ii) Calcule el porcentaje de error cometido por Juan.

a)

1. Numerador: $77,2 \times 3^3 = 77,2 \times 27 = 2084,4$.

2. Denominador: $3,60 \times 2^2 = 3,60 \times 4 = 14,4$.

3. Dividimos: $\frac{2084,4}{14,4} = 144,75$.

b)

1. Movemos la coma dos lugares a la izquierda para que $1 \leq a < 10$:

$$144,75 = 1,4475 \times 10^2$$

c)

1. (i) Área estimada = largo $\times$ ancho = $12 \times 8 = 96 \text{ m}^2$.

2. (ii) El valor exacto es 90 m^2 y el estimado es 96 m^2 :

$$\left| \frac{96 - 90}{90} \right| \times 100 = \frac{6}{90} \times 100 \approx 6,67 \%$$

Resultado: a) 144,75 b) $1,4475 \times 10^2$ c) i) 96 m^2 ii) 6,67 %

EJERCICIO 72

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2006

Un problema tiene una respuesta exacta de $x = 0,1265$.

- Escriba el valor exacto de x en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Establezca el valor de x aproximado con dos cifras significativas.
- Calcule el porcentaje de error si el valor de x se aproxima con dos cifras significativas.

a)

- Movemos la coma un lugar a la derecha para tener un número entre 1 y 10, lo que obliga a un exponente negativo:

$$0,1265 = 1,265 \times 10^{-1}$$

b)

- Las dos primeras cifras significativas son 1 y 2 (el cero inicial no cuenta). La siguiente cifra es 6, así que se redondea hacia arriba: $x \approx 0,13$.

c)

- Valor exacto 0,1265, valor aproximado 0,13:

$$\left| \frac{0,13 - 0,1265}{0,1265} \right| \times 100 = \frac{0,0035}{0,1265} \times 100 \approx 2,77\%$$

Resultado: a) $x = 1,265 \times 10^{-1}$ b) $x \approx 0,13$ c) 2,77 %

Porcentajes de error

EJERCICIO 73

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2018

Cada año, el equipo de fútbol Peterson United juega 25 partidos en su estadio local. El propietario de Peterson United afirmó que el año pasado la asistencia media por partido a su estadio local fue 24 500.

- Basado en la información del propietario, calcule la asistencia total a los juegos en el Estadio del Peterson United el año pasado. La asistencia total real el año pasado fue de 617 700.
- Calcule el porcentaje de error en la reclamación del propietario.
- Escriba su respuesta al apartado (b) en la forma $a \times 10^k$ donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

- Asistencia total estimada = partidos $\times$ asistencia media:

$$25 \times 24\,500 = 612\,500$$

b)

- El valor aproximado (de la afirmación) es 612 500 y el valor exacto es 617 700.

- Porcentaje de error = $\left| \frac{v_A - v_E}{v_E} \right| \times 100$:

$$\left| \frac{612\,500 - 617\,700}{617\,700} \right| \times 100 = \frac{5200}{617\,700} \times 100 \approx 0,842\%$$

c)

- Escribimos $0,842 = 8,42 \times 10^{-1}$ (la coma se mueve un lugar a la derecha, así que el exponente es -1).

Resultado: a) 612 500 b) 0,842 % c) $8,42 \times 10^{-1}$

EJERCICIO 74

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2008

- a) Calcule exactamente $\frac{(3 \times 2.1)^3}{7 \times 1.2}$.
- b) Escriba la respuesta al apartado (a) redondeada a 2 cifras significativas.
- c) Calcule el error porcentual cuando la respuesta al apartado a) se escriba aproximada en 2 cifras significativas.
- d) Escriba su respuesta al apartado (c) en la forma $a \times 10^k$ donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. Calculamos el paréntesis: $3 \times 2,1 = 6,3$, y lo elevamos al cubo: $6,3^3 = 250,047$.
2. Calculamos el denominador: $7 \times 1,2 = 8,4$.
3. Dividimos:

$$\frac{250,047}{8,4} = 29,7675$$

b)

1. 29,7675 redondeado a 2 cifras significativas (las dos primeras cifras son 2 y 9, y la siguiente, 7, obliga a subir): 30.

c)

1. El valor exacto es 29,7675 y el aproximado es 30:

$$\left| \frac{30 - 29,7675}{29,7675} \right| \times 100 = \frac{0,2325}{29,7675} \times 100 \approx 0,781 \%$$

d)

1. $0,781 = 7,81 \times 10^{-1}$.

Resultado: a) 29,7675 b) 30 c) 0,781 % d) $7,81 \times 10^{-1}$

EJERCICIO 75

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2007

Cinco tuberías rotuladas "6 metros de longitud" fueron entregadas en una obra. El contratista midió cada tubería para comprobar su longitud (en metros), y anotó los siguientes valores:

5,96 ; 5,95 ; 6,02 ; 5,95 ; 5,99.

- a) (i) Halle la media de los valores medidos por el contratista.
- (ii) Calcule el porcentaje de error que hay entre la media y la longitud estipulada (y aproximada) de 6 metros.
- b) Calcule $\sqrt{3,87^5 - 8,73^{-0,5}}$, y exprese la respuesta
- (i) redondeando al número entero más próximo,
- (ii) en la forma $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

a)

1. (i) La media es la suma de los valores dividida entre cuántos son (5):

$$\bar{x} = \frac{5,96 + 5,95 + 6,02 + 5,95 + 5,99}{5} = \frac{29,87}{5} = 5,974 \approx 5,97 \text{ m}$$

2. (ii) El valor exacto es la media, 5,974 m, y el aproximado es 6 m:

$$\left| \frac{6 - 5,974}{5,974} \right| \times 100 = \frac{0,026}{5,974} \times 100 \approx 0,435 \%$$

3. Observación: si se usa la media ya redondeada, 5,97, el cálculo es $\frac{0,03}{5,97} \times 100 \approx 0,503 \%$.

b)

1. Calculamos con la CPG, respetando la prioridad de operaciones: $3,87^5 \approx 868,07$ y $8,73^{-0,5} = \frac{1}{\sqrt{8,73}} \approx 0,338$.

2. La resta vale $868,07 - 0,338 \approx 867,73$ y la raíz es:

$$\sqrt{3,87^5 - 8,73^{-0,5}} \approx 29,457$$

3. (i) Al entero más próximo: 29.

4. (ii) En forma $a \times 10^k$: $29,457 = 2,9457 \times 10^1 \approx 2,95 \times 10^1$ (3 cifras significativas).

Resultado: a) i) media = 5,97 m ii) 0,435 % (con la media redondeada 5,97: 0,503 %) b) i) 29 ii) $2,95 \times 10^1$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas lineales

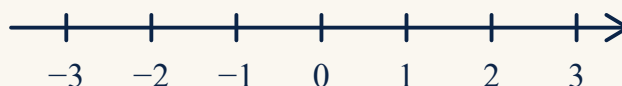
EJERCICIO 76

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2002

a) Resuelva la desigualdad $3 - 2(x + 5) > x - 6$.

b) Represente la solución del apartado (a) en la siguiente recta numérica.



a)

1. Quitamos el paréntesis: $3 - 2x - 10 > x - 6$.

2. Simplificamos el lado izquierdo: $-2x - 7 > x - 6$.

3. Pasamos las x a un lado y los números al otro: sumamos $2x$ y sumamos 6 a ambos lados: $-1 > 3x$.

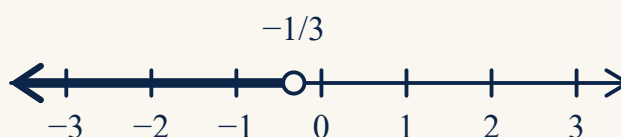
4. Dividimos entre 3 (positivo, el sentido no cambia): $-\frac{1}{3} > x$, es decir, $x < -\frac{1}{3}$.

b)

1. Situamos $-\frac{1}{3} \approx -0,33$ entre -1 y 0 , más cerca del 0.

2. Como la desigualdad es estricta ($<$), el punto se marca con un círculo abierto.

3. Los valores válidos son menores que $-\frac{1}{3}$, así que se dibuja un trazo grueso hacia la izquierda con una flecha.



