

Repaso de álgebra e inducción matemática

Álgebra para IB Análisis y Enfoques NS: potencias, polinomios, ecuación cuadrática, desigualdades, inducción y binomio de Newton, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-analisis-y-enfoques-ns/repaso-de-algebra-e-induccion.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

Este tema repasa el álgebra que se usa en todo el curso de **Análisis y Enfoques NS** y añade dos herramientas propias del nivel superior: la **demostración por inducción matemática** y el **teorema del binomio**. Ambas aparecen casi todos los años en la Prueba 1.

Orden recomendado

Los apartados 1 a 4 son repaso: si los dominas, ve directo a **inducción** y al **teorema del binomio**. Al final del tema tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo, para practicar cada técnica por separado.

APARTADO 1

Números reales, potencias y radicales

IDEA CLAVE

Este apartado reúne las herramientas numéricas que el IB da por sabidas en todas las pruebas: clasificar números, operar con potencias y radicales sin calculadora (Prueba 1) y dar resultados con la precisión correcta (Prueba 2). Un fallo aquí arrastra errores a casi cualquier otro tema.

Conjuntos numéricos

Cada conjunto aparece para resolver una operación que el anterior no permite.

Símbolo	Conjunto	Para qué sirve	Ejemplos
$\mathbb{N}$	naturales: $0, 1, 2, 3, \dots$	contar	$0, 7, 120$
$\mathbb{Z}$	enteros: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$	restar siempre	$-5, 0, 18$
$\mathbb{Q}$	racionales: $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$	dividir siempre	$-\frac{3}{4}, 0, 125, 5$
$\mathbb{R}$	reales: racionales e irracionales	medir cualquier longitud	$\sqrt{2}, \pi, -\frac{1}{3}$

En el IB se escribe $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ para los enteros positivos y $\mathbb{Z}^-$ para los negativos. Cada conjunto contiene al anterior:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Un entero es también racional ($5 = \frac{5}{1}$), pero no al revés. Los números complejos $\mathbb{C}$ (necesarios para resolver $x^2 = -1$) quedan fuera de este apartado.

DEFINICIÓN • RACIONAL E IRRACIONAL

Un número real es **racional** si se puede escribir como fracción de dos enteros. Su expresión decimal es **finita** ($\frac{7}{8} = 0,875$) o **periódica** ($\frac{4}{11} = 0,3\overline{6}$). Un número real es **irracional** si su expresión decimal es infinita y **no** es periódica: no hay fracción que lo represente. Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π y e son irracionales.

Atención con las raíces: $\sqrt{49} = 7$ es entero y $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ es racional. Solo es irracional $\sqrt{n}$ cuando n es un entero positivo que no es cuadrado perfecto.

De decimal periódico a fracción

Todo decimal periódico es una fracción. El truco es multiplicar por una potencia de 10 que desplace exactamente un periodo y **restar**, para que la parte periódica desaparezca.

MÉTODO • FRACCIÓN GENERATRIZ

1. Llama x al número.
2. Multiplica x por dos potencias de 10 (por ejemplo, 10^a y 10^b) de modo que los dos resultados tengan **la misma cola periódica** detrás de la coma. La diferencia $b - a$ es el número de cifras del periodo.
3. Resta las dos igualdades: las colas infinitas se anulan y queda un número finito.
4. Despeja x y simplifica.

Por ejemplo, para $x = 0,1\overline{8}$ el periodo tiene 2 cifras: $100x = 18,1\overline{8}$, y al restar x , $99x = 18$, así que $x = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$.

Potencias

DEFINICIÓN · POTENCIA DE EXPONENTE ENTERO

Si $n \in \mathbb{Z}^+$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}$. Para $a \neq 0$ se definen además

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Estas dos definiciones no son un capricho: son las únicas que mantienen válidas las leyes de abajo. Por ejemplo, $\frac{a^3}{a^3} = 1$ por ser un número dividido entre sí mismo, y por la ley del cociente es $a^{3-3} = a^0$; luego a^0 debe valer 1.

PROPIEDAD · LEYES DE LAS POTENCIAS

Para $a, b \neq 0$ y exponentes m, n :

Ley	Fórmula
Producto de igual base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Cociente de igual base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{mn}$
Potencia de un producto	$(ab)^n = a^n b^n$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Exponente negativo	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

La intuición es contar factores: $a^m \cdot a^n$ tiene m factores y luego n más, en total $m + n$; $(a^m)^n$ repite n veces un bloque de m factores, en total mn . Estas leyes valen también con exponentes racionales y reales cuando la base es positiva.

Exponentes racionales y radicales

DEFINICIÓN · RAÍZ N-ÉSIMA Y EXPONENTE FRACCIONARIO

Para $n \in \mathbb{Z}^+$, $\sqrt[n]{a} = b$ significa $b^n = a$. Si n es par, solo existe para $a \geq 0$ y se toma $b \geq 0$; si n es impar, existe para cualquier a real. Además,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad \text{y} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Por ejemplo, $16^{3/4} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$ y $\sqrt[3]{-8} = -2$, pero $\sqrt{-4}$ no es un número real. Conviene calcular **primero la raíz** y luego elevar: los números son más pequeños.

Con exponentes fraccionarios, las leyes de potencias dan las de los radicales (con $a, b \geq 0$ si el índice es par):

PROPIEDAD · PROPIEDADES DE LOS RADICALES

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

Para simplificar un radical, se saca fuera de la raíz todo factor que sea potencia perfecta: $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$. Solo se pueden **sumar** radicales semejantes (mismo índice y mismo radicando): $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$, que es sacar factor común. Cuidado con $\sqrt{a^2} = |a|$, no a : $\sqrt{(-3)^2} = 3$.

Racionalizar

Racionalizar es quitar los radicales del denominador sin cambiar el valor de la fracción, multiplicando arriba y abajo por la misma cantidad. En la Prueba 1 se pide a menudo dar el resultado en forma exacta y racionalizado.

- **Denominador con una raíz cuadrada:** se multiplica por esa raíz. $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.
- **Denominador con suma o resta de raíces:** se multiplica por el **conjugado** (el mismo binomio con el signo central cambiado), porque $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$ elimina las raíces. $\frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{9-5} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

Aproximar y redondear

Los resultados exactos ($\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$) se aproximan cuando se pide un valor decimal.

DEFINICIÓN · REDONDEO

Redondear a un número dado de **lugares decimales** (l. d.) es dejar ese número de cifras tras la coma. Redondear a **n cifras significativas** (c. s.) es dejar las n primeras cifras contando desde la primera distinta de cero. En ambos casos se mira la cifra siguiente: si es de 0 a 4, la última cifra conservada no cambia; si es de 5 a 9, se le suma 1. Las cifras eliminadas a la izquierda de la coma se sustituyen por ceros.

Cifras significativas: cuentan todas las cifras distintas de cero, los ceros **entre** cifras no nulas y los ceros finales **a la derecha de la coma decimal**. No cuentan los ceros de la izquierda. Así, 0,00407 tiene 3 c. s. (4, 0 y 7) y 5,200 tiene 4.

Valor	a 3 c. s.	a 2 l. d.
$\frac{22}{7} = 3,142857 \dots$	3,14	3,14
0,0063549	0,00635	0,01
48 750	48 800	48 750,00

Fíjate en que 2 l. d. y 3 c. s. no son lo mismo: depende de dónde esté la primera cifra distinta de cero.

NOTA · QUÉ EXIGE EL EXAMEN DEL IB

Si el enunciado no dice la precisión, el criterio habitual en la Prueba 2 es dar la respuesta **exacta** o con **3 cifras significativas**. Se redondea **solo el resultado final**: si se usan valores ya redondeados en los pasos intermedios, el error se acumula y se puede perder el punto de precisión. En la Prueba 2, con la calculadora de pantalla gráfica (CPG), guarda los resultados intermedios en memoria o usa la respuesta anterior en lugar de reescribirlos con menos cifras.

Intervalo de un valor redondeado

Un dato redondeado oculta el valor real. Si una cantidad se dio redondeada, el valor exacto está a menos de **media unidad de la última cifra conservada**: entre el **límite inferior** (incluido) y el **límite superior** (no incluido).

Por ejemplo, si una distancia vale 240 km redondeada a las decenas, el valor real d cumple $235 \leq d < 245$. Si una masa es 0,85 kg con 2 l. d., entonces $0,845 \leq m < 0,855$. Esto se usa para acotar el error de un cálculo o en los problemas de «mayor valor posible».

Notación científica

DEFINICIÓN · NOTACIÓN CIENTÍFICA (FORMA ESTÁNDAR)

Un número está en notación científica si se escribe $a \times 10^k$ con $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Sirve para magnitudes muy grandes o muy pequeñas: $4\,200\,000 = 4,2 \times 10^6$ y $0,0000017 = 1,7 \times 10^{-6}$. Un exponente positivo desplaza la coma a la derecha; uno negativo, a la izquierda. Expresiones como 17×10^4 o $0,3 \times 10^5$ **no** están en forma estándar, aunque valgan lo mismo que $1,7 \times 10^5$ y 3×10^4 .

Para operar, se separan las mantisas y las potencias de 10, se aplican las leyes de potencias y se **reajusta** al final para que la mantisa quede entre 1 y 10.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1

★ Básico

Decimales periódicos y clasificación

- a) Expresa $3,\overline{45}$ como fracción irreducible.
 b) Expresa $0,2\overline{7}$ (solo el 7 se repite) como fracción irreducible.
 c) De los números $\sqrt{49}$, $-\frac{12}{4}$, $\sqrt{18}$, $0,\overline{45}$, 2π , ¿cuántos son racionales?

