

Trigonometría

Trigonometría para IB Análisis y Enfoques NS: radianes, razones, identidades, ecuaciones trigonométricas, teoremas del seno y del coseno, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-analisis-y-enfoques-ns/trigonometria.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

La trigonometría relaciona los **ángulos** de un triángulo con las **longitudes** de sus lados. Empieza en el triángulo rectángulo, se extiende a cualquier ángulo con la **circunferencia goniométrica** y los **radianes**, y termina resolviendo **cualquier triángulo** con los teoremas del seno y del coseno. Por el camino aparecen las **identidades** (suma, ángulo doble) y las **ecuaciones trigonométricas**, que el IB pregunta en casi todas las convocatorias.

Orden recomendado

Sigue los apartados en orden: cada uno usa lo anterior. Si ya dominas el triángulo rectángulo, empieza por los **radianes y la circunferencia goniométrica**. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

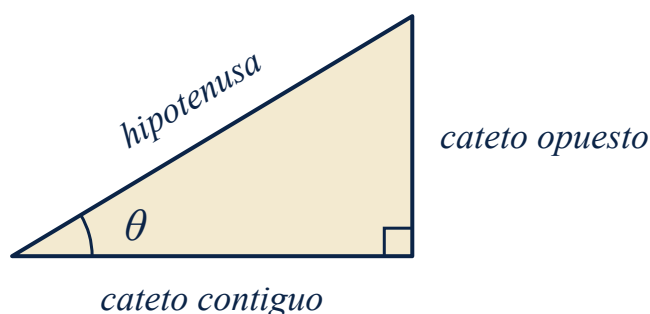
Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

IDEA CLAVE

En un triángulo rectángulo, el cociente entre dos lados depende solo del ángulo agudo que se mira: esas razones son el seno, el coseno y la tangente. Con ellas, y con el teorema de Pitágoras, se calcula cualquier lado o ángulo que falte. Es la base de toda la trigonometría del curso y aparece tanto en la Prueba 1, con valores exactos, como en la Prueba 2, con la calculadora.

Los lados de un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo, el lado más largo, opuesto al ángulo recto, es la **hipotenusa**. Los otros dos son los **catetos**. Si eliges uno de los ángulos agudos, θ , los catetos se distinguen por su posición respecto a él: el **cateto opuesto** es el que no toca a θ , y el **cateto contiguo** es el que forma el ángulo junto con la hipotenusa.



Dos recordatorios que se usan constantemente: los tres ángulos de un triángulo suman 180° , así que los dos agudos de un triángulo rectángulo suman 90° (son **complementarios**); y los lados cumplen el teorema de Pitágoras, $\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}_1^2 + \text{cateto}_2^2$. Cambiar de ángulo agudo intercambia los papeles de «opuesto» y «contiguo».

Seno, coseno y tangente

Todos los triángulos rectángulos con el mismo ángulo agudo θ son semejantes (tienen los mismos ángulos), de modo que sus lados son proporcionales. Por eso el cociente entre dos lados cualesquiera no depende del tamaño del triángulo, solo de θ .

DEFINICIÓN • SENO, COSENO Y TANGENTE DE UN ÁNGULO AGUDO

Para un ángulo agudo θ de un triángulo rectángulo:

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \cos \theta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} \quad \tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

Como la hipotenusa es el lado mayor, $0 < \sin \theta < 1$ y $0 < \cos \theta < 1$ para un ángulo agudo; en cambio, $\tan \theta$ puede valer cualquier número positivo.

Por ejemplo, en un triángulo de catetos 3 y 4 la hipotenusa es 5. Para el ángulo que se opone al cateto 3: $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{4}{5}$ y $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Para el otro ángulo agudo, φ , el cateto opuesto es 4, y salen $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, $\cos \varphi = \frac{3}{5}$.

Observa que $\sin \varphi = \cos \theta$. No es casualidad: lo que es opuesto para un ángulo es contiguo para el otro.

Relaciones entre las razones

PROPIEDAD · IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Para cualquier ángulo agudo θ :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \sin \theta = \cos (90^\circ - \theta)$$

Las tres salen directamente de la definición. Si llamamos a al cateto opuesto, b al contiguo y h a la hipotenusa:

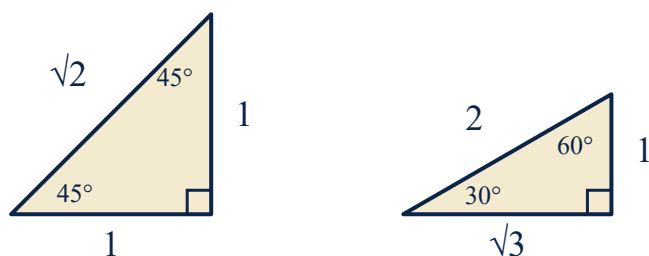
- $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a/h}{b/h} = \frac{a}{b} = \tan \theta$.
- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \frac{a^2 + b^2}{h^2} = 1$, por Pitágoras.
- El ángulo $90^\circ - \theta$ es el otro ángulo agudo, para el que el opuesto es b y el contiguo es a ; por tanto su coseno es $\frac{a}{h} = \sin \theta$.

Gracias a la segunda identidad, si conoces una razón de un ángulo agudo, puedes hallar las demás sin calcular el ángulo: se despeja la otra con $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ (tomando la raíz positiva, porque el ángulo es agudo) y se usa $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.

Valores exactos de 30° , 45° y 60°

En la Prueba 1 no hay calculadora y se espera que conozcas estos valores. No hace falta memorizarlos a ciegas: salen de dos triángulos sencillos.

- La mitad de un cuadrado de lado 1, cortado por una diagonal, es un triángulo rectángulo con ángulos $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ y lados 1, 1, $\sqrt{2}$.
- La mitad de un triángulo equilátero de lado 2, cortado por una altura, es un triángulo rectángulo con ángulos $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ y lados 1, $\sqrt{3}$, 2 (la altura mide $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$).



Leyendo las razones en estos triángulos:

PROPIEDAD • VALORES EXACTOS

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Por ejemplo, en el triángulo de 45° : $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tras racionalizar. Fíjate en el patrón del seno, $\frac{\sqrt{1}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, y en que el coseno lo recorre al revés: es la identidad $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$.

NOTA • EXACTO O APROXIMADO

Si el enunciado pide el **valor exacto**, deja la respuesta con raíces y fracciones, y racionaliza el denominador. Si no lo dice, en la Prueba 2 se da el resultado decimal con **tres cifras significativas** (salvo que se indique otra cosa). Calcula con los valores guardados en la calculadora, sin redondear en los pasos intermedios.

Resolver un triángulo rectángulo

Resolver un triángulo rectángulo es hallar todos sus lados y ángulos a partir de algunos datos. Con el ángulo recto ya conoces uno de los ángulos; hacen falta **dos datos más**, de los cuales al menos uno es un lado.

MÉTODO • RESOLVER UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

1. Haz un dibujo y marca los datos y la incógnita. Si el enunciado no incluye figura, dibújala.
2. Respecto al ángulo que conoces (o que buscas), identifica qué lados intervienen: opuesto, contiguo, hipotenusa.
3. Elige la razón que relaciona el lado conocido con el lado buscado: seno si intervienen opuesto e hipotenusa, coseno si contiguo e hipotenusa, tangente si opuesto y contiguo.
4. Plantea la ecuación y despeja. Para un lado, se multiplica o divide; para un ángulo, se usa la función inversa: $\theta = \sin^{-1}(\cdot)$, $\cos^{-1}(\cdot)$ o $\tan^{-1}(\cdot)$.
5. Los demás elementos salen con Pitágoras o con la suma de ángulos agudos igual a 90° .

NOTA • CALCULADORA

Al usar $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ o $\tan^{-1}$ para hallar un ángulo, comprueba que la calculadora está en **grados** (y no en radianes), porque estos ángulos se dan en grados. Si el ángulo sale absurdo, revisa ese ajuste antes que nada. En la Prueba 2 conviene guardar en memoria los resultados intermedios para evitar errores de redondeo.

Cuando la incógnita es un lado, conviene elegir la razón que la deja **multiplicando o dividiendo por el dato**, sin ángulos complicados. Si la incógnita queda en el denominador, por ejemplo $\sin 30^\circ = \frac{5}{x}$, se despeja igualmente: $x = \frac{5}{\sin 30^\circ}$.

Un triángulo que no es rectángulo, pero se puede cortar con una altura en dos que sí lo son, también se resuelve con estas razones. Más adelante verás los teoremas del seno y del coseno, que lo hacen de forma directa (teoremas del seno y del coseno).

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Razones de un triángulo de catetos 8 y 15

En un triángulo ABC , rectángulo en C , los catetos miden $BC = 8$ y $AC = 15$. Sea A el ángulo opuesto al cateto BC .

- Halla la hipotenusa AB .
- Calcula $\sin A$, $\cos A$ y $\tan A$.
- Calcula $\tan B$.

- Por Pitágoras, $AB^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$, luego $AB = 17$.
- Para el ángulo A , el cateto opuesto es $BC = 8$ y el contiguo es $AC = 15$:

$$\sin A = \frac{8}{17} \quad \cos A = \frac{15}{17} \quad \tan A = \frac{8}{15}$$
- Para el ángulo B los papeles se intercambian: el opuesto es $AC = 15$ y el contiguo es $BC = 8$, así que $\tan B = \frac{15}{8}$. Se cumple $\tan B = \frac{1}{\tan A}$, porque A y B son complementarios.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Conocida una razón, hallar las demás

Sea θ un ángulo agudo con $\sin \theta = \frac{2}{3}$.

- Halla $\cos \theta$ y $\tan \theta$ en forma exacta, sin calcular θ .
- Calcula el valor exacto de $\sin(90^\circ - \theta)$.
- Calcula el valor exacto de $E = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \tan 30^\circ$.

- De $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$:

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \implies \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Se toma la raíz positiva porque θ es agudo. Después,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- Como $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, el valor es $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

- Con la tabla de valores exactos:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

La altura de un edificio desde dos puntos

Un edificio vertical está sobre un terreno horizontal. Desde un punto P del suelo, el ángulo de elevación de su parte más alta es 30° . Desde un punto Q , situado en línea recta con P y el pie del edificio, a 40 m de P y más cerca del edificio, el ángulo de elevación es 45° . Sea h la altura del edificio en metros.

- Halla el valor exacto de h .
- Halla el valor exacto de la distancia en línea recta entre P y la parte más alta del edificio.

a) 1. **Figura.** Sea B el pie del edificio y T su parte más alta. Los puntos P , Q y B están alineados, con $PQ = 40$ y $TB = h$.

2. **Dos triángulos rectángulos con el mismo cateto h .** En el triángulo QBT , con ángulo 45° en Q : $\tan 45^\circ = \frac{h}{QB}$, luego $QB = h$. En el triángulo PBT , con ángulo 30° en P : $\tan 30^\circ = \frac{h}{PB}$, luego $PB = \frac{h}{\tan 30^\circ} = h\sqrt{3}$.

3. **Relacionar con los 40 m.** Como $PB = PQ + QB$:

$$h\sqrt{3} = 40 + h \implies h(\sqrt{3} - 1) = 40 \implies h = \frac{40}{\sqrt{3} - 1}$$

4. **Racionalizar:**

$$h = \frac{40(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{40(\sqrt{3} + 1)}{2} = 20 + 20\sqrt{3} \text{ m } (\approx 54,6 \text{ m})$$

b) La distancia PT es la hipotenusa del triángulo PBT , y $\sin 30^\circ = \frac{h}{PT}$:

$$PT = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 2h = 40 + 40\sqrt{3} \text{ m } (\approx 109 \text{ m})$$

Comprobación: $PB = h\sqrt{3} = 20\sqrt{3} + 60 \approx 94,6$ y $QB = h \approx 54,6$; su diferencia es 40.

En el examen: puntúa el dibujo con los datos bien situados, escribir las dos ecuaciones con $\tan$ y llegar a una ecuación en una sola incógnita. Si el enunciado pide valor exacto, no des solo el decimal.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR CATETO OPUESTO Y CONTIGUO

Escribir $\sin \theta = \frac{\text{contiguo}}{\text{hipotenusa}}$ es un fallo muy frecuente, sobre todo cuando el triángulo está girado. «Opuesto» y «contiguo» se definen siempre respecto al ángulo que usas: antes de plantear la razón, señala el ángulo con un arco y mira qué cateto lo toca. Una comprobación rápida: el seno y el coseno de un ángulo agudo son menores que 1, y el seno de un ángulo pequeño debe ser pequeño.

ERROR TÍPICO • CALCULADORA EN RADIANES

Con un ángulo en grados, $\sin 30^\circ$ debe dar 0,5. Si sale un valor como $-0,988$, la calculadora está en radianes. Lo mismo vale para $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$: el ángulo que devuelven está en la unidad que tengas elegida.

ERROR TÍPICO • DEJAR EL VALOR SIN RACIONALIZAR O INVENTAR VALORES EXACTOS

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ es correcto, pero en el examen se espera $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tampoco existe una regla del tipo $\sin(a + b) = \sin a + \sin b$: por ejemplo, $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ \neq \sin 90^\circ$. Para ángulos distintos de 30° , 45° y 60° no hay valor exacto sencillo que recordar: se usa la calculadora.

Resumen

- Respecto a un ángulo agudo θ : $\sin \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$, $\cos \theta = \frac{\text{contiguo}}{\text{hipotenusa}}$, $\tan \theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{contiguo}}$.
- Identidades: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$.
- Valores exactos: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; el coseno los recorre al revés; $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.
- Para resolver un triángulo rectángulo: dibuja, elige la razón que une el dato y la incógnita, despeja; usa Pitágoras y la suma 90° para el resto.
- Para hallar un ángulo se usa la función inversa; comprueba que la calculadora está en grados.

APARTADO 2

Radianes y circunferencia goniométrica

IDEA CLAVE

El radián mide un ángulo con la longitud del arco que abarca en una circunferencia de radio 1. Con él, la longitud de un arco y el área de un sector se calculan con fórmulas muy simples, y la circunferencia de radio 1 permite definir seno, coseno y tangente para cualquier ángulo, no solo para los agudos. En el IB se trabaja casi siempre en radianes, y en la Prueba 1 se esperan valores exactos con π .

El radián

Un **radián** es el ángulo central que abarca un arco de longitud igual al radio. Como la circunferencia completa mide $2\pi r$, caben 2π radios en ella: una vuelta completa son 2π radianes.

DEFINICIÓN • RADIÁN Y CONVERSIÓN

La medida de un ángulo central en radianes es el cociente entre la longitud del arco que abarca y el radio. Una vuelta completa son $360^\circ = 2\pi$ rad, y por tanto $180^\circ = \pi$ rad.

$$\text{grados} \rightarrow \text{radianes: multiplica por } \frac{\pi}{180} \quad \text{radianes} \rightarrow \text{grados: multiplica por } \frac{180}{\pi}$$

Los ángulos que más vas a usar conviene saberlos de memoria:

Grados 0° 30° 45° 60° 90° 180° 270° 360°

Radianes 0 $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$ 2π

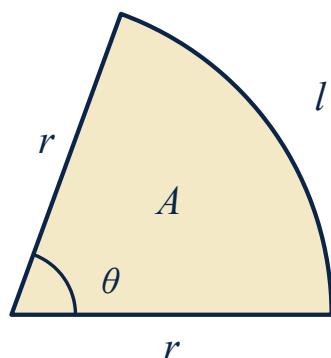
Cuando un ángulo se da como número sin unidad (por ejemplo $\theta = 2$), se sobreentiende que son radianes.

NOTA • CALCULADORA

En la Prueba 2, antes de calcular un seno, un coseno o una tangente con la calculadora de pantalla gráfica (CPG), comprueba que está en el modo de ángulo adecuado: radianes si el ángulo viene en radianes, grados si viene en grados. Un modo equivocado es una de las causas más comunes de resultados erróneos.

Longitud de arco y área de un sector

Un sector circular es la parte del círculo limitada por dos radios y un arco. Si el ángulo central es θ radianes, el sector es la fracción $\frac{\theta}{2\pi}$ del círculo, y de ahí salen las dos fórmulas: la longitud del arco es $\frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi r$ y el área es $\frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi r^2$.



PROPIEDAD · ARCO Y SECTOR CON θ EN RADIANES

$$l = r\theta \quad A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Estas fórmulas **solo valen con θ en radianes**. Con grados, el factor es $\frac{\theta}{360}$: $l = \frac{\theta}{360} \cdot 2\pi r$ y $A = \frac{\theta}{360} \cdot \pi r^2$.

El perímetro del sector es $2r + l = r(2 + \theta)$: los dos radios más el arco. Si el enunciado habla del «perímetro» del sector, no olvides los radios.

La circunferencia goniométrica

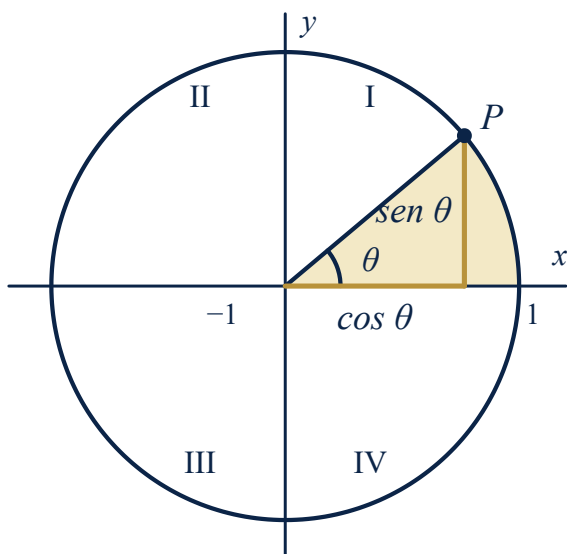
La **circunferencia goniométrica** (o circunferencia unidad) es la de centro el origen y radio 1. Un ángulo θ se mide desde el semieje positivo de las x : es **positivo** si se gira en sentido contrario a las agujas del reloj y **negativo** si se gira en el sentido de las agujas. El lado final del ángulo corta la circunferencia en un punto P .

DEFINICIÓN · SENO, COSENO Y TANGENTE DE CUALQUIER ÁNGULO

Si el lado final del ángulo θ corta la circunferencia unidad en P , entonces

$$P = (\cos \theta, \sin \theta) \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\cos \theta \neq 0)$$

El coseno es la coordenada x de P y el seno es la coordenada y . La tangente es la pendiente de la recta OP .



Para un ángulo agudo esto coincide con las razones del triángulo rectángulo: el triángulo con hipotenusa 1, base $\cos \theta$ y altura $\sin \theta$. Pero ahora el ángulo puede ser mayor que 90° , negativo o mayor que una vuelta. Como P está en una circunferencia de radio 1, sus coordenadas están entre -1 y 1 :

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

La tangente, en cambio, puede valer cualquier número real, y **no existe** cuando $\cos \theta = 0$ (en $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ y sus equivalentes).

Como una vuelta completa devuelve P a su sitio, $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ y $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$. En los ejes, los valores son:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	1	0	-1
$\cos \theta$	1	0	-1	0
$\tan \theta$	0	no existe	0	no existe

Signos por cuadrantes

El signo de cada razón lo deciden los signos de las coordenadas de P : el seno es positivo arriba del eje x y el coseno a la derecha del eje y . La tangente es el cociente de ambos.

Cuadrante	I	II	III	IV
Ángulo	$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$
$\sin \theta$	+	+	-	-
$\cos \theta$	+	-	-	+
$\tan \theta$	+	-	+	-

No hace falta memorizar la tabla: basta saber en qué cuadrante cae el punto y mirar qué coordenadas tiene positivas.

Ángulos asociados

Un ángulo θ de cualquier cuadrante tiene un **ángulo de referencia** α , agudo, que es el que forma el lado final con el eje x . Los puntos de la circunferencia que corresponden a θ y a α son simétricos respecto a los ejes, así que sus

razones coinciden **salvo el signo**.