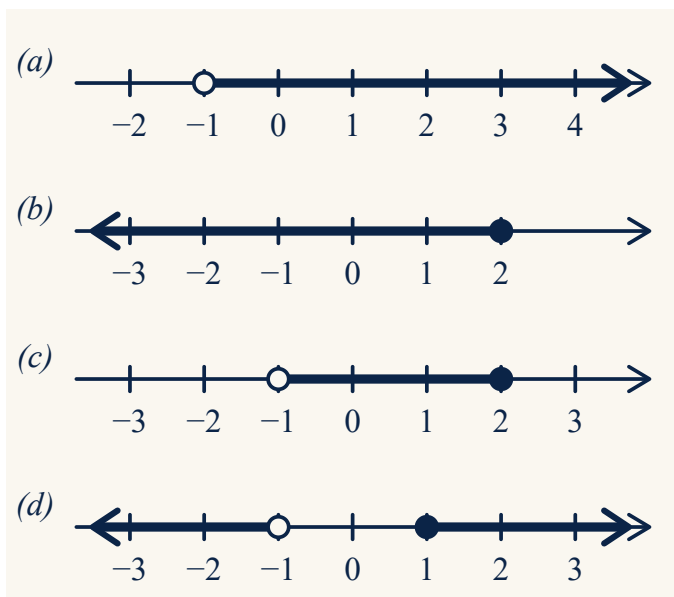
Resultado: a) $x < -\frac{1}{3}$ b) Ver figura.

EJERCICIO 77

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2002

Las siguientes figuras muestran inecuaciones en x .



Escriba la inecuación representada en cada una de las figuras

Se lee cada recta fijándose en el tipo de punto y en la dirección del trazo: círculo abierto significa $<$ o $>$ (el extremo no entra), punto cerrado significa $\leq$ o $\geq$ (el extremo sí entra).

1. (a) Círculo abierto en -1 y trazo hacia la derecha: los valores mayores que -1 , sin incluirlo: $x > -1$.
2. (b) Punto cerrado en 2 y trazo hacia la izquierda: los valores menores o iguales que 2 : $x \leq 2$.
3. (c) Círculo abierto en -1 y punto cerrado en 2 unidos por un trazo: los valores entre ambos, sin -1 y con 2 : $-1 < x \leq 2$.
4. (d) Dos trazos separados: uno hacia la izquierda desde -1 (abierto) y otro hacia la derecha desde 1 (cerrado). Se unen con «o»: $x < -1$ o $x \geq 1$.

Resultado: a) $x > -1$ b) $x \leq 2$ c) $-1 < x \leq 2$ d) $x < -1$ o $x \geq 1$

EJERCICIO 78

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2001

- a) Resuelva la desigualdad $2x + 3 \leq -5$, $x \in \mathbb{R}$.
- b) Represente su solución en la siguiente recta numérica.



a)

1. Restamos 3 a ambos lados: $2x \leq -8$.
2. Dividimos entre 2 (positivo, el sentido no cambia): $x \leq -4$.

b)

1. En la recta sin rótulos, elegimos una de las marcas para el -4 y la rotulamos. Como las marcas son de una unidad, a su derecha irían $-3, -2, \dots$

2. Como la desigualdad incluye la igualdad ($\leq$), el punto en -4 se marca cerrado.
3. Los valores válidos son menores que -4 : trazo grueso hacia la izquierda con una flecha.



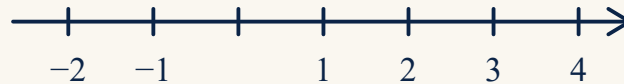
Resultado: a) $x \leq -4$ b) Ver figura.

EJERCICIO 79

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2004

- a) Resuelva la inecuación $3x - 7 \leq 2$.
- b) Resuelva la inecuación $-x < -2$.
- c) Las inecuaciones de (a) y (b) describen dos regiones en la recta numérica. Represente en la recta numérica que se da a continuación, la intersección de esas dos regiones.



- a) Se aísla x como en una ecuación:
 1. Sumamos 7 a ambos lados: $3x \leq 9$.
 2. Dividimos entre 3 (positivo, el sentido de la desigualdad no cambia): $x \leq 3$.
- b)
 1. Multiplicamos ambos lados por -1 . Al multiplicar o dividir por un número negativo, **el sentido de la desigualdad se invierte**: $x > 2$.
- c) La intersección son los valores que cumplen las dos condiciones a la vez: $x \leq 3$ y $x > 2$.
 1. Marcamos el 2 con un círculo abierto (el 2 no cumple $x > 2$).
 2. Marcamos el 3 con un punto cerrado (el 3 sí cumple $x \leq 3$).
 3. Unimos ambos puntos con un trazo grueso: es la zona común a las dos regiones, $2 < x \leq 3$.



Resultado: a) $x \leq 3$ b) $x > 2$ c) $2 < x \leq 3$

Ecuación cuadrática

EJERCICIO 80

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

- a) Factorice la expresión $x^2 - 25$.
- b) Factorice la expresión $x^2 - 3x - 4$.
- c) Utilizando la respuesta del apartado (b), o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$

a)

1. Es una diferencia de cuadrados, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, con $a = x$ y $b = 5$:

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$$

b)

1. Buscamos dos números que multipliquen -4 y sumen -3 : son -4 y 1 .

2. Por tanto $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$.

c)

1. Usamos la factorización del apartado (b): $(x + 1)(x - 4) = 0$.

2. Un producto es cero cuando alguno de sus factores lo es: $x + 1 = 0$ o $x - 4 = 0$.

Resultado: a) $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$ b) $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$ c) $x = -1, x = 4$

EJERCICIO 81

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2002

- a) Encuentre la solución de la ecuación $x^2 - 5x - 24 = 0$.
- b) La ecuación $ax^2 - 9x - 30 = 0$ tiene la solución $x = 5$ y $x = -2$. Encuentra el valor de a .

a)

1. Buscamos dos números que multipliquen -24 y sumen -5 : son -8 y 3 .

2. Factorizamos: $(x - 8)(x + 3) = 0$.

3. Cada factor puede ser cero: $x = 8$ o $x = -3$.

(También se puede pedir a la CPG que resuelva la ecuación y da las mismas raíces.)

b) Si $x = 5$ es solución, al sustituirlo la ecuación debe cumplirse.

1. Sustituimos $x = 5$: $a \cdot 5^2 - 9 \cdot 5 - 30 = 0$.

2. Simplificamos: $25a - 45 - 30 = 0 \Rightarrow 25a = 75$.

3. Despejamos: $a = 3$.

4. Comprobación con $x = -2$: $3 \cdot 4 + 18 - 30 = 0$. Se cumple.

Resultado: a) $x = -3, x = 8$ b) $a = 3$

EJERCICIO 82

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2001

- a) Factorice la expresión $2x^2 - 3x - 5$.
- b) Usando lo anterior, o de otro modo, resuelva la ecuación $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

a)

1. Buscamos dos números que multipliquen $a \cdot c = 2 \cdot (-5) = -10$ y sumen -3 : son -5 y 2 .

2. Descomponemos el término central: $2x^2 - 5x + 2x - 5$.
3. Sacamos factor común por grupos: $x(2x - 5) + 1(2x - 5)$.
4. Sacamos el factor común $(2x - 5)$: $(2x - 5)(x + 1)$.

b)

1. Igualamos la expresión factorizada a cero: $(2x - 5)(x + 1) = 0$.
2. Un producto es cero si lo es alguno de sus factores: $2x - 5 = 0$ o $x + 1 = 0$.
3. Despejamos: $x = \frac{5}{2}$ o $x = -1$.