- a) 1. Sea $x = 3,\overline{45}$. El periodo (45) tiene 2 cifras, así que multiplicamos por 100: $100x = 345,\overline{45}$.
 2. Restamos: $100x - x = 345,\overline{45} - 3,\overline{45} = 342$, luego $99x = 342$.
 3. $x = \frac{342}{99} = \frac{38}{11}$ (dividiendo numerador y denominador entre 9).
 b) 1. Sea $x = 0,2\overline{7} = 0,2777\dots$. Multiplicamos por 10 y por 100 para tener la misma cola $\overline{7}$ tras la coma: $10x = 2,\overline{7}$ y $100x = 27,\overline{7}$.
 2. Restamos: $100x - 10x = 27,\overline{7} - 2,\overline{7} = 25$, luego $90x = 25$.
 3. $x = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$.
 c) Clasificamos cada uno:
 • $\sqrt{49} = 7$: entero, luego racional.
 • $-\frac{12}{4} = -3$: entero, racional.
 • $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$: 18 no es cuadrado perfecto, así que es irracional.
 • $0,\overline{45}$: decimal periódico, racional (vale $\frac{5}{11}$).
 • 2π : irracional, porque π lo es.

Hay 3 racionales.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Potencias, radicales y racionalización

Sin calculadora y en forma exacta, calcula o simplifica:

- a) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-2/3}$
 b) $\sqrt{75} + \sqrt{12} - \sqrt{27}$
 c) $\frac{12}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$, con denominador racional.
 d) $\frac{5^{n+2} - 5^n}{3 \cdot 5^{n+1}}$, donde $n \in \mathbb{Z}$.

- a) 1. **Exponente negativo**: se invierte la base, $\left(\frac{27}{8}\right)^{-2/3} = \left(\frac{8}{27}\right)^{2/3}$.
 2. **Raíz primero**: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$.
 3. **Después la potencia**: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.
 b) 1. **Sacamos factores cuadrados**: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$.
 2. **Los tres son semejantes**, así que se suman los coeficientes: $5 + 2 - 3 = 4$. El resultado es $4\sqrt{3}$.
 c) 1. Multiplicamos arriba y abajo por el **conjugado** $\sqrt{7} + \sqrt{3}$.
 2. **Denominador**: $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = 7 - 3 = 4$.
 3. **Numerador**: $12(\sqrt{7} + \sqrt{3})$. Entonces $\frac{12(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{4} = 3\sqrt{7} + 3\sqrt{3}$.

- d) 1. **Sacamos factor común** 5^n en el numerador: $5^{n+2} - 5^n = 5^n(5^2 - 1) = 24 \cdot 5^n$.
 2. **Reescribimos el denominador**: $3 \cdot 5^{n+1} = 15 \cdot 5^n$.
 3. **Simplificamos** 5^n (que no es cero): $\frac{24}{15} = \frac{8}{5}$. El resultado no depende de n .

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Distancia a una estrella: notación científica y cifras significativas

La velocidad de la luz es $c = 3,00 \times 10^8$ m/s. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año de 365 días. Una estrella está a 4,37 años luz.

- a) Calcula la distancia de un año luz en metros. Da la respuesta en la forma $a \times 10^k$, con $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$, redondeando a a 3 cifras significativas.
 b) Calcula en metros la distancia a la estrella, también en forma estándar con 3 c. s.
 c) Calcula, en segundos, el tiempo que tarda en llegarnos la luz de esa estrella, en forma estándar con 3 c. s.
 d) Un láser tiene longitud de onda $6,50 \times 10^{-7}$ m, redondeada a 3 c. s. Halla los valores límite inferior y superior entre los que está la longitud de onda real λ .

- a) 1. Segundos de un año: $365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31\,536\,000$.
 2. Distancia = $3,00 \times 10^8 \cdot 31\,536\,000 = 9\,460\,800\,000\,000\,000$ m.
 3. En forma estándar: $9,4608 \times 10^{15}$, que a 3 c. s. es **$9,46 \times 10^{15}$** m (la cifra siguiente, 0, es menor que 5).
 b) 1. **Usamos el valor sin redondear** de a): $4,37 \cdot 9,4608 \times 10^{15} = 41,343696 \times 10^{15}$.
 2. Reajustamos la mantisa: $4,1343696 \times 10^{16}$, que a 3 c. s. es **$4,13 \times 10^{16}$** m (la cifra siguiente, 4, es menor que 5).
 c) 1. El tiempo es distancia entre velocidad, y el cociente de potencias de 10 resta exponentes: $\frac{4,1343696 \times 10^{16}}{3,00 \times 10^8} = 1,37812 \dots \times 10^8$ s.
 2. A 3 c. s., la cifra siguiente es $8 \geq 5$, así que se sube la última: **$1,38 \times 10^8$** s (unos 4,4 años, coherente con los 4,37 años luz).
 d) La última cifra conservada de $6,50 \times 10^{-7}$ es la de 10^{-9} m; media unidad de ese orden es 5×10^{-10} m. Entonces

$$6,495 \times 10^{-7} \leq \lambda < 6,505 \times 10^{-7}$$

 El límite inferior es $6,495 \times 10^{-7}$ m y el superior, $6,505 \times 10^{-7}$ m.

En el examen: deja sin redondear los valores de los pasos intermedios y redondea solo al final; si usas $9,46 \times 10^{15}$ en b), puedes llegar a otra cifra y perder el punto de precisión. Escribe el resultado en la forma pedida: $41,3 \times 10^{15}$ no está en forma estándar.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · REPARTIR UN EXPONENTE O UNA RAÍZ SOBRE UNA SUMA

$(a + b)^2$ no es $a^2 + b^2$, ni $\sqrt{a + b}$ es $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Con números se ve: $\sqrt{9 + 16} = 5$, pero $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$. Las leyes de potencias y radicales solo reparten sobre **productos y cocientes**. Para una suma se desarrolla $((a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$ o se saca factor común.

ERROR TÍPICO · SIGNOS Y EXPONENTES NEGATIVOS

$-3^2 = -9$, porque el exponente solo afecta al 3, mientras que $(-3)^2 = 9$. Y un exponente negativo **no** cambia el signo, sino que invierte: $2^{-3} = \frac{1}{8}$, no -8 . Otro fallo típico es sumar los exponentes al multiplicar potencias de **bases distintas**: $2^3 \cdot 3^4$ no es 6^7 .

ERROR TÍPICO · REDONDEAR MAL LAS CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Contar los ceros de la izquierda como significativos (0,0063549 a 3 c. s. es 0,00635, no 0,0063) o quitar los ceros finales a la derecha de la coma (2,50 con 3 c. s. no es 2,5). También se pierde el punto por redondear en los pasos intermedios y por dar $0,45 \times 10^3$ o 45×10^2 cuando se pide la forma $a \times 10^k$ con $1 \leq a < 10$.

Resumen

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; es racional el número que es fracción de enteros (decimal finito o periódico) e irracional el de decimal infinito no periódico.
- Un decimal periódico se pasa a fracción multiplicando por potencias de 10 y restando para eliminar la cola periódica.
- $a^0 = 1$ y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; las leyes valen para producto, cociente, potencia de potencia y de producto o cociente, nunca para sumas.
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$; calcula la raíz primero. Una raíz de índice par de un negativo no es real; $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Racionalizar: multiplica por la raíz o por el conjugado; $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$.
- Redondeo: si la cifra siguiente es ≥ 5 , la última sube. Cuenta c. s. desde la primera cifra no nula y redondea solo el resultado final.
- Un valor redondeado tiene límites a media unidad por debajo (incluido) y por encima (no incluido).
- Notación científica: $a \times 10^k$ con $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$; reajusta la mantisa tras operar.

APARTADO 2

Polinomios: teorema del resto y del factor

IDEA CLAVE

Un polinomio se puede dividir como un número entero, y el resto de dividir entre $x - c$ se obtiene sin dividir: basta calcular $P(c)$. Con esta idea se encuentran parámetros, ceros y factorizaciones, un tipo de pregunta muy habitual en la Prueba 1 y en la Prueba 2 del IB.

Polinomios, grado y ceros

DEFINICIÓN · POLINOMIO, GRADO Y COEFICIENTES

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$ o $n = 0$. El entero n es el **grado**; los números $a_0, \dots, a_n$ son los **coeficientes**; a_n es el coeficiente principal y a_0 el **término independiente**.

Por ejemplo, $P(x) = 4x^3 - x + 7$ tiene grado 3, coeficiente principal 4 y término independiente 7 (el coeficiente de x^2 es 0). Cuando se pide «un polinomio con coeficientes reales», todos los a_i son números reales.

DEFINICIÓN · CERO DE UN POLINOMIO Y RAÍZ DE LA ECUACIÓN

Un número c es un **cero** del polinomio $P(x)$ si $P(c) = 0$. Entonces se dice también que $x = c$ es una **raíz** (o solución) de la ecuación $P(x) = 0$.

Para $P(x) = x^2 - 5x + 6$ se tiene $P(2) = 4 - 10 + 6 = 0$ y $P(3) = 9 - 15 + 6 = 0$: los ceros son 2 y 3. Ceros de P , raíces de $P(x) = 0$ y puntos donde la gráfica de $y = P(x)$ corta al eje x son tres formas de decir lo mismo. En la Prueba 2 la calculadora de pantalla gráfica los encuentra directamente, pero en la Prueba 1 hay que llegar a ellos a mano.

División de polinomios

Dividir $P(x)$ entre $D(x)$ funciona igual que dividir enteros: $17 = 5 \cdot 3 + 2$ significa dividendo = divisor · cociente + resto, con un resto menor que el divisor.

TEOREMA · ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios con $D(x) \neq 0$ y el grado de D no es mayor que el de P , existen dos únicos polinomios $Q(x)$ (cociente) y $R(x)$ (resto) tales que

$$P(x) = D(x) Q(x) + R(x)$$

donde $R(x) = 0$ o el grado de R es **menor** que el grado de D .

Esta última condición dice cuándo se para: se sigue dividiendo mientras el resto tenga grado igual o mayor que el del divisor. Si el divisor es de grado 1, el resto es una constante; si es de grado 2, el resto tiene como mucho grado 1, es decir, tiene la forma $px + q$.

MÉTODO · DIVISIÓN LARGA DE POLINOMIOS

1. Ordena dividendo y divisor por potencias decrecientes de x , dejando un hueco (o un $0x^k$) para cada potencia que falte.
2. Divide el término principal del dividendo entre el del divisor: es el siguiente término del cociente.
3. Multiplica ese término por **todo** el divisor y **resta** el resultado al dividendo (cuidado con los signos).
4. Con lo que queda como nuevo dividendo, repite desde el paso 2.
5. Para cuando el resto sea 0 o tenga grado menor que el divisor. Comprueba con $P = DQ + R$.