MÉTODO • REDUCIR UN ÁNGULO AL PRIMER CUADRANTE

1. Resta vueltas completas (2π) hasta tener un ángulo entre 0 y 2π .
2. Localiza el cuadrante y calcula el ángulo de referencia α : en el II es $\pi - \theta$, en el III es $\theta - \pi$ y en el IV es $2\pi - \theta$.
3. Calcula la razón de α (con los valores exactos de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ o $\frac{\pi}{3}$).
4. Pon el signo que corresponde al cuadrante de θ .

Las relaciones que resumen este proceso son:

$$\begin{aligned}\sin(\pi - \theta) &= \sin \theta & \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta \\ \sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta & \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta & \cos(-\theta) &= \cos \theta\end{aligned}$$

Por ejemplo, $\frac{5\pi}{6}$ está en el cuadrante II y su referencia es $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$; por tanto $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Secante, cosecante y cotangente

Los inversos de las tres razones tienen nombre propio. Estas tres son **solo de NS**.

DEFINICIÓN • SECANTE, COSECANTE Y COTANGENTE (NS)

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Cada una existe solo cuando su denominador no es 0.

Tienen el mismo signo que la razón de la que son inversas. Dividiendo la identidad $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ entre $\cos^2 \theta$ y entre $\sin^2 \theta$ se obtienen otras dos identidades:

PROPIEDAD • IDENTIDADES CON SECANTE Y COSECANTE

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

Con ellas, si conoces una razón y el cuadrante, puedes hallar todas las demás sin calcular el ángulo: despeja primero el coseno (o el seno) con la identidad adecuada, elige el signo según el cuadrante y deduce el resto.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Pasar de grados a radianes y calcular arco y sector

- a) Expresa 150° en radianes y $\frac{7\pi}{4}$ rad en grados.
- b) Un sector circular tiene radio 6 cm y ángulo central $\frac{5\pi}{6}$ rad. Calcula la longitud de su arco y su área.

a) $150^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ rad. Y $\frac{7\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 315^\circ$.

- b) El ángulo está en radianes, así que se aplican directamente las fórmulas:

$$l = r\theta = 6 \cdot \frac{5\pi}{6} = 5\pi \text{ cm} \quad A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \frac{5\pi}{6} = 15\pi \text{ cm}^2$$

Comprobación: $A = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5\pi = 15\pi$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Valores exactos con ángulos asociados

Calcula el valor exacto de:

- a) $\sin \frac{7\pi}{6}$, $\cos \frac{5\pi}{3}$ y $\tan \frac{2\pi}{3}$.
b) $\sec \frac{5\pi}{6}$, $\csc \frac{11\pi}{6}$ y $\cot \frac{3\pi}{4}$.

- a) 1. $\frac{7\pi}{6}$ está en el cuadrante III (entre π y $\frac{3\pi}{2}$), con referencia $\frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$. El seno es negativo: $\sin \frac{7\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.
2. $\frac{5\pi}{3}$ está en el cuadrante IV, con referencia $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. El coseno es positivo: $\cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
3. $\frac{2\pi}{3}$ está en el cuadrante II, con referencia $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. La tangente es negativa: $\tan \frac{2\pi}{3} = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.
b) 1. $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, luego $\sec \frac{5\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
2. $\sin \frac{11\pi}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (cuadrante IV), luego $\csc \frac{11\pi}{6} = -2$.
3. $\tan \frac{3\pi}{4} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$ (cuadrante II), luego $\cot \frac{3\pi}{4} = -1$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Una razón conocida, el cuadrante y un sector

El ángulo θ cumple $\tan \theta = \frac{12}{5}$ y $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

- a) Halla $\cos \theta$ y $\sin \theta$.
b) Halla $\sec \theta$, $\csc \theta$ y $\cot \theta$.
c) Un sector circular tiene área 36 y perímetro 24. Halla su radio r y su ángulo central φ (en radianes).

- a) 1. **Usar la identidad.** $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25}$, luego $\sec \theta = \pm \frac{13}{5}$.
2. **Elegir el signo.** En el cuadrante III el coseno es negativo, así que $\sec \theta = -\frac{13}{5}$ y $\cos \theta = -\frac{5}{13}$.
3. **Hallar el seno** con $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$. Es negativo, como debe ser en el cuadrante III. Comprobación: $\frac{25}{169} + \frac{144}{169} = 1$.
b) $\sec \theta = -\frac{13}{5}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = -\frac{13}{12}$ y $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{5}{12}$.
c) 1. **Plantear** con $A = \frac{1}{2}r^2\varphi = 36$ y perímetro $2r + r\varphi = 24$.
2. De la segunda, $r\varphi = 24 - 2r$. De la primera, $r \cdot (r\varphi) = 72$. Sustituyendo:
$$r(24 - 2r) = 72 \implies 2r^2 - 24r + 72 = 0 \implies r^2 - 12r + 36 = 0 \implies (r - 6)^2 = 0$$

3. Luego $r = 6$ y $\varphi = \frac{24 - 12}{6} = 2$ rad. Comprobación: $l = 12$, $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$ y perímetro $12 + 12 = 24$.

En el examen: en a) puntúa elegir el signo del coseno justificándolo con el cuadrante; sin esa razón se pierde el punto. En c) recuerda que el perímetro incluye los dos radios.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · USAR $l = r\theta$ O $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ CON EL ÁNGULO EN GRADOS

Con $r = 6$ y $\theta = 60^\circ$, escribir $l = 6 \cdot 60 = 360$ es absurdo (el arco sería mayor que la circunferencia entera, que mide $12\pi \approx 37,7$). Hay que pasar antes a radianes, $\theta = \frac{\pi}{3}$, y entonces $l = 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

ERROR TÍPICO · OLVIDAR EL SIGNO AL REDUCIR AL PRIMER CUADRANTE

Reducir $\frac{4\pi}{3}$ a su referencia $\frac{\pi}{3}$ y escribir $\cos \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}$ es un error: el ángulo está en el cuadrante III, donde el coseno es negativo, y el valor correcto es $-\frac{1}{2}$. La referencia da el **valor absoluto**; el signo lo da el cuadrante del ángulo original.

ERROR TÍPICO · DESPEJAR EL COSENO DE LA IDENTIDAD Y QUEDARSE CON UNA SOLA RAÍZ

De $\sec^2 \theta = \frac{169}{25}$ salen **dos** valores, $\pm \frac{13}{5}$. Elegir uno sin mirar el cuadrante es adivinar. Escribe siempre el signo y la razón por la que lo eliges.

Resumen

- Radianes: $180^\circ = \pi$ rad. Para pasar de grados a radianes se multiplica por $\frac{\pi}{180}$ y, al revés, por $\frac{180}{\pi}$.
- Arco y sector (solo con θ en radianes): $l = r\theta$ y $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. El perímetro del sector es $2r + r\theta$.
- Circunferencia unidad: el punto del ángulo θ es $(\cos \theta, \sin \theta)$ y $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$. Los ángulos positivos giran en sentido contrario a las agujas del reloj.
- Signos: seno positivo en I y II, coseno positivo en I y IV, tangente positiva en I y III.
- Ángulos asociados: se reduce al ángulo de referencia agudo y el signo lo decide el cuadrante.
- NS: $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$, con $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ y $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$.

APARTADO 3

Identidades: suma, ángulo doble y ángulo mitad

IDEA CLAVE

Con las fórmulas de la suma de dos ángulos se obtienen todas las demás: ángulo doble, ángulo mitad y valores exactos como $\sin 75^\circ$ que no están en la tabla de 30° , 45° y 60° . Además, sirven para simplificar expresiones y para demostrar identidades, un tipo de pregunta muy típico de la Prueba 1.

Seno, coseno y tangente de una suma y de una diferencia

Es tentador pensar que $\sin(A + B)$ es $\sin A + \sin B$, pero no es así: con $A = B = 90^\circ$ daría $\sin 180^\circ = 0$ a un lado y $1 + 1 = 2$ al otro. El seno de una suma mezcla los senos y los cosenos de los dos ángulos.

TEOREMA · FÓRMULAS DE LA SUMA Y DE LA DIFERENCIA

Para cualesquiera ángulos A y B :

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

En cada fórmula se toma el signo de arriba para la suma y el de abajo para la diferencia. La de la tangente solo vale si $\tan A$, $\tan B$ y $\tan(A \pm B)$ existen.

Fíjate en el signo del coseno: es **el contrario** al de la suma. Se entiende con $\cos(A + B)$ cuando A y B son pequeños: el coseno de un ángulo mayor tiene que ser menor, y por eso se **resta** el producto $\sin A \sin B$.

De dónde sale todo: la fórmula del seno de la suma se puede demostrar con un dibujo en la circunferencia goniométrica, y de ella se deducen las demás. Para la diferencia basta cambiar B por $-B$ y recordar que $\sin(-B) = -\sin B$ y $\cos(-B) = \cos B$. La del coseno sale de $\cos x = \sin(90^\circ - x)$, y la de la tangente, de dividir seno entre coseno:

$$\tan(A + B) = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

(se divide numerador y denominador entre $\cos A \cos B$).

Valores exactos de ángulos nuevos

Con las fórmulas de la suma puedes obtener las razones exactas de cualquier ángulo que se escriba como suma o diferencia de ángulos con razones conocidas (los de la tabla de valores exactos y sus equivalentes en otros cuadrantes, como 120° o 210°). Por ejemplo, $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ y $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$.

MÉTODO • VALOR EXACTO DE UNA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA

1. Escribe el ángulo como suma o diferencia de dos ángulos con razones exactas conocidas. Hay varias formas; elige la que use ángulos del primer cuadrante, o una con signos que controles.
2. Escribe la fórmula adecuada con las razones de cada ángulo, **con su signo** según el cuadrante.
3. Sustituye los valores exactos y opera sin usar decimales.
4. Racionaliza si queda una raíz en el denominador y comprueba el signo del resultado con el cuadrante.

NOTA • COMPROBAR CON LA CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes comprobar un valor exacto comparando su expresión con el decimal que da la calculadora de pantalla gráfica (CPG). En la Prueba 1 no hay calculadora: lo que se pide es la expresión exacta, con raíces.

Ángulo doble

Si en las fórmulas de la suma tomas $B = A$, obtienes las del ángulo doble. Usa la letra θ para el ángulo:

TEOREMA • FÓRMULAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

Hay **tres formas** del coseno. La segunda y la tercera salen de la primera al sustituir $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ o $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ (de $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$). Cuál usar depende de lo que conozcas: si solo sabes $\cos \theta$, usa $2 \cos^2 \theta - 1$; si solo sabes $\sin \theta$, usa $1 - 2 \sin^2 \theta$.

Un uso muy frecuente es **despejar los cuadrados**: de las dos últimas formas se obtiene

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

que permiten convertir un cuadrado de seno o coseno en una expresión de grado uno (se usa mucho en integrales y en ecuaciones).

Ángulo mitad

El ángulo mitad es el ángulo doble leído al revés. Si en $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ llamas $\theta = 2\alpha$, es decir $\alpha = \frac{\theta}{2}$, resulta

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \quad \text{y, con la otra forma,} \quad \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

PROPIEDAD • ÁNGULO MITAD

$$\begin{aligned}\cos \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} & \sin \frac{\theta}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned}$$

El signo $\pm$ se decide con el **cuadrante de $\frac{\theta}{2}$** (no el de θ). Las expresiones de la tangente no llevan signo, siempre que los denominadores no sean 0.

Estas fórmulas no suelen venir en el cuadernillo de fórmulas del IB tal cual: lo habitual es **deducirlas** a partir del coseno del ángulo doble, como acabas de ver. Conviene saber hacerlo.

Demostrar identidades

Una **identidad** es una igualdad que se cumple para todos los valores de la variable en que ambos lados existen, como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Demostrar una identidad es **probar que el lado izquierdo y el lado derecho son la misma expresión**.

MÉTODO · CÓMO DEMOSTRAR UNA IDENTIDAD

1. Elige **un solo lado** (normalmente el más complicado) y trabaja solo con él.
2. Transforma ese lado paso a paso, con igualdades justificadas, hasta llegar exactamente al otro lado. Escribe la cadena en vertical: $LI = \dots = \dots = LD$.
3. Si no ves el camino: expresa todo en senos y cosenos, usa $\sin^2 + \cos^2 = 1$, desarrolla los ángulos suma o doble, o pasa a una sola razón.
4. Si un lado te sirve para ir al otro, no hace falta transformar el otro. Si necesitas ver adónde llegar, puedes trabajar el otro lado **aparte, en el borrador**, hasta ver qué forma tiene, y luego escribir la demostración limpia desde un lado.
5. Termina con la conclusión: «Queda demostrado».

NOTA · QUÉ SE PUNTÚA

En el examen del IB, las preguntas «Demuestre que...» dan los puntos por los pasos intermedios correctos y por llegar **justo** al resultado que dice el enunciado. Si te saltas un paso importante o «fuerzas» el final, pierdes la nota. La CPG puede ayudarte a **comprobar** una identidad dibujando ambos lados, pero dos gráficas iguales no son una demostración.

Simplificar y calcular con las identidades

Las identidades sirven también para reducir una expresión a otra más sencilla o para calcular valores. Dos reconocimientos útiles:

- $\sin A \cos B + \cos A \sin B$ es $\sin(A + B)$, y $\cos A \cos B - \sin A \sin B$ es $\cos(A + B)$; así, $\cos 47^\circ \cos 13^\circ - \sin 47^\circ \sin 13^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.
- $2 \sin \theta \cos \theta$ es $\sin 2\theta$ y $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ es $\cos 2\theta$; así, $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Cuando te dan una razón de θ y el cuadrante, calcula primero las otras razones de θ con $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ (eligiendo el signo por el cuadrante) y después aplica la fórmula que corresponda.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Valores exactos con la suma y la diferencia

Calcula el valor exacto de:

- $\sin 75^\circ$
- $\cos 165^\circ$ (escribe $165^\circ = 120^\circ + 45^\circ$)
- $\tan 75^\circ$
- $\sin 75^\circ \cos 15^\circ + \cos 75^\circ \sin 15^\circ$

- a) Con $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$:

$$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

- b) Con $165^\circ = 120^\circ + 45^\circ$, y teniendo en cuenta que $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ y $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\cos 165^\circ = \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

El signo negativo es coherente: 165° está en el segundo cuadrante.

- c) Con $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, $\tan 45^\circ = 1$ y $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$\tan 75^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

- d) Es el desarrollo de $\sin(75^\circ + 15^\circ)$, así que vale $\sin 90^\circ = 1$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Ángulo doble y ángulo mitad dados el seno y el cuadrante

El ángulo θ cumple $\sin \theta = \frac{5}{13}$ y $90^\circ < \theta < 180^\circ$. El ángulo φ cumple $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ y $270^\circ < \varphi < 360^\circ$.

- Halla $\cos \theta$, $\sin 2\theta$ y $\cos 2\theta$.
- Halla $\cos \frac{\theta}{2}$ y $\tan \frac{\theta}{2}$.
- Halla $\sin(\theta + \varphi)$.

- a) De $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ se tiene $\cos^2 \theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$, es decir, $\cos \theta = \pm \frac{12}{13}$. Como θ está en el segundo cuadrante, el coseno es negativo: $\cos \theta = -\frac{12}{13}$.

Con las fórmulas del ángulo doble:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta = 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

(Se comprueba con la otra forma: $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{144-25}{169} = \frac{119}{169}$.)

- b) Como $90^\circ < \theta < 180^\circ$, el ángulo mitad cumple $45^\circ < \frac{\theta}{2} < 90^\circ$: está en el primer cuadrante y su coseno es positivo.

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{12}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

Para la tangente no hace falta el signo:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\frac{5}{13}}{1 - \frac{12}{13}} = \frac{5/13}{1/13} = 5$$

- c) Para φ en el cuarto cuadrante el seno es negativo: $\sin^2 \varphi = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$, luego $\sin \varphi = -\frac{3}{5}$. Entonces

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi = \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} + \left(-\frac{12}{13}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{20 + 36}{65} = \frac{56}{65}$$

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Demostración

Demostrar tres identidades

Demuestra las siguientes identidades:

- a) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$
 b) $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin 2x}$
 c) $\cos(A + B) \cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

- a) Se trabaja solo con el lado izquierdo, escribiendo $3\theta = 2\theta + \theta$ y usando el ángulo doble:

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \\ &= 2 \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{aligned}$$

Hemos elegido $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ y $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ para que todo quede en función de $\sin \theta$, que es lo que aparece en el lado derecho.

- b) Se parte del lado izquierdo y se expresa todo en senos y cosenos (para x con $\sin x \neq 0$ y $\cos x \neq 0$):

$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

- c) Se desarrolla el lado izquierdo con las fórmulas de la suma y de la diferencia. Es un producto de la forma $(P - Q)(P + Q)$ con $P = \cos A \cos B$ y $Q = \sin A \sin B$:

$$\begin{aligned} \cos(A + B) \cos(A - B) &= (\cos A \cos B - \sin A \sin B)(\cos A \cos B + \sin A \sin B) \\ &= \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B \\ &= \cos^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \cos^2 A) \sin^2 B \\ &= \cos^2 A - \cos^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \cos^2 A \sin^2 B \\ &= \cos^2 A - \sin^2 B \end{aligned}$$

En el examen: una demostración empieza en un lado y acaba en el otro, sin escribir en ningún paso «lado izquierdo = lado derecho» antes de haberlo probado. Puntúa cada transformación bien justificada (por ejemplo, «por la fórmula del ángulo doble») y la expresión final exacta que pide el enunciado.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • PENSAR QUE EL SENO Y EL COSENO «SE REPARTEN» EN UNA SUMA

No es cierto que $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ ni que $\cos 2\theta = 2 \cos \theta$. Con $A = B = 60^\circ$: $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$, mientras que $\sin 60^\circ + \sin 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,73$. Lo mismo con el ángulo doble: $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, pero $2 \cos 60^\circ = 1$. Usa siempre las fórmulas de la suma, y recuerda que en $\cos(A + B)$ el signo del segundo producto es el contrario.

ERROR TÍPICO • OPERAR EN LOS DOS LADOS A LA VEZ AL DEMOSTRAR

Para demostrar $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$ no vale escribir la igualdad completa y empezar a multiplicar o pasar términos de un lado a otro: así se **supone** lo que se quiere probar. (Con ese método se «demuestran» también cosas falsas: de $1 = -1$, elevando al cuadrado, sale $1 = 1$.) La demostración correcta parte de **un solo lado** y llega al otro:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

ERROR TÍPICO • ELEGIR MAL EL SIGNO EN EL ÁNGULO MITAD

Para $\theta = 300^\circ$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ y la fórmula da $\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. El signo no se decide con el cuadrante de θ (el cuarto, donde el coseno es positivo), sino con el de $\frac{\theta}{2} = 150^\circ$ (el segundo, donde el coseno es negativo): $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mira siempre el cuadrante del **ángulo mitad**.

Resumen

- Suma y diferencia: $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$; $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$;
 $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$.
- Se usan para obtener valores exactos como $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ y $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$, escribiendo el ángulo como suma o diferencia de ángulos conocidos.
- Ángulo doble: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$; $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$; $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$.
- Ángulo mitad (se deduce del doble): $\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$, $\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$, $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$; el signo depende del cuadrante de $\frac{\theta}{2}$.
- Dada una razón y el cuadrante, calcula primero las demás razones de θ con $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ y elige el signo.
- Demostrar una identidad: parte de un solo lado, transforma con pasos justificados y llega exactamente al otro; no operes en los dos lados a la vez.

Ecuaciones trigonométricas

IDEA CLAVE

Una ecuación trigonométrica se resuelve en dos fases: primero se deja una sola razón trigonométrica igualada a un número, y después se buscan **todos** los ángulos del intervalo que dan ese valor. La calculadora, o la función inversa, da solo uno; los demás salen de la simetría de la circunferencia. Es una pregunta típica de la Prueba 1 (valores exactos) y de la Prueba 2 (con calculadora).