Resultado: a) $2x^2 - 3x - 5 = (2x - 5)(x + 1)$ b) $x = \frac{5}{2} = 2,5$, $x = -1$

EJERCICIO 83

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

- a) Resuelva la siguiente ecuación para x : $3(2x + 1) - 2(3 - x) = 13$.
- b) Factorice la expresión $x^2 + 2x - 3$.
- c) Encuentre la solución positiva de la ecuación $x^2 + 2x - 6 = 0$.

a)

1. Desarrollamos los paréntesis (cuidado con el signo menos que multiplica al segundo):

$$6x + 3 - 6 + 2x = 13$$

2. Agrupamos términos semejantes: $8x - 3 = 13$.
3. Sumamos 3: $8x = 16$, y dividimos entre 8: $x = 2$.

b)

1. Buscamos dos números que multipliquen -3 y sumen 2: son 3 y -1 .
2. Por tanto $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$.

c)

1. Aplicamos la fórmula general con $a = 1$, $b = 2$, $c = -6$:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} = -1 \pm \sqrt{7}$$

2. Las dos soluciones son $x \approx 1,65$ y $x \approx -3,65$ (también se obtienen con la CPG). La positiva es $x \approx 1,65$.

Resultado: a) $x = 2$ b) $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$ c) $x = -1 + \sqrt{7} \approx 1,65$

Cambio de divisas

EJERCICIO 84

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

Sasha viajó de Estados Unidos a México y convirtió 650 dólares estadounidenses (USD) en Pesos mexicanos (MXN). Su banco ofrecía un tipo de cambio de 1 USD = 12,50 MXN.

- Encuentre la cantidad de MXN que recibió Sasha. Antes de su regreso a los EE. UU., Sasha volvió a cambiar 2300 MXN por USD. El Banco cobra una comisión del 1%. El tipo de cambio seguía siendo 1 USD = 12,50 MXN.
- Anote la comisión cobrada por el banco en MXN.
- Calcule la cantidad de USD que Sasha recibió después de la comisión. Dé su respuesta aproximada al dólar estadounidense más cercano.

a)

1. Multiplicamos los USD por el tipo de cambio:

$$650 \times 12,50 = 8125 \text{ MXN}$$

b)

1. La comisión es el 1 % de 2300 MXN:

$$2300 \times 0,01 = 23 \text{ MXN}$$

c)

1. Se cambian $2300 - 23 = 2277$ MXN.

2. Cada USD son 12,50 MXN, así que dividimos:

$$2277 \div 12,50 = 182,16 \rightarrow 182 \text{ USD}$$

Resultado: a) 8125 MXN b) 23 MXN c) 182 USD

EJERCICIO 85

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2009

En la siguiente tabla se muestran el tipo de cambio entre la libra esterlina (GBP) y el dólar estadounidense (USD) y el tipo de cambio entre el USD y el Euro (EUR).

1 GBP 2,034 USD

1 USD 0,632 EUR

- Halle el tipo de cambio entre GBP y EUR en la forma 1 GBP = k EUR, donde k es una constante. Dé la respuesta redondeada a dos cifras decimales. Isabella cambia 400 USD a Euros, y le cobran por ello un 2 % de comisión.
- Calcule cuántos Euros le dan a Isabella. Dé la respuesta redondeando a dos cifras decimales.

a)

1. Queremos pasar de GBP a EUR pasando por el USD: 1 GBP = 2,034 USD y cada USD son 0,632 EUR.

$$2. k = 2,034 \times 0,632 = 1,285488.$$

3. Redondeando a dos decimales: 1 GBP = 1,29 EUR.

b)

1. Cambio sin comisión: $400 \times 0,632 = 252,80$ EUR.

2. La comisión del 2 % hace que reciba el 98 % de esa cantidad: $252,80 \times 0,98 = 247,744$.

3. Redondeado: 247,74 EUR.

Resultado: a) 1 GBP = 1,29 EUR b) 247,74 EUR

EJERCICIO 86 ★ Básico IB · P2 TZ2 Noviembre 2009

La siguiente tabla muestra el tipo de cambio de dólares estadounidenses a euros y dólares estadounidenses a Yen Japonés. Dé todas las respuestas a esta pregunta aproximadas con dos decimales.

1 USD 0.6337 EUROS

1 USD 99.7469 YEN

- a) Enrico tiene 475 USD.
- (i) ¿A cuántos euros equivale esto? Enrico va a un banco a cambiar sus dólares. El banco cobra una comisión del 3%.
- (ii) ¿Cuántos euros recibe Enrico?
- b) Encuentre el tipo de cambio de euros a yenes.

a)

- (i) Multiplicamos por el tipo USD a EUR: $475 \times 0,6337 = 301,0075$, es decir 301,01 EUR.
- (ii) Con una comisión del 3 % recibe el 97 % de esa cantidad: $301,0075 \times 0,97 = 291,977 \dots$, es decir 291,98 EUR.

b)

- Sabemos que 1 USD = 0,6337 EUR = 99,7469 YEN, así que 0,6337 EUR = 99,7469 YEN.
- Para 1 EUR dividimos entre 0,6337: $99,7469 \div 0,6337 = 157,40 \dots$
- Por tanto, 1 EUR = 157,40 YEN.

Resultado: a) i) 301,01 EUR ii) 291,98 EUR b) 1 EUR = 157,40 YEN

EJERCICIO 87 ★ Básico IB · P2 TZ0 Noviembre 2007

Robert, que vive en el Reino Unido, viaja a Bélgica. El tipo de cambio es de 1,37 euros por una libra esterlinas (GBP) con una comisión de 3 libras esterlinas, que se restan antes de que el intercambio tenga lugar. Robert le da al banco 120 libras esterlinas.

- a) Calcule correctamente con 2 decimales la cantidad de euros que recibe. Compra 1 kilogramo de bombones belgas a 1,35 euros los 100 g.
- b) Calcule el costo de sus chocolates en libras esterlinas con 2 decimales.

a)

- La comisión se resta antes del cambio: $120 - 3 = 117$ GBP.
- Los cambiamos: $117 \times 1,37 = 160,29$ EUR.

b)

- 1 kg = 1000 g = 10 veces 100 g, así que cuesta $10 \times 1,35 = 13,50$ EUR.
- Como 1 GBP = 1,37 EUR, dividimos: $13,50 \div 1,37 = 9,854 \dots$
- A dos decimales: 9,85 GBP.

Resultado: a) 160,29 EUR b) 9,85 GBP

EJERCICIO 88

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2002

El tipo de cambio de dólares estadounidenses (USD) a francos franceses (FFR) viene dado por $1 \text{ USD} = 7,5 \text{ FFR}$. Dé las respuestas a las siguientes cuestiones aproximadas con dos decimales.

- Convierta 115 dólares estadounidenses a francos franceses.
- Roger recibe 600 dólares australianos (AUD) por 2430 FFR. Calcule el valor del dólar estadounidense en dólares australianos.

a)

- Con $1 \text{ USD} = 7,5 \text{ FFR}$, se multiplica: $115 \times 7,5 = 862,5$.
- Con dos decimales: 862,50 FFR.

b)

- Pasa los francos a dólares estadounidenses, dividiendo entre 7,5: $\frac{2430}{7,5} = 324 \text{ USD}$.
- Esos 324 USD equivalen a 600 AUD, así que $1 \text{ USD} = \frac{600}{324} = 1,8518 \dots \text{ AUD}$.
- Con dos decimales: 1,85 AUD.

Resultado: a) 862,50 FFR b) $1 \text{ USD} = 1,85 \text{ AUD}$

EJERCICIO 89

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

Harry viajó desde EE. UU. a México y cambió 700 dólares (USD) a pesos (MXN). El tipo de cambio aplicado fue $1 \text{ USD} = 18,86 \text{ MXN}$.

- Calcule cuántos MXN recibió Harry. A la vuelta, Harry tenía aún 2400 MXN y los quiso volver a cambiar a USD. Había que pagar una comisión del 3,5 % por el cambio de divisas.
- Calcule en MXN, el valor de la comisión que pagó Harry. El tipo de cambio que se aplicó a este cambio de divisas fue $1 \text{ USD} = 17,24 \text{ MXN}$.
- Calcule cuántos USD recibió Harry. Dé la respuesta redondeando al número de céntimos más próximo.

a)

- Cada dólar se cambia por 18,86 pesos, así que multiplicamos: $700 \times 18,86 = 13\,202 \text{ MXN}$.
- Redondeando a 3 cifras significativas: aproximadamente 13 200 MXN.

b)

- La comisión es el 3,5 % de los 2400 MXN: $2400 \times \frac{3,5}{100} = 84 \text{ MXN}$.

c)

- Descontamos la comisión a los pesos que se cambian: $2400 - 84 = 2316 \text{ MXN}$.
- Para pasar de MXN a USD se **divide** entre el tipo de cambio: $\frac{2316}{17,24} = 134,338 \dots$
- Se redondea a céntimos (2 decimales): 134,34 USD.

