

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales para IB Análisis y Enfoques NS: método de Gauss, clasificación de sistemas y discusión con un parámetro, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-analisis-y-enfoques-ns/sistemas-de-ecuaciones-lineales.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones que deben cumplirse a la vez. En el Nivel Superior trabajas con tres ecuaciones y tres incógnitas, y puede ocurrir que haya **una sola solución, infinitas o ninguna**. Aprendes a distinguirlo y a resolverlo con el **método de Gauss**, y a **discutir** un sistema cuando aparece un parámetro. En la Prueba 2 la calculadora de pantalla gráfica resuelve los sistemas con solución única, pero el examen te pide justificar los casos especiales, así que conviene dominar el método a mano.

Orden recomendado

Empieza por **qué es un sistema y cómo se clasifica**, sigue con el **método de Gauss** para resolver y reconocer cada caso, y termina con los **sistemas con parámetro**, que son los que más puntúan. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

Ecuaciones y sistemas lineales

IDEA CLAVE

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones que se tienen que cumplir **a la vez**. Con tres incógnitas puede tener una única solución, infinitas o ninguna, y reconocer cuál de los tres casos tienes es la base de todo el tema. En el examen del IB lo necesitas para plantear problemas, expresar soluciones con parámetros y justificar qué ocurre cuando el sistema no tiene solución única.

La ecuación lineal con tres incógnitas

Una ecuación es **lineal** cuando cada incógnita aparece sola, elevada a 1 y sin multiplicarse por otra incógnita.

DEFINICIÓN · ECUACIÓN LINEAL CON TRES INCÓGNITAS

Una ecuación lineal en x, y, z es una igualdad de la forma

$$a_1x + a_2y + a_3z = b$$

con $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$. Los números a_1, a_2, a_3 son los **coeficientes** de las incógnitas y b es el **término independiente**.

Por ejemplo, $4x + y - 2z = 9$ es lineal. En cambio, $xy + z = 1$ (producto de incógnitas) o $x^2 + y + z = 0$ (una incógnita al cuadrado) no lo son.

Una **solución** es una tripleta de números (x, y, z) que, al sustituir, hace cierta la igualdad. **Resolver** la ecuación es encontrar todas sus soluciones. Con una sola ecuación y tres incógnitas hay infinitas: eliges dos valores a tu gusto y el tercero queda determinado. Por ejemplo, en $4x + y - 2z = 9$, con $x = 1$ e $y = 1$ resulta $z = -2$, y $(1, 1, -2)$ es una solución, ya que $4 + 1 - 4 = 9$.

Para describirlas todas a la vez se usa la **solución general**: se llaman t y s a las incógnitas que eliges libremente (los **parámetros**) y se despeja la tercera.

MÉTODO · SOLUCIÓN GENERAL DE UNA ECUACIÓN LINEAL

1. Elige dos incógnitas como parámetros y escribe, por ejemplo, $y = t$ y $z = s$, con $t, s \in \mathbb{R}$.
2. Despeja la incógnita que queda en función de t y s .
3. Escribe la tripleta completa: (expresión en t, s ; t ; s).

Para $4x + y - 2z = 9$: con $y = t$ y $z = s$, $x = \frac{9 - t + 2s}{4}$, y la solución general es $\left(\frac{9 - t + 2s}{4}, t, s\right)$ con $t, s \in \mathbb{R}$. Dar valores a t y a s produce cada una de las soluciones concretas.

Sistemas de tres ecuaciones

DEFINICIÓN · SISTEMA 3×3

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Los a_{ij} son los **coeficientes** (el primer subíndice es la ecuación y el segundo, la incógnita) y los b_i son los **términos independientes**. Una **solución del sistema** es una tripleta (x, y, z) que cumple las tres ecuaciones a la vez; **resolver** el sistema es hallar todas.

Cuando los tres términos independientes son cero, el sistema es **homogéneo**.

PROPIEDAD · UN SISTEMA HOMOGÉNEO SIEMPRE TIENE SOLUCIÓN

Todo sistema homogéneo tiene al menos la **solución trivial** $(0, 0, 0)$. La cuestión es si tiene además otras.

La razón es inmediata: al sustituir $x = y = z = 0$, cada lado izquierdo vale 0, que es justo el término independiente de cada ecuación.

Sistemas equivalentes

Dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen exactamente las mismas soluciones. Esta idea es la que permite simplificar un sistema sin cambiar su respuesta, y es lo que usa el **método de Gauss**.

Cuántas soluciones puede tener

Según el número de soluciones, un sistema se clasifica así:

Tipo	Abreviatura	Soluciones
Compatible determinado	SCD	Exactamente una
Compatible indeterminado	SCI	Infinitas (dependen de uno o más parámetros)
Incompatible	SI	Ninguna

«Compatible» significa que tiene solución; «determinado» que es única. Un sistema **nunca** tiene, por ejemplo, exactamente dos soluciones: o 0, o 1, o infinitas.

Dos sencillos criterios de reconocimiento, que el método de Gauss hace sistemáticos:

- Si al combinar ecuaciones aparece una igualdad imposible como $0 = 3$, el sistema es **incompatible**.
- Si una ecuación sobra (es combinación de las otras) y queda alguna incógnita libre, hay infinitas soluciones y se expresan con parámetros.

NOTA • INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

En el espacio, cada ecuación lineal $ax + by + cz = d$ (con algún coeficiente distinto de cero) es un **plano**. Resolver un sistema 3×3 es buscar los puntos comunes a tres planos:

- **SCD**: los tres planos se cortan en un único punto.
- **SCI**: comparten una recta (o son el mismo plano, si las tres ecuaciones dicen lo mismo).
- **SI**: no hay punto común a los tres. Por ejemplo, dos planos son paralelos, o se cortan dos a dos formando una especie de prisma.

Esta lectura se profundiza en el tema 8, con rectas y planos. Por ahora basta quedarse con la idea: la clasificación SCD, SCI, SI es la traducción algebraica de cómo se colocan tres planos.

NOTA • CALCULADORA

En la Prueba 2 la calculadora de pantalla gráfica (CPG) resuelve un sistema 3×3 introduciendo los coeficientes y los términos independientes, pero solo da una solución cuando es única. Si el sistema es indeterminado o incompatible, la CPG avisa de que no hay solución única y te toca razonar a mano. En la Prueba 1 no hay calculadora, así que debes saber escalonar con papel y lápiz.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Soluciones de una ecuación lineal

Considera la ecuación $2x - y + 3z = 7$.

- Halla el valor de z para que $(2, -3, z)$ sea solución.
- Escribe la solución general, tomando $y = t$ y $z = s$ como parámetros.

- Se sustituyen $x = 2$ e $y = -3$:

$$2 \cdot 2 - (-3) + 3z = 7 \Rightarrow 7 + 3z = 7 \Rightarrow z = 0$$

Así, $(2, -3, 0)$ es solución.

- Con $y = t$ y $z = s$, se despeja x :

$$2x = 7 + t - 3s \Rightarrow x = \frac{7 + t - 3s}{2}$$

La solución general es $\left(\frac{7 + t - 3s}{2}, t, s\right)$ con $t, s \in \mathbb{R}$. Se comprueba con $t = -3, s = 0$: $x = 2$, que coincide con el apartado a).