Una ecuación básica: $\sin x = k$, $\cos x = k$, $\tan x = k$

Resolver $\sin x = \frac{1}{2}$ significa encontrar los ángulos cuya coordenada y en la circunferencia unidad vale $\frac{1}{2}$. Hay dos puntos de la circunferencia con esa altura, así que en una vuelta completa hay dos soluciones. Con $\cos x = k$ se pide una coordenada x concreta y también aparecen dos puntos; con $\tan x = k$ se pide una pendiente concreta y los dos puntos están en lados opuestos de la circunferencia.

MÉTODO · SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN BÁSICA EN UN INTERVALO

1. Comprueba que el valor existe: para $\sin x = k$ y $\cos x = k$ hace falta $-1 \leq k \leq 1$. Si no, no hay soluciones. La tangente toma cualquier valor.
2. Obtén el **valor principal** con la función inversa: $x_0 = \arcsin k$, $\arccos k$ o $\arctan k$ (en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para el seno y la tangente, y en $[0, \pi]$ para el coseno).
3. Halla la otra solución de una vuelta con la simetría de la circunferencia:
 - $\sin x = k$: $x = x_0$ y $x = \pi - x_0$.
 - $\cos x = k$: $x = x_0$ y $x = -x_0$ (o bien $2\pi - x_0$).
 - $\tan x = k$: $x = x_0$ y $x = x_0 + \pi$.
4. Suma múltiplos del periodo (2π para seno y coseno, π para la tangente) y **quédate solo con los ángulos que caen dentro del intervalo** del enunciado.

En grados es igual, cambiando π por 180° y 2π por 360° . Para ángulos fuera del primer cuadrante, repasa los ángulos asociados y la circunferencia goniométrica.

PROPIEDAD · TODAS LAS SOLUCIONES (SIN INTERVALO)

Si x_0 es el valor principal, las soluciones reales son

$$\begin{aligned} \sin x = k : x &= x_0 + 2\pi n \text{ o } x = \pi - x_0 + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \cos x = k : x &= \pm x_0 + 2\pi n, & \tan x = k : x = x_0 + \pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Un caso con valor exacto: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $[0, 2\pi]$. El valor principal es $x_0 = \frac{3\pi}{4}$ y la otra solución, $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Con un valor que no es de los exactos, como $\sin x = 0,3$, el valor principal sale en la calculadora y la segunda solución es $\pi - x_0$; en ese caso se da una aproximación con tres cifras significativas, salvo que se pida otra cosa.

NOTA • CALCULADORA (PRUEBA 2)

En la Prueba 2 puedes dibujar en la CPG las dos funciones, la de la izquierda y la de la derecha de la ecuación, con la ventana ajustada al intervalo del enunciado (y la calculadora en el modo, radianes o grados, que corresponda), y leer las **abscisas de los puntos de intersección**. Es útil cuando la ecuación no se deja reducir a una sola razón. Con la CPG no se ve el procedimiento, así que, si el enunciado pide «halle» sin más, basta con las soluciones; si pide «demuestre» o «resuelva analíticamente», hay que hacerlo a mano. En la Prueba 1 no hay calculadora y los valores serán exactos.

Ecuaciones con kx : ampliar el intervalo

Si el ángulo es $kx + b$ en lugar de x , la idea es cambiar de variable: $u = kx + b$ y resolver primero para u . Pero el intervalo de u no es el de x . Si $x \in [a, b]$, entonces $u = kx$ recorre $[ka, kb]$, que es k veces más largo. Por eso aparecen más soluciones para u : hay que encontrar **todas las de ese intervalo ampliado** y, al final, deshacer el cambio ($x = u/k$).

MÉTODO • ECUACIONES CON kx

1. Llama $u = kx + b$ y calcula el intervalo de u a partir del de x .
2. Resuelve la ecuación básica para u en ese intervalo, sumando múltiplos del periodo hasta salirte.
3. Despeja $x = \frac{u - b}{k}$ en cada solución.
4. Cuenta: en general hay unas k veces más soluciones que en la ecuación básica.

Ecuaciones que se reducen a una cuadrática

Cuando aparecen dos razones distintas, o una razón elevada al cuadrado, se intenta reescribir todo con **una sola razón** y tratarla como incógnita. La identidad que más sirve es $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, que permite cambiar $\sin^2 x$ por $1 - \cos^2 x$ o al revés. Después se llama t a esa razón, se resuelve la cuadrática en t y se descartan los valores con $|t| > 1$ si t es un seno o un coseno.

MÉTODO • ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA CUADRÁTICA

1. Elige la razón que va a quedar: si hay $\sin^2 x$ y $\cos x$, sustituye $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
2. Pasa todo a un miembro y ordena: $at^2 + bt + c = 0$ con $t = \cos x$ (o $\sin x$).
3. Resuelve para t . **Descarta** las raíces fuera de $[-1, 1]$.
4. Para cada raíz válida, resuelve la ecuación básica en el intervalo.
5. Si has factorizado, iguala a cero cada factor por separado.

Ecuaciones con ángulo doble

Si junto a $\sin 2x$ o $\cos 2x$ aparece una razón de x , hay que pasar todo al ángulo x con las fórmulas del ángulo doble: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ y $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$. De las tres formas del coseno, elige la que deje la **misma razón** que ya hay en la ecuación. Después suele aparecer una cuadrática o un producto que se iguala a cero.

NOTA • PRODUCTO IGUAL A CERO

Si tras pasar todo a un miembro puedes **factorizar**, la ecuación $A \cdot B = 0$ equivale a $A = 0$ o $B = 0$. Es mejor que dividir por un factor, porque dividir pierde soluciones (mira el error típico de abajo).

NOTA • SOLO EN NS: COMBINACIONES $a \sin x + b \cos x$

En NS pueden pedirte ecuaciones como $\sin x + \cos x = 1$. Un camino es dividir por $\cos x$ (cuidado con perder soluciones) y usar $\tan x$; otro es escribir $a \sin x + b \cos x$ como un solo seno desplazado, $R \sin(x + \alpha)$, con $R = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si elevas al cuadrado, **comprueba todas las soluciones** en la ecuación original, porque pueden aparecer falsas.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Una ecuación básica en grados y en radianes

Resuelve cada ecuación en el intervalo indicado.

- a) $2 \sin x = -1$, para $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.
- b) $\tan x = 2$, para $0 \leq x \leq 2\pi$ (da las soluciones exactas, con $\arctan$).
- c) $10 \cos x = 3$, para $0 \leq x \leq 2\pi$ (da las soluciones exactas, con $\arccos$).

- a) $\sin x = -\frac{1}{2}$. El valor principal es $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -30^\circ$, que no está en el intervalo. El seno es negativo en el tercer y cuarto cuadrantes, y el ángulo de referencia es 30° :

$$x = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \quad \text{y} \quad x = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

- b) El valor principal es $x_0 = \arctan 2 \approx 1,107$, en el primer cuadrante. La tangente tiene periodo π , luego

$$x = \arctan 2 \quad \text{y} \quad x = \arctan 2 + \pi (\approx 4,249)$$

La siguiente, $\arctan 2 + 2\pi$, ya se sale del intervalo.

- c) $\cos x = \frac{3}{10}$. El valor principal es $x_0 = \arccos \frac{3}{10} \approx 1,266$. El coseno es positivo en los cuadrantes primero y cuarto, y la simetría respecto al eje horizontal da $2\pi - x_0$:

$$x = \arccos \frac{3}{10} \quad \text{y} \quad x = 2\pi - \arccos \frac{3}{10} (\approx 5,017)$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Ecuaciones con $2x$, $3x$ y un ángulo desplazado

Resuelve en radianes, en el intervalo indicado.

- a) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.
- b) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$, para $0 \leq x \leq \pi$.
- c) $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

- a) Sea $u = 2x$. Si $0 \leq x \leq 2\pi$, entonces $0 \leq u \leq 4\pi$ (**dos vueltas**). Para $\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}$, el valor principal es $\frac{\pi}{3}$ y la otra solución de una vuelta, $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Sumando 2π :

$$u = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$$

Todas están en $[0, 4\pi]$. Al dividir por 2:

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$$

- b) Sea $u = 3x$. Si $0 \leq x \leq \pi$, entonces $0 \leq u \leq 3\pi$ (una vuelta y media). Para $\cos u = -\frac{1}{2}$: $u = \frac{2\pi}{3}$ y $u = \frac{4\pi}{3}$; sumando 2π se obtiene $\frac{8\pi}{3} \leq 3\pi$ (vale) y $\frac{10\pi}{3} > 3\pi$ (no vale). Entonces

$$u = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \implies x = \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$$

- c) Sea $u = x - \frac{\pi}{4}$. Si $0 \leq x \leq 2\pi$, entonces $-\frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{7\pi}{4}$. Para $\tan u = 1$: $u = \frac{\pi}{4}$ y $u = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ (la siguiente ya excede $\frac{7\pi}{4}$, y la anterior, $-\frac{3\pi}{4}$, es menor que $-\frac{\pi}{4}$). Ahora $x = u + \frac{\pi}{4}$:

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Cuadráticas, ángulo doble y una ecuación con tangente

Resuelve en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

- a) $2\sin^2 x - \cos x = 1$.
b) $\sin 2x = \cos x$.
c) $\tan x = 2\sin x$.

- a) 1. **Una sola razón:** $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, luego

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x = 1 \implies 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

2. **Factorizar** con $t = \cos x$: $2t^2 + t - 1 = (2t - 1)(t + 1) = 0$, de modo que $t = \frac{1}{2}$ o $t = -1$. Los dos valores están en $[-1, 1]$.

3. $\cos x = \frac{1}{2}$ da $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{5\pi}{3}$; $\cos x = -1$ da $x = \pi$.

- b) 1. **Ángulo doble:** $2\sin x \cos x = \cos x$.

2. **Pasar todo a un miembro y factorizar** (sin dividir): $\cos x (2\sin x - 1) = 0$.

3. $\cos x = 0$ da $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$; $\sin x = \frac{1}{2}$ da $x = \frac{\pi}{6}$ y $x = \frac{5\pi}{6}$.

- c) 1. La ecuación no está definida cuando $\cos x = 0$ (es decir, en $x = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$); esos valores no pueden ser solución.

2. Con $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$: $\frac{\sin x}{\cos x} = 2\sin x$, así que $\sin x - 2\sin x \cos x = 0$ (multiplicamos por $\cos x \neq 0$) y

$$\sin x (1 - 2\cos x) = 0$$

3. $\sin x = 0$ da $x = 0, \pi, 2\pi$; $\cos x = \frac{1}{2}$ da $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{5\pi}{3}$. Ninguna anula $\cos x$, así que valen las cinco.

En el examen: se puntúa reducir a una sola razón o factorizar, resolver cada factor y **dar todas las soluciones del intervalo**. No se puede dividir entre $\cos x$ en b), y en c) hay que recordar que $x = 0$ y $x = 2\pi$ pertenecen al intervalo cerrado.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • DIVIDIR ENTRE $\sin x$ O $\cos x$ Y PERDER SOLUCIONES

En $2\cos^2 x = \cos x$ es tentador dividir entre $\cos x$ y quedarse con $2\cos x = 1$, que da solo $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{5\pi}{3}$. Pero $\cos x = 0$ también cumple la ecuación ($0 = 0$), y se pierden $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$. Lo correcto es pasar todo a un lado y factorizar: $\cos x (2\cos x - 1) = 0$. Las soluciones en $[0, 2\pi]$ son $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$.

ERROR TÍPICO · DAR SOLO EL VALOR DE LA CALCULADORA

La función inversa devuelve un único ángulo. Para $\sin x = -\frac{1}{2}$, la calculadora da -30° , que ni siquiera está en $[0^\circ, 360^\circ]$; las soluciones son 210° y 330° . Dibuja la circunferencia unidad y cuenta cuántos puntos cumplen la condición antes de dar el resultado.

ERROR TÍPICO · NO AMPLIAR EL INTERVALO EN $\sin kx$

En $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para $0 \leq x \leq 2\pi$, quien resuelve solo $2x = \frac{\pi}{3}$ y $2x = \frac{2\pi}{3}$ obtiene dos soluciones, pero son **cuatro**. El intervalo de $2x$ es $[0, 4\pi]$, el doble de largo, y hay que sumar 2π a esas soluciones. Ten en cuenta que, en general, aparecen unas k veces más soluciones.

Resumen

- Una ecuación básica ($\sin x = k$, $\cos x = k$, $\tan x = k$) tiene dos soluciones por vuelta (por periodo en la tangente: una). Valor principal con $\arcsin$, $\arccos$ o $\arctan$; la otra con la simetría de la circunferencia: $\pi - x_0$ (seno), $-x_0$ o $2\pi - x_0$ (coseno), $x_0 + \pi$ (tangente).
- Para $\sin x = k$ y $\cos x = k$, si $|k| > 1$ no hay soluciones.
- En $\sin kx$, $\cos kx$ o $\tan kx$, cambia $u = kx$, amplía el intervalo (k veces) y deshaz el cambio al final.
- Si hay dos razones o un cuadrado, deja una sola razón con $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ y resuelve la cuadrática en t , descartando $|t| > 1$. Con ángulo doble, usa $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ y la forma de $\cos 2x$ que convenga.
- Factoriza en vez de dividir por $\sin x$ o $\cos x$: dividir pierde soluciones.
- En la Prueba 2, la CPG da las soluciones como intersecciones de gráficas en el intervalo; en la Prueba 1 se piden valores exactos.

APARTADO 5

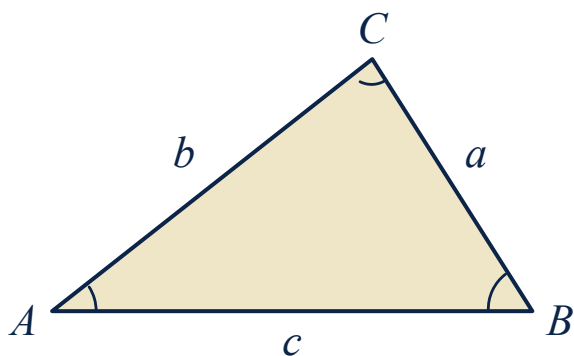
Teoremas del seno y del coseno; área del triángulo

IDEA CLAVE

Cuando un triángulo no tiene ángulo recto, las razones del seno no bastan. Dos teoremas, el del seno y el del coseno, relacionan lados y ángulos de cualquier triángulo, y una fórmula, $\frac{1}{2}ab \sin C$, da su área. Aparecen en la Prueba 1 con ángulos notables y en la Prueba 2 en problemas de contexto con rumbos y alturas.

Notación y qué significa «resolver un triángulo»

En un triángulo ABC el ángulo A está en el vértice A y el lado a es el que tiene enfrente: cada lado lleva la letra minúscula del vértice opuesto. Esto es lo que da sentido a todas las fórmulas siguientes.



Resolver un triángulo es calcular los tres lados y los tres ángulos a partir de tres datos (con al menos un lado). Recuerda siempre que los ángulos suman 180° : si conoces dos, el tercero sale directamente.

Teorema del seno

En un triángulo, cada lado es proporcional al seno del ángulo opuesto. La idea es sencilla: el lado mayor se opone siempre al ángulo mayor, y el seno recoge esa proporción.

TEOREMA • TEOREMA DEL SENO

En cualquier triángulo ABC :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Para calcular un ángulo conviene usarlo «al revés»: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

Basta con usar **dos** de las tres razones cada vez. Es el teorema adecuado cuando conoces una pareja «lado y ángulo opuesto» y un dato más de esa clase: dos ángulos y un lado cualquiera (AAL o ALA), o dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).

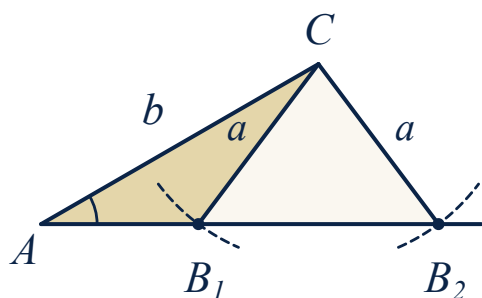
Una pista de por qué funciona: la altura h desde C vale $h = b \sin A$ y también $h = a \sin B$. Igualando, $b \sin A = a \sin B$, que es el teorema con otra ordenación.

El caso ambiguo (LLA)

Si conoces dos lados y un ángulo que **no** está entre ellos, el teorema del seno te da $\sin B$ y de ahí hay que obtener B . Pero un mismo valor de $\sin B$ lo tienen **dos** ángulos entre 0° y 180° :

$$B_1 = \arcsin(\sin B) \quad \text{y} \quad B_2 = 180^\circ - B_1$$

A veces los dos sirven y hay dos triángulos distintos. La figura lo muestra: con el ángulo A , el lado b y un lado a fijados, la circunferencia de radio a y centro C corta a la base en dos puntos B_1 y B_2 .



PROPIEDAD · CUÁNTOS TRIÁNGULOS HAY CON LOS DATOS A , a Y b

Sea A un ángulo agudo, y se conocen a (opuesto a A) y b . Compara a con b y con la altura $b \sin A$:

- Si $a < b \sin A$: **ningún** triángulo (el lado a no llega a la base; sale $\sin B > 1$).
- Si $a = b \sin A$: **un** triángulo, rectángulo en B .
- Si $b \sin A < a < b$: **dos** triángulos.
- Si $a \geq b$: **un** triángulo (el segundo ángulo $180^\circ - B_1$ sumado a A pasaría de 180°).

Si A es obtuso, hay un triángulo si $a > b$ y ninguno si $a \leq b$.

MÉTODO · CÓMO DETECTAR Y RESOLVER EL CASO AMBIGUO

1. Calcula $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$. Si sale mayor que 1, no hay triángulo.
2. Obtén el ángulo agudo $B_1 = \arcsin(\sin B)$ y el obtuso $B_2 = 180^\circ - B_1$.
3. Para cada uno, comprueba si cabe: es válido solo si $A + B < 180^\circ$. Atajo: si $a \geq b$ solo vale B_1 .
4. Para cada triángulo que valga, halla $C = 180^\circ - A - B$ y después c con el teorema del seno (o con el del coseno, ver más abajo).

NOTA · CALCULADORA

En la Prueba 2, la calculadora de pantalla gráfica (CPG) da solo el ángulo **agudo** al invertir el seno. El obtuso, $180^\circ - B_1$, tienes que añadirlo tú. Es la causa más habitual de perder la mitad de los puntos en estas preguntas.

Teorema del coseno

Cuando los datos no forman una pareja «lado-ángulo opuesto» (por ejemplo, dos lados y el ángulo **entre** ellos, o los tres lados), el teorema del seno no sirve. Aquí entra el del coseno, que generaliza al de Pitágoras: si el ángulo es 90° , el término con $\cos$ desaparece.

TEOREMA • TEOREMA DEL COSENO

En cualquier triángulo ABC :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

y, cambiando los papeles de las letras, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ y $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$. Despejando el coseno se obtiene el ángulo a partir de los tres lados:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

El lado que va solo a la izquierda es el opuesto al ángulo de la derecha. Si C es agudo, $\cos C > 0$ y $c^2 < a^2 + b^2$; si C es obtuso, $\cos C < 0$ y $c^2 > a^2 + b^2$.

Una ventaja del teorema del coseno para calcular ángulos: como el coseno es **inyectivo** entre 0° y 180° (distinto valor para cada ángulo), no hay caso ambiguo y su signo indica si el ángulo es agudo u obtuso. Por eso, cuando conoces los tres lados, calcula primero el ángulo **mayor** con el coseno (el opuesto al lado mayor) y los otros con el seno: ya sabes que son agudos.

Área de un triángulo

La altura sobre el lado b vale $h = a \sin C$, así que el área $\frac{1}{2}bh$ queda como sigue.

PROPIEDAD • ÁREA CON DOS LADOS Y EL ÁNGULO ENTRE ELLOS

$$\text{Área} = \frac{1}{2}ab \sin C$$

Vale con cualquier pareja de lados y el ángulo que forman: también $\frac{1}{2}bc \sin A$ y $\frac{1}{2}ac \sin B$.