Resultado: a) $\approx 13200 \text{ MXN}$ b) 84 MXN c) 134,34 USD

EJERCICIO 90

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

Daniela se va de vacaciones a Sudamérica. Vuela de Estados Unidos a Argentina parando en Perú en camino. En Perú cambia 85 dólares estadounidenses (USD) por nuevo sol peruano (PEN). El tipo de cambio es 1 USD = 3,25 PEN y se cobra una tarifa fija de 5 USD de comisión.

- Calcule la cantidad de PEN que recibe. Al finalizar las vacaciones de Daniela tiene 370 pesos argentinos (ARS). Ella convierte esto de nuevo a USD en un banco que cobra una comisión del 4% sobre el intercambio. El tipo de cambio es 1 USD = 9.60 ARS.
- Calcule la cantidad de USD que recibe.

a)

- La comisión es fija: 5 USD. Lo que realmente se cambia es $85 - 5 = 80$ USD.
- Multiplicamos por el tipo de cambio: $80 \times 3,25 = 260$ PEN.

b)

- Pasamos de ARS a USD dividiendo entre el tipo de cambio: $\frac{370}{9,60} = 38,5416 \dots$ USD.
- El banco cobra el 4%, así que Daniela recibe el 96%: $38,5416 \dots \times 0,96 = 37$ USD.

Resultado: a) 260 PEN b) 37 USD

EJERCICIO 91

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a 2 lugares decimales. José viaja de Buenos Aires a Sydney. Utiliza pesos argentinos, ARS, para comprar en un banco 350 dólares australianos, AUD. El tipo de cambio aplicado es 1 ARS = 0,1559 AUD.

- Utilice este tipo de cambio para calcular qué cantidad de ARS equivale a 350 AUD. El banco le cobra a José una comisión del 2%.
- Calcule la cantidad total de ARS que paga José para obtener esos 350 AUD. José utiliza su tarjeta de crédito para pagar la factura del hotel de Sydney. La factura son 585 AUD. La empresa de la tarjeta de crédito le cobra a José por este pago 4228,38 ARS. El tipo de cambio que utiliza la empresa de la tarjeta de crédito es 1 AUD = x ARS. No se le cobra ninguna comisión.
- Halle el valor de x .

a)

- El tipo de cambio es 1 ARS = 0,1559 AUD. Para pasar de AUD a ARS se divide: $\frac{350}{0,1559} = 2245,028 \dots$
- Redondeando a 2 decimales: 2245,03 ARS.

b)

- José paga esa cantidad más la comisión del 2%, es decir, el 102%: $2245,03 \times 1,02 = 2289,93$ ARS.

c)

- El tipo de cambio es lo que se paga por cada AUD: $x = \frac{4228,38}{585}$.
- Calculamos: $x = 7,228$, que redondeado a 2 decimales es 7,23.

Resultado: a) 2245,03 ARS b) 2289,93 ARS c) $x = 7,23$ ARS

EJERCICIO 92

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2016

En esta pregunta, dé todas las respuestas correctas al número entero más cercano. Loic viajó de China a Brasil. En el aeropuerto intercambió 3100 yuanes chinos, CNY, a Real Brasileño, BRL, a una tasa de cambio de $1 \text{ CNY} = 0.3871 \text{ BRL}$. No se cobró comisión.

- a) Calcule la cantidad de BRL que recibió. Cuando regresó a China, Loic cambió su BRL restante en un banco. El tipo de cambio en el banco fue de $1 \text{ CNY} = 0.3756 \text{ BRL}$ y se cobró una comisión del 5%. El recibió 285 CNY.
- b) (i) Calcule la cantidad de CNY que Loic habría recibido si no se hubiera cargado comisión.
- (ii) Calcule el monto de BRL que Loic intercambiado cuando regresó a China.

a)

1. Sin comisión, multiplicamos por el tipo de cambio: $3100 \times 0.3871 = 1200,01$.
2. Redondeando al entero: 1200 BRL.

b) (i)

1. Los 285 CNY que recibió son lo que queda después de quitar el 5 % de comisión, es decir, el 95 % del total.
2. Sin comisión habría recibido x con $0,95x = 285$, luego $x = \frac{285}{0,95} = 300 \text{ CNY}$.

- (ii) 1. Esos 300 CNY (sin comisión) corresponden a los BRL cambiados. Pasamos de CNY a BRL multiplicando por el tipo de cambio del banco: $300 \times 0.3756 = 112,68$. 2. Redondeando al entero: 113 BRL.

Resultado: a) 1200 BRL b) (i) 300 CNY (ii) 113 BRL

EJERCICIO 93

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a dos lugares decimales. Javier se va de viaje de negocios a Venezuela y se lleva 5000 dólares estadounidenses (USD). Cuando llega cambia USD 3000 a bolívars venezolanos (VEF). El tipo de cambio aplicado es $\text{USD } 1 = \text{VEF } 6,3021$.

- a) Calcule la cantidad de VEF que recibe Javier. Durante su estancia en Venezuela, Javier gasta USD 1250 y VEF 12 000. Al volver a casa, Javier cambia los VEF que le han sobrado a USD. El tipo de cambio aplicado es $\text{USD } 1 = \text{VEF } 8,7268$.
- b) Calcule la cantidad total de USD, que le han sobrado a Javier de los USD 5000 iniciales tras su viaje a Venezuela.

a)

1. Multiplicamos por el tipo de cambio: $3000 \times 6,3021 = 18\,906,30 \text{ VEF}$.

b)

1. USD que no cambió ni gastó: $5000 - 3000 - 1250 = 750 \text{ USD}$.
2. VEF que le sobran: $18\,906,30 - 12\,000 = 6\,906,30 \text{ VEF}$.
3. Pasamos a USD dividiendo entre el tipo de cambio de vuelta: $\frac{6\,906,30}{8,7268} = 791,39 \text{ USD}$.
4. Sumamos los dólares: $750 + 791,39 = 1\,541,39 \text{ USD}$.

Resultado: a) 18906,30 VEF b) Le sobran en total 1541,39 USD

EJERCICIO 94

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2015

Pietro llega a Singapur y, en el aeropuerto, cambia 800 euros (EUR) a Singapur dólares (SGD). Las tasas bancarias cotizadas en el aeropuerto para el intercambio de EUR por SGD se indican en la siguiente tabla. También se indican los tipos de cambio de SGD por libras esterlinas (GBP) y Dólares estadounidenses (USD). No se cobran comisiones por los intercambios.

El banco compra El banco vende

1 EUR = 1.55 SGD 1 EUR = 1.75 SGD

1 GBP = 1.92 SGD 1 GBP = 2.05 SGD

1 USD = 1.15 SGD 1 USD = 1.28 SGD

- Calcule el número de SGD que recibe Pietro. Pietro también tiene 100 GBP que desea cambiar a USD para un viaje a Camboya. Para realizar esta transacción, la GBP debe convertirse primero a SGD y luego a USD.
- Calcule la cantidad de USD que recibe Pietro.

a)

1. Pietro entrega euros y el banco los compra, así que se usa la columna «El banco compra»: 1 EUR = 1,55 SGD.

2. Multiplicamos la cantidad por el tipo de cambio:

$$800 \times 1,55 = 1240 \text{ SGD}$$

b)

1. Primero GBP a SGD. Pietro entrega libras, el banco las compra: 1 GBP = 1,92 SGD.

$$100 \times 1,92 = 192 \text{ SGD}$$

2. Después SGD a USD. Pietro entrega SGD y recibe USD, es decir, el banco vende USD: 1 USD = 1,28 SGD. Para saber cuántos USD corresponden a 192 SGD dividimos:

$$192 \div 1,28 = 150 \text{ USD}$$

Resultado: a) 1240 SGD b) 150 USD

EJERCICIO 95

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

Sebastian viaja desde Fiji a Brasil. Cambia 5000 dólares fijianos (FJD) a reales brasileños (BRL), a un tipo de cambio de 1 FJD = 1,1824 BRL.