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Tres sistemas, tres comportamientos

Clasifica cada sistema (SCD, SCI o SI) y, cuando tenga solución, resuélvelo.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 5 \\ x - y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- a) Sumando la primera y la tercera se elimina z : $2x + 3y = 8$. Sumando la segunda y la tercera también: $3x + y = 5$. De la segunda, $y = 5 - 3x$; al sustituir en la primera, $2x + 15 - 9x = 8$, luego $x = 1$ y $y = 2$. De la primera ecuación del sistema, $z = 6 - 1 - 2 = 3$. Se comprueba en las tres ecuaciones. La solución es única: **SCD**, $(1, 2, 3)$.
- b) Es homogéneo, así que tiene la solución trivial. Restando la segunda ecuación a la primera: $2y = 0$, luego $y = 0$. Las ecuaciones primera y segunda quedan como $x + z = 0$, y la tercera, $2x + 2z = 0$, dice lo mismo. Sobra una ecuación y z queda libre: con $z = t$, $x = -t$. Hay infinitas soluciones: **SCI**, $(-t, 0, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.
- c) Si a la segunda ecuación le restas el doble de la primera queda $0 = 3$, algo imposible. No hay ninguna tripleta que cumpla ambas: **SI**.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un sistema que sale de un problema

Una tienda compra x camisetas, y sudaderas y z gorras. Compra 20 prendas en total y paga 270 euros. Cada camiseta cuesta 10 euros, cada sudadera 25 euros y cada gorra 5 euros.

- a) Plantea el sistema que describe la situación con estas dos condiciones y exprésalo con $y = t$ como parámetro. ¿De qué tipo es?
- b) Teniendo en cuenta que x, y, z son números enteros no negativos, ¿cuántas compras distintas son posibles?
- c) Se sabe además que hay 2 gorras menos que sudaderas. Halla x, y y z .

- a) Las dos condiciones dan:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 10x + 25y + 5z = 270 \end{cases}$$

Dividiendo la segunda entre 5: $2x + 5y + z = 54$. Restando la primera: $x + 4y = 34$, luego $x = 34 - 4y$. Al sustituir en la primera, $z = 20 - x - y = -14 + 3y$. Con $y = t$:

$$(x, y, z) = (34 - 4t, t, 3t - 14)$$

Hay dos ecuaciones y tres incógnitas, y ninguna contradicción: el sistema es **compatible indeterminado**.

- b) Se exige $x \geq 0$ y $z \geq 0$: $34 - 4t \geq 0$ da $t \leq 8,5$ y $3t - 14 \geq 0$ da $t \geq 4,67 \dots$. Como t es entero, $t \in \{5, 6, 7, 8\}$: hay 4 compras posibles.
- c) La condición nueva es $y - z = 2$, es decir, $t - (3t - 14) = 2$, de donde $-2t + 14 = 2$ y $t = 6$. Entonces $x = 34 - 24 = 10$, $y = 6$, $z = 4$. Comprobación: $10 + 6 + 4 = 20$ prendas y $100 + 150 + 20 = 270$ euros.

En el examen: plantea el sistema escribiendo qué representa cada incógnita y, si la solución depende de un parámetro, nómbralo y di de qué tipo es el sistema. Después de obtener la solución general, comprueba las restricciones del contexto (enteros, valores no negativos): suelen valer puntos propios.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · CREER QUE DOS ECUACIONES BASTAN PARA FIJAR TRES INCÓGNITAS

Con tres incógnitas hacen falta, en general, tres ecuaciones **independientes** para llegar a una única solución. Dos ecuaciones (como en una compra con total de prendas y total de dinero) dejan una incógnita libre, y la respuesta es una familia de soluciones con parámetro. Lo mismo ocurre si tienes tres ecuaciones pero una es combinación de las otras: la tercera no aporta información nueva. Contar ecuaciones no basta; mira si alguna sobra.

ERROR TÍPICO · PENSAR QUE UN SISTEMA HOMOGÉNEO ES SIEMPRE DETERMINADO

Un sistema homogéneo siempre tiene la solución $(0, 0, 0)$, pero eso no significa que sea la única. En el ejemplo anterior, $x + y + z = 0$, $x - y + z = 0$, $2x + 2z = 0$ tiene infinitas soluciones $(-t, 0, t)$. Un homogéneo es **compatible**, nunca incompatible, y es determinado o indeterminado según si aparecen incógnitas libres.

ERROR TÍPICO · DAR LA SOLUCIÓN GENERAL SIN DECIR QUIÉN ES EL PARÁMETRO

Escribir « $x = 34 - 4y$, $z = 3y - 14$ » y dejar ahí la respuesta se entiende, pero en un sistema indeterminado conviene escribir **la tripleta completa** con el parámetro nombrado y su dominio: $(34 - 4t, t, 3t - 14)$, $t \in \mathbb{R}$. Si la tripleta no tiene las tres componentes, el examinador no puede ver que has descrito todas las soluciones.

Resumen

- Ecuación lineal con tres incógnitas: $a_1x + a_2y + a_3z = b$. Sus soluciones son tripletas (x, y, z) y hay infinitas; se describen con dos parámetros t y s .
- Sistema 3×3 : tres ecuaciones lineales con coeficientes a_{ij} y términos independientes b_i . Una solución cumple las tres a la vez.
- Sistema homogéneo ($b_1 = b_2 = b_3 = 0$): siempre compatible, con la solución trivial $(0, 0, 0)$.
- Clasificación: SCD (una solución), SCI (infinitas, con parámetros) y SI (ninguna). Nunca hay un número finito mayor que uno.
- Una igualdad imposible como $0 = 3$ delata un sistema incompatible; una ecuación que sobra con incógnitas libres, un sistema indeterminado.
- Geométricamente, cada ecuación es un plano y la clasificación describe cómo se cortan (se profundiza en el tema 8).
- Con la CPG (Prueba 2) solo se obtiene la solución cuando es única; para los demás casos hay que razonar a mano, igual que en la Prueba 1.

APARTADO 2

Método de eliminación de Gauss

IDEA CLAVE

El método de Gauss transforma un sistema en otro **equivalente** (con las mismas soluciones) pero escalonado, donde se resuelve de abajo arriba. Además de dar la solución, la última fila te dice si el sistema tiene una solución, infinitas o ninguna. En el examen del IB es la herramienta para justificar a mano lo que la calculadora no explica.

Sistemas equivalentes

Dos sistemas son **equivalentes** si tienen exactamente el mismo conjunto de soluciones. La idea del método es cambiar el sistema por otro equivalente cada vez más sencillo, hasta que la solución se lea casi sola.

Para no perder soluciones ni inventarlas, solo se permiten tres transformaciones. Las filas se nombran F1, F2, F3 (la primera, segunda y tercera ecuación).

PROPIEDAD · OPERACIONES ELEMENTALES ENTRE ECUACIONES

Cada una de estas operaciones convierte un sistema en otro equivalente:

1. **Intercambiar** dos ecuaciones: por ejemplo, $F1 \leftrightarrow F3$.
2. **Multiplicar** una ecuación por un número **distinto de cero**: por ejemplo, $F2 \rightarrow 3F2$.
3. **Sumar a una ecuación un múltiplo de otra**: por ejemplo, $F2 \rightarrow F2 - 2F1$.

La intuición: si dos igualdades son ciertas a la vez, también lo es su suma, y de la suma recuperas la original restando. Multiplicar por 0 sí destruiría información (la ecuación quedaría $0 = 0$ sin importar nada), por eso está prohibido. Cuando una operación mezcla filas, la fila que cambia es la de la izquierda de la flecha, y la otra se queda como estaba.

Qué buscamos: la forma escalonada

El objetivo es que cada ecuación empiece con una incógnita más tarde que la anterior, de modo que los ceros formen una escalera:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ b_2y + c_2z = d_2 \\ c_3z = d_3 \end{cases}$$

Para conseguirlo se trabaja columna a columna: primero se usa una ecuación con coeficiente de x cómodo (conviene que sea 1) para **eliminar la x** de las otras dos; después se usa la segunda para eliminar la y de la tercera.