Hace falta que el ángulo esté **entre** los dos lados. Si lo que tienes son los tres lados, calcula antes un ángulo con el teorema del coseno, y obtén el seno con $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$, que es válido porque C está entre 0° y 180° y su seno es positivo.

Qué teorema uso

Mira los tres datos que te dan, no el dibujo.

Datos	Teorema	Comentario
Dos ángulos y un lado	Seno	Primero el tercer ángulo, $180^\circ - A - B$
Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)	Seno	Posible caso ambiguo
Dos lados y el ángulo entre ellos	Coseno	Da el tercer lado; después el seno o el coseno para los ángulos
Los tres lados	Coseno	Empieza por el ángulo mayor
Para el área, cualquier pareja de lados con su ángulo comprendido.		

Rumbos

En problemas de navegación, el **rumbo** de un punto respecto a otro es el ángulo medido desde la dirección norte, **en sentido horario**, y se escribe con tres cifras: 045° es noreste, 090° es este, 180° es sur y 270° es oeste.

Para convertir rumbos en ángulos del triángulo, dibuja en cada punto una flecha que apunte al norte (todas son paralelas) y usa que dos rectas paralelas cortadas por una transversal forman ángulos iguales o suplementarios. Lo que se necesita es el ángulo **interior** del triángulo en cada vértice.

Recuerda también el **rumbo inverso**: si B está en rumbo θ desde A , entonces A está en rumbo $\theta + 180^\circ$ desde B (si $\theta \geq 180^\circ$, resta 180°).

Un ejemplo para ver todo junto. Desde el puerto P un barco navega 12 km con rumbo 070° hasta A , y de allí 9 km con rumbo 130° hasta B . El rumbo inverso de A a P es $070^\circ + 180^\circ = 250^\circ$, y el ángulo interior en A es $250^\circ - 130^\circ = 120^\circ$. Con el teorema del coseno:

$$PB^2 = 12^2 + 9^2 - 2 \cdot 12 \cdot 9 \cos 120^\circ = 144 + 81 + 108 = 333 \implies PB = \sqrt{333} \approx 18,25 \text{ km}$$

Para el rumbo de B desde P , el ángulo en P cumple $\sin \hat{P} = \frac{9 \sin 120^\circ}{\sqrt{333}} \approx 0,427$, luego $\hat{P} \approx 25,3^\circ$ (agudo, porque $\hat{A}$ ya es obtuso). B queda a la derecha de la dirección de A , así que el rumbo es $070^\circ + 25,3^\circ \approx 095^\circ$.

Ángulos de elevación y de depresión

El **ángulo de elevación** es el que forma con la horizontal la visual hacia un objeto **más alto** que el observador. El **ángulo de depresión** es el que forma con la horizontal la visual hacia un objeto **más bajo**. Los dos se miden desde la horizontal, no desde la vertical, y por las rectas paralelas, el ángulo de depresión desde un punto es igual al de elevación desde el punto de abajo.

Dos ejemplos de base. A 40 m de la base de un edificio el ángulo de elevación de la azotea es 35° : la altura es $40 \tan 35^\circ \approx 28,0$ m. Desde lo alto de un faro de 50 m se ve una boya con ángulo de depresión de 20° : su distancia horizontal al pie del faro es $\frac{50}{\tan 20^\circ} \approx 137,4$ m.

Cuando el problema tiene dos observaciones desde puntos distintos, se forma un triángulo no rectángulo: se resuelve primero con el teorema del seno (o del coseno) para hallar un lado auxiliar, y después con el triángulo rectángulo se obtiene la altura.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Resolver un triángulo con dos ángulos y un lado

En el triángulo ABC , $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ y $a = 8$ cm.

- Halla el ángulo C .
- Calcula el lado b (en forma exacta).
- Calcula el área del triángulo (en forma exacta, en cm^2).

a) Los ángulos suman 180° : $C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

b) Se conoce la pareja a y A , y se pide b , opuesto a B . Teorema del seno:

$$\frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sin 30^\circ} \implies b = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 8\sqrt{2} \text{ cm}$$

c) Los lados a y b forman entre ellos el ángulo C . Se usa $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, que sale de la fórmula del seno de una suma:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 8\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 16\sqrt{3} + 16$$

El área es $16 + 16\sqrt{3} \approx 43,7 \text{ cm}^2$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un triángulo dado por sus tres lados

Un triángulo tiene lados $a = 7$, $b = 9$ y $c = 12$.

- Calcula $\cos C$ y decide si C es agudo u obtuso.
- Calcula el valor exacto de $\sin C$.
- Calcula el valor exacto del área.
- Calcula el valor exacto de $\sin A$.

- a) El ángulo C es el opuesto al lado mayor, $c = 12$. Teorema del coseno:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 81 - 144}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{-14}{126} = -\frac{1}{9}$$

Como $\cos C < 0$, el ángulo C es **obtuso** ($C \approx 96,4^\circ$).

- b) Con $\sin C > 0$ (porque C está entre 0° y 180°):

$$\sin C = \sqrt{1 - \frac{1}{81}} = \sqrt{\frac{80}{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

- c) Los lados a y b forman el ángulo C :

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \frac{4\sqrt{5}}{9} = 14\sqrt{5} \approx 31,3$$

- d) Teorema del seno con la pareja c y C :

$$\frac{\sin A}{7} = \frac{\sin C}{12} \implies \sin A = \frac{7}{12} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{7\sqrt{5}}{27}$$

Como $a < c$, el ángulo A no es el mayor, así que es agudo (sin ambigüedad): $A \approx 35,4^\circ$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Dos datos de lados y un ángulo opuesto: ¿cuántos triángulos?

Una parcela triangular ABC cumple $A = 30^\circ$, $a = 5$ hm y $b = 8$ hm, donde a es el lado opuesto a A y b el opuesto a B .

- Calcula $\sin B$.
- Explica por qué hay dos triángulos posibles y da los dos valores de $\cos B$.
- Calcula, para cada triángulo, la longitud del lado c (en forma exacta).
- Calcula, para cada triángulo, el área (en forma exacta, en hm^2).

- a) Teorema del seno:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{5} = \frac{4}{5}$$

- b) Entre 0° y 180° , $\sin B = \frac{4}{5}$ lo cumplen dos ángulos: $B_1 = \arcsin \frac{4}{5} \approx 53,1^\circ$ y $B_2 = 180^\circ - B_1 \approx 126,9^\circ$. Se comprueba si cada uno cabe en un triángulo con $A = 30^\circ$:

- $A + B_1 \approx 83,1^\circ < 180^\circ$: vale.
- $A + B_2 \approx 156,9^\circ < 180^\circ$: vale.

Las dos soluciones sirven. Coincide con el criterio de la figura: $b \sin A = 4 < a = 5 < b = 8$. Como $\cos B_1 > 0$ y $\cos B_2 < 0$,

$$\cos B_1 = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \quad \cos B_2 = -\frac{3}{5}$$

- c) El camino más corto es el teorema del coseno sobre el ángulo A (no hace falta C):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \implies 25 = 64 + c^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

$$c^2 - 8\sqrt{3}c + 39 = 0 \implies c = \frac{8\sqrt{3} \pm \sqrt{192 - 156}}{2} = \frac{8\sqrt{3} \pm 6}{2} = 4\sqrt{3} \pm 3$$

Los dos valores son positivos: $c_1 = 4\sqrt{3} - 3 \approx 3,93$ hm (el triángulo con B_2 , donde $C \approx 23,1^\circ$) y $c_2 = 4\sqrt{3} + 3 \approx 9,93$ hm (con B_1 , $C \approx 96,9^\circ$).

Que la ecuación de segundo grado tenga dos raíces positivas confirma el caso ambiguo: hay un triángulo por cada una.

d) Con los lados b y c y el ángulo A entre ellos, $\text{Área} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot c \cdot \frac{1}{2} = 2c$:

$$\text{Área}_1 = 2(4\sqrt{3} - 3) = 8\sqrt{3} - 6 \approx 7,86 \quad \text{Área}_2 = 2(4\sqrt{3} + 3) = 8\sqrt{3} + 6 \approx 19,86$$

En el examen: puntúa darse cuenta de que $\sin B = \frac{4}{5}$ tiene **dos** soluciones y comprobar que ambas caben ($A + B < 180^\circ$). Dar solo el ángulo agudo es el error clásico. Resolver el lado con el teorema del coseno como una ecuación de segundo grado es una buena alternativa porque entrega las dos soluciones sin riesgo de olvidar una.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • QUEDARSE SOLO CON EL ÁNGULO AGUDO AL INVERTIR EL SENO

Con $\sin B = 0,8$ la calculadora devuelve $53,1^\circ$, pero $126,9^\circ$ tiene el mismo seno. Si $a < b$ y el ángulo opuesto a a es agudo, hay que comprobar el segundo ángulo. En cambio, si $a \geq b$, el obtuso se descarta porque la suma de ángulos pasaría de 180° ; justifícalo en la respuesta.

ERROR TÍPICO • USAR EL ÁNGULO EQUIVOCADO EN LA FÓRMULA DEL ÁREA O DEL COSENO

En $\frac{1}{2}ab \sin C$ el ángulo C debe estar **entre** los lados a y b . Con $a = 7$, $b = 9$ y $A = 35^\circ$ (un ángulo opuesto a a) no se puede escribir $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 \cdot \sin 35^\circ$. En el teorema del coseno, el ángulo que aparece es el opuesto al lado que está solo a la izquierda: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, no $\cos A$ ni $\cos B$.

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR EL RUMBO CON UN ÁNGULO DEL TRIÁNGULO, O LA CPG EN GRADOS CON RADIANES

Un rumbo se mide desde el norte en sentido horario y casi nunca es el ángulo interior del triángulo: hay que restar, sumar 180° o dibujar las paralelas al norte. Y antes de empezar en la Prueba 2, comprueba que la calculadora está en **grados**: un seno en radianes de 30 da $-0,988$ y no $0,5$, y todo el problema sale mal sin que lo notes.

Resumen

- Notación: el lado a está enfrente del ángulo A , y así con b , B y c , C . Los ángulos suman 180° .
- Teorema del seno: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Úsalo con dos ángulos y un lado, o con dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.
- Caso ambiguo (LLA): $\sin B$ tiene dos ángulos, B_1 y $180^\circ - B_1$. Con A agudo hay dos triángulos si $b \sin A < a < b$; compruébalo siempre con $A + B < 180^\circ$.
- Teorema del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, y $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Úsalo con dos lados y el ángulo entre ellos, o con los tres lados (empieza por el ángulo mayor).

- Área: $\frac{1}{2}ab \sin C$, con C comprendido entre a y b .
- Rumbo: ángulo desde el norte en sentido horario, tres cifras; el rumbo inverso suma 180° . Elevación y depresión: ángulos con la horizontal.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 4

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Razones trigonométricas y valores exactos

EJERCICIO 1 ★ Básico IB · P1 Mayo 1998

Sabiendo que $\cos \theta = \frac{2}{5}$ y $\sin \theta < 0$, calcule los valores exactos de $\sin \theta$, $\tan \theta$ y $\sec \theta$.

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{21}}{5} \quad \tan \theta = -\frac{\sqrt{21}}{2} \quad \sec \theta = \frac{5}{2}$$

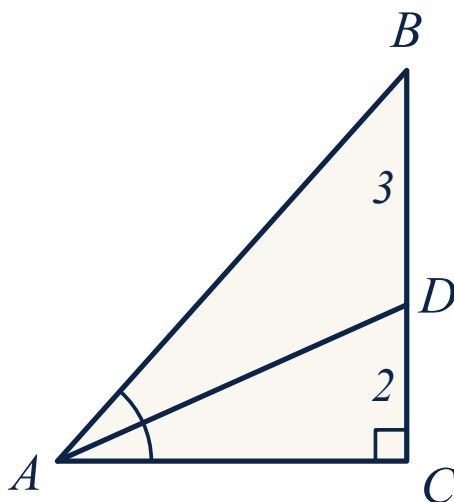
EJERCICIO 2 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2021

Sabiendo que $\operatorname{cosec} \theta = \frac{3}{2}$ donde $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, calcule el valor exacto de $\cot \theta$.

$$\cot \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

EJERCICIO 3 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2005

Sea ABC un triángulo rectángulo, donde $\widehat{C} = 90^\circ$. La recta (AD) biseca $\widehat{BAC}$, $BD = 3$ y $DC = 2$, como se muestra en el diagrama.

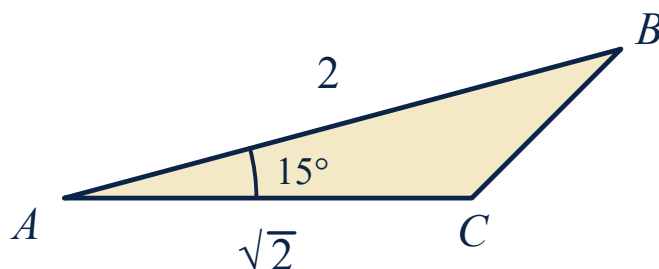


Calcule el ángulo $\widehat{DAC}$

$$\widehat{DAC} = 24,1^\circ$$

EJERCICIO 4 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2016

- a) Desarrolle y simplifique $(1 - \sqrt{3})^2$.
- b) Escribiendo 15° como $60^\circ - 45^\circ$, encuentre el valor de $\cos(15^\circ)$. El siguiente diagrama muestra el triángulo ABC donde $AB = 2$, $AC = \sqrt{2}$ y $\widehat{BAC} = 15^\circ$.



- c) Calcule BC en la forma $a + \sqrt{b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) $(1 - \sqrt{3})^2 = 4 - 2\sqrt{3}$

b) $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

c) $BC = \sqrt{3} - 1$

Radianes, arcos y sectores

EJERCICIO 5 ★ Básico IB · P1 Noviembre 1996

El final de la manecilla de minutos de un reloj de la estación de ferrocarril está a 1,2 metros del centro del reloj. Si el final de la manecilla de la hora del mismo reloj desde el centro es 0,8 metros, entonces calcule las velocidades, en metros por minuto, de los extremos de la aguja de los minutos y de la manecilla de las horas.

Velocidad aguja minuterio = $0,126 \text{ m min}^{-1}$

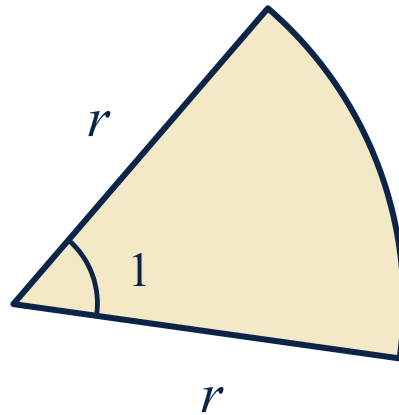
Velocidad aguja horaria = $0,00698 \text{ m min}^{-1}$

EJERCICIO 6

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2019

Un sector circular con radio r cm, donde $r > 0$, se muestra en el siguiente diagrama. El sector tiene un ángulo de 1 radián en el centro.



Sea el área del sector A cm² y el perímetro de P cm. Sabiendo que $A = P$, calcule el valor de r .

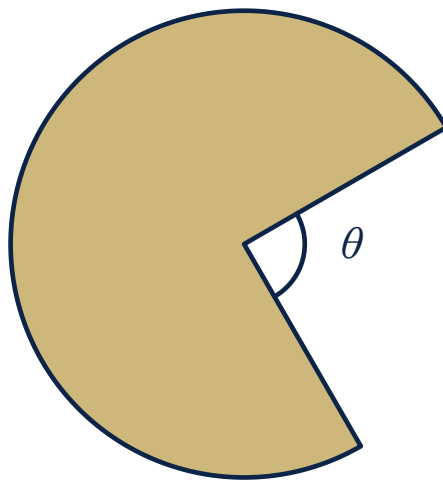
$r = 6$

EJERCICIO 7

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2015

El logo, para una empresa que produce chocolate, es un sector circular de radio 2 cm, que se muestra sombreado en el diagrama. El área del logotipo es $3\pi \text{ cm}^2$.



- a) Hallar, en radianes, el valor del ángulo θ , que aparece en el diagrama.
- b) Encuentre la longitud total del perímetro del logotipo.

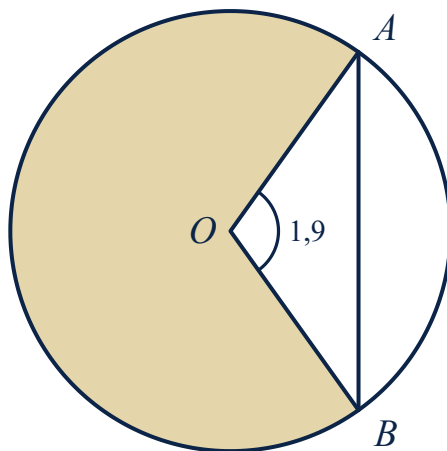
- a) $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$
- b) Perímetro = $3\pi + 4 \text{ cm}$

EJERCICIO 8

★ Básico

IB · P2 TZ2 Mayo 2022

La siguiente figura muestra un círculo de 5 metros de radio y con centro en O . Los puntos A y B pertenecen a la circunferencia y $\widehat{AOB} = 1,9$ radianes.

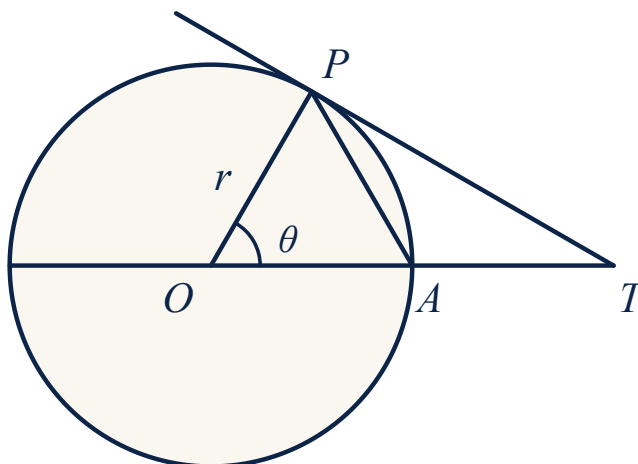


- Halle la longitud de la cuerda $[AB]$.
- Halle el área del sector circular sombreado.

- $[AB] = 8,13 \text{ m}$
- Área del sector circular sombreado $= 54,8 \text{ m}^2$

EJERCICIO 9 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2011

La siguiente figura muestra un círculo con centro en O y radio r y una recta TP tangente a él.



El ángulo $\widehat{POA}$ mide θ radianes.

- Halle el área del triángulo AOP en función de r y de θ .
- Halle el área del triángulo POT en función de r y de θ .
- Utilizando los resultados de los apartados (a) y (b), compruebe que $\sin \theta < \tan \theta$.

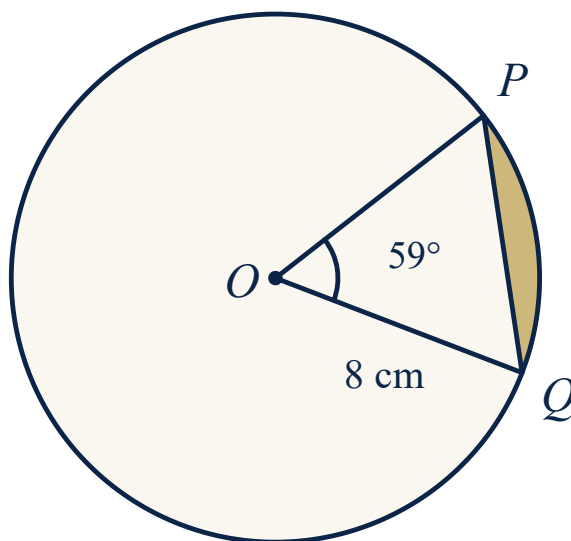
- Área del triángulo $AOP = \frac{r^2 \sin \theta}{2}$
- Área del triángulo $POT = \frac{r^2 \tan \theta}{2}$

EJERCICIO 10

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2011

Los puntos P y Q se encuentran sobre una circunferencia de 8 cm de radio y centro O , de tal manera que $\widehat{POQ} = 59^\circ$.