- Calcule la cantidad exacta de BRL que recibe Sebastian. Sebastian había estimado que recibiría 6000 BRL.
- Halle el porcentaje de error que cometió en su estimación. Mientras está en Brasil Sebastian gasta 4000 BRL. En el viaje de vuelta a Fiji vuelve a cambiar los BRL que le han sobrado a FJD, al mismo tipo de cambio: 1 FJD = 1,1824 BRL.
- Calcule la cantidad de FJD que recibe. Dé la respuesta redondeando a dos lugares decimales.

a)

1. Multiplicamos los FJD por el tipo de cambio:

$$5000 \times 1,1824 = 5912 \text{ BRL}$$

b)

1. El porcentaje de error se calcula respecto al valor exacto:

$$\text{error} = \frac{|\text{valor aproximado} - \text{valor exacto}|}{\text{valor exacto}} \times 100$$

2. Sustituimos:

$$\frac{|6000 - 5912|}{5912} \times 100 = \frac{88}{5912} \times 100 \approx 1,49 \%$$

c)

1. Le sobran $5912 - 4000 = 1912$ BRL.

2. Para pasar de BRL a FJD dividimos entre el tipo de cambio (1 FJD cuesta 1,1824 BRL):

$$1912 \div 1,1824 \approx 1617,05 \text{ FJD}$$

Resultado: a) 5912 BRL b) Porcentaje de error = 1,49 % c) 1617,05 FJD

EJERCICIO 96

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2014

En esta pregunta, dé todas las respuestas correctas con dos decimales. Dumisani ha recibido una beca de 5000 dólares estadounidenses (USD) para estudiar en Singapur. Tiene que viajar desde Sudáfrica y debe cambiar USD por su tarifa aérea de 6600 sudafricanos rand (ZAR). El tipo de cambio es 1 USD = 8.2421 ZAR .

- a) Calcule la cantidad de USD que Dumisani debe cambiar para pagar su tarifa aérea. A su llegada a Singapur, Dumisani cambia 3000 USD a dólares de Singapur (SGD) para pagar sus cuotas escolares. Se cobra una comisión del 2,8% en el intercambio.
- b) Calcule el valor, en USD, de la comisión que debe pagar Dumisani. El tipo de cambio es 1 USD = 1.29903 SGD .
- c) Calcule el número de SGD que recibe Dumisani.

a)

1. Cada USD vale 8,2421 ZAR. Para saber cuántos USD equivalen a 6600 ZAR dividimos:

$$6600 \div 8,2421 \approx 800,77 \text{ USD}$$

b)

1. La comisión es el 2,8 % de los 3000 USD:

$$3000 \times 0,028 = 84,00 \text{ USD}$$

c)

1. La cantidad que se cambia de verdad es lo que queda tras la comisión: $3000 - 84 = 2916$ USD.

2. Multiplicamos por el tipo de cambio:

$$2916 \times 1,29903 \approx 3787,97 \text{ SGD}$$

Resultado: a) 800,77 USD b) 84 USD c) 3787,97 SGD

EJERCICIO 97

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2014

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando al número entero más próximo.

- a) Fumie se va de vacaciones al Reino Unido. Cambia 100 000 yenes japoneses (JPY) a libras esterlinas (GBP) y no le cobran ninguna comisión. El tipo de cambio entre GBP y JPY es 1 GBP = 129 JPY. Calcule el valor en GBP de los 100 000 JPY.
- b) Tras finalizar sus vacaciones en el Reino Unido, a Fumie le han sobrado 239 GBP. Cambia esta cantidad a JPY en un banco que no cobra comisión, y le dan 30 200 JPY.
- (i) Halle el tipo de cambio aplicado en esta segunda transacción.
- (ii) Determine si, al cambiar de GBP a JPY, el tipo de cambio hallado en el apartado (b)(i) es mejor para Fumie que el tipo de cambio del apartado (a). Justifique su respuesta.

a)

1. Cada GBP son 129 JPY, así que para pasar de JPY a GBP dividimos:

$$100000 \div 129 \approx 775,19 \rightarrow 775 \text{ GBP}$$

b) (i)

1. El tipo de cambio es lo que se recibe por cada libra:

$$30200 \div 239 \approx 126,36 \rightarrow 1 \text{ GBP} = 126 \text{ JPY}$$

b) (ii)

1. Al cambiar de GBP a JPY, a Fumie le conviene recibir **más** yenes por cada libra.
2. En el apartado (a) el banco daba 129 JPY por GBP y en la segunda operación solo 126 JPY por GBP. Como $126 < 129$, el tipo hallado en (b)(i) **no** es mejor para Fumie.

Resultado: a) 775 GBP b) (i) 1 GBP = 126 JPY (ii) No es mejor, porque $126 < 129$

EJERCICIO 98

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2014

En esta pregunta, dé todas las respuestas correctas con dos decimales. Albena viaja a Bulgaria en viaje de negocios. Le pagan 3550 levas búlgaras (BGN) al final de su viaje. Convierte todos sus BGN en euros (EUR), en una casa de cambio que vende 1 EUR por 1,95 BGN y cobra una comisión del 3%.

- a) Calcule la cantidad que recibe Albena en EUR. En la tienda del aeropuerto, Albena compra chocolates que cuestan 34,50 BGN. Ella usa 20 EUR para pagar los chocolates pero recibe su cambio en BGN. El tipo de cambio de la tienda es 1 EUR = 1,90 BGN.
- b) Encuentre cuántos BGN recibe como cambio.

a)

1. La casa de cambio cobra el 3 %, así que Albena solo cambia el 97 % de sus BGN:

$$3550 \times 0,97 = 3443,5 \text{ BGN}$$

2. Cada EUR cuesta 1,95 BGN, así que dividimos:

$$3443,5 \div 1,95 \approx 1765,90 \text{ EUR}$$

b)

1. Pasamos los 20 EUR a BGN con el tipo de la tienda:

$$20 \times 1,90 = 38 \text{ BGN}$$

2. El cambio es lo que sobra tras pagar los chocolates:

$$38 - 34,50 = 3,50 \text{ BGN}$$

Resultado: a) 1765,90 EUR b) 3,50 BGN

EJERCICIO 99 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2013

Yoshi se va a pasar un año viajando: primero va a ir de Japón a Italia, y luego a Estados Unidos. Antes de salir de Japón, Yoshi cambia 100000 yenes japoneses (JPY) a euros (EUR). El tipo de cambio es: 1 JPY= 0,006 EUR.

- Calcule cuánto dinero recibe Yoshi, en EUR. Yoshi se gasta en Italia 426,70 EUR. En un banco estadounidense cambia el dinero que le ha sobrado a dólares estadounidenses (USD), con el siguiente tipo de cambio: 1 USD= 0,673 EUR. El banco le cobra una comisión del 1,5 %.
- Calcule cuánto dinero recibe Yoshi en USD, una vez que ya ha pagado la comisión. Dé la respuesta redondeando al número entero de USD más cercano.

a)

1. Multiplicamos los JPY por el tipo de cambio:

$$100000 \times 0,006 = 600 \text{ EUR}$$

b)

1. Dinero que le sobra tras gastar en Italia:

$$600 - 426,70 = 173,30 \text{ EUR}$$

2. Tras la comisión del 1,5 % cambia el 98,5 %:

$$173,30 \times 0,985 = 170,7005 \text{ EUR}$$

3. Cada USD cuesta 0,673 EUR, así que dividimos:

$$170,7005 \div 0,673 \approx 253,64 \rightarrow 254 \text{ USD}$$

Resultado: a) 600 EUR b) 254 USD

EJERCICIO 100 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2012

En esta pregunta, dé todas las respuestas redondeando a dos cifras decimales. Chiara es una turista italiana que está de visita en Suecia. El tipo de cambio de euros (€) a coronas suecas (SEK) es 1€ = 10,275 SEK. Chiara cambia 350 euros a coronas suecas en un banco que cobra una comisión del 2%.