MÉTODO · RESOLVER UN SISTEMA 3×3 POR GAUSS

1. Elige como $F1$ una ecuación con coeficiente de x sencillo (si hace falta, intercambia filas).
2. Con operaciones del tipo $F2 \rightarrow F2 - mF1$ y $F3 \rightarrow F3 - nF1$, haz desaparecer la x de $F2$ y $F3$.
3. Con una operación entre $F2$ y $F3$ (por ejemplo, $F3 \rightarrow pF3 - qF2$), haz desaparecer la y de $F3$. Para no trabajar con fracciones, multiplica antes las filas por los números necesarios.
4. Mira la **última fila** y decide el tipo de sistema (ver la tabla de más abajo).
5. Si es compatible, resuelve **hacia atrás**: despeja la última incógnita, sustitúyela en la fila de arriba, y así hasta la primera.
6. Comprueba la tripleta en las ecuaciones originales.

Anota cada operación junto a la fila que cambia (por ejemplo, « $F2 \rightarrow F2 - 2F1$ »). En el IB los pasos con operaciones claras dan puntos de método aunque haya un error aritmético después.

Cómo se reconoce cada tipo en la forma escalonada

Una fila de la forma $0x + 0y + 0z = k$ (todos los coeficientes cero) resume las dos posibilidades extremas: es cierta para cualquier valor de las incógnitas solo si $k = 0$.

Última fila obtenida	Qué significa	Tipo de sistema
$cz = d$ con $c \neq 0$	z queda fijada y, hacia atrás, también y y x	Compatible determinado: solución única
$0 = k$ con $k \neq 0$	Una igualdad imposible	Incompatible : ninguna solución
$0 = 0$	La ecuación no añade ninguna condición	Compatible indeterminado: infinitas soluciones

Si aparece $0 = k$ con $k \neq 0$ en cualquier fila, el sistema es incompatible, sin importar lo que digan las demás.

En el tercer caso hay menos ecuaciones útiles que incógnitas, así que alguna incógnita queda libre y se le asigna un **parámetro**. El número de parámetros depende de cuántas filas se anulan por completo:

- **una** fila $0 = 0$ (dos ecuaciones útiles): **un** parámetro, t . Las soluciones forman una recta de puntos (x, y, z) .
- **dos** filas $0 = 0$ (una sola ecuación útil): **dos** parámetros, t y s . Las soluciones forman un plano.
- **tres** filas $0 = 0$: las tres incógnitas son libres (ocurre solo si todos los coeficientes y términos son cero).

En el sistema 3×3 de este curso, el caso habitual en el examen es el de un parámetro.

NOTA · DÓNDE PONER EL PARÁMETRO

Para escribir la solución general, pon el parámetro en la incógnita **más cómoda** de dejar libre, normalmente la última ($z = t$) o la que deje los despejes sin fracciones. Cualquier elección correcta describe el mismo conjunto de soluciones, aunque la fórmula tenga otro aspecto. Por ejemplo, $(2, t - 1, t)$ y $(2, s, s + 1)$ son la misma familia.

Escritura abreviada con la matriz ampliada

Como las incógnitas solo marcan posiciones, se puede escribir el sistema sin ellas, con una tabla de coeficientes y una barra antes de los términos independientes. Las operaciones entre filas son idénticas:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

Es solo una forma más rápida de escribir. La columna de x guarda sus coeficientes, la de y los suyos, la de z los suyos, y lo que hay a la derecha de la barra son los términos independientes. Una fila $(0 \ 0 \ 0 \ | \ k)$ equivale a $0 = k$.

NOTA • CALCULADORA

En la **Prueba 2** la calculadora de pantalla gráfica (CPG) resuelve un sistema 3×3 cuando tiene solución única, y es la vía más rápida; escribe la tripleta que da. Si el sistema tiene infinitas soluciones o ninguna, la CPG solo avisa de que algo no es normal: debes razonar a mano con Gauss y dar la solución general con parámetro, o decir que es incompatible. En la **Prueba 1** no hay calculadora: todo el desarrollo es manual.

Para ver cómo funciona el procedimiento con los distintos tipos de sistema, usa los tres ejemplos siguientes. Para reconocer sistemas y su interpretación geométrica, repasa [ecuaciones y sistemas lineales](#). Cuando aparezca una letra desconocida en los coeficientes, pasa a sistemas con parámetro.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un sistema con solución única

Resuelve por el método de Gauss el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

La primera fila ya tiene coeficiente 1 en x . Eliminamos la x de las otras dos filas:

$$\begin{aligned} F2 &\rightarrow F2 - 2F1 : & -3y - z &= -9 \\ F3 &\rightarrow F3 - F1 : & y - 2z &= -4 \end{aligned}$$

El sistema equivalente es

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

Eliminamos la y de F3 sin fracciones, con $F3 \rightarrow 3F3 + F2$:

$$3(y - 2z) + (-3y - z) = -7z \quad 3(-4) + (-9) = -21$$

La fila queda $-7z = -21$. El sistema escalonado es

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -3y - z = -9 \\ -7z = -21 \end{cases}$$

Sustitución hacia atrás:

- De $-7z = -21$: $z = 3$.
- De $-3y - z = -9$: $-3y - 3 = -9$, luego $y = 2$.
- De $x + y + z = 6$: $x + 2 + 3 = 6$, luego $x = 1$.

Comprobación en F2 original: $2 \cdot 1 - 2 + 3 = 3$. Correcto. En F3 original: $1 + 4 - 3 = 2$. Correcto.

El último coeficiente es distinto de cero, así que el sistema es compatible determinado, con solución $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un sistema sin solución

Estudia y resuelve, si es posible, el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

Clasifícalo como compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Se escribe la matriz ampliada y se elimina la x de F2 y F3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} F2 \rightarrow F2 - 2F1 \\ F3 \rightarrow F3 - F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Las filas F2 y F3 tienen los mismos coeficientes en y y z pero distinto término independiente. Restamos:
 $F3 \rightarrow F3 - F2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

La última fila dice $0x + 0y + 0z = 6$, es decir, $0 = 6$, que es imposible. Ninguna tripleta (x, y, z) cumple las tres ecuaciones a la vez.

El sistema es **incompatible**: no tiene solución.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un sistema con infinitas soluciones

Considera el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 3 \\ 5x + y - z = 9 \end{cases}$$

- Escalona el sistema y clasifícalo como SCD, SCI o SI.
- Halla la solución general, usando t como parámetro y $z = t$.
- Entre todas las soluciones, halla la que cumple $x + y + z = 7$.

- Eliminamos la x de F2 y F3 con la primera fila:

$$F2 \rightarrow F2 - 2F1 : 3y - 3z = -3$$

$$F3 \rightarrow F3 - 5F1 : 6y - 6z = -6$$

La tercera fila es el doble de la segunda. Hacemos $F3 \rightarrow F3 - 2F2$:

$$6y - 6z - 2(3y - 3z) = 0 \quad -6 - 2(-3) = 0$$

La fila queda $0x + 0y + 0z = 0$. El sistema escalonado es

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3y - 3z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Hay una fila $0 = 0$ y ninguna del tipo $0 = k$ con $k \neq 0$: el sistema es **compatible indeterminado**, con $3 - 1 = 2$ ecuaciones útiles y un parámetro libre.

- Tomamos $z = t$. De la segunda fila, $3y - 3t = -3$, luego $y = t - 1$. De la primera, $x - (t - 1) + t = 3$, es decir $x + 1 = 3$, luego $x = 2$. La solución general es

$$(x, y, z) = (2, t - 1, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Comprobación en F3 original: $5 \cdot 2 + (t - 1) - t = 9$. Correcto para cualquier t .

c) Imponemos $x + y + z = 7$:

$$2 + (t - 1) + t = 7 \Rightarrow 2t + 1 = 7 \Rightarrow t = 3$$

Entonces $(x, y, z) = (2, 2, 3)$.

En el examen: al obtener la fila $0 = 0$ escribe la conclusión «sistema compatible indeterminado» y da la solución general con su parámetro; dar solo una solución concreta no puntúa como resolver el sistema. Si en lugar de $0 = 0$ saliera $0 = k$ con $k \neq 0$, la respuesta sería «incompatible».