Halle el área del segmento circular sombreado, contenido entre el arco PQ y la cuerda $[PQ]$.

Área = 5,53 cm²

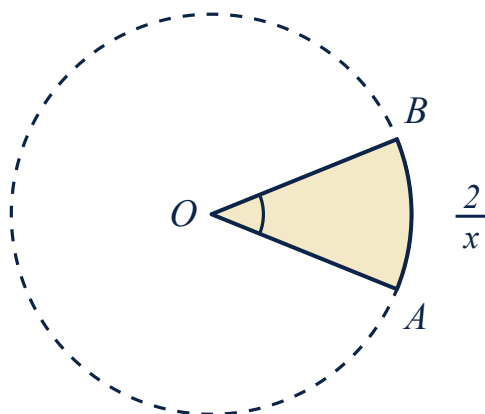
Nota: la solución del libro da 5,53 cm² pero $32 \left(\frac{59\pi}{180} - \sin 59^\circ \right) \approx 5,522$, así que el área es 5,52 cm².

EJERCICIO 11

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

La siguiente figura muestra un sector circular, donde $\widehat{AOB} = x$ radianes y la longitud del arco $AB = \frac{2}{x}$ cm. Sabiendo que el área del sector circular es igual a 16 cm², halle la longitud del arco AB .



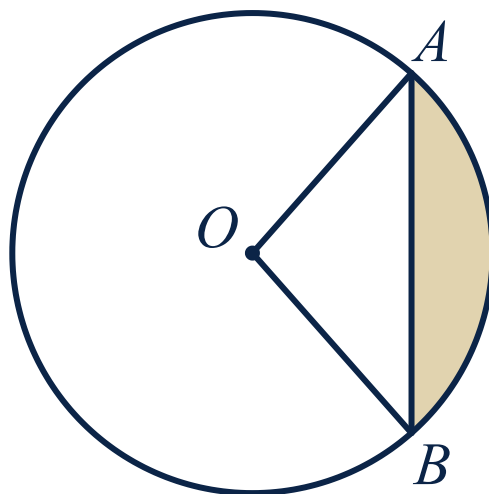
Longitud del arco $AB = 4$ cm

EJERCICIO 12

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2013

Un círculo de 4 cm de radio y centro O se corta mediante una cuerda AB , de 6 cm de longitud.



- Halle $\widehat{AOB}$, expresando la respuesta en radianes y con una aproximación de cuatro cifras significativas.
- Determine el área de la región sombreada.

a) $\widehat{AOB} = 1,696 \text{ rad}$

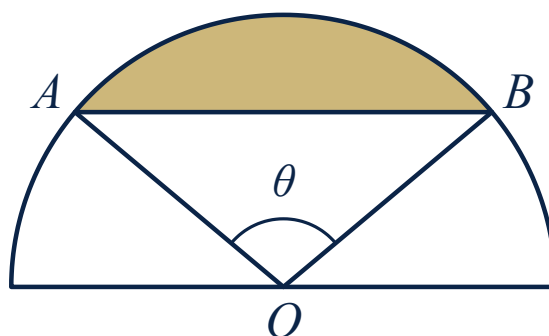
b) Área = $5,63 \text{ cm}^2$

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2013

La siguiente figura muestra un semicírculo de 20 cm de diámetro y centro O , y dos puntos A y B , tales que $\widehat{AOB} = \theta$, donde θ está expresado en radianes.



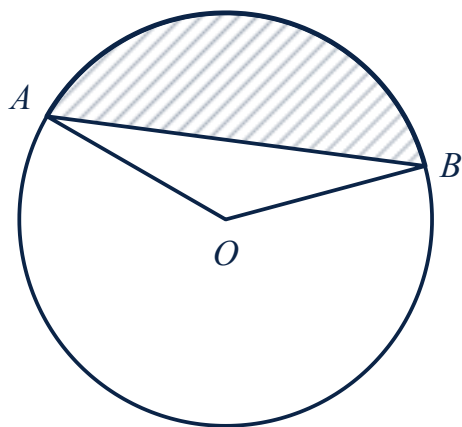
- Demuestra que el área de la región sombreada se puede expresar como $50\theta - 50 \sin \theta$.
- Halla el valor de θ para el cual el área de la región sombreada es igual a la mitad del área de la región no sombreada, con una aproximación de 4 cifras significativas.

a) Área sombreada = $\frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin \theta$ con $r = 10$.

b) $\theta = 1,969$ rad

EJERCICIO 14 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

El siguiente diagrama muestra un círculo de centro O y radio $OA = 5$ cm. El ángulo $\widehat{AOB} = 135^\circ$.



Halle el área de la región rayada.

$$\text{Área} = \frac{75\pi - 50\sqrt{2}}{8} \text{ cm}^2$$

EJERCICIO 15 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2008

Un disco circular se divide en 12 sectores cuyas áreas forman una progresión aritmética. El ángulo del sector más grande es el doble del ángulo del sector más pequeño. Calcule la medida del ángulo del sector más pequeño.

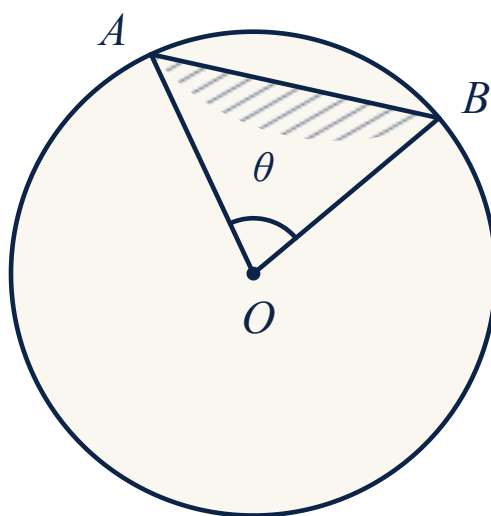
$$\theta = \frac{\pi}{9}$$

EJERCICIO 16

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2007

El diagrama muestra un círculo de centro O y radio 1, donde $\widehat{AOB} = \theta$, $\theta \neq 0$.



El área del triángulo AOB es tres veces el área rayada. Calcule el valor de θ

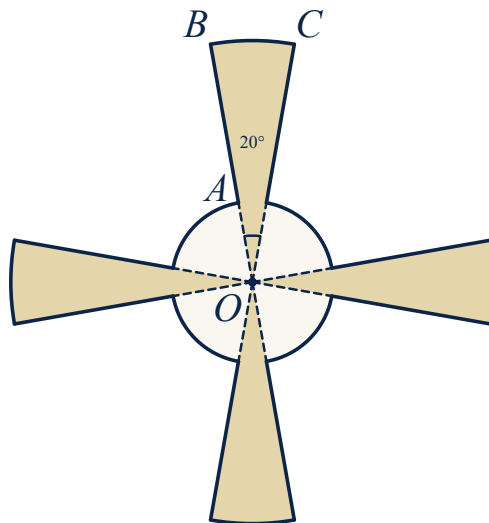
$$\theta = 1,28 \text{ rad}$$

EJERCICIO 17

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2017

El siguiente diagrama muestra un pendiente metálico formado por cuatro sectores circulares iguales de radio $OB = 9$ cm y cuatro sectores iguales de radio $OA = 3$ cm. El ángulo $BOC = 20^\circ$.



Calcule el área del pendiente.

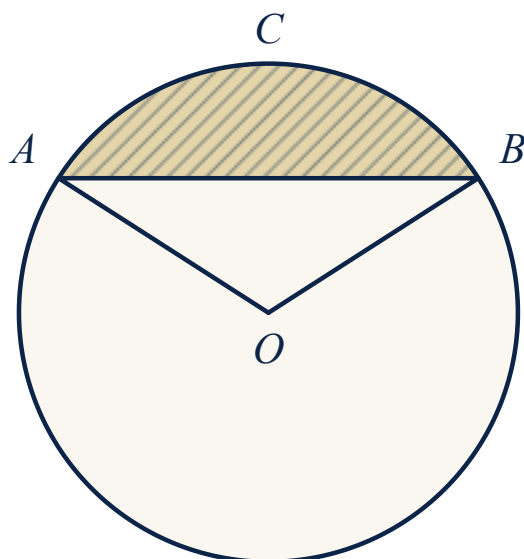
Área del pendiente = 25π cm²

EJERCICIO 18

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2005

El siguiente diagrama muestra un círculo con centro O y radio r . La longitud del arco ACB es $2r$.



El área del segmento sombreado puede expresarse como $k r^2$. Calcule el valor de k .

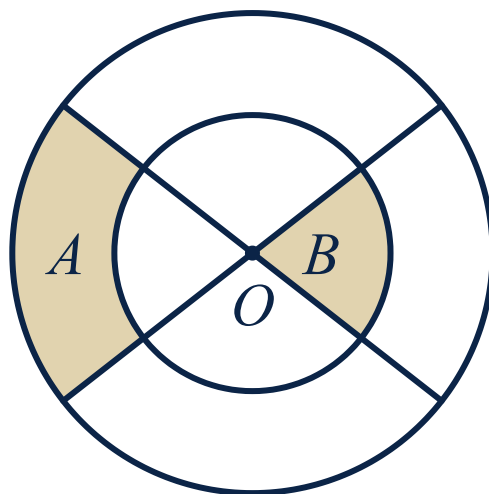
$$k = 1 - \frac{\sin 2}{2}$$

EJERCICIO 19

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2009

El siguiente diagrama muestra dos líneas rectas que se cruzan en O y dos círculos, cada uno con el centro O . El círculo exterior tiene un radio R y el círculo interno tiene un radio r .



Considere las regiones sombreadas con las áreas A y B . Sabiendo que $A : B = 2 : 1$, encuentre el valor exacto de la relación $R : r$.

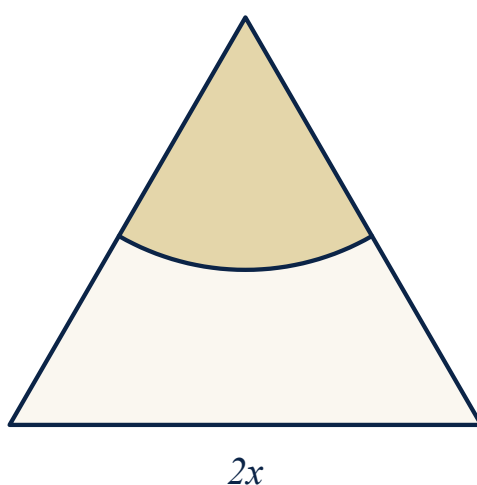
La relación $R : r$ es $\sqrt{3} : 1$

EJERCICIO 20

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

Desde el vértice de un triángulo equilátero de lado $2x$, se traza un arco circular para dividir el triángulo en dos regiones, tal y como muestra la siguiente figura.



Sabiendo que las dos regiones tienen la misma área, halle el radio del arco en función de x .

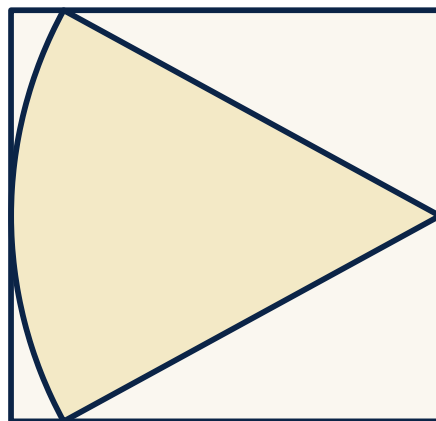
$$r = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\pi}} x$$

EJERCICIO 21

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2013

Se dibuja un rectángulo alrededor de un sector circular como se muestra. Si el ángulo del sector es 1 radian y el área del sector es 7 cm^2 , encuentre las dimensiones del rectángulo, dando sus respuestas al milímetro más cercano.



Ancho $\approx 37 \text{ mm}$

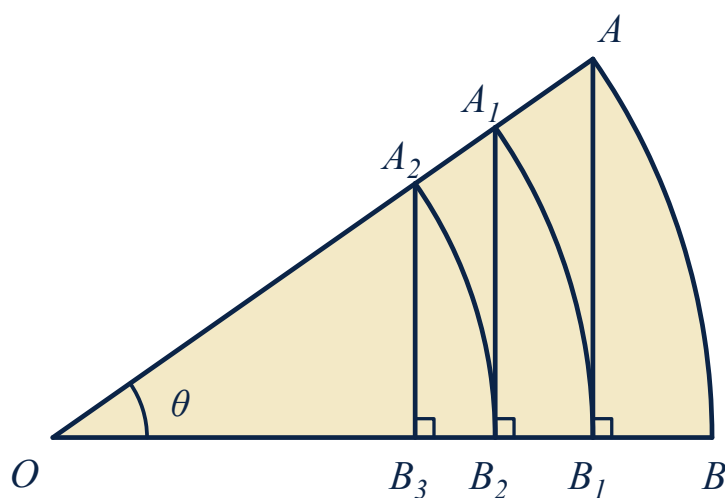
Alto $\approx 36 \text{ mm}$

EJERCICIO 22

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2004

La siguiente figura muestra un sector circular AOB de un círculo de radio 1 y centro O , con $\widehat{AOB} = \theta$. Las rectas AB_1 , A_1B_2 , A_2B_3 son perpendiculares a OB . A_1B_1 , A_2B_2 son todos arcos de circunferencia con centro en O .



Calcule la suma infinita de las longitudes de los arcos $AB + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \dots$

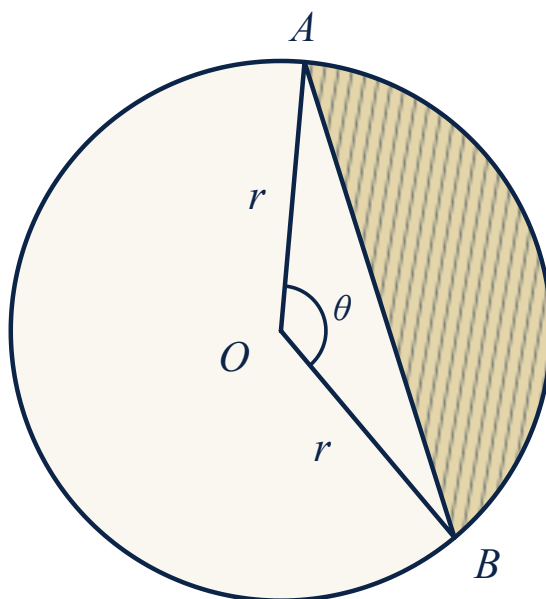
$$AB + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \dots = \frac{\theta}{1 - \cos \theta}$$

EJERCICIO 23

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2006

El diagrama muestra un círculo con centro O y radio r .



El ángulo $\widehat{AOB}$ en el centro del círculo es θ radianes. La cuerda AB divide al círculo en un segmento menor (región sombreada) y en un segmento mayor.

- Muestre que el área del menor segmento es $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$.
- Calcule el área del mayor segmento.
- Sabiendo que la razón de las áreas de los dos segmentos es 2:3, demuestre que $\sin \theta = \theta - \frac{4\pi}{5}$.
- Calcule el valor de θ .

a) El segmento es el sector menos el triángulo AOB : $\frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin \theta = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$.

b) $\frac{1}{2}r^2(2\pi - \theta + \sin \theta)$

c) La razón $\frac{\theta - \sin \theta}{2\pi - \theta + \sin \theta} = \frac{2}{3}$ da $3\theta - 3 \sin \theta = 4\pi - 2\theta + 2 \sin \theta$, es decir, $5\theta - 5 \sin \theta = 4\pi$ y $\sin \theta = \theta - \frac{4\pi}{5}$.

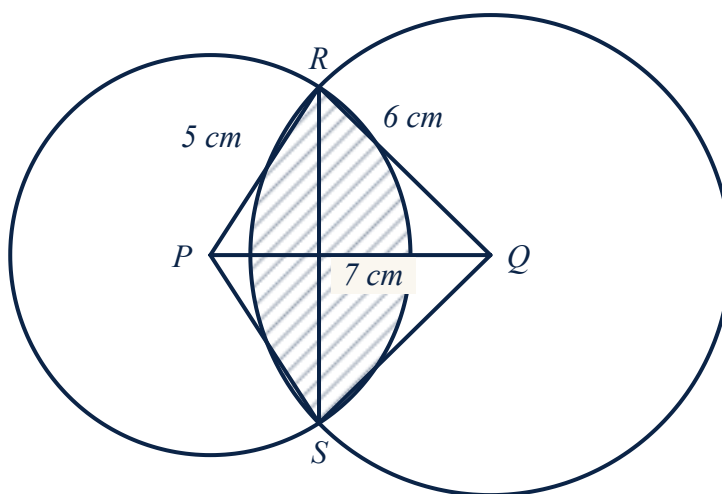
d) $\theta = 2,82$ rad

EJERCICIO 24

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

El siguiente diagrama muestra dos círculos que se cortan con centros P y Q y radios de 5 cm y 6 cm respectivamente. RS es la cuerda común de ambos círculos y PQ mide 7 cm.



Calcule el área de la región rayada.

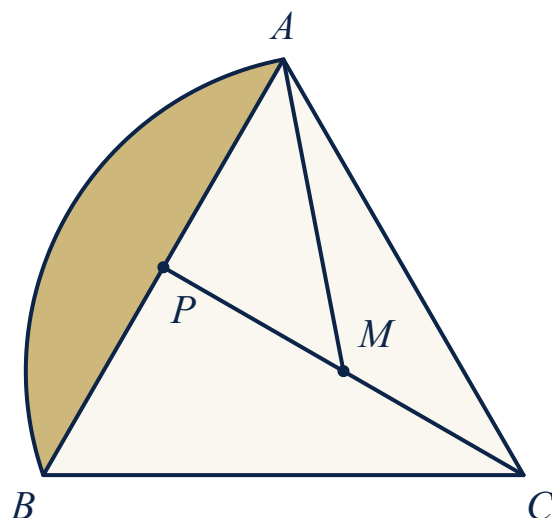
Área sombreada = $23,4 \text{ cm}^2$

EJERCICIO 25

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2018

Considere la siguiente figura



Los lados del triángulo equilátero ABC tienen longitudes de 1 m. P es el punto medio de $[AB]$. El arco de circunferencia AB tiene por centro M , el punto medio de $[CP]$.

- (i) Halle AM .
- (ii) Halle $\widehat{AMP}$ en radianes.
- Halle el área de la región sombreada.

a) (i) $AM = \frac{\sqrt{7}}{4}$ (ii) $\widehat{AMP} = 0,857 \text{ rad}$

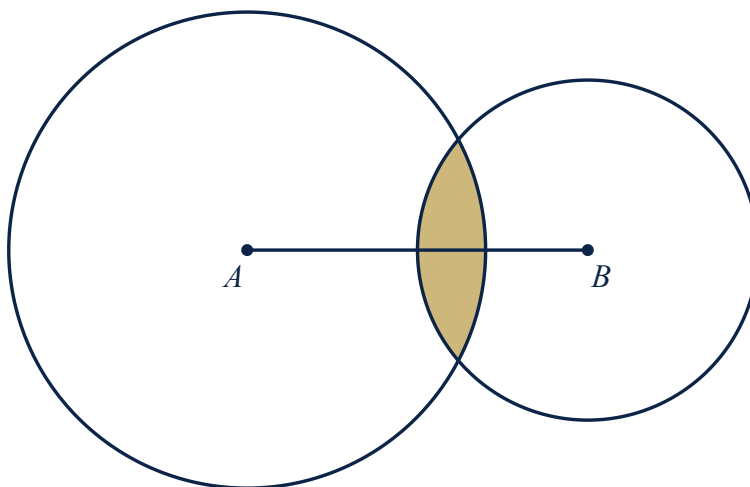
b) Área sombreada = $0,158 \text{ m}^2$

EJERCICIO 26

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2018

El barco A se encuentra a 10 km de distancia del barco B . Cada barco lleva a bordo un transmisor de radio. El transmisor del barco A tiene un alcance de 7 km y el transmisor del barco B tiene un alcance de 5 km. En el siguiente diagrama la zona sombreada representa la región en la que se puede detectar los dos transmisores. Halle el área de esta región.