- Calcule, en SEK, la comisión que le cobran.
- Escriba cuánto dinero le da el banco a Chiara una vez que ya le ha cobrado la comisión. Chiara vuelve a Italia con 296 SEK. Vuelve a cambiar este dinero a euros en un banco, y recibe 32€. El banco no le cobra ninguna comisión.
- Calcule cuál es el valor en SEK de 1€.

a)

1. Pasamos los euros a coronas sin comisión:

$$350 \times 10,275 = 3596,25 \text{ SEK}$$

2. La comisión es el 2 % de esa cantidad:

$$3596,25 \times 0,02 = 71,925 \rightarrow 71,93 \text{ SEK}$$

b)

1. El banco le entrega lo que queda tras la comisión:

$$3596,25 - 71,925 = 3524,325 \rightarrow 3524,33 \text{ SEK}$$

c)

1. Con 296 SEK recibe 32 €, así que 1 € equivale a:

$$296 \div 32 = 9,25 \text{ SEK}$$

Resultado: a) 71,93 SEK b) 3524,33 SEK c) 1€ = 9,25 SEK

EJERCICIO 101

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

Dé todas las respuestas a esta pregunta aproximadas con dos decimales. Isabel viaja de Ginebra a Toronto a través de Amsterdam. Cambia 1240 francos suizos (CHF) a euros (EUR). El tipo de cambio es 1CHF= 0,7681 EUR.

- a) Calcule la cantidad de euros que recibe Isabel. Isabel luego cambia 750 EUR a dólares canadienses (CAD) y se le cobra un 3,12% comisión. El tipo de cambio es 1CAD= 0,7470 EUR.
- b) Calcule la cantidad de dólares canadienses que recibe.

a)

1. Multiplicamos los CHF por el tipo de cambio:

$$1240 \times 0,7681 = 952,444 \approx 952,44 \text{ EUR}$$

b)

1. La comisión es el 3,12 % de 750 EUR:

$$750 \times 0,0312 = 23,40 \text{ EUR}$$

2. Se cambian $750 - 23,40 = 726,60$ EUR.

3. Cada CAD cuesta 0,7470 EUR, así que dividimos:

$$726,60 \div 0,7470 \approx 972,69 \text{ CAD}$$

Resultado: a) 952,44 EUR b) 972,69 CAD

EJERCICIO 102

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2011

Un fabricante de Inglaterra fabrica 16000 estatuas de jardín. 12% son defectuosos y no se puede vender.

- a) Encuentre el número de estatuas que no tienen defectos. El fabricante vende cada estatua no defectuosa por 5,25 libras esterlinas (GBP) a una empresa estadounidense. El tipo de cambio de GBP a dólares estadounidenses (USD) es 1GBP= 1.6407 USD.
- b) Calcule la cantidad en USD que pagó la empresa estadounidense por todas las estatuas no defectuosas. Dé su respuesta aproximada con dos decimales. La empresa estadounidense vende una de las estatuas a un cliente australiano por 12 USD. El tipo de cambio de dólares australianos (AUD) a USD es 1 AUD= 0.8739 USD.
- c) Calcule la cantidad que el cliente australiano paga, en AUD, por esta estatua. Dé su respuesta aproximada con dos decimales.

a)

1. El 12 % son defectuosos, así que no tienen defectos el $100\% - 12\% = 88\%$.

2. Calculamos el 88 % del total: $16000 \times 0,88 = 14080$.

b)

1. Ingresos en GBP: $14080 \times 5,25 = 73920$ GBP.

2. Para pasar a USD multiplicamos por el tipo de cambio (1 GBP = 1,6407 USD): $73920 \times 1,6407 = 121280,544$ USD.

3. Redondeamos a dos decimales: 121280,54 USD.

c)

1. Como $1 \text{ AUD} = 0,8739 \text{ USD}$, para pasar de USD a AUD hay que dividir entre 0,8739.

2. $12 \div 0,8739 = 13,7317 \dots$, que redondeado es 13,73 AUD.

Resultado: a) 14080 estatuas b) 121280,54 USD c) 13,73 AUD

EJERCICIO 103

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

En esta pregunta, dé todas las respuestas aproximadas con 2 decimales. George viajó de EE. UU. A Europa y cambió 1200 dólares (USD) por Euros (EUR). El tipo de cambio fue $1 \text{ USD} = 0,8154 \text{ EUR}$.

- a) Calcule la cantidad de EUR que recibió George. A su regreso, George tenía 160 EUR para volver a cambiar a USD. Se cobró una comisión del 4,5% en el intercambio. El tipo de cambio fue $1 \text{ USD} = 0,8202 \text{ EUR}$.
- b) Calcule el valor, en EUR, de la comisión que pagó George.
- c) Calcule la cantidad de dólares que recibió George.

a)

1. Multiplicamos los dólares por el tipo de cambio: $1200 \times 0,8154 = 978,48 \text{ EUR}$.

b)

1. La comisión es el 4,5 % de los 160 EUR que cambia.

2. $160 \times 0,045 = 7,20 \text{ EUR}$.

c)

1. Tras la comisión le quedan para cambiar: $160 - 7,20 = 152,80 \text{ EUR}$.

2. Como $1 \text{ USD} = 0,8202 \text{ EUR}$, para pasar de EUR a USD dividimos: $152,80 \div 0,8202 = 186,296 \dots$

3. Redondeado: 186,30 USD.

Resultado: a) 978,48 EUR b) Comisión = 7,2 EUR c) 186,30 USD

EJERCICIO 104

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2010

Susi viaja de Singapur a Tailandia y cambia 1500 dólares de Singapur (SGD) a baht tailandés (THB). El tipo de cambio es $1 \text{ SGD} = 21,03464 \text{ THB}$.

- a) Calcule el número de baht tailandeses que compra Susi. Dé su respuesta aproximada al baht más cercano. Susi sale de Tailandia y viaja a Indonesia. Tiene 20000 THB y los usa para comprar rupia indonesia (IDR). El tipo de cambio es de 3,28352 THB por 1000 IDR.
- b) Calcule el número total de rupias indonesias que recibe Susi, redondeado a las mil rupias más cercanas. Susi quiere encontrar el tipo de cambio aproximado entre dólares de Singapur y Rupia indonesia y utiliza los tipos de cambio del baht tailandés para hacer esto.
- c) Calcule el tipo de cambio de Susi entre los dólares de Singapur y la rupia indonesia. Dé su respuesta en la forma $1 \text{ SGD compra } x \text{ IDR}$, donde x se da correctamente a la rupia más cercana.

a)

1. Multiplicamos por el tipo de cambio: $1500 \times 21,03464 = 31551,96 \text{ THB}$.

2. Al baht más cercano: 31552 THB.

b)

1. El tipo es 3,28352 THB por cada 1000 IDR. Por tanto, el número de grupos de 1000 IDR que compra es $20000 \div 3,28352 = 6091,02 \dots$
2. En rupias: $6091,02 \times 1000 \approx 6\,091\,024$ IDR.
3. A las mil rupias más cercanas: 6091000 IDR.

c)

1. Pasamos de SGD a THB y de THB a IDR. Primero, $1 \text{ THB} = \frac{1000}{3,28352} = 304,5512 \dots \text{ IDR}$.
2. Entonces $1 \text{ SGD} = 21,03464 \text{ THB} = 21,03464 \times 304,5512 \dots = 6406,12 \dots \text{ IDR}$.
3. A la rupia más cercana: 6406.

Resultado: a) ≈ 31552 THB b) 6091000 IDR c) 1 SGD = 6406 IDR

EJERCICIO 105

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2008

Jane planea viajar de Amsterdam a Chicago. Ella cambia 1500 Euros (EUR) a dólares estadounidenses (USD) a un tipo de cambio de 1 EUR a 1,33 USD. Dar todas las respuestas en esta pregunta aproximadas con dos decimales.