Errores típicos

ERROR TÍPICO · MULTIPLICAR UNA FILA POR CERO O CAMBIARLA SIN QUERER

Cada operación debe ser reversible. Multiplicar una ecuación por 0 (o restar una fila a sí misma) la borra y hace perder información. Más sutil: en $F2 \rightarrow F2 - 2F1$ solo cambia F2. Si al escribir el nuevo sistema alteras también F1, o usas en el siguiente paso una fila que ya has modificado como si fuera la original, las cuentas dejan de corresponder al sistema de partida. Escribe siempre qué fila cambia y a partir de cuáles.

ERROR TÍPICO · LLAMAR INCOMPATIBLE A UN SISTEMA CON UNA FILA DE CEROS

Una fila $0x + 0y + 0z = 0$ **no** indica que el sistema no tenga solución: indica que esa ecuación sobraba (era combinación de las otras) y que el sistema es indeterminado. Solo $0 = k$ con $k \neq 0$ da incompatibilidad. Fíjate en el término independiente antes de decidir.

ERROR TÍPICO · QUEDARSE A MEDIAS EN UN SISTEMA INDETERMINADO

Tras obtener $0 = 0$ hay que seguir: elegir el parámetro, despejar las demás incógnitas en función de él y escribir la tripleta general. Un error habitual es dar solo $y = t - 1$ olvidando la x , o escribir una solución concreta como si fuera la única. La respuesta completa es una tripleta con las tres incógnitas.

Resumen

- Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Se pasa de uno a otro con tres operaciones: intercambiar filas, multiplicar una fila por un número no nulo y sumar a una fila un múltiplo de otra ($F2 \rightarrow F2 - 2F1$).
- Objetivo: forma escalonada (los ceros forman una escalera). Se elimina la x de F2 y F3 y después la y de F3; luego se resuelve hacia atrás.
- Última fila $cx = d$ con $c \neq 0$: solución única. Fila $0 = k$ con $k \neq 0$: incompatible. Fila $0 = 0$: compatible indeterminado.
- Una fila $0 = 0$ da **un** parámetro; dos filas $0 = 0$ dan **dos** parámetros (t y s).
- La matriz ampliada es una escritura abreviada: se opera con sus filas igual que con las ecuaciones.
- Prueba 2: la CPG resuelve los sistemas con solución única; con infinitas soluciones o ninguna hay que razonar a mano. Prueba 1: todo a mano, anotando las operaciones.

APARTADO 3

Sistemas con un parámetro

IDEA CLAVE

Cuando un coeficiente o un término de un sistema depende de un parámetro k , el sistema no se comporta igual para todos los valores de k : casi siempre tiene una única solución, pero para uno o dos valores «especiales» puede tener infinitas o ninguna. **Discutir** el sistema es encontrar esos valores y decir qué ocurre en cada caso. Es una pregunta típica de la Prueba 1, y la base de los problemas con condiciones sobre los términos independientes.

Qué significa discutir un sistema

Un sistema con parámetro es una **familia** de sistemas, uno por cada valor de k . Discutirlo consiste en repartir los valores de k en casos y, en cada uno, clasificar el sistema (ver el método de Gauss):

- **Compatible determinado** (SCD): una única solución.
- **Compatible indeterminado** (SCI): infinitas soluciones, que se expresan con un parámetro t .
- **Incompatible** (SI): ninguna solución.

Para no confundir los dos papeles, usaremos k (o a) para el parámetro **del sistema** y t para el parámetro **de la solución** cuando el sistema es indeterminado.

Escalonar sin dividir por el parámetro

MÉTODO · DISCUTIR UN SISTEMA 3×3 CON UN PARÁMETRO

1. Escribe el sistema (o su matriz ampliada) y escalona con operaciones entre filas, **sin dividir por ninguna expresión que contenga k** . Para anular un coeficiente combina filas: « $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$ », « $F_3 \rightarrow kF_3 - 3F_2$ », etc.
2. Intenta que las expresiones con k queden en la última fila (si hace falta, cambia el orden de las filas o de las incógnitas).
3. Mira cada pivote, es decir, el primer coeficiente no nulo de cada fila, y **resuelve la ecuación «pivote = 0»**. Los valores de k que salgan son los casos especiales.
4. **Caso general** (el pivote no se anula): el sistema es SCD y se resuelve por sustitución hacia atrás. Ahora sí puedes dividir, porque sabes que no es cero.
5. **Cada caso especial**: sustituye ese valor en el sistema escalonado y mira la fila que se ha quedado sin incógnitas. Si queda $0 = 0$ y sobra una incógnita libre, es SCI; si queda $0 = c$ con $c \neq 0$, es SI.
6. Escribe la conclusión completa: **todos** los valores de k y el tipo de sistema en cada uno.

La razón de no dividir es sencilla: dividir entre $k - 2$ solo es legal si $k \neq 2$, y justamente el caso $k = 2$ es el que se perdería. Multiplicar **toda una fila** por una expresión que puede valer 0 tampoco es una operación segura, porque ese valor de k borraría la fila. Por eso, si multiplicas una fila por una expresión en k , hazlo solo cuando restes otra

fila (como en $kF_3 - 6F_2$) y estudia después cada valor especial sustituyéndolo en el sistema escalonado, o en el original si tienes dudas.

Un caso que despista: el valor que anula un pivote **no tiene por qué dar siempre un sistema incompatible**. El valor de k que anula la última fila puede dar $0 = 0$ (SCI) o $0 = c \neq 0$ (SI), según lo que queda en el término independiente. Hay que mirar el término independiente en cada caso.

NOTA • CALCULADORA

En la Prueba 2, la calculadora de pantalla gráfica resuelve sistemas con solución única, también cuando los coeficientes son números concretos. Útil para **comprobar el caso general** sustituyendo un valor de k cualquiera, por ejemplo $k = 0$ o $k = 1$ que no sea especial. Para **discutir** (qué valores de k son especiales y qué pasa en cada uno) la calculadora no vale: se hace a mano, y el planteamiento es lo que puntúa. En la Prueba 1 no hay calculadora.

Resolver el caso indeterminado

Cuando para un valor de k el sistema es SCI, el enunciado suele pedir también la solución. Se hace igual que en el método de Gauss con números:

MÉTODO • DAR LA SOLUCIÓN DE UN CASO INDETERMINADO

1. Sustituye el valor de k y escribe el sistema escalonado sin la fila $0 = 0$.
2. Quedan menos ecuaciones que incógnitas. Elige como libre la incógnita que facilite las cuentas (normalmente la última) y llámala t .
3. Despeja las demás hacia arriba, en función de t .
4. Escribe la solución como una tripleta (x, y, z) con $t \in \mathbb{R}$.

Si prefieres evitar fracciones, escoge como libre la incógnita que permita despejar sin dividir; es un parámetro, así que también puedes poner $z = 3t$ en vez de $z = t$ si te ahorra denominadores.

Condiciones entre los términos independientes

A veces el parámetro no está en los coeficientes sino en los términos independientes: el sistema es $A\mathbf{x} = (a, b, c)$ y se pregunta **qué relación deben cumplir a, b y c para que haya solución**. Si los coeficientes dejan una fila que es combinación de las otras, esa combinación también tiene que cumplirse en los términos independientes.

Se escalona **con letras en los términos independientes**; la fila sin incógnitas queda de la forma $0 =$ (expresión en a, b, c), y la condición de compatibilidad es que esa expresión valga 0. Por ejemplo, si al escalonar queda $0x + 0y + 0z = c - a - b$, el sistema solo tiene solución cuando $c = a + b$; en cualquier otro caso es incompatible.

Sistemas homogéneos con parámetro

Un sistema es **homogéneo** cuando todos sus términos independientes son 0. Siempre tiene la **solución trivial** $(0, 0, 0)$, así que nunca es incompatible. La pregunta es si tiene **otras** soluciones.