Por ejemplo, para dividir $x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ entre $x^2 - x + 1$:

- $x^4 \div x^2 = x^2$. Se resta $x^2(x^2 - x + 1) = x^4 - x^3 + x^2$ y queda $x^3 - 4x^2 + 2x - 5$.
- $x^3 \div x^2 = x$. Se resta $x(x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x$ y queda $-3x^2 + x - 5$.
- $-3x^2 \div x^2 = -3$. Se resta $-3(x^2 - x + 1) = -3x^2 + 3x - 3$ y queda $-2x - 2$.

Como $-2x - 2$ tiene grado $1 < 2$, se termina: cociente $x^2 + x - 3$ y resto $-2x - 2$. Comprobación: $(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 3) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3$, y sumando el resto se recupera $x^4 - 3x^2 + 2x - 5$.

NOTA · DIVISOR DE LA FORMA $x - c$: DIVISIÓN SINTÉTICA

Cuando el divisor es $x - c$ no hace falta escribir las potencias de x : se opera solo con los coeficientes. Se baja el primer coeficiente; cada coeficiente siguiente se suma al producto de c por el resultado anterior. El último número es el resto y los demás son los coeficientes del cociente (de un grado menos). Es un atajo para la división larga, no un método distinto, y en el examen puedes usar el que prefieras siempre que se vea el procedimiento.

Teorema del resto

TEOREMA · TEOREMA DEL RESTO

Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $x - c$, el resto es el número $P(c)$.

La razón es una línea. Por el algoritmo de la división, $P(x) = (x - c)Q(x) + R$ con R constante, porque el divisor es de grado 1. Si se sustituye $x = c$, el término $(x - c)Q(x)$ se anula y queda $P(c) = R$. Dividir entre $x - c$ se parece a «evaluar en c », que es mucho más rápido.

Atención al signo: para dividir entre $x + 3$ hay que escribirlo como $x - (-3)$, y el resto es $P(-3)$. Para un divisor de la forma $ax - b$ el resto es $P(\frac{b}{a})$, el valor que anula el divisor.

Teorema del factor

TEOREMA · TEOREMA DEL FACTOR

$x - c$ es un factor de $P(x)$ si y solo si $P(c) = 0$.

Es el teorema del resto en el caso $R = 0$: si el resto de dividir entre $x - c$ es cero, la división es exacta y $P(x) = (x - c)Q(x)$; y al revés. Tres afirmaciones son por tanto equivalentes: c es un cero de P , $x = c$ es una raíz de $P(x) = 0$ y $x - c$ divide a $P(x)$.

Así, $P(x) = x^2 - 5x + 6$ tiene a $x - 2$ y a $x - 3$ como factores, y se factoriza como $(x - 2)(x - 3)$.

MÉTODO • HALLAR PARÁMETROS CON EL TEOREMA DEL RESTO Y DEL FACTOR

1. Traduce cada dato del enunciado a una ecuación sobre P : « $x - c$ es un factor» o « P es divisible entre $x - c$ » significa $P(c) = 0$; «el resto de dividir entre $x - c$ es r » significa $P(c) = r$.
2. Sustituye $x = c$ en la expresión de P , con los parámetros sin sustituir. Resulta una ecuación (lineal) en los parámetros.
3. Si hay k parámetros, necesitas k ecuaciones: resuelve el sistema.
4. Comprueba escribiendo el polinomio ya con sus parámetros y calculando $P(c)$ de nuevo.

Si el divisor es de grado 2 y tiene dos raíces conocidas, por ejemplo $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, el resto $px + q$ cumple $R(2) = P(2)$ y $R(-2) = P(-2)$: porque $P(x) = (x^2 - 4)Q(x) + R(x)$ y el primer sumando se anula en 2 y en -2 . Eso da dos ecuaciones para p y q .

Teorema fundamental del álgebra y factorización

TEOREMA • TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales (o complejos) tiene al menos un cero complejo. Como consecuencia, se puede escribir como producto de n factores lineales:

$$P(x) = a_n(x - w_1)(x - w_2) \cdots (x - w_n), \quad w_i \in \mathbb{C}$$

donde los w_i son los ceros (puede haber ceros repetidos).

Esto dice dos cosas útiles. Un polinomio de grado n tiene **como mucho n ceros distintos**. Y si se encuentra un cero c , el teorema del factor permite dividir y reducir el problema a un polinomio de grado uno menos. Los números complejos aparecen en otro tema del curso; mientras tanto, basta saber que un factor como $x^2 + x + 1$ no se descompone con números reales, pero sí con complejos.

NOTA • SOLO NS: CEROS NO REALES

Si un polinomio tiene coeficientes **reales** y $w = p + qi$ (con $q \neq 0$) es un cero, entonces su conjugado $\bar{w} = p - qi$ también lo es. Por eso los ceros no reales vienen por parejas, y un polinomio real de grado impar tiene al menos un cero real.

MÉTODO • FACTORIZAR UN POLINOMIO DE GRADO 3 CON UN CERO CONOCIDO

1. Encuentra un cero c probando valores pequeños (divisores del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) hasta que $P(c) = 0$. En la Prueba 2 puedes localizarlo con la gráfica.
2. Por el teorema del factor, $x - c$ es un factor. Divide $P(x)$ entre $x - c$: el cociente es de grado 2.
3. Factoriza el cociente (fórmula de la ecuación de segundo grado o factorización directa).
4. Escribe $P(x)$ como producto de factores y comprueba desarrollando si tienes tiempo.

NOTA • QUÉ PIDE EL EXAMEN DEL IB

Las preguntas típicas son: hallar el resto de una división sin dividir (teorema del resto), hallar uno o dos parámetros a partir de datos de divisibilidad o de restos (teorema del factor), dividir y factorizar para resolver una ecuación de grado 3, y combinar esto con otros temas. Las preguntas dicen «halle», «determine» o «factorice»: en la Prueba 1 hay que mostrar el cálculo (sustitución o división) y no basta con el resultado. En la Prueba 2 puedes comprobar los ceros con la calculadora de pantalla gráfica, pero indica igualmente el planteamiento.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1

★ Básico

Dividir entre $x - c$ y comprobar con el teorema del resto

Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 7$.

- Divide $P(x)$ entre $x - 3$ y escribe el cociente y el resto.
- Sin dividir, halla el resto de dividir $P(x)$ entre $x + 1$.

a) Por división sintética con $c = 3$, usando los coeficientes 2, -5, 1, 7:

- Se baja el 2.
- $-5 + 3 \cdot 2 = 1$.
- $1 + 3 \cdot 1 = 4$.
- $7 + 3 \cdot 4 = 19$.

El último número es el resto y los anteriores son los coeficientes del cociente, de grado 2: el cociente es $2x^2 + x + 4$ y el resto es 19. Es decir,

$$2x^3 - 5x^2 + x + 7 = (x - 3)(2x^2 + x + 4) + 19$$

Comprobación con el teorema del resto: $P(3) = 2 \cdot 27 - 5 \cdot 9 + 3 + 7 = 54 - 45 + 10 = 19$, que coincide con el resto.

b) Para dividir entre $x + 1 = x - (-1)$ el resto es $P(-1)$:

$$P(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) + 7 = -2 - 5 - 1 + 7 = -1$$

El resto es -1.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Parámetro, factorización y raíces

Se considera el polinomio $P(x) = x^3 + kx^2 - 5x - 6$, donde $k \in \mathbb{R}$, y se sabe que $x - 2$ es un factor de $P(x)$.

- Halla el valor de k .
- Factoriza completamente $P(x)$ con ese valor de k .
- Halla todas las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

a) Teorema del factor. Si $x - 2$ es un factor, entonces $P(2) = 0$:

$$P(2) = 8 + 4k - 10 - 6 = 4k - 8 = 0 \iff k = 2$$

b) Con $k = 2$, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

1. **Dividir entre $x - 2$.** Por división sintética con $c = 2$ y coeficientes 1, 2, -5, -6: se baja 1; $2 + 2 \cdot 1 = 4$; $-5 + 2 \cdot 4 = 3$; $-6 + 2 \cdot 3 = 0$. El resto es 0 (como debía) y el cociente es $x^2 + 4x + 3$.

2. **Factorizar el cociente.** Buscamos dos números que sumen 4 y multipliquen 3: son 1 y 3. Entonces $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.

3. **Resultado.**

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$$

c) $P(x) = 0$ si y solo si alguno de los factores vale 0: $x = 2$, $x = -1$ o $x = -3$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Dos condiciones, factorización y resto de grado 1

El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$, con $a, b \in \mathbb{R}$, es divisible entre $x - 1$ y deja resto 8 al dividirlo entre $x + 1$.

- Halla a y b .
- Factoriza $P(x)$ con esos valores.
- Halla el resto de dividir $P(x)$ entre $x^2 - 1$.

- a) Traducimos los datos.** Divisible entre $x - 1$ significa $P(1) = 0$. Resto 8 al dividir entre $x + 1 = x - (-1)$ significa $P(-1) = 8$.

$$P(1) = 1 + a + b + 6 = 0 \Rightarrow a + b = -7$$

$$P(-1) = -1 + a - b + 6 = 8 \Rightarrow a - b = 3$$

Sumando las dos ecuaciones, $2a = -4$ y $a = -2$. De la primera, $b = -7 - a = -5$. Así,

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Comprobación: $P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ y $P(-1) = -1 - 2 + 5 + 6 = 8$.

- b)** $x - 1$ es un factor. Dividimos con $c = 1$ y coeficientes 1, -2, -5, 6: se baja 1; $-2 + 1 = -1$; $-5 + (-1) = -6$; $6 + (-6) = 0$. El cociente es $x^2 - x - 6$.