- a) Calcule la cantidad de USD que recibe Jane. Jane gasta 1350 USD y luego decide convertir el resto de nuevo a EUR a razón de 1 EUR a 1,38 USD.
- b) Calcule la cantidad de EUR que recibe Jane. Si Jane hubiera esperado hasta regresar a Amsterdam, podría haber cambiado su USD a razón de 1 EUR a 1,36 USD, pero el banco habría cobrado una comisión del 0,8%.
- c) Calcule la cantidad de EUR que Jane ganó o perdió cambiando su dinero en Chicago .

a)

$$1. 1500 \times 1,33 = 1995 \text{ USD.}$$

b)

1. Le quedan: $1995 - 1350 = 645 \text{ USD}$.
2. Como $1 \text{ EUR} = 1,38 \text{ USD}$, dividimos: $645 \div 1,38 = 467,39 \text{ EUR}$.

c)

1. En Amsterdam: $645 \div 1,36 = 474,26 \dots \text{ EUR}$.
2. Con la comisión del 0,8 % recibiría el 99,2 %: $474,26 \dots \times 0,992 = 470,47 \text{ EUR}$.
3. Comparamos con lo que recibió en Chicago: $467,39 - 470,47 = -3,08$. Habría tenido 3,08 EUR más esperando, así que perdió esa cantidad.

Resultado: a) 1995 USD b) 467,39 EUR c) Jane perdió 3,08 EUR cambiando su dinero en Chicago

EJERCICIO 106

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2008

La siguiente tabla muestra algunos tipos de cambio para el yen japonés (JPY).

Moneda	1 JPY
Dolar Canadiense	0.010406
Yuan Chino	0.07127
Euro	0.0072591
Corona Noruega	0.057319

Minbin tiene 1250 yenes japoneses que desea cambiar por yuanes chinos.

- Calcule cuántos yuanes recibirá. Dé su respuesta al Yuan más cercano. Rupert tiene 855 dólares canadienses que desea cambiar por yenes japoneses.
- Calcule cuántos yenes recibirá. Dé su respuesta al Yen más cercano.
- Encuentre cuántas coronas noruegas hay por euro. Dé su respuesta aproximada a 2 lugares decimales.

a)

- $1250 \times 0,07127 = 89,0875$.
- Al yuan más cercano: 89 yuanes.

b)

- Como $1 \text{ JPY} = 0,010406 \text{ CAD}$, para pasar de CAD a JPY dividimos: $855 \div 0,010406 = 82164,1 \dots$
- Al yen más cercano: 82164 JPY.

c)

- Con 1 JPY: $0,0072591 \text{ EUR} = 0,057319 \text{ NOK}$.
- Para 1 EUR dividimos: $0,057319 \div 0,0072591 = 7,896 \dots$
- A dos decimales: 7,90.

Resultado: a) 89 Yuan b) 82164 JPY c) 1 EUR = 7,90 Coronas Noruegas

EJERCICIO 107

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

El tipo de cambio entre rupias de la India (INR) y dólares de Singapur (S\$) es el siguiente: $100 \text{ INR} = \text{S\$}3,684$. Kwai Fan cambia S\$500 a rupias.

- Calcule cuántas rupias de la India le darán, utilizando para ello este tipo de cambio. Dé su respuesta aproximada al valor entero de rupias más cercano. Cuando vuelve a Singapur, Kwai Fan tiene 2500 rupias que le han sobrado del viaje. Quiere cambiar estas rupias a dólares de Singapur. Esta operación tiene una comisión del 3 %, y el tipo de cambio aplicado es $100 \text{ INR} = \text{S\$}3,672$.
- Calcule en rupias de la India la comisión que le cobran por realizar este cambio.
- Calcule en dólares de Singapur la cantidad de dinero que recibe, dando su respuesta redondeada a dos lugares decimales.

a)

- $100 \text{ INR} = 3,684 \text{ S\$}$, luego por cada S\$ recibe $100 \div 3,684$ rupias.
- $500 \times \frac{100}{3,684} = 13572,2 \dots$
- Al entero más cercano: 13572 INR.

b)

1. La comisión es el 3 % de 2500 INR: $2500 \times 0,03 = 75$ INR.

c)

1. Se cambian $2500 - 75 = 2425$ INR.

2. Con 100 INR = 3,672 S\$: $2425 \times \frac{3,672}{100} = 89,046$.

3. A dos decimales: 89,05 S\$.

Resultado: a) 13572 INR b) Comisión = 75 INR c) 89,05 S\$

EJERCICIO 108

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2006

Sven piensa viajar a Europa. Retira \$ 800 (dólares) de su cuenta de ahorros y los convierte a euros. El banco compra los euros a \$1: € 0,785 y los vende a \$1: € 0,766.

- Utilice la tasa que corresponda para calcular la cantidad en euros que recibirá Sven.
- Suponga que el viaje se cancela. ¿Cuánto recibirá Sven si la cantidad en euros de la parte (a) se cambia nuevamente a dólares?
- ¿Cuánto dinero ha perdido Sven con las dos transacciones? Expresé su respuesta como porcentaje de la cantidad original de \$ 800 que tenía Sven.

a) Sven entrega dólares y quiere recibir euros, es decir, el banco le *vende* euros. La tasa que corresponde es la de venta: 1 \$ = 0,766 €.

1. Multiplica la cantidad en dólares por la tasa: $800 \times 0,766 = 612,8$ €.

2. Redondeando al euro: ≈ 613 €.

b) Ahora Sven entrega euros y recibe dólares, es decir, el banco le *compra* los euros. La tasa que corresponde es la de compra: 1 \$ = 0,785 €.

1. Como 1 \$ equivale a 0,785 €, para pasar de euros a dólares se divide entre 0,785.

2. Con la cantidad redondeada del apartado a): $\frac{613}{0,785} = 780,89 \dots \approx 781$ \$.

c) La pérdida es la diferencia entre lo que tenía y lo que recupera.

1. Pérdida: $800 - 781 = 19$ \$.

2. Como porcentaje de la cantidad original: $\frac{19}{800} \times 100 = 2,375\% \approx 2,38\%$.

(Si se arrastran los decimales sin redondear, $612,8/0,785 = 780,64$ \$ y el porcentaje sale $\approx 2,42\%$. La diferencia viene solo del redondeo intermedio a 613 y 781.)

Resultado: a) ≈ 613 EUR b) 781 \$ c) 2,38%

EJERCICIO 109

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Clara visita Gran Bretaña desde los Estados Unidos y cambia 1000 dólares estadounidenses (USD) a libras (GBP). El tipo de cambio es 1 USD = 0,543 GBP. El banco cobra una comisión del 2% por cada transacción.

- Calcule cuántas libras esterlinas recibe. Luego Clara quiere viajar a Francia. Ella cambia 150 GBP a euros (€) a una tasa de 1 GBP = 1,35 €. El banco cobra comisión y luego le da a Clara 200 €.
- Encuentre el total de la comisión en GBP.

a) Primero se cambia y luego se descuenta la comisión del 2 %.

1. Cambio sin comisión: $1000 \times 0,543 = 543$ GBP.

2. Comisión del 2 %: $543 \times 0,02 = 10,86$ GBP.

3. Lo que recibe: $543 - 10,86 = 532,14$ GBP (equivale a multiplicar por 0,98), es decir, ≈ 532 GBP.

b) La comisión se descubre comparando lo que debería recibir con lo que recibe realmente.

1. Sin comisión, 150 GBP serían: $150 \times 1,35 = 202,5$ €.

2. Clara recibe 200 €, así que la comisión en euros es $202,5 - 200 = 2,5$ €.

3. Para pasarla a libras se divide entre la tasa (1 GBP = 1,35 €): $\frac{2,5}{1,35} = 1,85 \dots$ GBP.

Resultado: a) 532 GBP b) Comisión = 1,85 GBP

EJERCICIO 110

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2003

Zog, del planeta Marte, desea cambiar unos dólares marcianos (MD) a dólares de los EE.UU. (USD). La tasa de cambio es 1 MD=0,412 USD. El banco cobra de comisión 2 %.

a) ¿Cuántos dólares de los EE.UU. recibirá Zog si paga 3500 MD? Zog se encuentra con Zania, de Venus, cuya moneda es la rupia venusina (VR). Quieren cambiar dinero y evitar los aranceles bancarios. La tasa de cambio es 1MD= 1,63 VR.

b) ¿Cuántos dólares marcianos, redondeados al dólar más próximo, recibirá Zania si le da a Zog 2100 VR?

a)

1. Cambio sin comisión: $3500 \times 0,412 = 1442$ USD.

2. Comisión del 2 %: $1442 \times 0,02 = 28,84$ USD.

3. Zog recibe: $1442 - 28,84 = 1413,16$ USD ≈ 1413 USD.

b) Zog y Zania cambian directamente entre ellos, sin banco, así que no hay comisión.