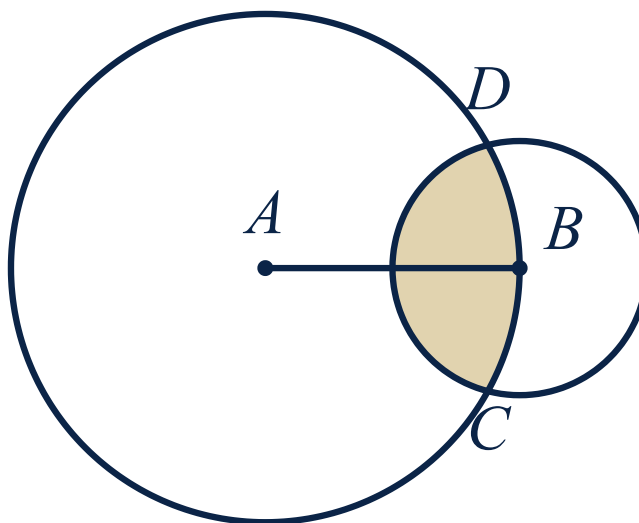
Área sombreada = $8,84 \text{ km}^2$

EJERCICIO 27

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2016

El diagrama muestra dos circunferencias con centros en los puntos A y B y radios $2r$ y r , respectivamente. El punto B pertenece a la circunferencia que tiene centro en A . Las circunferencias se cortan en los puntos C y D .



Sea α la medida del ángulo CAD y θ la medida del ángulo CBD , ambas en radianes.

- Halle una expresión para el área de la zona sombreada en función de α , θ y r .
- Muestre que $\alpha = 4 \arcsin \frac{1}{4}$.
- A partir de lo anterior, halle el valor de r , sabiendo que el área de la zona sombreada es igual a 4.

a) Área sombreada = $2r^2(\alpha - \sin \alpha) + \frac{r^2}{2}(\theta - \sin \theta)$

b) El triángulo ABC es isósceles con $AB = AC = 2r$ y $BC = r$. Si M es el punto medio de $[BC]$, en el triángulo rectángulo AMC se cumple $\sin \frac{\alpha}{4} = \frac{r/2}{2r} = \frac{1}{4}$, pues $\widehat{CAB} = \frac{\alpha}{2}$ y su mitad vale $\frac{\alpha}{4}$. Por tanto, $\alpha = 4 \arcsin \frac{1}{4}$.

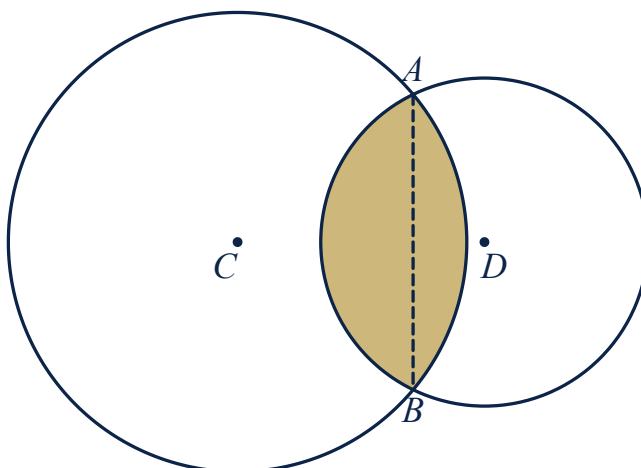
c) $r = 1,69$

EJERCICIO 28

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2011

El radio del círculo con el centro C es 7 cm y el radio del círculo con el centro D es de 5 cm. Si la longitud de la cuerda [AB] es de 9 cm, calcule el área de la región sombreada encerrada por los dos arcos AB.



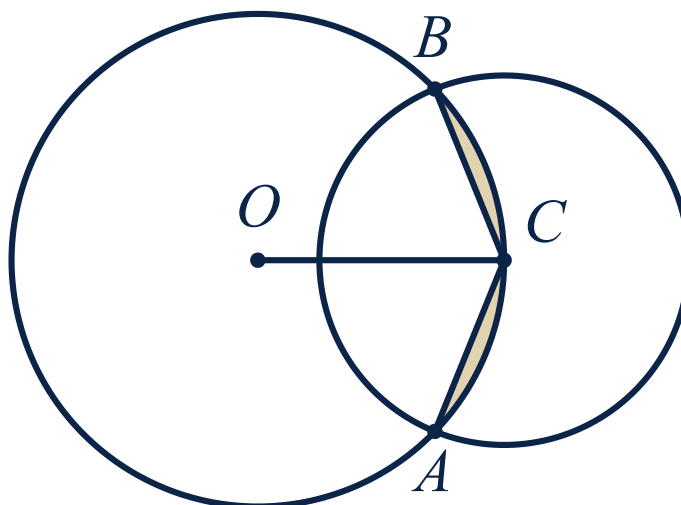
Área sombreada $\approx 28,3 \text{ cm}^2$

EJERCICIO 29

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2014

La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios 4 cm y 3 cm. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos A y B.



Halle;

- $\widehat{BOC}$
- El área de la región sombreada.

a) $\widehat{BOC} = 0,7688 \text{ rad}$

b) Área = $1,18 \text{ cm}^2$

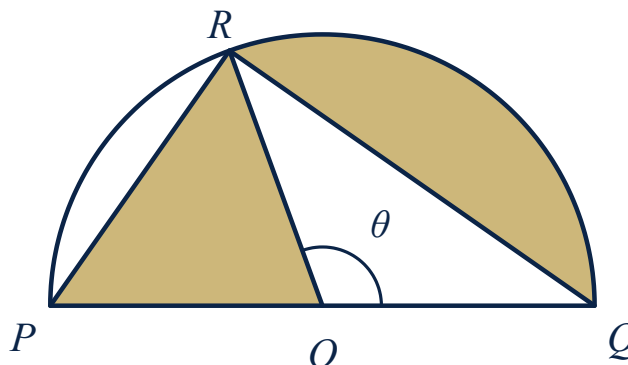
Nota: la solución del libro da $\widehat{BOC} = 0,7687$ rad, pero $\arccos \frac{23}{32} = 0,76879 \dots$, que redondeado a cuatro decimales es $0,7688$ rad.

EJERCICIO 30

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2021

El siguiente diagrama muestra un semicírculo con centro O y radio r . Los puntos P , Q y R se encuentran en la circunferencia del círculo, tal que $PQ = 2r$ y $\widehat{ROQ} = \theta$, donde $0 < \theta < \pi$.



- Sabiendo que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales, muestre que $\theta = 2 \sin \theta$.
- Usando lo anterior, determine el valor de θ .

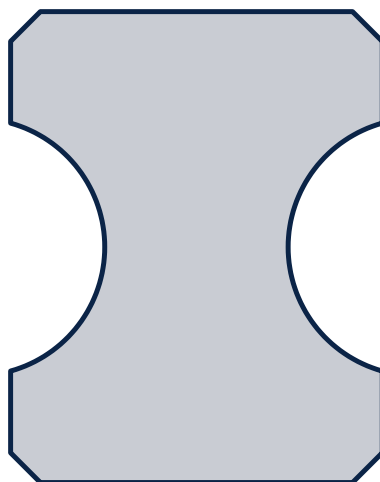
- Demostración: el área del triángulo PRO es $\frac{1}{2}r^2 \sin \theta$ y la del segmento circular es $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$; igualándolas se obtiene $\theta = 2 \sin \theta$.
- $\theta = 1,90$ rad

EJERCICIO 31

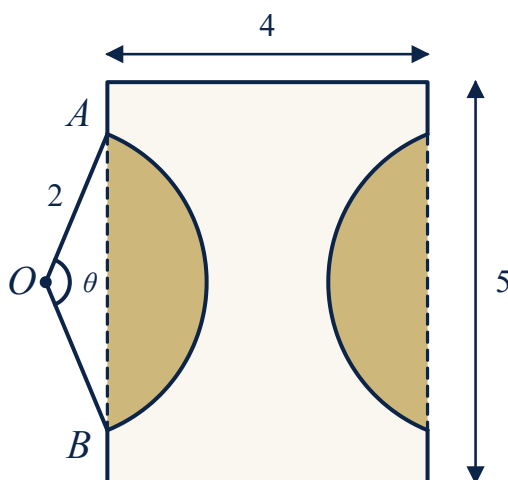
★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2022

Una empresa está diseñando un nuevo logotipo. El logotipo se crea quitando dos segmentos iguales de un rectángulo, como se muestra en el siguiente diagrama.



El rectángulo mide 5 cm por 4 cm. Los puntos A y B pertenecen a una circunferencia de centro O y radio 2 cm, tal que $\widehat{AOB} = \theta$, donde $0 < \theta < \pi$. Esta información se muestra en el siguiente diagrama.



- Encuentre el área de uno de los segmentos sombreados en función de θ .
- Sabiendo que el área del logotipo es 13.4 cm^2 , calcule el valor de θ .

- Área del segmento sombreado = $2(\theta - \sin \theta)$
- $\theta = 2,36 \text{ rad}$

Identidades trigonométricas (suma, ángulo doble y mitad)

EJERCICIO 32

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

Sabiendo que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ y $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$, encuentre el valor de $\sin 2\alpha$.

$$\sin 2\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

EJERCICIO 33

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2005

Sabiendo que $a \sin(4x) + b \sin(2x) = 0$, halle una expresión para $\cos^2(x)$ en función de a y b .

$$\cos^2 x = \frac{2a - b}{4a}$$

EJERCICIO 34

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2010

Si x satisface la ecuación $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, compruebe que $11 \tan x = a + b\sqrt{3}$ donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

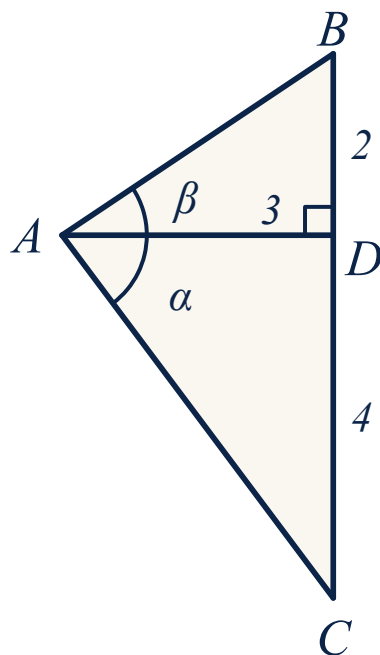
$$11 \tan x = 6 + \sqrt{3}, \text{ es decir, } a = 6 \quad b = 1$$

EJERCICIO 35

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2008

En la figura que aparece a continuación, AD es perpendicular a BC .



$CD = 4$, $BD = 2$ y $AD = 3$. $\widehat{CAD} = \alpha$ y $\widehat{BAD} = \beta$. Halle el valor exacto de $\cos(\alpha - \beta)$.

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{17}{5\sqrt{13}}$$

EJERCICIO 36

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2012

Demostración

Compruebe que $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \sec 2A + \tan 2A$

Multiplicando numerador y denominador por $\cos A + \sin A$:

$$\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \frac{(\cos A + \sin A)^2}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{1 + \sin 2A}{\cos 2A} = \frac{1}{\cos 2A} + \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \sec 2A + \tan 2A$$

EJERCICIO 37

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2013

- a) Sabiendo que $\arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \arctan\left(\frac{1}{p}\right)$, donde $p \in \mathbb{Z}^+$, halle p .
- b) A partir de lo anterior, halle el valor de $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$.

a) $p = 3$

b) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$

EJERCICIO 38

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Demostración

Sean $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ los ángulos de un triángulo. Compruebe que $\tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A} \tan \hat{B} \tan \hat{C}$

Sugerencia: $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})$.

Desarrollo: como $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})$,

$$\tan \hat{A} = -\tan(\hat{B} + \hat{C}) = -\frac{\tan \hat{B} + \tan \hat{C}}{1 - \tan \hat{B} \tan \hat{C}}$$

Quitando el denominador, $\tan \hat{A} - \tan \hat{A} \tan \hat{B} \tan \hat{C} = -\tan \hat{B} - \tan \hat{C}$, es decir,

$$\tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A} \tan \hat{B} \tan \hat{C}$$

EJERCICIO 39

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2011

- a) Demuestre que $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan \theta$.
- b) Usando lo anterior, encuentre el valor de $\cot \frac{\pi}{8}$ en la forma $a + b\sqrt{2}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) $\frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta} = \tan \theta$.

b) Por (a) con $\theta = \frac{\pi}{8}$: $\tan \frac{\pi}{8} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$, luego $\cot \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$.

EJERCICIO 40

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2011

- a) Sabiendo que $\arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{3} = \arctan a$, $a \in \mathbb{Q}^+$, halle el valor de a .
- b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación $\arcsin x = \arctan a$.

- a) $a = \frac{1}{7}$
- b) $x = \frac{\sqrt{2}}{10} \approx 0,141 \text{ rad}$

EJERCICIO 41

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2014

Sabiendo que $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$, halle $\cos 4x$.

$$\cos 4x = \frac{31}{81}$$

EJERCICIO 42

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2014

Los tres primeros términos de una progresión geométrica son: $\sin x$, $\sin 2x$ y $4 \sin x \cos^2 x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

- a) Halle la razón común r .
- b) Halle el conjunto de valores de x para los cuales la serie geométrica: $\sin x + \sin 2x + 4 \sin x \cos^2 x + \dots$ es convergente.
- c) Si $x = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, $x > 0$, demuestre que la suma de los infinitos términos de la serie vale $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

- a) $r = 2 \cos x$
- b) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$
- c) Con $\cos x = \frac{1}{4}$ se tiene $\sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$ y $r = \frac{1}{2}$, luego $S_{\infty} = \frac{\sin x}{1-r} = \frac{\sqrt{15}/4}{1/2} = \frac{\sqrt{15}}{2}$

EJERCICIO 43

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

- a) Halle el valor de $\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{9\pi}{4}$.
- b) Muestre que $\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \sin x$, $x \neq k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$.
- c) Utilice el principio de inducción matemática para demostrar que
- $$\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{1 - \cos 2nx}{2 \sin x}, \quad n \in \mathbb{Z}^+, x \neq k\pi \text{ donde } k \in \mathbb{Z}.$$
- d) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, resuelva la ecuación $\sin x + \sin 3x = \cos x$ en el intervalo $0 < x < \pi$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- b) $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, luego $\frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \sin x$.

- c) Para $n = 1$ es el apartado (b). Se supone cierto para $n = k$ y se suma el término siguiente:

$$\frac{1 - \cos 2kx}{2 \sin x} + \sin(2k+1)x = \frac{1 - \cos 2kx + 2 \sin x \sin(2k+1)x}{2 \sin x} = \frac{1 - \cos(2kx + 2x)}{2 \sin x} = \frac{1 - \cos 2(k+1)x}{2 \sin x}$$

porque $2 \sin x \sin(2k+1)x = \cos 2kx - \cos(2k+2)x$.

d) $x = \frac{\pi}{12} \quad x = \frac{5\pi}{12} \quad x = \frac{\pi}{2}$

EJERCICIO 44

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2010

- a) Muestre que $\sin 2nx = \sin((2n+1)x) \cos x - \cos((2n+1)x) \sin x$.

- b) Usando lo anterior, demuestre por inducción que

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos((2n-1)x) = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+, \sin x \neq 0.$$

- c) Resuelva la ecuación $\cos x + \cos 3x = \frac{1}{2}$, $0 < x < \pi$.

- a) $\sin 2nx = \sin((2n+1)x - x)$ y se aplica la fórmula del seno de una diferencia.

- b) Se supone cierto para $n = k$ y se suma el término siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2kx}{2 \sin x} + \cos(2k+1)x &= \frac{\sin 2kx + 2 \sin x \cos(2k+1)x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2kx + 2 \sin x [\cos 2kx \cos x - \sin 2kx \sin x]}{2 \sin x} \\ &= \frac{\sin 2kx (1 - 2 \sin^2 x) + \cos 2kx \sin 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2kx \cos 2x + \cos 2kx \sin 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin(2k+2)x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2(k+1)x}{2 \sin x} \end{aligned}$$

c) $x = \frac{2\pi}{3} \quad x = \frac{\pi}{5} \quad x = \frac{3\pi}{5}$

EJERCICIO 45

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2014

Demostración

En el triángulo ABC,

$$3 \sin B + 4 \cos C = 6$$

$$4 \sin C + 3 \cos B = 1$$

- a) Muestre que $\sin(B+C) = \frac{1}{2}$. Robert conjetura que $\widehat{CAB}$ puede tener dos valores posibles.
b) Muestre que la conjetura de Robert es incorrecta, demostrando que $\widehat{CAB}$ tiene sólo un valor posible.

- a) Elevando al cuadrado las dos ecuaciones y sumándolas se obtiene el resultado.

- b) $B+C = 150^\circ$ y por tanto $\widehat{CAB} = 30^\circ$.

Ecuaciones trigonométricas

EJERCICIO 46

★ Básico

IB · P1 Mayo 1998

Calcule todos los valores de x en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, para los cuales $\sin x \tan x = \sin x$.

$x = 0 \quad x = \pi \quad x = 2\pi \quad x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{5\pi}{4}$

EJERCICIO 47 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Resuelva $\tan^2 2\theta = 1$, en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\theta = \frac{\pi}{8} \quad \theta = -\frac{3\pi}{8} \quad \theta = -\frac{\pi}{8} \quad \theta = \frac{3\pi}{8}$$

EJERCICIO 48 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2022

Halle el menor valor positivo de x para el cual se cumple que $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

El menor valor positivo de x es $x = \frac{17\pi}{6}$

EJERCICIO 49 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2013

- a) Resuelva la ecuación $3\cos^2 x - 8\cos x + 4 = 0$, donde $0 \leq x \leq 180^\circ$, y exprese la(s) respuesta(s) aproximadas al número entero de grados más cercano.
- b) Halle los valores exactos de $\sec x$ que satisfacen la ecuación $3\sec^4 x - 8\sec^2 x + 4 = 0$.

- a) $x = 48^\circ$
- b) $\sec x = \pm\sqrt{2}$

EJERCICIO 50 ★★ Medio IB · P1 Mayo 2001

Resolver $2\sin x = \tan x$, donde $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$$x = 0 \quad x = \pm\frac{\pi}{3}$$

EJERCICIO 51 ★★ Medio IB · P1 Mayo 2002

El ángulo θ satisface la ecuación $\tan \theta + \cot \theta = 3$, donde θ está expresado en grados. Halle todos los posibles valores de θ en el intervalo $]0^\circ, 90^\circ[$.

$$\theta = 69,1^\circ \quad \theta = 20,9^\circ$$

EJERCICIO 52 ★★ Medio IB · P1 Mayo 2003

Halle todos los valores de θ en el intervalo $[0, \pi]$ que satisfacen la ecuación $\cos 2\theta = \sin^2 \theta$.

$$\theta = 0,62 \text{ rad} \quad \theta = 2,53 \text{ rad}$$

Nota: la solución del libro da $\theta = 2,52 \text{ rad}$, pero $\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 2,526$, que con dos decimales es 2,53.

EJERCICIO 53 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2015

Halle todas las soluciones de la ecuación $\tan x + \tan 2x = 0$ donde $0^\circ \leq x < 360^\circ$.

$$x = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$$

EJERCICIO 54 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1996

Calcule todos los ángulos θ , $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, ajustado al grado más cercano, de tal manera que $3 \sin \theta + 4 \cos \theta = 5$.

$$\theta = 37^\circ$$

Nota: la solución del libro da $\theta = 37^\circ$ y $\theta = 323^\circ$, pero $\theta = 323^\circ$ no cumple la ecuación ($3 \sin 323^\circ + 4 \cos 323^\circ \approx 1,39$); la única solución es $\theta = 37^\circ$.