PROPIEDAD • SOLUCIONES NO TRIVIALES DE UN SISTEMA HOMOGÉNEO

Un sistema homogéneo 3×3 tiene soluciones distintas de $(0, 0, 0)$ si y solo si, al escalonar, **aparece una fila de ceros** (es decir, es SCI). Si no aparece, la única solución es $(0, 0, 0)$.

Así que para un sistema homogéneo con parámetro basta encontrar los valores de k que anulan el último pivote: para esos valores hay infinitas soluciones; para los demás, solo la trivial. Aquí **no hay caso incompatible**, así que sale un único dato por valor.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un parámetro que anula el último pivote

Discute según los valores de k el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + kz = 8 \end{cases}$$

y resuélvelo cuando tenga solución única.

Escalonamos sin dividir por k :

- $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$: $y + 2z = 3$.
- $F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1$: $y + (k - 2)z = 4$.
- $F_3 \rightarrow F_3 - F_2$: $(k - 4)z = 1$.

El sistema equivalente es

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 2z = 3 \\ (k - 4)z = 1 \end{cases}$$

El único coeficiente que depende de k es el de la última fila, y se anula cuando $k = 4$.

- Si $k = 4$: la última fila es $0 = 1$, imposible. El sistema es **incompatible** (SI).
- Si $k \neq 4$: el sistema es **compatible determinado** (SCD). Ahora ya podemos dividir:

$$z = \frac{1}{k - 4}, \quad y = 3 - 2z = \frac{3k - 14}{k - 4}, \quad x = 2 - y - z = \frac{5 - k}{k - 4}$$

Solución única: $\left(\frac{5 - k}{k - 4}, \frac{3k - 14}{k - 4}, \frac{1}{k - 4} \right)$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Dos valores especiales, dos comportamientos

Considera el sistema, con $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ay + 2z = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

- Discútelo según los valores de a . Usa las claves "a=1", "a=2" y "otro".
- Resuélvelo para $a = 1$.
- Resuélvelo para los demás valores de a en que sea compatible.

a) Tomamos F_1 como fila pivote y escalonamos sin dividir:

- $F_2 \rightarrow F_2 - F_1$: $(a - 1)y + z = 1$.

- $F_3 \rightarrow F_3 - aF_1: (1-a)y + (1-a)z = 2 - 2a$.

La nueva F_3 aún lleva y . La sumamos a la nueva F_2 para eliminarla:

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_2: (2-a)z = 3 - 2a$$

El sistema escalonado es

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ (a-1)y + z = 1 \\ (2-a)z = 3 - 2a \end{cases}$$

Hay dos pivotes que dependen de a : el de y en la segunda fila, $a-1$, y el de z en la tercera, $2-a$. Los valores especiales son $a=1$ y $a=2$.

- $a=2$: la tercera fila es $0 = -1$. Sistema **incompatible** (SI).
- $a=1$: la segunda fila es $z=1$ y la tercera, $z=1$ también, así que la tercera ecuación queda como $0=0$. Sobra una incógnita libre. Sistema **compatible indeterminado** (SCI).
- $a \neq 1, 2$: ambos pivotes son distintos de cero. Sistema **compatible determinado** (SCD).

Fíjate en que $a=1$ es especial aunque **no anule** la última fila: se ve al mirar el pivote de y .

b) Para $a=1$ queda $x+y+z=2$ y $z=1$. Tomamos $y=t$:

$$z=1, \quad x=2-t-1=1-t$$

La solución es $(1-t, t, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

c) Para $a \neq 1, 2$ dividimos:

$$z = \frac{3-2a}{2-a}, \quad y = \frac{1-z}{a-1} = \frac{1}{2-a}, \quad x = 2 - y - z = 0$$

La solución es $\left(0, \frac{1}{2-a}, \frac{3-2a}{2-a}\right)$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Homogéneo, condición de compatibilidad y solución

Considera el sistema, con $k \in \mathbb{R}$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - y + 2z = a \\ 2x + y + kz = b \\ 3x + 5z = c \end{cases}$$

- Halla el valor de k para el que el sistema **homogéneo** ($a=b=c=0$) tiene soluciones distintas de $(0,0,0)$.
- Para ese valor de k , resuelve el sistema homogéneo.
- Para ese mismo valor de k , halla la condición que deben cumplir a, b y c para que el sistema tenga solución. Escribe c en función de a y b .
- Resuelve el sistema para $a=1, b=2$ y $c=3$.

a) Escalonamos el sistema con términos independientes a, b, c :

- $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1: 3y + (k-4)z = b - 2a$.
- $F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1: 3y - z = c - 3a$, porque $3x + 5z - 3(x - y + 2z) = 3y - z$.
- $F_3 \rightarrow F_3 - F_2: (-1 - (k-4))z = (c - 3a) - (b - 2a)$, es decir,
 $(3-k)z = c - a - b$

El sistema escalonado es

$$\begin{cases} x - y + 2z = a \\ 3y + (k - 4)z = b - 2a \\ (3 - k)z = c - a - b \end{cases}$$

En el caso homogéneo, la última fila es $(3 - k)z = 0$. Hay soluciones no triviales si esa fila desaparece, y eso ocurre cuando $3 - k = 0$: $k = 3$. Para cualquier otro k , $z = 0$ y las otras dos incógnitas también valen 0.

b) Con $k = 3$ y $a = b = c = 0$ el sistema queda $x - y + 2z = 0$ y $3y - z = 0$. Tomamos $z = 3t$:

$$y = t, \quad x = y - 2z = t - 6t = -5t$$

La solución es $(-5t, t, 3t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Comprobación en la tercera ecuación original: $3(-5t) + 5(3t) = 0$.

c) Con $k = 3$, la última fila del sistema escalonado es $0 \cdot z = c - a - b$. Solo hay solución si $c - a - b = 0$, es decir:

$$c = a + b$$

Si $c \neq a + b$, el sistema es incompatible. Se entiende porque con $k = 3$ la tercera ecuación es la suma de las otras dos en los coeficientes: $(1, -1, 2) + (2, 1, 3) = (3, 0, 5)$.

d) Con $a = 1$, $b = 2$ se tiene $a + b = 3 = c$: la condición se cumple y hay solución. Con $k = 3$ el sistema es

$$x - y + 2z = 1, \quad 3y - z = b - 2a = 0$$

Tomamos $z = 3t$: $y = t$ y $x = 1 + y - 2z = 1 + t - 6t = 1 - 5t$. La solución es $(1 - 5t, t, 3t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Comprobación en la segunda ecuación original: $2(1 - 5t) + t + 3(3t) = 2 - 10t + t + 9t = 2$.

En el examen: en el apartado de la condición escribe la fila $0 = c - a - b$ y concluye con las dos frases: «si $c = a + b$, compatible; si $c \neq a + b$, incompatible». En d) no olvides comprobar que la condición se cumple antes de resolver.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · DIVIDIR ENTRE UNA EXPRESIÓN QUE PUEDE VALER 0

Al resolver $(k - 4)z = 1$ o $(a - 1)y = \dots$ es tentador escribir $z = \frac{1}{k - 4}$ **sin más**. Esa división solo es válida si $k \neq 4$. Si no separas el caso $k = 4$, pierdes el valor que el examen más puntúa. Escribe siempre «si $k \neq 4$...» y estudia aparte «si $k = 4$...» sustituyendo en el sistema.

ERROR TÍPICO · OLVIDAR EL CASO ESPECIAL O PASARLO POR ALTO

Un pivote que depende de k puede aparecer **en cualquier fila**, no solo en la última. En el ejemplo de $a = 1$, el valor especial viene del coeficiente de y y no de la última ecuación. Mira todos los pivotes y resuelve «pivote = 0» para cada uno. Y no des por hecho que cada valor especial da un sistema incompatible: puede dar $0 = 0$, y entonces es SCI. Comprueba siempre el término independiente.