Para factorizarlo, dos números que sumen -1 y multipliquen -6 son -3 y 2: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Por tanto,

$$P(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

- c)** El divisor $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ es de grado 2, así que el resto tiene la forma $R(x) = px + q$ y

$$P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + px + q$$

Sustituimos las raíces del divisor, $x = 1$ y $x = -1$, donde el primer sumando se anula:

$$P(1) = 0 = p + q$$

$$P(-1) = 8 = -p + q$$

Sumando, $2q = 8$, luego $q = 4$ y $p = -4$. El resto es $-4x + 4$.

Comprobación por la división: $P(x) = (x^2 - 1)(x - 2) + (-4x + 4)$, ya que $(x^2 - 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ y al sumar $-4x + 4$ resulta $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

En el examen: escribe siempre el planteamiento ($P(1) = 0$, $P(-1) = 8$) antes de resolver el sistema: es lo que da los puntos de método. En el apartado c), un resto de grado 1 se plantea con dos incógnitas, no con una.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · EQUIVOCARSE CON EL SIGNO DEL CERO

Para dividir entre $x + 3$ el resto es $P(-3)$, no $P(3)$. El divisor $x - c$ se anula en $x = c$, así que $x + 3$ se anula en $x = -3$. Antes de sustituir, resuelve «divisor = 0» y usa ese valor. Del mismo modo, el cero de $2x - 1$ es $\frac{1}{2}$.

ERROR TÍPICO · RESTAR MAL EN LA DIVISIÓN LARGA

Al multiplicar un término del cociente por el divisor y restar, el error más habitual es no cambiar el signo de todos los términos de lo que se resta: restar $x^3 - x^2 + x$ es sumar $-x^3 + x^2 - x$. Otro fallo frecuente es olvidar el hueco de una potencia que falta: $x^3 - 4$ debe tratarse como $x^3 + 0x^2 + 0x - 4$, o las columnas se desordenan.

ERROR TÍPICO · CREER QUE $P(c) = 0$ SOLO DA UN CERO Y NO UN FACTOR

El teorema del factor es una equivalencia: si $P(c) = 0$, entonces $x - c$ **divide** a $P(x)$, y eso permite factorizar. Muchos alumnos encuentran un cero pero siguen resolviendo $P(x) = 0$ por tanteo, en vez de dividir y quedarse con un polinomio de grado menor. Y al revés: que el término independiente tenga a c como divisor no garantiza que c sea un cero; hay que comprobarlo con $P(c) = 0$.

Resumen

- Un polinomio de grado n es $a_n x^n + \dots + a_0$ con $a_n \neq 0$; un cero c cumple $P(c) = 0$ y es una raíz de $P(x) = 0$.
- Algoritmo de la división: $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$, con $R = 0$ o grado de R menor que el de D . Dividir entre un divisor de grado 1 deja un resto constante.
- Teorema del resto: el resto de dividir $P(x)$ entre $x - c$ es $P(c)$. Para $x + 3$ se usa $P(-3)$.
- Teorema del factor: $x - c$ es factor de $P(x)$ si y solo si $P(c) = 0$.
- Para hallar parámetros: traduce cada dato a una ecuación del tipo $P(c) = \text{valor}$ y resuelve el sistema.
- Con un divisor de grado 2 de raíces r_1 y r_2 , el resto $px + q$ cumple $R(r_1) = P(r_1)$ y $R(r_2) = P(r_2)$.
- Teorema fundamental del álgebra: un polinomio de grado n se factoriza en n factores lineales complejos; tiene como mucho n ceros distintos. (NS: los ceros no reales de un polinomio real van en parejas conjugadas.)
- Para factorizar un polinomio de grado 3: halla un cero, divide, factoriza el cociente de grado 2.

APARTADO 3

Ecuación cuadrática y discriminante

IDEA CLAVE

Una ecuación cuadrática es la que se puede escribir como $ax^2 + bx + c = 0$. En este apartado ves tres formas de resolverla (factorizar, completar el cuadrado, fórmula), cómo el discriminante dice cuántas raíces reales tiene sin resolverla y cómo la suma y el producto de las raíces permiten plantear problemas con parámetros: son preguntas habituales de la Prueba 1 y de la Prueba 2.

Qué es una ecuación cuadrática

DEFINICIÓN · ECUACIÓN CUADRÁTICA Y RAÍCES

Una **ecuación cuadrática** (o de segundo grado) en la incógnita x es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Sus **soluciones** se llaman **raíces** de la ecuación, y son los **ceros** del polinomio $ax^2 + bx + c$. Si $a = 0$ la ecuación deja de ser cuadrática (queda $bx + c = 0$), por eso se exige $a \neq 0$.

Una ecuación cuadrática tiene como máximo dos raíces reales. Antes de resolverla hay que llevarla a esa forma, con todo a un lado y 0 en el otro: $2x^2 - 3x = 1$ se escribe $2x^2 - 3x - 1 = 0$, con $a = 2$, $b = -3$ y $c = -1$. Los signos de b y de c forman parte del coeficiente.

Ecuaciones incompletas

Cuando falta el término en x o el término independiente no hace falta ningún método general.

- Si $b = 0$ ($ax^2 + c = 0$): se despeja $x^2 = -\frac{c}{a}$. Hay dos raíces opuestas, $x = \pm\sqrt{-c/a}$, si $-c/a > 0$; una sola raíz, $x = 0$, si $c = 0$; y ninguna raíz real si $-c/a < 0$. Por ejemplo, $5x^2 - 45 = 0$ da $x^2 = 9$, es decir, $x = \pm 3$, mientras que $x^2 + 4 = 0$ no tiene raíces reales.
- Si $c = 0$ ($ax^2 + bx = 0$): se saca factor común, $x(ax + b) = 0$. Una de las raíces es siempre $x = 0$ y la otra es $x = -\frac{b}{a}$. Por ejemplo, $4x^2 - 12x = 0$ se escribe $4x(x - 3) = 0$, con raíces 0 y 3.

El segundo caso usa la propiedad que sostiene el método de factorizar: **un producto es cero si y solo si alguno de sus factores es cero**. No hay ninguna otra forma de que dos números multiplicados den 0.

Método 1: factorizar

MÉTODO · RESOLVER POR FACTORIZACIÓN

1. Lleva la ecuación a la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Si $a = 1$, busca dos números cuyo **producto** sea c y cuya **suma** sea b , y escribe $(x + p)(x + q)$ con $p + q = b$ y $pq = c$.
3. Si $a \neq 1$, busca una descomposición $(mx + p)(nx + q)$ con $mn = a$, $pq = c$ y $mq + np = b$ (se prueba hasta que el término central sale bien).
4. Iguala a 0 cada factor y resuelve las ecuaciones de primer grado resultantes.

Por ejemplo, en $x^2 - 7x + 12 = 0$ buscamos dos números de producto 12 y suma -7 : son -3 y -4 . Entonces $(x - 3)(x - 4) = 0$ y las raíces son $x = 3$ y $x = 4$.

Factorizar es rápido cuando las raíces son enteras o fracciones sencillas, pero muchas ecuaciones (por ejemplo $x^2 + 6x + 2 = 0$) no se pueden descomponer con números racionales. Para esas hace falta uno de los métodos siguientes.

Método 2: completar el cuadrado

La idea es reescribir $x^2 + bx$ como parte de un cuadrado perfecto, porque $(x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$. Si el coeficiente de x es b , hay que sumar $(\frac{b}{2})^2$ a los dos miembros para obtener $(x + \frac{b}{2})^2$.

Para $x^2 + 6x + 2 = 0$: pasamos el 2 al otro lado, $x^2 + 6x = -2$, sumamos $3^2 = 9$ en los dos miembros, $x^2 + 6x + 9 = 7$, y queda $(x + 3)^2 = 7$. Tomando raíz cuadrada con los dos signos, $x + 3 = \pm\sqrt{7}$, luego $x = -3 \pm \sqrt{7}$.

Si $a \neq 1$, se divide antes toda la ecuación entre a para que el coeficiente de x^2 sea 1.

Método 3: la fórmula cuadrática

Completar el cuadrado en la ecuación general conduce a una fórmula que sirve para **cualquier** ecuación cuadrática.

TEOREMA · FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por qué funciona. Dividimos entre a y completamos el cuadrado:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

Si el miembro de la derecha no es negativo, se toma raíz cuadrada con los dos signos, $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, y al despejar x sale la fórmula.

Por ejemplo, para $3x^2 - 2x - 4 = 0$ tenemos $a = 3$, $b = -2$, $c = -4$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

NOTA · PRUEBA 1 Y PRUEBA 2

En la Prueba 1 (sin calculadora) se espera que sepas aplicar la fórmula a mano y dejar la respuesta exacta, como $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$, o factorizar cuando se pueda. En la Prueba 2 puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG) para resolver la ecuación o para leer los ceros en la gráfica, pero conviene escribir qué ecuación has resuelto y dar el resultado con la precisión pedida (por defecto, tres cifras significativas).

El discriminante

DEFINICIÓN · DISCRIMINANTE

El **discriminante** de $ax^2 + bx + c = 0$ es el número

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Es la cantidad que aparece dentro de la raíz cuadrada de la fórmula, y por eso decide cuántas raíces reales hay:

Signo de Δ Número de raíces reales

Qué pasa en la fórmula

$\Delta > 0$ dos raíces reales distintas $\pm\sqrt{\Delta}$ da dos valores diferentes

$\Delta = 0$ una raíz real (raíz doble) ± 0 da el mismo valor: $x = -\frac{b}{2a}$

$\Delta < 0$ ninguna raíz real no existe la raíz cuadrada de un número negativo

Ejemplos: $x^2 - 6x + 9 = 0$ tiene $\Delta = 36 - 36 = 0$, y su raíz doble es $x = 3$ (porque $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$). La ecuación $x^2 + x + 5 = 0$ tiene $\Delta = 1 - 20 = -19 < 0$, así que no tiene raíces reales, y $x^2 + x - 6 = 0$ tiene $\Delta = 25 > 0$ y raíces 2 y -3.

Interpretación gráfica. Las raíces son los puntos donde la parábola $y = ax^2 + bx + c$ corta al eje: $\Delta > 0$ equivale a dos cortes, $\Delta = 0$ a que la parábola solo toca el eje (en el vértice) y $\Delta < 0$ a que no lo alcanza.