EJERCICIO 55 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2018

Sea $a = \sin b$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Calcule, en función de b , las soluciones de $\sin 2x = -a$, $0 \leq x \leq \pi$.

$$x = \frac{\pi + b}{2} \quad x = \frac{2\pi - b}{2}$$

EJERCICIO 56 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2017

Resuelva la ecuación $\sec^2 x + 2 \tan x = 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

EJERCICIO 57 ★★ Medio IB · P1 Mayo 1997

Calcule todos los valores de θ para que $3 \sin^2 \theta - 7 \sin \theta + 5 = 3 \cos^2 \theta$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.

$$\theta = 41,8^\circ \quad \theta = 30^\circ$$

EJERCICIO 58 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1998

Dada la ecuación $3 \cos x - 4 \sin x = -5$, escriba una expresión para $\tan x$ dando su respuesta exacta en la forma $\tan x = \frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$.

$$\tan x = -\frac{4}{3}$$

EJERCICIO 59

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2021

Resuelva la ecuación $2 \cos^2 x + 5 \sin x = 4$, $0 \leq x \leq 2\pi$

$$x = \frac{\pi}{6} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

EJERCICIO 60

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2021

- a) Muestre que $\sin 2x + \cos 2x - 1 = 2 \sin x (\cos x - \sin x)$.
- b) Usando lo anterior o de cualquier otra forma, resuelva $\sin 2x + \cos 2x - 1 + \cos x - \sin x = 0$ para $0 < x < 2\pi$.

- a) Demostración.

b) $x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{5\pi}{4} \quad x = \frac{7\pi}{6} \quad x = \frac{11\pi}{6}$

EJERCICIO 61

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2013

- a) (i) Expresar $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ en la forma $a \cos x - b \sin x$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.
- (ii) Usando lo anterior, resuelva $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.
- b) Sea $p(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.
- (i) Muestre que $x = 1$ es un cero de p .
- (ii) Usando lo anterior, encuentre todas las soluciones de $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.
- (iii) Expresar $\sin 2\theta \cos \theta + \sin^2 \theta$ en función de $\sin \theta$.
- (iv) Usando lo anterior, resuelva $\sin 2\theta \cos \theta + \sin^2 \theta = 1$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

- a) (i) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$
- (ii) $x = \frac{\pi}{6} \quad x = \frac{3\pi}{2}$
- b) (i) (Completado) $p(1) = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$.
- (ii) $x = 1 \quad x = \frac{1}{2} \quad x = -1$
- (iii) $\sin 2\theta \cos \theta + \sin^2 \theta = 2 \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + \sin^2 \theta$
- (iv) $\theta = \frac{\pi}{2} \quad \theta = \frac{3\pi}{2} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad \theta = \frac{5\pi}{6}$

Nota: la solución del libro para b) (ii) solo da $p = \frac{1}{2}$ y $p = -1$; falta la raíz $x = 1$, que también es solución de la ecuación (pide «todas las soluciones»).

EJERCICIO 62

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

Considere la ecuación $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Sabiendo que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ y $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

- a) Verifique que $x = \frac{\pi}{12}$ es una solución de la ecuación.
b) A partir de lo anterior, halle la otra solución de la ecuación para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin \frac{\pi}{12}} = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = 2\sqrt{2}$ y $\frac{\sqrt{3}+1}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{4(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = 2\sqrt{2}$; la suma es $4\sqrt{2}$.

b) $x = \frac{11\pi}{36}$

EJERCICIO 63

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

Resuelva la ecuación $\sin 2x - \cos 2x = 1 + \sin x - \cos x$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

$x = \frac{\pi}{4}$ $x = -\frac{3\pi}{4}$ $x = \frac{\pi}{3}$ $x = -\frac{\pi}{3}$

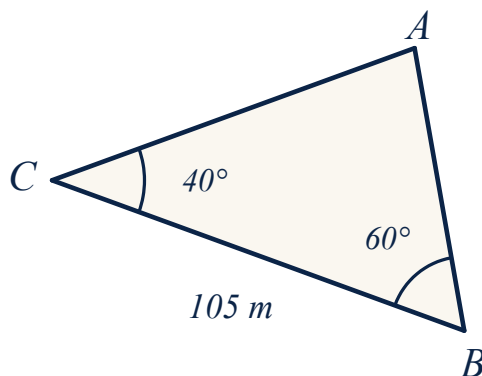
Teoremas del seno y del coseno y área de triángulos

EJERCICIO 64

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2007

El siguiente diagrama muestra un triángulo ABC , donde $BC = 105$ m, $\widehat{ACB} = 40^\circ$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.



Halle AB .

$AB = 68,5$ m

EJERCICIO 65 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2005

El triángulo ABC tiene un ángulo obtuso en B ; $BC = 10,2$; $\hat{A} = x$ y $\hat{B} = 2x$.

- Halle AC , en función de $\cos x$.
- Sabiendo que el área del triángulo ABC es $52,02 \cos x$, halle el ángulo C .

- $AC = 20,4 \cos x$
- $C = 30^\circ$

EJERCICIO 66 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2008

Considere el triángulo ABC donde $\widehat{BAC} = 37,8^\circ$, $AB = 8,75$ y $BC = 6$. Halle AC .

$$AC = 9,6 \quad AC = 4,22$$

EJERCICIO 67 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2008

En un triángulo ABC , $\hat{A} = 35^\circ$, $BC = 4$ cm y $AC = 6,5$ cm. Halle los posibles valores de $\hat{B}$ y los correspondientes valores de AB .

$$B = 68,8^\circ \quad AB = 6,77 \text{ ó } B = 111,2^\circ \quad AB = 3,88$$

EJERCICIO 68 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2010

Considere el triángulo ABC , donde $\widehat{BAC} = 70^\circ$, $AB = 8$ cm y $AC = 7$ cm. El punto D , situado sobre el lado BC , es tal que $\frac{BD}{DC} = 2$. Determine la longitud de AD .

$$AD = 6,12 \text{ cm}$$

EJERCICIO 69 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2009

Un triángulo tiene lados cuyas longitudes son $(n^2 + n + 1)$, $(2n + 1)$ y $(n^2 - 1)$ donde $n > 1$.

- Explique por qué el lado $(n^2 + n + 1)$ debe ser el lado más largo del triángulo.
- Compruebe que el ángulo más grande del triángulo, θ , es igual a 120° .

- $n^2 + n + 1 - (2n + 1) > 0$ y $n^2 + n + 1 - (n^2 - 1) > 0$
- $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

EJERCICIO 70 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2010

En el triángulo ABC , $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm y el área es de 10 cm².

- Halle $\sin \widehat{B}$.
- A partir de lo anterior, halle los dos valores posibles de AC , y dé sus respuestas con una aproximación de dos cifras decimales.

- $\sin \widehat{B} = \frac{2}{3}$
- $AC = 4,03$ $AC = 10,28$

EJERCICIO 71 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2011

Sea un triángulo equilátero de perímetro P y área A , cuyos vértices se encuentran sobre una circunferencia de radio r . Halle una expresión para $\frac{P}{A}$, de la forma $\frac{k}{r}$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$.

$$\frac{P}{A} = \frac{4}{r}$$

EJERCICIO 72 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2012

Considere un triángulo ABC , siendo $\widehat{BAC} = 45,7^\circ$; $AB = 9,63$ cm y $BC = 7,5$ cm.

- Por medio de un diagrama, muestre por qué existen dos triángulos que cumplen con esta información.
- Halle los posibles valores de AC .

- Con A y AB fijos, la circunferencia de centro B y radio $BC = 7,5$ corta dos veces a la semirrecta que sale de A , porque la distancia de B a esa semirrecta es $9,63 \sin 45,7^\circ \approx 6,89 < 7,5 < 9,63$. Se obtienen así dos posiciones de C y dos triángulos.
- $AC = 9,68$ cm y $AC = 3,77$ cm

EJERCICIO 73 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2015

El triángulo ABC tiene un área de 21 cm². Los lados AB y AC tienen una longitud de 6 cm y 11 cm respectivamente. Halle los dos posibles valores de la longitud del lado BC .

$$BC = 7,43 \quad BC = 16,1$$

EJERCICIO 74 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2014

El triángulo ABC es equilátero de lado 3 cm. El punto D se encuentra en $[BC]$ tal que $BD = 1$ cm. Calcule $\cos \widehat{DAC}$.

$$\cos \widehat{DAC} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

EJERCICIO 75

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 2000

En el triángulo ABC , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AB = 6$ cm y $AC = 3\sqrt{2}$ cm. Calcule las posibles medidas de BC .

$$BC = 3\sqrt{3} + 3 \quad BC = 3\sqrt{3} - 3$$

EJERCICIO 76

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2007

En el triángulo ABC , $\widehat{C} = 42^\circ$, $BC = 1,74$ cm y el área es $1,19$ cm².

- a) Calcule AC .
- b) Calcule AB .

a) $AC = 2,04$

b) $AB = 1,38$

Nota: la solución del libro da $AB = 1,38$ porque usa el valor redondeado $AC = 2,04$; con el valor exacto $AC \approx 2,0442$ resulta $AB \approx 1,3855$, es decir, $AB = 1,39$.

EJERCICIO 77

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 2002

El triángulo ABC tiene $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm y $\widehat{BAC} = 20^\circ$. Halle la menor área posible del triángulo ABC .

Menor área = $2,98$ cm²

EJERCICIO 78

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2003

Sea el triángulo ABC , $\widehat{A} = 30^\circ$, $BC = 3$ y $AB = 5$. Halle los dos valores posibles de $\widehat{B}$.

$$\widehat{B} = 93,6^\circ \quad \widehat{B} = 26,4^\circ$$

EJERCICIO 79

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

En un triángulo ABC , $\widehat{ABC} = 31^\circ$, $AC = 3$ cm y $BC = 5$ cm. Calcule las posibles longitudes del lado AB .

$$AB = 5,82 \text{ cm} \quad AB = 2,75 \text{ cm}$$

EJERCICIO 80

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2015

En el triángulo ABC , $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm y $\widehat{ABC} = 100^\circ$.

- a) Halle el área del triángulo.
- b) Halle AC .

a) Área = $29,5$ cm²

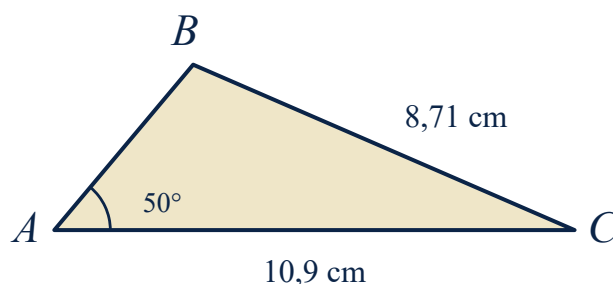
b) $AC = 13,8$ cm

EJERCICIO 81

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2006

En el triángulo obtusángulo ABC , $AC = 10,9$ cm, $BC = 8,71$ cm y $\widehat{BAC} = 50^\circ$.



Calcule el área del triángulo ABC .

$$\text{Área} = 18,9 \text{ cm}^2$$

EJERCICIO 82

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2008

En el triángulo ABC , $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm, y $\widehat{B}$ es dos veces el tamaño de $\widehat{C}$. Calcule el coseno de $\widehat{C}$.

$$\cos \widehat{C} = \frac{2}{3}$$

EJERCICIO 83

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2019

En el triángulo ABC , $AB = 5$, $BC = 14$ y $AC = 11$. Halle todos los ángulos interiores del triángulo. Dé las respuestas en grados, con una aproximación de una cifra decimal.

$$\widehat{A} = 117,0^\circ \quad \widehat{B} = 44,4^\circ \quad \widehat{C} = 18,5^\circ$$

Nota: la solución del libro da $\widehat{C} = 18,6^\circ$, pero $\cos \widehat{C} = \frac{292}{308}$ da $\widehat{C} = 18,549 \dots^\circ \approx 18,5^\circ$.

EJERCICIO 84

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2019

Las longitudes de dos de los lados de un triángulo son 4 cm y 5 cm. Sea θ el ángulo entre los dos lados dados.

El triángulo tiene un área de $\frac{5\sqrt{15}}{2} \text{ cm}^2$.

a) Demuestre que $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

b) Halle los dos valores posibles para la longitud del tercer lado.

a) $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \sin \theta = \frac{5\sqrt{15}}{2}$, luego $10 \sin \theta = \frac{5\sqrt{15}}{2}$ y $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

b) lado = $\sqrt{31}$ lado = $\sqrt{51}$

EJERCICIO 85 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2016

$ABCD$ es un cuadrilátero en el que $AB = 6,5$; $BC = 9,1$; $CD = 10,4$; $DA = 7,8$ y $\widehat{CDA} = 90^\circ$. Halle $\widehat{ABC}$, y dé la respuesta al número de grados más próximo.

$$\widehat{ABC} = 111,8^\circ \approx 112^\circ$$

EJERCICIO 86 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2016

El triángulo ABC es tal que $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm y $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{9}$.

- Utilice el teorema del coseno para hallar los dos posibles valores de AC .
- Halle la diferencia entre las áreas de los dos posibles triángulos ABC .

- $AC = 6,43$ cm $AC = 1,09$ cm
- Diferencia de áreas = $3,65$ cm²

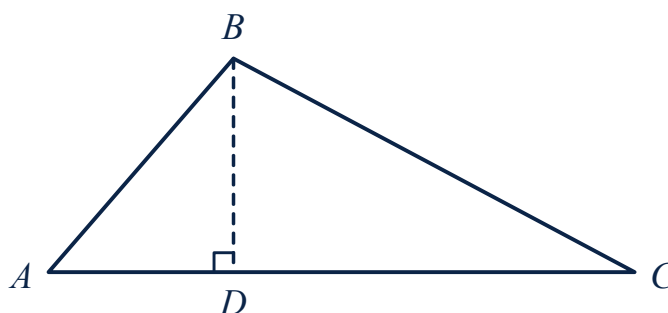
EJERCICIO 87 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2000

En el triángulo ABC , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AB = 6$ cm y $AC = 3\sqrt{2}$. Calcule las posibles longitudes de $[BC]$.

$$BC = 3\sqrt{3} + 3 \quad BC = 3\sqrt{3} - 3$$

EJERCICIO 88 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2008 Demostración

En el triángulo ABC , $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ y $[BD]$ es perpendicular a $[AC]$.



- Muestre que $CD = b - c \cos A$.
- Usando lo anterior y usando el teorema de Pitágoras en el triángulo BCD , pruebe el teorema del coseno para el triángulo ABC .
- Si $\widehat{ABC} = 60^\circ$, use el teorema del coseno para mostrar que $c = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2}$.

- En el triángulo rectángulo ABD , $AD = c \cos A$; como D está en $[AC]$, $CD = AC - AD = b - c \cos A$.

b) En el triángulo rectángulo ABD , $BD = c \sin A$. Por Pitágoras en BCD :

$$a^2 = BD^2 + CD^2 = c^2 \sin^2 A + (b - c \cos A)^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

c) Con $\widehat{ABC} = 60^\circ$ el teorema del coseno da $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ = a^2 + c^2 - ac$, es decir, $c^2 - ac + a^2 - b^2 = 0$. Entonces

$$c = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(a^2 - b^2)}}{2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{b^2 - \frac{3}{4}a^2}$$

EJERCICIO 89

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2015

En un triángulo ABC , $\hat{A} = 50^\circ$, $AB = 7$ cm y $BC = 6$ cm. Calcule el área del triángulo sabiendo que es menor de 10 cm^2 .

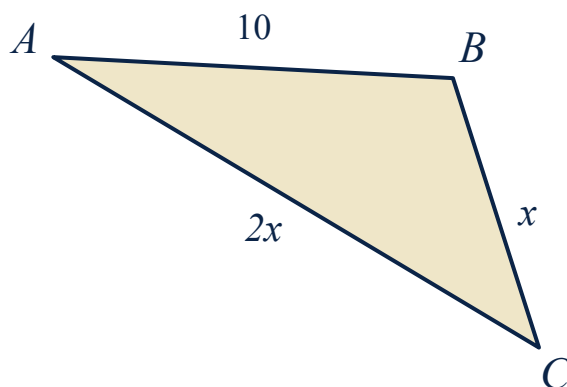
El área es $4,85 \text{ cm}^2$.

EJERCICIO 90

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2021

La siguiente figura muestra el triángulo ABC , donde $AB = 10$, $BC = x$ y $AC = 2x$.



Sabiendo que $\cos \hat{C} = \frac{3}{4}$, halle el área del triángulo. Dé la respuesta en la forma $\frac{p\sqrt{q}}{2}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$

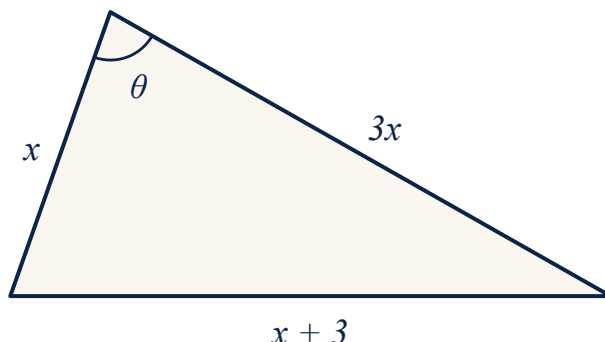
$$\text{Área del triángulo} = \frac{25\sqrt{7}}{2}$$

EJERCICIO 91

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 2000

El área del triángulo que se muestra es $2,21 \text{ cm}^2$. La longitud del lado más corto es $x \text{ cm}$ y la de los otros dos lados $3x \text{ cm}$ y $(x + 3) \text{ cm}$.



- Usando la fórmula del área del triángulo, escriba una expresión para $\sin \theta$ en función de x .
- Usando el teorema del coseno, escriba simplificada una expresión para $\cos \theta$ en función de x .
- (i) Usando sus respuestas a las partes (a) y (b), muestre que $\left(\frac{3x^2 - 2x - 3}{2x^2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{4,42}{3x^2}\right)^2$.
- (ii) Calcule
 - los posibles valores de x
 - Los correspondientes valores de θ , en radianes, usando la respuesta de (b).

a) $\sin \theta = \frac{4,42}{3x^2}$

b) $\cos \theta = \frac{3x^2 - 2x - 3}{2x^2}$

c) (ii) a) $x = 1,24 \text{ cm}$ $x = 2,94 \text{ cm}$

b) $\theta = 1,86 \text{ rad}$ $\theta = 0,17 \text{ rad}$

Nota: la solución del libro da $\theta = 0,16 \text{ rad}$ para $x = 2,94$, pero $\arccos \frac{3x^2 - 2x - 3}{2x^2} \approx 0,172$, es decir, $0,17 \text{ rad}$.

EJERCICIO 92

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

En el triángulo ABC , $\hat{A} = 30^\circ$, $a = 5$ y $c = 7$. Calcule la diferencia entre las áreas de los dos posibles triángulo para ABC .

Diferencia de áreas = $\frac{7\sqrt{51}}{4}$

EJERCICIO 93

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2017

En el triángulo PQR , $PR = 12$ cm, $QR = p$ cm, $PQ = r$ cm y $\widehat{QPR} = 30^\circ$.

- Usa el teorema del coseno para mostrar que $r^2 - 12\sqrt{3}r + 144 - p^2 = 0$. Considere los posibles triángulos con $QR = 8$ cm.
- Calcule los dos valores correspondientes de PQ .
- Usando lo anterior, encuentre el área del triángulo más pequeño. Considere el caso donde p , la longitud de QR , no se fija en 8 cm.
- Determine el rango de valores de p para los cuales es posible formar dos triángulos.