ERROR TÍPICO · MEZCLAR EL PARÁMETRO DEL SISTEMA CON EL DE LA SOLUCIÓN

k (o a) es el parámetro **del sistema**, y t es el parámetro **de la solución** cuando hay infinitas. No escribas una solución con k cuando el sistema es indeterminado, ni uses t para discutir. Y en el caso SCI da la solución completa (x, y, z) en función de t , no solo «tiene infinitas soluciones».

Resumen

- Un sistema con parámetro es una familia de sistemas. Discutirlo es repartir los valores del parámetro en casos y clasificar cada uno: SCD (una solución), SCI (infinitas) o SI (ninguna).
- Escalona **sin dividir por expresiones con k** . Los valores especiales son los que anulan un pivote que depende de k (en cualquier fila, no solo la última).
- Caso general: el pivote no se anula, el sistema es SCD y se resuelve dividiendo, porque ya sabes que no es cero.
- En cada caso especial, sustituye y mira la fila sin incógnitas: $0 = 0$ da SCI (solución con t) y $0 = c \neq 0$ da SI.
- Para que un sistema con términos (a, b, c) tenga solución, la fila sin incógnitas $0 =$ (expresión en a, b, c) debe anularse: esa es la condición de compatibilidad.
- Un sistema homogéneo nunca es incompatible; tiene soluciones no triviales justo cuando al escalar aparece una fila de ceros.
- En la Prueba 2 la CPG sirve para comprobar el caso general con un valor concreto del parámetro, pero la discusión se hace a mano.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 7

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Resolver un sistema (con la calculadora o a mano)

EJERCICIO 1 ★ Básico IB · P2 TZ2 Mayo 2013

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0,1x - 1,7y + 0,9z = -4,4 \\ -2,4x + 0,3y + 3,2z = 1,2 \\ 2,5x + 0,6y - 3,7z = 0,8 \end{cases}$$

Halle la solución del sistema de ecuaciones.

1. Es un sistema 3×3 con coeficientes decimales y la Prueba 2 permite usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Introducimos la matriz de coeficientes y la columna de términos independientes (o usamos directamente el solucionador de sistemas de ecuaciones lineales de la CPG).
2. La CPG devuelve la solución única, que en forma exacta es

$$x = -\frac{932}{389}, \quad y = \frac{628}{389}, \quad z = -\frac{612}{389}.$$
3. Redondeando a tres cifras significativas: $x \approx -2,40$, $y \approx 1,61$, $z \approx -1,57$.
4. Comprobación en la primera ecuación: $0,1(-2,396) - 1,7(1,614) + 0,9(-1,573) \approx -0,240 - 2,744 - 1,416 = -4,40$.

Resultado: $x = -2,40$, $y = 1,61$, $z = -1,57$

EJERCICIO 2 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

Halle la solución general para el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned} x - y - z &= 3 \\ x - 2y + z &= 2 \\ 2x - y - 4z &= 7 \end{aligned}$$

1. Eliminamos x : $E_2 - E_1$ da $-y + 2z = -1$, es decir, $y = 1 + 2z$. Y $E_3 - 2E_1$ da $y - 2z = 1$, que es la misma ecuación. El sistema equivale a dos ecuaciones independientes con tres incógnitas: es compatible indeterminado.
2. Tomamos $z = t$ como parámetro: $y = 1 + 2t$.
3. De la primera ecuación: $x = 3 + y + z = 3 + 1 + 2t + t = 4 + 3t$.
4. Comprobación en la tercera ecuación: $2(4 + 3t) - (1 + 2t) - 4t = 8 + 6t - 1 - 2t - 4t = 7$.

Resultado: $(x, y, z) = (4 + 3t, 1 + 2t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$

Sistemas con parámetro y discusión

EJERCICIO 3

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} 2x + 4y - z = 10 \\ x + 2y + az = 5 \\ 5x + 12y = 2a \end{cases}$$

- a) Halle el valor de a para el cual este sistema de ecuaciones no tiene una solución única.
b) Halle la solución de este sistema de ecuaciones para $a = 2$.

- a) 1. Escalonamos. Para eliminar x usamos la segunda ecuación (tiene coeficiente 1 en x):

$$E_1 - 2E_2: (-1 - 2a)z = 0, \quad E_3 - 5E_2: 2y - 5az = 2a - 25.$$

2. El sistema equivalente es

$$\begin{cases} x + 2y + az = 5 \\ 2y - 5az = 2a - 25 \\ (-1 - 2a)z = 0 \end{cases}$$

3. Si $-1 - 2a \neq 0$, de la última ecuación $z = 0$; después se obtienen y y x de forma única. Hay solución única. 4. Si $-1 - 2a = 0$, la última ecuación es $0 = 0$ y el sistema queda con dos ecuaciones independientes para tres incógnitas: no hay solución única. 5. Por tanto, no hay solución única cuando $a = -\frac{1}{2}$.

- b) 1. Con $a = 2$, la última ecuación del sistema escalonado es $-5z = 0$, luego $z = 0$. 2. De la segunda: $2y - 0 = 2 \cdot 2 - 25 = -21$, así que $y = -\frac{21}{2}$. 3. De la primera: $x + 2y + 2z = 5 + 21 - 0 = 26$. 4.

Comprobación en E_1 original: $2 \cdot 26 + 4 \left(-\frac{21}{2}\right) - 0 = 52 - 42 = 10$. Correcto.

Resultado: a) $a = -\frac{1}{2}$; b) $x = 26, y = -\frac{21}{2}, z = 0$

EJERCICIO 4

★★ Medio

IB · P1 Mayo 1998

Calcule todos los valores de k para los cuales el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 2y + kz = 0 \\ x + 4z = 0 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$$

tiene soluciones distintas de cero [es decir, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$].

1. El sistema es homogéneo: siempre tiene la solución $(0, 0, 0)$. Buscamos los valores de k para los que hay además otras soluciones.

2. De la segunda ecuación, $x = -4z$.

3. Sustituimos en la primera: $-8z - 2y + kz = 0$, de donde $y = \frac{(k-8)z}{2}$.

4. Sustituimos x e y en la tercera:

$$-4kz + \frac{(k-8)z}{2} + z = 0 \Rightarrow \frac{-8k + k - 8 + 2}{2} z = 0 \Rightarrow \frac{-7k - 6}{2} z = 0.$$

5. Si $-7k - 6 \neq 0$, entonces $z = 0$ y, por tanto, $x = 0$ e $y = 0$: solo la solución nula.

6. Si $-7k - 6 = 0$, es decir $k = -\frac{6}{7}$, la ecuación se cumple para cualquier z . Tomando $z = t$ se obtiene $x = -4t$, $y = \frac{(k-8)t}{2} = -\frac{31}{7}t$: infinitas soluciones, entre ellas algunas distintas de $(0, 0, 0)$.

Resultado: $k = -\frac{6}{7}$

EJERCICIO 5

★★ Medio

IB · P1 Mayo 1999

Hallar el valor de a para el cual el siguiente sistema de ecuaciones no tiene una solución única

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3y = -6 \\ x - 2y + az = \frac{7}{2} \end{cases}$$

1. Llamamos E_1, E_2, E_3 a las ecuaciones. Eliminamos x de E_1 y de E_2 con ayuda de E_3 (que tiene coeficiente 1 en x):

$$E_1 - 4E_3 : 7y + (2 - 4a)z = 1 - 14 = -13,$$

$$E_2 - 2E_3 : 7y - 2az = -6 - 7 = -13.$$

2. Restamos las dos ecuaciones obtenidas:

$$(2 - 4a)z - (-2a)z = 0 \Rightarrow (2 - 2a)z = 0.$$

3. Si $a \neq 1$, entonces $z = 0$; de $7y = -13$ se obtiene $y = -\frac{13}{7}$ y de E_3 se despeja x : hay solución única.

4. Si $a = 1$, la ecuación anterior es $0 = 0$: queda un sistema con dos ecuaciones independientes y tres incógnitas, que no tiene solución única.