NOTA • PALABRA «REAL»

Cuando $\Delta < 0$ la ecuación no tiene soluciones **reales**. En el curso de NS verás más adelante que sí tiene soluciones en los números complejos; en este apartado, «no tiene raíces» significa «no tiene raíces reales».

Ecuaciones con parámetro

En muchos problemas la ecuación contiene una letra, k por ejemplo, y se pregunta para qué valores de k ocurre algo sobre las raíces. El discriminante convierte esa pregunta en una ecuación o una inecuación en k .

MÉTODO • RAÍCES SEGÚN UN PARÁMETRO

1. Identifica a , b y c (pueden depender de k) y calcula Δ simplificado.
2. Traduce la condición: dos raíces distintas $\Rightarrow \Delta > 0$; raíz doble $\Rightarrow \Delta = 0$; sin raíces reales $\Rightarrow \Delta < 0$; al menos una raíz real $\Rightarrow \Delta \geq 0$.
3. Resuelve la ecuación o la inecuación en k : factoriza Δ y estudia su signo (la parábola de Δ en k ayuda).
4. Si a depende de k , **excluye** los valores que lo anulan: con $a = 0$ la ecuación ya no es cuadrática.

Por ejemplo, para que $x^2 + kx + 4 = 0$ no tenga raíces reales: $\Delta = k^2 - 16 < 0 \iff -4 < k < 4$. Los valores $k = \pm 4$ dan raíz doble, y para $|k| > 4$ hay dos raíces.

Suma y producto de las raíces

PROPIEDAD • SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAÍCES

Si α y β son las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

Por qué. Con la fórmula, $\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ y $\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Al sumar, las raíces cuadradas se cancelan y queda $\frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$. Al multiplicar, $\alpha\beta = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$. (Si $\Delta = 0$ se cuenta la raíz doble dos veces.)

Estas relaciones permiten trabajar **sin calcular las raíces**. Por ejemplo, si α y β son las raíces de $x^2 - 5x + 3 = 0$, entonces $\alpha + \beta = 5$ y $\alpha\beta = 3$, y se pueden calcular expresiones simétricas como

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 6 = 19$$

También sirven en sentido contrario, para **construir** una ecuación a partir de sus raíces. Dividiendo entre a , la ecuación es $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$. Las raíces $3 + \sqrt{2}$ y $3 - \sqrt{2}$ tienen suma 6 y producto $9 - 2 = 7$, y son las raíces de $x^2 - 6x + 7 = 0$.

PROPIEDAD • CASO GENERAL (NS)

Si el polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$, tiene sus n raíces $r_1, \dots, r_n$ (contando cada una tantas veces como su multiplicidad), entonces

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad r_1 r_2 \dots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Es la misma idea: al desarrollar $a_n(x - r_1) \dots (x - r_n)$, el coeficiente de x^{n-1} es $-a_n(r_1 + \dots + r_n)$ y el término independiente es $a_n(-1)^n r_1 \dots r_n$. Comprobación con $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, cuyas raíces son $-1, 2$ y 3 : la suma es $4 = -\frac{-4}{1}$ y el producto es $-6 = (-1)^3 \cdot \frac{6}{1}$.

Ecuaciones reducibles a cuadráticas

Algunas ecuaciones de grado mayor tienen forma cuadrática si se hace un **cambio de variable**. La más común es la bicuadrada, $ax^4 + bx^2 + c = 0$: con $t = x^2$ se convierte en $at^2 + bt + c = 0$.

Por ejemplo, $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ da $t^2 - 13t + 36 = 0$, es decir, $(t - 4)(t - 9) = 0$ y $t = 4$ o $t = 9$. Después hay que **deshacer el cambio**: $x^2 = 4$ da $x = \pm 2$ y $x^2 = 9$ da $x = \pm 3$. Las cuatro raíces son $-3, -2, 2, 3$.

Hay que tener en cuenta que $t = x^2$ no puede ser negativo: si la ecuación en t da una solución $t < 0$, esa solución no produce ninguna x real.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Tres tipos de ecuación cuadrática

Resuelve, dando las soluciones exactas, cada una de las ecuaciones:

- a) $3x^2 - 12 = 0$
- b) $5x^2 + 15x = 0$
- c) $2x^2 + 5x - 12 = 0$

- a) **Falta el término en x .** Se despeja: $3x^2 = 12$, luego $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$.
- b) **Falta el término independiente.** Se saca factor común: $5x(x + 3) = 0$. Un producto es cero cuando lo es algún factor: $x = 0$ o $x + 3 = 0$. Las raíces son $x = 0$ y $x = -3$. Un error habitual es dividir entre x y perder la raíz $x = 0$.
- c) **Ecuación completa.** Aplicamos la fórmula con $a = 2$, $b = 5$, $c = -12$:

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-12) = 25 + 96 = 121 = 11^2$$

$$x = \frac{-5 \pm 11}{4} \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-16}{4} = -4$$

Como Δ es un cuadrado perfecto, la ecuación se podía factorizar: $2x^2 + 5x - 12 = (2x - 3)(x + 4)$, que da las mismas raíces.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Una ecuación con parámetro y una trampa

Se considera la ecuación $kx^2 + 4x + (k - 3) = 0$, donde $k \in \mathbb{R}$.

- a) Halla los valores de k para los que la ecuación tiene una raíz doble.
- b) Halla todos los **valores enteros** de k para los que la ecuación tiene dos raíces reales distintas.

1. **Discriminante.** Con $a = k$, $b = 4$ y $c = k - 3$:

$$\Delta = 16 - 4k(k - 3) = -4k^2 + 12k + 16 = -4(k^2 - 3k - 4) = -4(k - 4)(k + 1)$$

- a) **Raíz doble** significa $\Delta = 0$: $-4(k - 4)(k + 1) = 0$, luego $k = 4$ o $k = -1$. Ambos valores tienen $k \neq 0$, así que la ecuación sigue siendo cuadrática. Con $k = 4$ la ecuación es $4x^2 + 4x + 1 = 0$, es decir, $(2x + 1)^2 = 0$, con raíz doble $x = -\frac{1}{2}$.
- b) **Dos raíces distintas** significa $\Delta > 0$, es decir, $-4(k - 4)(k + 1) > 0 \iff (k - 4)(k + 1) < 0$. El producto de dos factores es negativo si están entre las raíces: $-1 < k < 4$.
2. **La trampa.** Si $k = 0$ la ecuación es $4x - 3 = 0$, de primer grado, con una sola raíz $x = \frac{3}{4}$. No es una ecuación cuadrática y **no** tiene dos raíces, aunque 0 esté en el intervalo $-1 < k < 4$. Hay que excluirlo.
3. Los enteros del intervalo $] -1, 4[$ son 0, 1, 2, 3. Quitando $k = 0$, los valores son $k = 1, 2, 3$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Condición sobre las raíces sin resolver la ecuación

Sean α y β las raíces de la ecuación $x^2 - kx + (k + 3) = 0$, donde $k \in \mathbb{R}$.

- a) Escribe $\alpha + \beta$ y $\alpha\beta$ en función de k .
- b) Sabiendo que $\alpha^2 + \beta^2 = 2$, halla los posibles valores de k .
- c) Determina cuáles de los valores de k del apartado b) corresponden realmente a una ecuación con raíces reales.

- a) Con $a = 1$, $b = -k$ y $c = k + 3$, la suma y el producto de las raíces son

$$\alpha + \beta = k \quad \alpha\beta = k + 3$$

- b) Escribimos $\alpha^2 + \beta^2$ solo con la suma y el producto:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = k^2 - 2(k + 3) = k^2 - 2k - 6$$

La condición es $k^2 - 2k - 6 = 2$, es decir, $k^2 - 2k - 8 = 0$, que se factoriza como $(k - 4)(k + 2) = 0$. Los candidatos son $k = 4$ y $k = -2$.

- c) **Comprobación con el discriminante.** Para que las raíces sean reales hace falta $\Delta \geq 0$:

$$\Delta = k^2 - 4(k + 3) = k^2 - 4k - 12 = (k - 6)(k + 2)$$

- Para $k = 4$: $\Delta = (-2)(6) = -12 < 0$. La ecuación $x^2 - 4x + 7 = 0$ **no tiene raíces reales**, así que no hay números reales α , β con esa suma y ese producto. El valor $k = 4$ se descarta.
- Para $k = -2$: $\Delta = (-8)(0) = 0$. La ecuación es $x^2 + 2x + 1 = 0 = (x + 1)^2$, con raíz doble $\alpha = \beta = -1$, y se cumple $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + 1 = 2$.

El único valor válido es $k = -2$.

En el examen: las fórmulas de la suma y del producto se cumplen siempre, pero hablan de las raíces, y estas solo existen en $\mathbb{R}$ si $\Delta \geq 0$. Si el enunciado dice que las raíces son reales, un apartado de comprobación como c) es la parte que se puntúa aparte; dejar $k = 4$ como solución quita el último punto.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • RESOLVER SIN DEJAR LA ECUACIÓN IGUALADA A CERO

Con $x^2 - 5x = 6$ no se puede decir « $x = 6$ o $x - 5 = 6$ », porque la propiedad del producto nulo solo vale cuando el producto es **cero**. Hay que escribir primero $x^2 - 5x - 6 = 0$ y factorizar, $(x - 6)(x + 1) = 0$. Lo mismo ocurre con la fórmula: a , b y c se leen después de pasar todo a un miembro, y c es -6 , no 6.

ERROR TÍPICO · ERRORES DE SIGNO EN EL DISCRIMINANTE Y EN LA FÓRMULA

Con b negativo, b^2 es positivo y $-b$ también: en $x^2 - 3x - 4 = 0$, $-b = 3$, no -3 . Y en $\Delta = b^2 - 4ac$, si c es negativo, $-4ac$ **suma**: para $2x^2 + x - 3$, $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25$. Otro fallo habitual es escribir el denominador como 2 en vez de $2a$ o dividir solo uno de los dos términos del numerador entre $2a$.