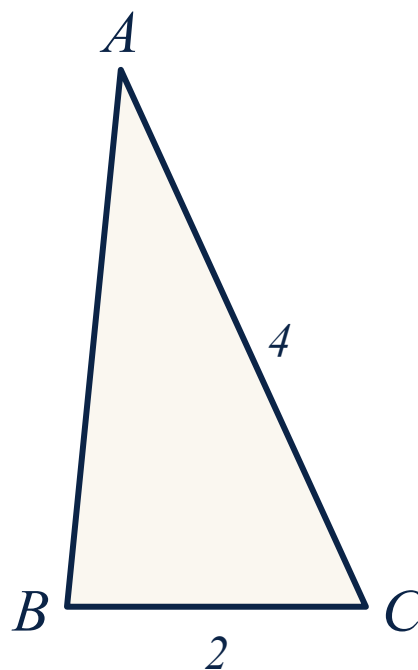
- Por el teorema del coseno, $p^2 = 12^2 + r^2 - 2 \cdot 12r \cos 30^\circ = 144 + r^2 - 12\sqrt{3}r$, de donde $r^2 - 12\sqrt{3}r + 144 - p^2 = 0$.
- $PQ = 15,7$ cm $PQ = 5,1$ cm
- Área = $15,3 \text{ cm}^2$
- $6 < p < 12$

EJERCICIO 94

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2017

- Halle el conjunto de valores de k que satisfacen la inecuación $k^2 - k - 12 < 0$.
- El triángulo ABC se muestra en la siguiente figura. Sabiendo que $\cos B < \frac{1}{4}$, halle el rango de posibles valores de AB .



- $-3 < k < 4$
- $2 < AB < 4$

EJERCICIO 95

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

En el triángulo PQR , $PQ = 6$, $PR = k$ y $\widehat{PQR} = 30^\circ$.

- Para el caso $k = 4$, encuentre los dos valores posibles de QR .
- Determine los valores de k para los cuales las condiciones anteriores definen un triángulo único.

a) $QR = 3\sqrt{3} + \sqrt{7}$ $QR = 3\sqrt{3} - \sqrt{7}$

b) $k = 3$ o $k \geq 6$

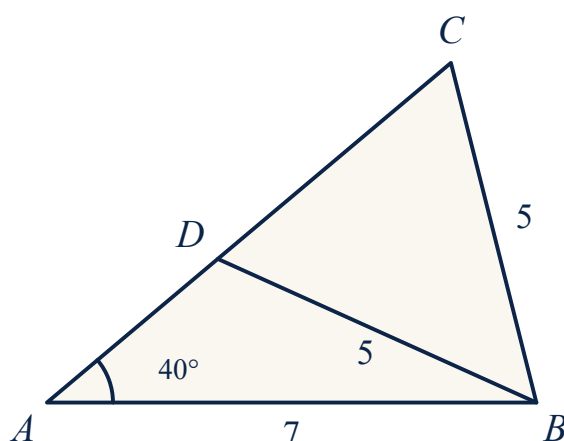
Nota: la solución del libro da solo $k = 3$ (triángulo rectángulo en R), pero también hay un único triángulo cuando $k \geq 6$: la ecuación $QR^2 - 6\sqrt{3}QR + 36 - k^2 = 0$ tiene entonces una sola raíz positiva (para $k = 6$ la otra raíz es 0 y no da triángulo).

EJERCICIO 96

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2011

Dado $\triangle ABC$, con longitudes mostradas en el siguiente diagrama, encuentre la longitud del segmento de línea $[CD]$.



$CD = 4,36$

Nota: la solución del libro da $CD = 4,37$, pero el valor exacto es $CD = 10 \cos \widehat{BDC} = 4,361 \dots$ (con $\widehat{ADB} = 115,9^\circ$ y $\widehat{BDC} = 64,1^\circ$); el libro redondea el ángulo antes de calcular.

EJERCICIO 97

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

En el triángulo ABC, $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $AC = \sqrt{2}$ y $AB = BC + 1$.

- Demuestre que $\cos \hat{A} - \sin \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación de la parte a), resuelva la ecuación para calcular los ángulos en el triángulo.
- Aplique el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC para encontrar BC , y por lo tanto muestre que $\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.
- Usando lo anterior, o de otra manera, calcule la longitud de la perpendicular de B a [AC].

- $AB = \sqrt{2} \cos \hat{A}$ y $BC = \sqrt{2} \sin \hat{A}$; como $AB - BC = 1$, se obtiene $\cos \hat{A} - \sin \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- $\hat{A} = 15^\circ$ $\hat{C} = 75^\circ$
- $BC = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$
- Longitud de la perpendicular = $\frac{\sqrt{2}}{4}$

EJERCICIO 98

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2021

Considere un triángulo ABC donde $AC = 12$, $CB = 7$ y $\widehat{BAC} = 25^\circ$. Encuentre el perímetro más pequeño posible del triángulo ABC.

Menor perímetro $\approx 25,1$ con 3 c.s.

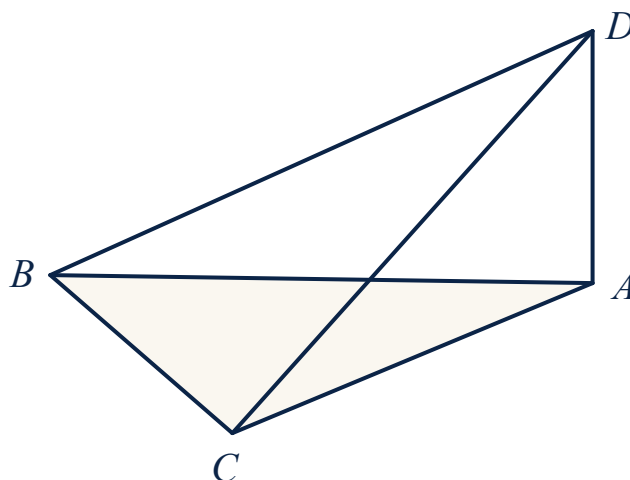
Problemas de contexto (rumbos, alturas, figuras)

EJERCICIO 99

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2004

El siguiente diagrama tridimensional muestra cuatro puntos A , B , C y D . A , B y C están en el mismo plano horizontal, y D es vertical.



$\widehat{ABC} = 45^\circ$, $BC = 50$ m, $\widehat{ABD} = 30^\circ$, $\widehat{ACD} = 20^\circ$. Usando el teorema del coseno en el triángulo ABC , o de cualquier otro modo, calcule AD .

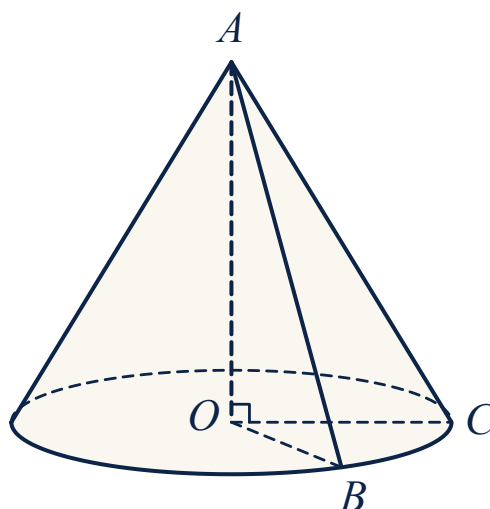
$AD = 13,57$ m

EJERCICIO 100

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2010

La figura muestra un cono circular recto, O es el centro de la base que tiene un radio de 6 cm. Los puntos B y C están en la circunferencia de la base del cono. La altura AO del cono es 8 cm y el ángulo $\widehat{BOC}$ es de 60° .

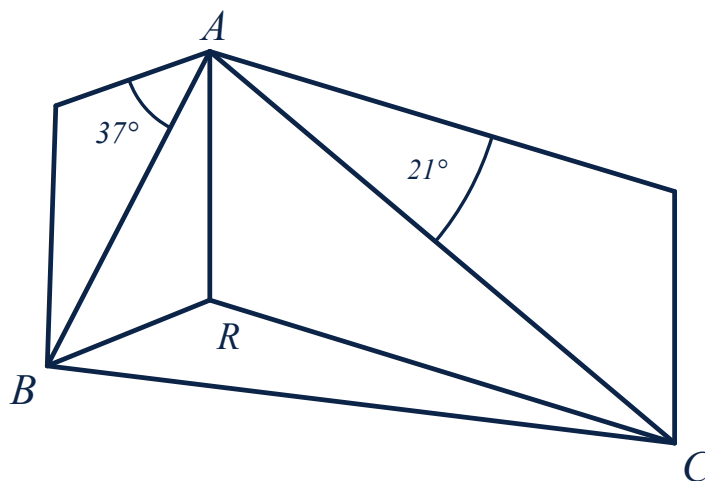


Calcule la medida del ángulo $\widehat{BAC}$.

$\widehat{BAC} = 34,9^\circ$

EJERCICIO 101 ★★ Medio IB · P1 Mayo 1996

Un avión de reconocimiento A , volando a una altura de tres mil metros sobre el punto R en la superficie del mar, ve un carguero B en un ángulo de depresión de 37° y un buque tanque C en un ángulo de depresión de 21° , como se muestra en la figura. El ángulo BAC es 110° .



Encuentra, al metro más cercano,

- La distancia CA entre el avión y el buque tanque;
- La distancia BC entre los dos barcos.

- $AC = 8371$ m
- $BC = 11112$ m

EJERCICIO 102 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1996

Un corredor comienza a correr desde un punto A a una velocidad constante de 1 km cada 3 minutos. Corre durante 30 minutos en la dirección 70° al noreste y durante 15 minutos en la dirección 20° al suroeste para llegar al punto B . Encuentre la distancia AB a la décima de kilómetro más próximo.

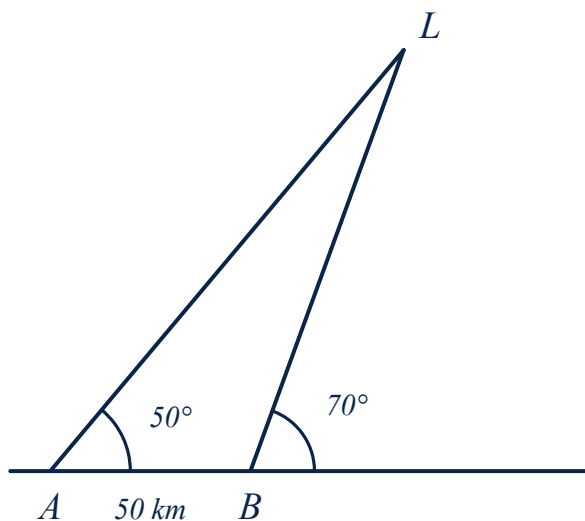
$$AB = 7,8 \text{ km}$$

EJERCICIO 103

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1998

Un barco viaja de A a B y observa un faro en L . Usando la distancia y los ángulos que se muestran en el diagrama, calcule la distancia del barco desde el punto B hasta el faro en L .



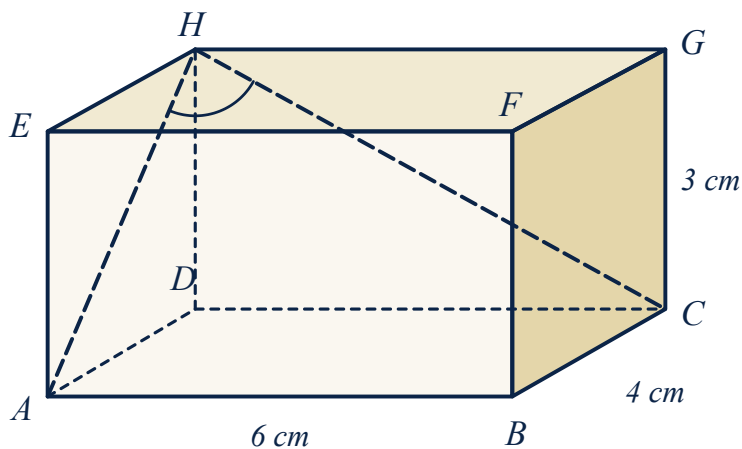
$$BL = 112 \text{ km}$$

EJERCICIO 104

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1999

La caja rectangular mostrada en el diagrama tiene dimensiones 6 cm x 4 cm x 3 cm.



Calcule, ajustando a la décima más cercana de un grado, el tamaño del ángulo $\widehat{AHC}$.

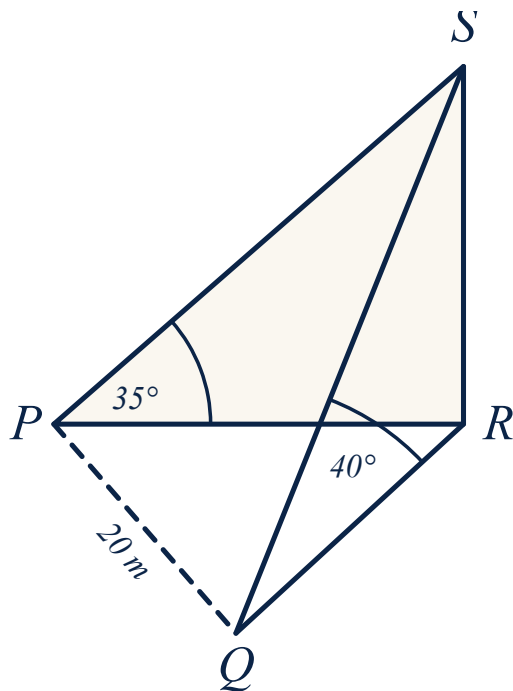
$$\widehat{AHC} = 74,4^\circ$$

EJERCICIO 105

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2008

El diagrama tridimensional muestra los puntos P y Q que están respectivamente en un terreno horizontal al oeste y sur-oeste de la base R de una bandera vertical RS . Los ángulos de elevación de P y Q con respecto a S son, respectivamente, 35° y 40° , y $PQ = 20$ m.



Determine la altura de la bandera.

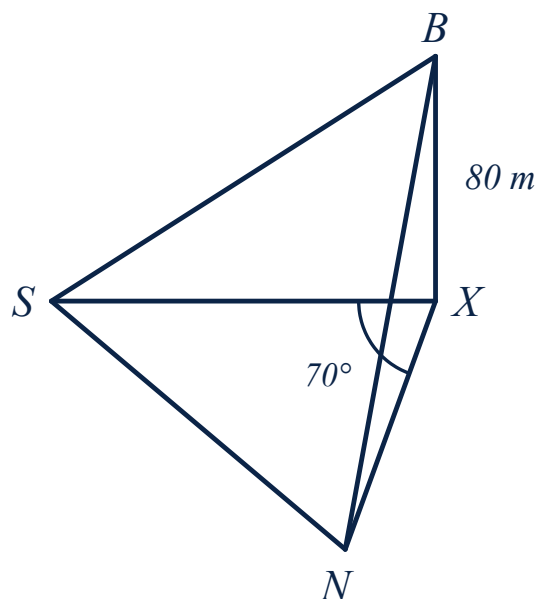
$$RS = 19,5 \text{ m}$$

EJERCICIO 106

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2017

Barry está en la cima de un acantilado, a 80 m sobre el nivel del mar, y observa dos yates en el mar. Seaview (S) se encuentra en un ángulo de depresión de 25° . Nauti Buoy (N) se encuentra en un ángulo de depresión de 35° . El siguiente diagrama tridimensional muestra a Barry y los dos yates en S y N . X se encuentra al pie del acantilado y el ángulo $SXN = 70^\circ$.



Calcule, con tres cifras significativas, la distancia entre los dos yates.

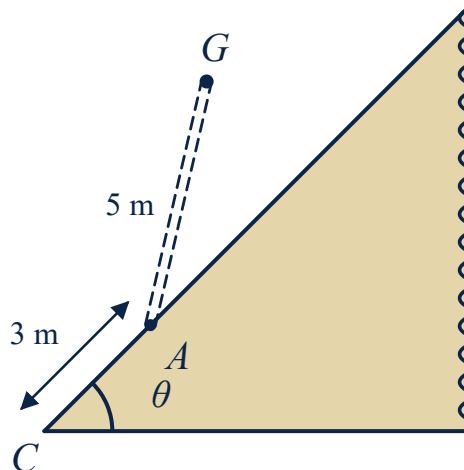
$$SN \approx 171 \text{ m}$$

EJERCICIO 107

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2016

El siguiente diagrama muestra un recinto triangular cercado en medio de un gran campo cubierto de hierba. Los puntos A y C están separados 3 m. Una cabra G está atada por una cuerda de 5 m de longitud en el punto A en el borde **exterior** del recinto. Sabiendo que la esquina del recinto en C forma un ángulo de θ radianes y que el área de campo que puede ser alcanzado por la cabra es de 44 m^2 , encuentre el valor de θ .



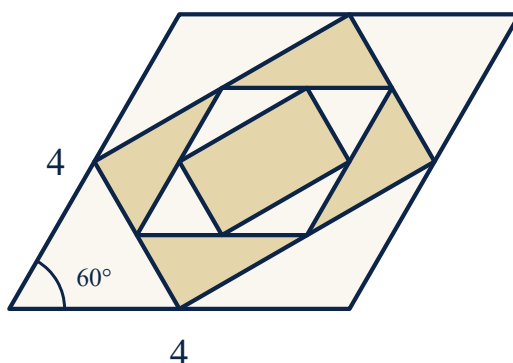
$$\theta = 0,777 \text{ rad}$$

EJERCICIO 108

★★★ Difícil

IB · P1 Noviembre 1998

En el diagrama que se muestra, cada paralelogramo sucesivo se forma uniendo los puntos medios de los lados del paralelogramo anterior. El paralelogramo más grande tiene lados de longitud 4.



Si el patrón mostrado es infinito, encuentre la suma de las áreas de los paralelogramos.

$$S_{\infty} = 16\sqrt{3}$$

EJERCICIO 109

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2015

El granjero Bill posee un terreno rectangular de 10 m por 4 m. Bill ata una cuerda a un poste de madera situado en una esquina de su terreno, y ata el otro extremo de la cuerda a su cabra Gruff.

- Sabiendo que la cuerda tiene una longitud de 5 m, calcule el porcentaje del terreno de Bill en el que Gruff puede pastar. Dé la respuesta aproximando al número entero más próximo.
- Bill sustituye la cuerda de Gruff por otra que tiene una longitud a , $4 < a < 10$, de modo que ahora Gruff pueda pastar exactamente en la mitad del terreno de Bill. Muestre que a satisface la ecuación $a^2 \arcsin\left(\frac{4}{a}\right) + 4\sqrt{a^2 - 16} = 40$.
- Halle el valor de a .

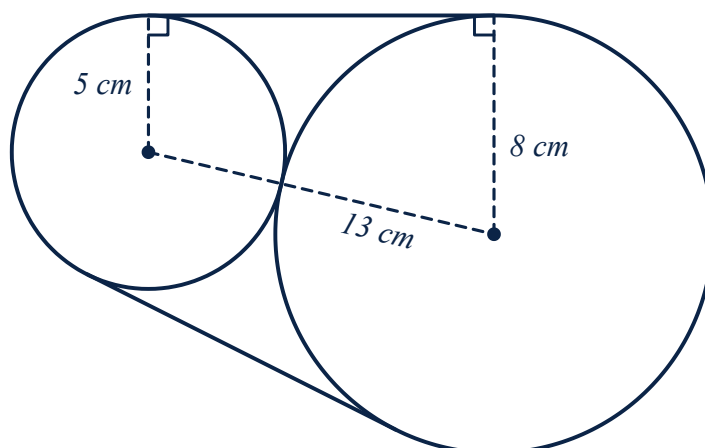
- El porcentaje de terreno de pasto es $\approx 44\%$
- Demostración.
- $a = 5,53$ m

EJERCICIO 110

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2012

Dos discos, uno de 8 cm de radio y otro de 5 cm de radio, se colocan de tal forma que se estén tocando. Se ata un trozo de cuerda alrededor de los dos discos, tal y como se muestra en el siguiente diagrama.



Calcule la longitud de cuerda que se necesita para rodear los dos discos.

Longitud de cuerda = 67,5 cm