Resultado: $a = 1$

EJERCICIO 6

★★ Medio

IB · P2 Noviembre 2003

Considere el siguiente sistema de ecuaciones donde b es una constante.

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 4 \\ 5x + y + bz = 1 \end{cases}$$

a) Resuelva el sistema para z en función de b .

b) A partir de lo anterior, escriba los valores de b para el cual el sistema no tiene solución única, razonando la respuesta.

a) 1. Llamamos E_1, E_2, E_3 a las ecuaciones. Restando $E_1 - E_2$ se elimina y :

$$x + 2z = -3, \quad \text{es decir} \quad x = -3 - 2z.$$

2. Restando $E_3 - E_1$ también se elimina y :

$$2x + (b - 1)z = 0.$$

3. Sustituimos $x = -3 - 2z$:

$$-6 - 4z + (b - 1)z = 0 \Rightarrow (b - 5)z = 6.$$

4. Si $b \neq 5$ se puede dividir entre $b - 5$:

$$z = \frac{6}{b - 5}.$$

- b) 1. Si $b \neq 5$, el apartado anterior da un único valor de z ; entonces $x = -3 - 2z$ queda determinado y también $y = 1 - 3x - z$ (de E_1). El sistema tiene solución única. 2. Si $b = 5$, la ecuación $(b - 5)z = 6$ se convierte en $0 \cdot z = 6$, que es imposible: el sistema no tiene solución. 3. Por tanto, el sistema no tiene solución única exactamente cuando $b = 5$ (en ese caso es incompatible).

Resultado: a) $z = \frac{6}{b-5}$ (para $b \neq 5$); b) $b = 5$

EJERCICIO 7

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2010

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ 3x + y + 2z &= -2 \\ -x + 2y + az &= b \end{aligned}$$

se sabe que tiene más de una solución. Calcule el valor de a y el valor de b .

1. Un sistema lineal tiene una única solución, ninguna o infinitas. Si tiene más de una, tiene infinitas, y entonces el determinante de la matriz de coeficientes es cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = 2(a - 4) + (3a + 2) + 3(6 + 1) = 5a + 15.$$

2. $5a + 15 = 0 \Rightarrow a = -3$.
3. Con $a = -3$ resolvemos por eliminación. Sumando las dos primeras ecuaciones: $5x + 5z = 0 \Rightarrow x = -z$.
4. De la primera ecuación: $y = 2x + 3z - 2 = -2z + 3z - 2 = z - 2$.
5. Sustituimos en la tercera, $-x + 2y - 3z = b$:
$$z + 2(z - 2) - 3z = b \Rightarrow -4 = b.$$

6. Para $b = -4$ el sistema es compatible indeterminado, con solución general $(-t, t - 2, t)$, $t \in \mathbb{R}$. (Para $a = -3$ y $b \neq -4$ no tendría ninguna solución.)

Resultado: $a = -3$ y $b = -4$

EJERCICIO 8

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2011

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

halle los valores de la constante real, a , para los cuales el sistema tiene una solución única.

1. El sistema tiene solución única si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes no es cero.
2. Desarrollamos:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2(a + 2).$$

(Con la calculadora, en la Prueba 2, se obtiene el mismo determinante.)

3. El determinante se anula para $a = 1$ y $a = -2$. Para cualquier otro valor el sistema es compatible determinado.

4. Comprobación de los dos casos excepcionales: si $a = 1$, las tres ecuaciones son $x + y + z = 1$ (compatible indeterminado); si $a = -2$, al sumar las tres ecuaciones queda $0 = 3$ (incompatible). En ninguno hay solución única.

Resultado: solución única para $a \neq 1$ y $a \neq -2$

EJERCICIO 9 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2013

Halle el valor de k tal que el siguiente sistema de ecuaciones no tenga una única solución.

$$\begin{aligned} kx + y + 2z &= 3 \\ -y + 4z &= 5 \\ 3x + 4y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

1. No hay solución única exactamente cuando el determinante de la matriz de coeficientes es cero.
2. Desarrollamos por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = k(-2 - 16) + 3(4 + 2) = -18k + 18.$$

3. $-18k + 18 = 0 \Rightarrow k = 1$.
4. Con $k = 1$ el sistema no es compatible determinado; de hecho es incompatible: de las dos primeras ecuaciones, $x + y + 2z = 3$ y $y = 4z - 5$, se obtiene $x = 8 - 6z$; entonces la tercera da $3(8 - 6z) + 4(4z - 5) + 2z = 4 - 0z = 1$, que es falso.

Resultado: $k = 1$

EJERCICIO 10 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2014

A continuación se presenta un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + y + z &= 1 \\ -x + 4y + az &= 4 \end{aligned}$$

- a) Encuentre el valor de a para que el sistema no tenga una solución única.
- b) Demuestre que el sistema tiene una solución para cualquier valor de a .

- a) 1. Escalonamos. $E_2 - 2E_1$ da $-3y + 3z = -3$, es decir, $y - z = 1$. 2. $E_3 + E_1$ da $6y + (a - 1)z = 6$. 3. Restamos 6 veces la ecuación $y - z = 1$: $(a - 1)z + 6z = 6 - 6$, o sea $(a + 5)z = 0$. 4. Si $a \neq -5$, entonces $z = 0$ y el sistema tiene solución única. Si $a = -5$, la ecuación queda $0 = 0$ y el sistema no tiene solución

única. (Con determinantes: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & a \end{vmatrix} = -3a - 15 = 0 \Rightarrow a = -5$.)

- b) 1. Basta comprobar que $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ cumple las tres ecuaciones para cualquier a :

$$0 + 2 - 0 = 2, \quad 0 + 1 + 0 = 1, \quad -0 + 4 + a \cdot 0 = 4.$$

2. La tercera se cumple sea cual sea a , porque a multiplica a $z = 0$. Luego el sistema siempre tiene al menos una solución. 3. Más precisamente: si $a \neq -5$ la solución única es $(0, 1, 0)$; si $a = -5$ hay infinitas, $(-t, 1 + t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

Resultado: a) $a = -5$; b) la solución $(0, 1, 0)$ vale para todo a (única si $a \neq -5$, infinitas si $a = -5$).

Queda demostrado.

EJERCICIO 11

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2006

Considere el sistema de ecuaciones

$$x + 2y + kz = 0$$

$$x + 3y + z = 3$$

$$kx + 8y + 5z = 6$$

- a) Halle el conjunto de valores de k para los cuales este sistema de ecuaciones tiene una solución **única**.
b) Para cada valor de k para el cual el sistema tiene solución **no única**, halle el conjunto de soluciones.

- a) 1. Escalonamos. $E_2 - E_1$ da $y + (1 - k)z = 3$. 2. $E_3 - kE_1$ da $(8 - 2k)y + (5 - k^2)z = 6$. 3. Sustituimos $y = 3 - (1 - k)z$ en la nueva tercera ecuación:

$$(8 - 2k)(3 - (1 - k)z) + (5 - k^2)z = 6 \Rightarrow [(5 - k^2) - (8 - 2k)(1 - k)]z = 6 - 24 + 6k.$$

4. El corchete vale $5 - k^2 - 8 + 10k - 2k^2 = -(3k^2 - 10k + 3) = -(3k - 1)(k - 3)$ y el segundo miembro es $-18 + 6k = 6(k - 3)$. Queda

$$(3k - 1)(k - 3)z = -6(k - 3).$$

5. Si $k \neq \frac{1}{3}$ y $k \neq 3$, se despeja $z = \frac{-6}{3k - 1}$ y las demás incógnitas salen por sustitución: solución única. 6. Si $k = \frac{1}{3}$ o $k = 3$ el coeficiente de z es 0: no hay solución única.