ERROR TÍPICO · OLVIDAR QUE EL COEFICIENTE DE x^2 PUEDE SER CERO, O CAMBIAR LA RAÍZ DOBLE POR «NO HAY SOLUCIÓN»

Si a depende de un parámetro, el valor que lo anula no da una ecuación cuadrática y hay que tratarlo aparte; no se puede decir que «tiene dos raíces» sin comprobarlo. Y $\Delta = 0$ no es «sin solución»: hay exactamente **una** raíz real (doble), $x = -\frac{b}{2a}$. Por último, en las ecuaciones bicuadradas, no olvides deshacer el cambio $t = x^2$: dar $t = 4$ y $t = 9$ como raíces de la ecuación original es un error que cuesta la respuesta final.

Resumen

- Ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$; se lleva siempre a esa forma, con 0 en un miembro, antes de resolverla.
- Incompletas: $ax^2 + c = 0$ se despeja; $ax^2 + bx = 0$ se resuelve con factor común (no se divide entre x , se perdería $x = 0$).
- Métodos: factorizar (producto nulo), completar el cuadrado y fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que sirve siempre.
- Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$: $\Delta > 0$ dos raíces reales distintas, $\Delta = 0$ una raíz doble, $\Delta < 0$ ninguna raíz real.
- Con parámetro: traduce la condición a una igualdad o desigualdad sobre Δ y excluye los valores que anulan a .
- Suma y producto: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$; permiten calcular expresiones como $\alpha^2 + \beta^2$ sin resolver, y construir $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$. En NS se generalizan a grado n .
- Las ecuaciones bicuadradas se resuelven con $t = x^2$, descartando $t < 0$ y deshaciendo el cambio.

APARTADO 4

Desigualdades y valor absoluto

IDEA CLAVE

Una desigualdad compara dos expresiones y su solución casi siempre es un intervalo o una unión de intervalos. En este apartado aprendes qué operaciones conservan el sentido de la desigualdad, cómo resolver inecuaciones y cómo el valor absoluto, que mide la distancia al cero, convierte una ecuación en dos casos.

Reglas para operar con desigualdades

Resolver una inecuación es transformarla, paso a paso, en otra más sencilla con las mismas soluciones. Solo valen las operaciones que no cambian el conjunto de soluciones, y para eso hay que saber qué le pasa al sentido del signo.

PROPIEDAD · OPERACIONES CON DESIGUALDADES

Sean a , b y c números reales.

1. **Transitiva:** si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
2. **Sumar o restar** el mismo número a los dos lados no cambia el sentido: si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
3. **Multiplicar o dividir por un número positivo** no cambia el sentido: si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
4. **Multiplicar o dividir por un número negativo** invierte el sentido: si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

La regla 4 se entiende en la recta numérica: multiplicar por -1 es una simetría respecto del cero, que cambia el orden. Como $2 < 5$, al reflejar queda $-2 > -5$. Lo mismo ocurre con $\geq$, $<$ y $\leq$.

Estas reglas permiten resolver una inecuación lineal como una ecuación, con una única precaución. Para $7 - 2x < 15$: se resta 7 para obtener $-2x < 8$ y se divide entre -2 , **invirtiendo** el signo, lo que da $x > -4$. La solución es el intervalo $] -4, +\infty[$.

Notación de intervalos

En este curso se usan corchetes hacia fuera para los extremos que **no** pertenecen al intervalo: $]a, b[$ es $a < x < b$, y $[a, b]$ es $a \leq x \leq b$. También $]a, b]$ es $a < x \leq b$. El símbolo ∞ siempre lleva corchete abierto, porque no es un número. La unión $A \cup B$ reúne las soluciones de los dos conjuntos.

Demostrar una desigualdad con un cuadrado

Un cuadrado nunca es negativo: $t^2 \geq 0$ para todo número real t . Muchas desigualdades se demuestran partiendo de aquí. Por ejemplo, para cualesquiera números reales a y b :

$$(a - b)^2 \geq 0 \iff a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \iff a^2 + b^2 \geq 2ab$$

La igualdad se da solo si $a = b$. Si además a y b son positivos, dividiendo entre $ab > 0$ resulta

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

que dice, por ejemplo, que una fracción positiva más su inversa nunca suma menos que 2. La técnica es siempre la misma: pasar todo a un lado, reconocer un cuadrado y concluir. Cada paso es una equivalencia (una flecha doble) o una implicación que se pueda leer hacia atrás, y por eso la cadena demuestra lo que se pedía.

Inecuaciones no lineales: la tabla de signos

Para resolver $x^2 - x - 6 \geq 0$ no se puede «despejar» x . Se procede así:

MÉTODO · INECUACIÓN DE GRADO MAYOR QUE 1 O CON FRACCIONES

1. Pasa todo a un lado para tener la comparación con 0.
2. Factoriza el polinomio (o, si es una fracción, el numerador y el denominador) y halla las **raíces**; en una fracción, los valores que anulan el denominador son puntos prohibidos.
3. Marca esos valores en la recta: dividen la recta en tramos en los que cada factor tiene un signo constante.
4. Estudia el signo de cada factor en cada tramo y de ahí el del producto o cociente.
5. Elige los tramos con el signo pedido. Los extremos entran si la desigualdad es $\geq$ o $\leq$, en una fracción, **nunca** entran los que anulan el denominador.

Para $x^2 - x - 6 \geq 0$: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, con raíces -2 y 3 . A la izquierda de -2 los dos factores son negativos y su producto es positivo; entre -2 y 3 el factor $x + 2$ es positivo y $x - 3$ negativo, luego el producto es negativo; a la derecha de 3 ambos son positivos. Como se pide ≥ 0 y los extremos sirven, la solución es $]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[$.

NOTA · LA CALCULADORA EN LA PRUEBA 2

En la Prueba 2 puedes dibujar la gráfica de la expresión con la calculadora de pantalla gráfica y leer en qué intervalos queda por encima o por debajo del eje x , usando la función de intersección para los extremos. Es una buena forma de **comprobar** tu respuesta, pero si el enunciado dice «halle» sin permitir calculadora (Prueba 1), el procedimiento algebraico es obligatorio.

Una trampa frecuente en las fracciones: $\frac{x+1}{x-3} \geq 2$ **no** se resuelve multiplicando por $x - 3$, porque no se sabe si ese número es positivo o negativo y habría que separar casos. Se resta 2 y se estudia el signo de una única fracción.

Valor absoluto

DEFINICIÓN · VALOR ABSOLUTO

El **valor absoluto** de un número real x es

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$ es la **distancia** de x al 0 en la recta numérica, y $|x - y|$ es la distancia entre x y y .

El resultado nunca es negativo: $|-7| = 7$ y $|7| = 7$. Observa que $-x$ es positivo cuando x es negativo, y por eso la definición es coherente. Una forma equivalente es $|x| = \sqrt{x^2}$, porque la raíz cuadrada es la positiva.

Cuando dentro hay una expresión, hay que averiguar su signo antes de quitar las barras. Por ejemplo, $|1 - \sqrt{5}|$: como $\sqrt{5} > 1$, el interior es negativo y vale $-(1 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1$. Con una variable, la definición se aplica al interior:

$$|2x - 8| = \begin{cases} 2x - 8 & \text{si } x \geq 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

PROPIEDAD · PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Para cualesquiera números reales x e y :

1. $|x| \geq 0$, y $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$.
3. $|xy| = |x||y|$.
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, con $y \neq 0$.
5. $|x^n| = |x|^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.
6. **Desigualdad triangular:** $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Las cinco primeras se deducen de $|x| = \sqrt{x^2}$; por ejemplo, $|xy| = \sqrt{x^2 y^2} = \sqrt{x^2} \sqrt{y^2} = |x||y|$.

La desigualdad triangular tiene una intuición clara: ir directamente de un punto a otro nunca es más largo que dar un rodeo. Si $x = 5$ e $y = -3$, entonces $|x + y| = 2$ pero $|x| + |y| = 8$: al sumar números de signos opuestos hay «cancelación» y la suma queda más cerca del cero. La igualdad solo se da cuando x e y tienen el mismo signo (o alguno es 0). Para demostrarla basta comparar cuadrados: $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, porque $|xy| \geq xy$, y después se toman raíces cuadradas, que conservan el orden entre números no negativos.

Ecuaciones con valor absoluto

PROPIEDAD · ECUACIONES BÁSICAS CON VALOR ABSOLUTO

- Si $c > 0$: $|x| = c \iff x = c \text{ o } x = -c$. Si $c < 0$, no hay solución.
- $|x| = |y| \iff x = y \text{ o } x = -y$.

La primera dice que hay dos números a distancia c del cero. La segunda, que dos números tienen el mismo valor absoluto cuando son iguales u opuestos. Para resolver $|2x - 1| = |x + 4|$ se plantean los dos casos $2x - 1 = x + 4$, que da $x = 5$, y $2x - 1 = -(x + 4)$, que da $x = -1$.

Cuando la ecuación no tiene esa forma sencilla, por ejemplo $|x - 3| = 2x$, hay que separar según el signo del interior y, al final, **comprobar** cada resultado en la ecuación original: una solución que no cumple la condición del caso, o que haga negativo el lado derecho, se descarta.

Inecuaciones con valor absoluto

PROPIEDAD · INECUACIONES BÁSICAS CON VALOR ABSOLUTO

Sea $c > 0$.

- $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$ (los números a distancia del cero menor o igual que c).
- $|x| \geq c \iff x \leq -c \text{ o } x \geq c$ (los que están a distancia mayor o igual que c).
- $|x| < |y| \iff x^2 < y^2$.

Lo mismo vale con $<$ y $>$, sin los extremos.

Lo importante es la lectura como distancia. $|x - 4| < 3$ significa que x está a menos de 3 unidades de 4, es decir, $1 < x < 7$. Por eso «menor que» da **un** intervalo (una condición «y») y «mayor que» da **dos** semirrectas (una condición «o»).