1. Tasa: 1 MD = 1,63 VR. Para pasar de rupias a dólares marcianos se divide entre 1,63.

2. $\frac{2100}{1,63} = 1288,34 \dots$

3. Redondeando al dólar más próximo: 1288 MD.

Resultado: a) ≈ 1413 USD b) 1288 MD

EJERCICIO 111

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2013

Neung regresa a Vietnam después de trabajar en Singapur. Tiene 5000 dólares de Singapur (SGD) y los cambia a dólares estadounidenses (USD) para llevar a casa. El tipo de cambio entre dólares de Singapur (SGD) y dólares estadounidenses (USD) es 1 USD =1,2945 SGD. También hay una comisión del 2,4% en el intercambio.

a) Calcule el monto de la comisión del intercambio en SGD.

b) Calcule la cantidad de dólares estadounidenses (USD) que Neung se lleva a casa. Dé su respuesta redondeada con 2 lugares decimales. En el aeropuerto de Vietnam, Neung cambia 150 USD en dong vietnamita (VND) para pagar su transporte a casa. El tipo de cambio entre dólares estadounidenses (USD) y dong vietnamita (VND) es 1 USD= 19495 VND No hay comisión.

c) Calcule la cantidad de dong vietnamitas que recibe Neung. Dé su respuesta al millar de dong más cercano.

a)

1. La comisión es el 2,4 % de los 5000 SGD:

$$5000 \times 0,024 = 120 \text{ SGD}$$

b)

1. Se cambian $5000 - 120 = 4880$ SGD.

2. Cada USD vale 1,2945 SGD, así que dividimos:

$$4880 \div 1,2945 \approx 3769,80 \text{ USD}$$

c)

1. Multiplicamos los USD por el tipo de cambio:

$$150 \times 19495 = 2\,924\,250 \text{ VND}$$

2. Al millar más cercano:

$$2\,924\,250 \approx 2\,924\,000 \text{ VND}$$

Resultado: a) 120 SGD b) 3769,80 USD c) 2 924 000 VND

Préstamos y amortizaciones

EJERCICIO 112

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2013

La tabla muestra la amortización (cuota) mensual que se ha de pagar por cada \$10000 que se piden prestados, dependiendo del tipo de interés nominal anual y del plazo del préstamo.

Plazo del préstamo (años)	3 %	5 %	7 %
5	179,69	188,72	198,02
10	96,57	106,07	116,11
15	69,06	79,08	89,89
20	55,46	66,00	77,53
25	47,43	58,46	70,68

(Amortización (cuota) mensual en \$, por cada \$10000; los porcentajes son el tipo de interés nominal anual.)

Zachary pide un préstamo de \$80000, a un tipo de interés nominal anual del 5%. Ha de devolverlo en un plazo de 20 años.

- a) Utilizando la tabla, calcule los intereses totales que tendrá que pagar Zachary. Finley pide prestada una cantidad de dinero, a un tipo de interés nominal anual del 7%. Ha de devolverlo en un plazo de 10 años. Su amortización (cuota) mensual no puede ser mayor de \$500.
- b) Utilizando la tabla, calcule cuál es la cantidad máxima que puede pedir prestada Finley. Dé la respuesta redondeando a la centena de \$ más próxima.

a)

1. Para \$10000 la cuota mensual a 5 % y 20 años es \$66,00. Un préstamo de \$80000 son 8 veces esa cantidad:

$$8 \times 66,00 = 528 \$ \text{ al mes}$$

2. Son $20 \times 12 = 240$ pagos:

$$528 \times 240 = 126\,720 \$ \text{ devueltos en total}$$

3. Los intereses son lo devuelto menos lo prestado:

$$126\,720 - 80\,000 = 46\,720 \$$$

b)

1. Para 7 % y 10 años la cuota es \$116,11 por cada \$10000.

2. Si pide x miles de bloques de \$10000, la cuota es $116,11 x \leq 500$, de donde

$$x \leq \frac{500}{116,11} \approx 4,306$$

3. Cantidad máxima: $4,306 \times 10000 \approx 43\,063$ \$.

4. Redondeado a la centena queda 43 100, pero esa cantidad daría una cuota de unos \$500,4, que supera el límite. Para no pasarse de \$500 se toma el valor por defecto: \$43000.

Resultado: a) 46720 \$ b) La cantidad máxima que puede pedir es 43000 \$

EJERCICIO 113

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2008

La siguiente tabla muestra los pagos mensuales necesarios para pagar un préstamo de \$ 1000 con varias tarifas y periodos de tiempo.

Plazo del préstamo (meses)	5 %	5.5 %	6 %	6.5 %
12	87.50	87.92	88.34	88.75
18	59.74	60.21	60.62	61.12
24	45.94	46.38	46.84	47.25
30	37.66	38.11	38.57	39.04
36	32.16	32.62	33.09	33.56
42	28.25	28.72	29.20	29.70
48	25.33	25.81	26.30	26.80

(Tabla de reembolsos mensuales por tasa de interés anual para \$1000.)

Sarah obtiene un préstamo personal por \$ 24 000 para comprar un automóvil. Ella negocia un préstamo para tres años al 6% de interés anual.

- Calcule el reembolso mensual exacto que hará.
- Encuentre el total exacto de los reembolsos que hará. Beryl obtuvo un préstamo de \$ 10 000 a 18 meses. El total que pagó por el préstamo fue \$ 10 837.80.
- Encuentre la tasa de interés que se cobra por el préstamo.

a)

- La tabla es para préstamos de \$1000. En la fila de 36 meses (3 años) y la columna del 6 %, el pago mensual es \$33,09 por cada \$1000.
- Como Sarah pide \$24 000, son 24 veces esa cantidad: $24 \times 33,09 = 794,16$.

b)

- Hará 36 pagos mensuales: $36 \times 794,16 = 28589,76$.

c)

- Los 10 000 son 10 veces 1000, así que dividimos el total pagado entre 10 para saber lo que corresponde a \$1000: $10837,80 \div 10 = 1083,78$.
- Dividimos entre los 18 meses: $1083,78 \div 18 = 60,21$ por mes.
- En la fila de 18 meses, 60,21 aparece en la columna del 5,5 %.

Resultado: a) 794,16 \$ b) 28589,76 \$ c) Tasa de interés 5,5%

EJERCICIO 114

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2007

La tabla que aparece a continuación muestra las amortizaciones mensuales para un préstamo de \$ 10 000 y para diversas tasas de interés (tipos de interés) nominal anual.

Plazo del préstamo (años)	7%	8%	9%
5	198,0112	202,7634	207,5836
10	116,1085	121,3276	126,6758
15	89,8828	95,5652	101,4267
20	77,5299	83,6440	89,9726
25	70,6779	77,1816	83,9196

(Tabla de las amortizaciones mensuales en \$, para un préstamo de \$ 10 000, según el tipo de interés anual.)

Para poder comprarse un piso, Leticia pide un préstamo de \$ 150 000 a devolver en 20 años y con un tipo de interés del 8 %.

- Calcule la amortización mensual exacta que le corresponde a Leticia.
- Halle la cantidad exacta de interés que pagará por el préstamo a lo largo de los 20 años.

a)

- En la tabla, para 20 años y 8 %, la amortización mensual por cada \$10 000 es \$83,6440.
- \$150 000 son 15 veces \$10 000: $15 \times 83,6440 = 1254,66$.

b)

- Total pagado en 20 años ($20 \times 12 = 240$ pagos): $240 \times 1254,66 = 301118,40$.
- El interés es lo pagado menos lo prestado: $301118,40 - 150000 = 151118,40$.

Resultado: a) Amortización mensual = 1254,66 \$ b) Interés que pagará = 151118,4 \$