- b) 1. Caso $k = 3$: la ecuación queda $0 \cdot z = 0$, siempre cierta. Tomamos $z = t$: $y = 3 - (1 - 3)t = 3 + 2t$ y, de la primera ecuación, $x = -2y - 3z = -6 - 4t - 3t = -6 - 7t$. Conjunto de soluciones: $\{(-6 - 7t, 3 + 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$. 2. Caso $k = \frac{1}{3}$: la ecuación queda $0 \cdot z = -6(\frac{1}{3} - 3) = 16$, que es imposible. El sistema es incompatible: el conjunto de soluciones es vacío.

Resultado: a) $k \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}, 3\}$; b) si $k = 3$, $(-6 - 7t, 3 + 2t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$; si $k = \frac{1}{3}$, no hay soluciones (conjunto vacío)

EJERCICIO 12

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2015

Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x + y + 6z = 0$$

$$4x + 3y + 14z = 4$$

$$2x - 2y + (\alpha - 2)z = \beta - 12$$

- a) Halle las condiciones que han de cumplir α y β para que
(i) el sistema no tenga ninguna solución
(ii) el sistema tenga sólo una solución
(iii) el sistema tenga un número infinito de soluciones.
b) Para el caso en el que el número de soluciones es infinito, halle la solución general del sistema de ecuaciones en forma cartesiana.

- a) 1. Escalonamos. $E_2 - 2E_1$ da $y + 2z = 4$. 2. $E_3 - E_1$ da $-3y + (\alpha - 8)z = \beta - 12$. 3. Sumamos 3 veces la ecuación $y + 2z = 4$ a la anterior: $(\alpha - 8 + 6)z = \beta - 12 + 12$, es decir,

$$(\alpha - 2)z = \beta.$$

4. i) **Sin solución:** $\alpha = 2$ y $\beta \neq 0$ (queda $0 = \beta$, imposible). 5. ii) **Solución única:** $\alpha \neq 2$, con β cualquiera (se despeja $z = \frac{\beta}{\alpha - 2}$ y luego y y x). 6. iii) **Infinitas soluciones:** $\alpha = 2$ y $\beta = 0$ (queda $0 = 0$ y z queda libre). (Comprobación con el determinante de los coeficientes: $2\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.)

- b) 1. Con $\alpha = 2$ y $\beta = 0$ el sistema equivale a $2x + y + 6z = 0$ y $y + 2z = 4$. 2. De la segunda, $y = 4 - 2z$. En la primera: $2x = -y - 6z = -4 - 4z$, luego $x = -2 - 2z$. 3. Tomando $z = t$ como parámetro: $(x, y, z) = (-2 - 2t, 4 - 2t, t)$. 4. Despejando t en cada coordenada se obtiene la forma cartesiana:

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Resultado: a) i) $\alpha = 2$ y $\beta \neq 0$; ii) $\alpha \neq 2$ y β cualquiera; iii) $\alpha = 2$ y $\beta = 0$; b) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}$

Condiciones de compatibilidad y problemas de contexto

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2017

En un supermercado hay cajas de frutas mezcladas que están a la venta.

La caja A contiene 2 plátanos, 3 kiwis y 4 melones y su precio es \$6.58.

La caja B contiene 5 plátanos, 2 kiwis y 8 melones y su precio es \$12.32.

La caja C contiene 5 plátanos y 4 kiwis y su precio es \$3.

Calcule el precio de cada tipo de fruta.

1. Llamamos p , q y m al precio (en dólares) de un plátano, un kiwi y un melón. Cada caja da una ecuación:

$$\begin{cases} 2p + 3q + 4m = 6,58 \\ 5p + 2q + 8m = 12,32 \\ 5p + 4q = 3 \end{cases}$$

2. Esto es un sistema 3×3 ; con la CPG (Prueba 2) se obtiene directamente la solución. A mano: para eliminar m restamos a la segunda ecuación el doble de la primera:

$$E_2 - 2E_1: \quad p - 4q = 12,32 - 13,16 = -0,84.$$

3. Despejamos $p = 4q - 0,84$ y lo llevamos a la tercera ecuación:

$$5(4q - 0,84) + 4q = 3 \Rightarrow 24q = 7,2 \Rightarrow q = 0,3.$$

4. Entonces $p = 4 \cdot 0,3 - 0,84 = 0,36$.

5. De la primera ecuación: $4m = 6,58 - 2(0,36) - 3(0,3) = 6,58 - 0,72 - 0,9 = 4,96$, luego $m = 1,24$.

6. Comprobación en la segunda: $5(0,36) + 2(0,3) + 8(1,24) = 1,8 + 0,6 + 9,92 = 12,32$. Correcto.

Resultado: plátanos a \$0.36, kiwis a \$0.30 y melones a \$1.24

EJERCICIO 14

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 1996

- a) Obtener una ecuación que a , b y c deben satisfacer para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = a \\ -11x + 2y + 6z = b \\ 7x + y - 2z = c \end{cases}$$

tenga solución.

- b) Obtenga una solución cuando $a=2$ y $b=7$.

Es la solución única. Razone su respuesta con claridad.

- a) 1. Eliminamos x de las ecuaciones segunda y tercera usando la primera como referencia. Llamamos E_1 , E_2 , E_3 a las tres ecuaciones y calculamos $7E_1 + 3E_3$:

$$(-21 + 21)x + (7 + 3)y + (14 - 6)z = 7a + 3c \Rightarrow 10y + 8z = 7a + 3c.$$

2. Calculamos ahora $7E_2 + 11E_3$:

$$(-77 + 77)x + (14 + 11)y + (42 - 22)z = 7b + 11c \Rightarrow 25y + 20z = 7b + 11c.$$

3. El sistema queda reducido a dos ecuaciones en y y z :

$$\begin{cases} 10y + 8z = 7a + 3c \\ 25y + 20z = 7b + 11c \end{cases}$$

Los coeficientes de la segunda son $\frac{5}{2}$ de los de la primera ($25 = \frac{5}{2} \cdot 10$ y $20 = \frac{5}{2} \cdot 8$). Para que haya solución, los términos independientes deben guardar la misma proporción:

$$7b + 11c = \frac{5}{2}(7a + 3c) \Rightarrow 14b + 22c = 35a + 15c \Rightarrow -35a + 14b + 7c = 0.$$

4. Dividiendo entre 7: $-5a + 2b + c = 0$. Es la condición para que el sistema tenga solución (si no se cumple, aparece una ecuación imposible del tipo $0 = k$ con $k \neq 0$).

- b) 1. Con $a = 2$ y $b = 7$, la condición del apartado anterior da $-10 + 14 + c = 0$, es decir $c = -4$. 2. El sistema es ahora

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 2 \\ -11x + 2y + 6z = 7 \\ 7x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

y, por el apartado a), la tercera ecuación es combinación de las otras dos: queda un sistema equivalente de dos ecuaciones con tres incógnitas. 3. De $10y + 8z = 7a + 3c = 14 - 12 = 2$ obtenemos $5y + 4z = 1$, es decir $y = \frac{1 - 4z}{5}$. 4. Sustituimos en E_1 : $-3x + \frac{1 - 4z}{5} + 2z = 2$. Multiplicando por 5: $-15x + 1 - 4z + 10z = 10$, de donde $6z = 9 + 15x$ y

$$z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}x.$$

5. Entonces $y = \frac{1 - 4z}{5} = \frac{1 - 6 - 10x}{5} = -1 - 2x$. 6. Tomando $x = t$ como parámetro, la solución general es

$$(x, y, z) = \left(t, -1 - 2t, \frac{3}{2} + \frac{5}{2}t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, con $t = 1$ se obtiene la solución $(1, -3, 4)$. 7. **No es la solución única:** el sistema tiene infinitas soluciones (una por cada valor de t), porque al haber una ecuación que depende de las otras dos solo hay dos ecuaciones independientes para tres incógnitas.

Resultado: a) $-5a + 2b + c = 0$; b) $(x, y, z) = \left(t, -1 - 2t, \frac{3}{2} + \frac{5}{2}t \right)$, $t \in \mathbb{R}$ (por ejemplo, $(1, -3, 4)$). No es única: hay infinitas soluciones.