Para resolver una inecuación con una expresión dentro, se sustituye x por esa expresión: $|2x + 1| \leq 5$ equivale a $-5 \leq 2x + 1 \leq 5$, es decir, $-6 \leq 2x \leq 4$ y $-3 \leq x \leq 2$. Aquí no se invierte nada porque se divide entre $2 > 0$. Si el valor absoluto aparece comparado con una expresión que depende de x , o hay dos valores absolutos, la salida habitual es la tercera propiedad (elevar al cuadrado) o la partición en casos según el signo de cada interior.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Inecuación lineal y valor absoluto numérico

- a) Resuelva la inecuación $7 - 2x < 15$ y exprese la solución como intervalo.
b) Escriba $|1 - \sqrt{5}| + |\sqrt{5} - 3|$ sin barras de valor absoluto y simplifique.

- a) 1. **Aislar el término con x .** Restamos 7 a los dos lados (no cambia el sentido): $-2x < 8$.
2. **Dividir entre -2 .** Como es un número **negativo**, se invierte el sentido: $x > -4$.
3. **Comprobación.** Con $x = 0$ (que cumple $x > -4$): $7 - 0 = 7 < 15$, correcto. Con $x = -5$ (no cumple): $7 + 10 = 17 < 15$ es falso.

La solución es el intervalo $] -4, +\infty[$.

- b) 1. **Signo de cada interior.** Como $\sqrt{5} \approx 2,24$, se cumple $\sqrt{5} > 1$ y $\sqrt{5} < 3$. Por tanto $1 - \sqrt{5} < 0$ y $\sqrt{5} - 3 < 0$.
2. **Quitar las barras** cambiando el signo en los dos casos (los dos interiores son negativos): $|1 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$ y $|\sqrt{5} - 3| = 3 - \sqrt{5}$.
3. **Sumar:** $(\sqrt{5} - 1) + (3 - \sqrt{5}) = 2$. Las raíces se cancelan.

El resultado es 2.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Ecuación e inecuaciones con valor absoluto

Resuelva, en $\mathbb{R}$:

- a) $|3 - 2x| < 7$
b) $|x + 2| = |2x - 5|$
c) $|4x + 1| \geq 9$

- a) 1. **Inecuación con «menor que»:** equivale a una cadena: $-7 < 3 - 2x < 7$.
2. **Restar 3** a las tres partes: $-10 < -2x < 4$.
3. **Dividir entre -2** invirtiendo los dos signos: $5 > x > -2$, que se escribe $-2 < x < 5$.

La solución es $] -2, 5[$. Comprobación: $x = 0$ da $|3| = 3 < 7$, correcto; $x = 6$ da $|-9| = 9 < 7$, falso.

- b) 1. **Igualdad de valores absolutos:** o los dos interiores son iguales, o son opuestos.
2. **Caso $x + 2 = 2x - 5$:** $7 = x$.
3. **Caso $x + 2 = -(2x - 5)$:** $x + 2 = -2x + 5$, luego $3x = 3$ y $x = 1$.
4. **Comprobación.** Para $x = 7$: $|9| = 9$ y $|9| = 9$. Para $x = 1$: $|3| = 3$ y $|-3| = 3$.

Las soluciones son $x = 1$ y $x = 7$.

- c) 1. **Inecuación con «mayor o igual»:** da dos casos separados por «o»: $4x + 1 \geq 9$ o $4x + 1 \leq -9$.
2. **Primer caso:** $4x \geq 8$, luego $x \geq 2$.
3. **Segundo caso:** $4x \leq -10$, luego $x \leq -\frac{5}{2}$.

La solución es la unión $] -\infty, -\frac{5}{2}] \cup [2, +\infty[$. Los extremos entran porque la desigualdad no es estricta.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Inecuaciones combinadas y desigualdad triangular

- a) Resuelva $|x^2 - 5x| < 6$.
- b) Resuelva $\frac{x+1}{x-3} \geq 2$.
- c) La lectura de un termómetro A cumple $|x - 20| \leq 2$ y la de un termómetro B cumple $|y - 15| \leq 1$ (grados Celsius). Halle el mayor valor posible de $|x + y - 35|$ y compruebe que se puede alcanzar.
- d) Halle los valores del parámetro real k para los que $x^2 + kx + 4 > 0$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$.

- a) 1. **Quitar el valor absoluto:** $|x^2 - 5x| < 6 \iff -6 < x^2 - 5x < 6$. Son dos inecuaciones que deben cumplirse a la vez.
2. **Mitad derecha:** $x^2 - 5x - 6 < 0$, es decir, $(x - 6)(x + 1) < 0$. Las raíces son -1 y 6 ; el producto es negativo entre ellas: $-1 < x < 6$.
3. **Mitad izquierda:** $x^2 - 5x + 6 > 0$, es decir, $(x - 2)(x - 3) > 0$. Las raíces son 2 y 3 ; el producto es positivo fuera de ellas: $x < 2$ o $x > 3$.
4. **Intersección** (las dos a la vez): de $] -1, 6[$ nos quedamos con la parte de $] -\infty, 2[\cup] 3, +\infty[$, es decir, $] -1, 2[\cup] 3, 6[$.

Comprobación: $x = 0$ da $|0| = 0 < 6$, correcto; $x = 2,5$ da $|6,25 - 12,5| = 6,25 < 6$, falso, y $2,5$ no está en la solución.

- b) 1. **Pasar todo a un lado:** $\frac{x+1}{x-3} - 2 \geq 0$.
2. **Una sola fracción:** $\frac{x+1-2(x-3)}{x-3} = \frac{7-x}{x-3} \geq 0$.
3. **Puntos clave:** el numerador se anula en $x = 7$ y el denominador en $x = 3$ (valor prohibido).
4. **Signos:**

Tramo $7 - x$ $x - 3$ **Cociente**

$x < 3$	+	-	-
$3 < x < 7$	+	+	+
$x > 7$	-	+	-

5. **Extremos:** $x = 7$ entra (cociente 0 y la desigualdad es $\geq$); $x = 3$ no entra (denominador 0).

La solución es $]3, 7]$.

- c) 1. **Descomponer.** Se tiene $x + y - 35 = (x - 20) + (y - 15)$.
2. **Desigualdad triangular:** $|x + y - 35| \leq |x - 20| + |y - 15| \leq 2 + 1 = 3$.
3. **Se alcanza.** Con $x = 22$ e $y = 16$ se cumplen las dos condiciones ($|2| \leq 2$ y $|1| \leq 1$) y $|22 + 16 - 35| = 3$. Por tanto 3 no es solo una cota: es el máximo.
- d) 1. **Interpretación.** La parábola $y = x^2 + kx + 4$ tiene las ramas hacia arriba (coeficiente de x^2 positivo), así que queda por encima del eje x cuando **no lo corta**: ninguna raíz real.
2. **Discriminante** (ver ecuación cuadrática): $\Delta = k^2 - 16$. Hay que imponer $\Delta < 0$.
3. $k^2 < 16 \iff |k| < 4 \iff -4 < k < 4$.

Los valores son $k \in] -4, 4[$. Comprobación: con $k = 0$, $x^2 + 4 > 0$ siempre; con $k = 4$, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ vale 0 en $x = -2$, y la desigualdad estricta falla.

En el examen: en a) cada mitad de la cadena suele valer un punto de método y la intersección otro: no basta con resolver una de ellas. En b) la respuesta que multiplica por $x - 3$ sin separar casos pierde casi todo el apartado, y no incluir 7 o incluir 3 en el intervalo se penaliza. En c) la máxima puntuación exige mostrar que el valor se alcanza, no solo acotarlo.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • NO INVERTIR EL SIGNO AL MULTIPLICAR O DIVIDIR POR UN NÚMERO NEGATIVO

Al pasar de $-2x < 8$ a $x < -4$ se pierde la solución completa: es $x > -4$. El mismo fallo ocurre cuando se pasa un término negativo al otro lado multiplicando o dividiendo. Antes de entregar, prueba con un número de tu intervalo en la desigualdad original; es una comprobación de diez segundos que detecta este error.

ERROR TÍPICO • MULTIPLICAR POR UNA EXPRESIÓN DE LA QUE NO SE CONOCE EL SIGNO

En $\frac{x+1}{x-3} \geq 2$ es tentador multiplicar por $x-3$ y obtener $x+1 \geq 2x-6$. Pero si $x < 3$ el factor es negativo y el signo debería invertirse. Resolver así da $x \leq 7$, que incluye valores como $x = 0$, donde $\frac{1}{-3} \geq 2$ es falso. Se debe pasar todo a un lado y estudiar el signo del cociente.

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR «MAYOR QUE» CON «MENOR QUE» EN EL VALOR ABSOLUTO

$|x| > 3$ no equivale a $-3 > x > 3$, que es imposible. Son dos semirrectas, $x < -3$ o $x > 3$. En cambio $|x| < 3$ sí es el intervalo $-3 < x < 3$. Por la misma razón, $|x+y| = |x|+|y|$ no es una identidad: solo se cumple cuando x e y tienen el mismo signo, y en general la igualdad correcta es la desigualdad triangular $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Resumen

- Sumar o restar un número, o multiplicar o dividir por un número **positivo**, conserva el sentido de la desigualdad; multiplicar o dividir por un número **negativo** lo invierte.
- Una desigualdad se demuestra pasando todo a un lado y reconociendo un cuadrado: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ equivale a $(a-b)^2 \geq 0$.
- Inecuaciones de grado mayor que 1 o con fracciones: todo a un lado, raíces, tabla de signos y elegir los tramos; el denominador nunca se anula y no se multiplica por una expresión de signo desconocido.
- $|x|$ es la distancia de x al 0, y $|x-y|$ la distancia entre x e y ; $|x| = x$ si $x \geq 0$ y $-x$ si $x < 0$.
- Propiedades: $|xy| = |x||y|$, $|x/y| = |x|/|y|$, $|x^n| = |x|^n$ y la desigualdad triangular $|x+y| \leq |x|+|y|$.
- Con $c > 0$: $|x| = c \iff x = \pm c$; $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$; $|x| \geq c \iff x \leq -c$ o $x \geq c$; $|x| = |y| \iff x = \pm y$.
- Comprueba siempre las soluciones en la ecuación original y, en las inecuaciones, con un valor de prueba.

APARTADO 5

Demostración matemática e inducción

IDEA CLAVE

Demostrar es justificar con pasos lógicos que una afirmación es cierta para todos los casos, no solo para los que has probado. En la Prueba 1 de NS casi siempre hay una demostración por inducción, y se puntúa por su estructura: caso base, hipótesis, paso inductivo y una frase de conclusión.

Qué es demostrar (y qué no lo es)

Comprobar una fórmula con $n = 1, 2, 3$ no la demuestra: solo hace creíble la conjetura. Una **demostración** es una cadena de deducciones, cada una justificada, que parte de lo que se sabe (definiciones, propiedades ya demostradas) y llega a lo que se quiere probar, valiéndose de que vale para **cualquier** valor permitido de las variables.

Dos herramientas que se usan en todas las demostraciones con enteros:

- Un entero par se escribe $2m$ y uno impar $2m + 1$, con $m \in \mathbb{Z}$.
- Un múltiplo de 3 se escribe $3m$; los demás, $3m + 1$ o $3m + 2$. En general, un múltiplo de d es $d \cdot m$ con $m \in \mathbb{Z}$.

Al terminar, el IB acepta cerrar con una frase («queda demostrado») o con el símbolo ■ (o «c.q.d.»). Lo importante es que la conclusión se **diga**.

Demostración directa

Se parte de la hipótesis y se avanza hasta la conclusión. En las identidades algebraicas se trabaja sobre un lado hasta obtener exactamente el otro (o sobre los dos hasta llegar a la misma expresión); no se «pasan términos» de un lado a otro, porque eso supone dar por cierta la igualdad que se quiere probar.

PROPIEDAD • EL CUADRADO DE UN IMPAR ES IMPAR

Si n es un entero impar, entonces n^2 es impar.

Demostración. Si n es impar, $n = 2m + 1$ con $m \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1,$$

y como $2m^2 + 2m$ es un entero, n^2 tiene la forma $2q + 1$: es impar. ■

Demostración por contraejemplo

Para **refutar** una afirmación general («para todo $n...$ ») basta **un solo caso** en el que falle. Un contraejemplo no sirve para demostrar que algo es cierto, solo para probar que es falso.

La expresión $n^2 + n + 41$ da un número primo para $n = 0, 1, 2, \dots, 39$ (40 valores seguidos), y aun así la afirmación «es primo para todo entero $n \geq 0$ » es falsa: para $n = 40$,

$$40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2,$$

que no es primo. Este caso enseña por qué 40 comprobaciones no demuestran nada.

Demostración por contradicción

Se supone que la afirmación es **falsa**, se deduce una consecuencia absurda (algo que contradice un dato, una hipótesis o un hecho conocido) y se concluye que la suposición era imposible, luego la afirmación es cierta.

TEOREMA · $\sqrt{2}$ ES IRRACIONAL

No existen enteros p y q , con $q \neq 0$, tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Demostración. Supongamos lo contrario: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$ y **sin factores comunes** (fracción irreducible; siempre se puede simplificar hasta lograrlo).

1. Elevando al cuadrado, $2 = \frac{p^2}{q^2}$, es decir, $p^2 = 2q^2$.
2. Luego p^2 es par. Si p fuera impar, p^2 sería impar (propiedad anterior); por tanto p es par: $p = 2r$.
3. Sustituyendo, $4r^2 = 2q^2$, o sea $q^2 = 2r^2$. Entonces q^2 es par y, por el mismo razonamiento, q es par.
4. Así, p y q son pares: tienen el factor común 2. Esto **contradice** que la fracción fuera irreducible.

La suposición era imposible, luego $\sqrt{2}$ no es racional. ■

NOTA · QUÉ HAY QUE ESCRIBIR EN UNA CONTRADICCIÓN

Tres cosas, en este orden: «Supongamos que...» (con la negación **correcta** de lo que se quiere probar), la cadena de deducciones hasta un absurdo concreto (dilo: «esto contradice que...»), y «por tanto la suposición es falsa y...».

Inducción matemática

La idea

La inducción sirve para afirmaciones $P(n)$ que dependen de un entero $n \in \mathbb{Z}^+$ (una fórmula para una suma, una divisibilidad, una desigualdad). Funciona como una fila de fichas de dominó: si la primera cae, y cada ficha que cae derriba la siguiente, caen todas. Aquí «la primera cae» es $P(1)$ y «cada ficha derriba la siguiente» es $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para cualquier k . Con $P(1)$ y la implicación se obtiene $P(2)$, de $P(2)$ sale $P(3)$, y así sin fin.

Las dos partes son imprescindibles: sin el caso base la cadena no arranca (una afirmación puede cumplir $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ y ser falsa siempre), y sin el paso inductivo solo has comprobado un caso.

Estructura que se espera en el examen

MÉTODO · DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN (ESTRUCTURA PUNTUADA)

1. **Caso base.** Comprueba que $P(1)$ es cierta calculando **los dos lados** con $n = 1$ (si el enunciado pide $n \geq n_0$, usa n_0).
2. **Hipótesis de inducción.** Escribe: «Supongamos que $P(k)$ es cierta para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ » y copia **la afirmación completa** con k en lugar de n .
3. **Paso inductivo.** Escribe lo que hay que probar, $P(k+1)$, sustituyendo n por $k+1$ en toda la afirmación. Parte de un lado de $P(k+1)$, **usa la hipótesis** en el punto exacto en que aparezca $P(k)$ y simplifica hasta llegar al otro lado.
4. **Conclusión.** Escribe una frase como: «Como $P(1)$ es cierta y $P(k)$ cierta implica $P(k+1)$ cierta, por inducción matemática $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ ».

La conclusión no es un adorno: en los esquemas de puntuación del IB se reserva un punto para ella. La frase tiene que recoger **a la vez** el caso base y la implicación $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, y ese punto normalmente solo se concede si antes has conseguido los del caso base y el paso inductivo. Con «CQD» a secas, o sin nada, se pierde.

Cómo se hace el paso inductivo según el tipo

Tipo de afirmación	Qué hacer en $P(k+1)$
Suma $\sum_{r=1}^n$	La suma hasta $k+1$ es la suma hasta k más el último término. Sustituye la suma hasta k por la fórmula supuesta y simplifica hasta la fórmula con $k+1$.

Tipo de afirmación

Qué hacer en $P(k+1)$

Divisibilidad (« $f(n)$ es múltiplo de d »)

Escribe la hipótesis como $f(k) = dm$ con $m \in \mathbb{Z}$. Descompón $f(k+1)$ para que aparezca $f(k)$ o un múltiplo suyo, más algo que sea claramente múltiplo de d .

Desigualdad

Parte del lado complicado de $P(k+1)$, aplica la hipótesis para acotarlo y encadena otra desigualdad que sepas probar. Lo que se usa se justifica (por ejemplo, para qué valores de k es cierto).

NOTA • SOLO NS, Y OTROS USOS

La inducción también se aplica a derivadas (n -ésima derivada de una función), a potencias de matrices y a números complejos (fórmula de De Moivre), temas que verás más adelante. Allí la estructura es exactamente la misma.

NOTA • CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes usar la calculadora para comprobar casos de una conjetura y evitar errores. Pero eso solo orienta: en la demostración no cuenta «lo he comprobado hasta $n = 20$ ».

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1

★ Básico

Conjeturar una fórmula y demostrarla

Sea $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

- Calcula S_1 , S_2 y S_3 como fracciones.
- Conjetura una fórmula para S_n en función de n .
- Demuestra por inducción matemática que tu fórmula es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

a) $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8+1}{12} = \frac{3}{4}$.

- b) Los resultados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ siguen el patrón «el numerador es n y el denominador es $n+1$ »:

$$S_n = \frac{n}{n+1}.$$

c) Sea $P(n): \sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1}$.

1. **Caso base.** Para $n=1$: lado izquierdo $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$; lado derecho $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Coinciden: $P(1)$ es cierta.

2. **Hipótesis.** Supongamos que $P(k)$ es cierta para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, es decir,

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

3. **Paso inductivo.** Hay que probar $P(k+1)$: la suma hasta $k+1$ vale $\frac{k+1}{k+2}$. La suma hasta $k+1$ es la suma hasta k más el término nuevo; usamos la hipótesis:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Es justo el lado derecho de $P(k+1)$.

4. **Conclusión.** Como $P(1)$ es cierta y $P(k)$ cierta implica $P(k+1)$ cierta, por inducción matemática $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. ■

Observa que el numerador $k^2 + 2k + 1$ se reconoce como $(k + 1)^2$ porque ya sabíamos adónde queríamos llegar: escribir el objetivo $\frac{k+1}{k+2}$ al lado ayuda a guiar la simplificación.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Demostración

Una divisibilidad por inducción

Demuestra por inducción matemática que $8^n - 3^n$ es divisible por 5 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Sea $P(n)$: « $8^n - 3^n$ es múltiplo de 5».

- Caso base.** Para $n = 1$: $8 - 3 = 5$, que es múltiplo de 5. $P(1)$ es cierta.
- Hipótesis.** Supongamos que $P(k)$ es cierta para algún $k \in \mathbb{Z}^+$: $8^k - 3^k = 5m$ con $m \in \mathbb{Z}$. De aquí, $8^k = 5m + 3^k$.
- Paso inductivo.** Hay que probar que $8^{k+1} - 3^{k+1}$ es múltiplo de 5. Descomponemos $8^{k+1} = 8 \cdot 8^k$ y usamos la hipótesis para sustituir 8^k :

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= 8(5m + 3^k) - 3 \cdot 3^k \\ &= 40m + 8 \cdot 3^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 40m + 5 \cdot 3^k = 5(8m + 3^k). \end{aligned}$$

Como $8m + 3^k$ es un entero, $8^{k+1} - 3^{k+1}$ es múltiplo de 5: $P(k + 1)$ es cierta.

- Conclusión.** Como $P(1)$ es cierta y $P(k)$ cierta implica $P(k + 1)$ cierta, por inducción matemática $8^n - 3^n$ es divisible por 5 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. ■

La idea del paso 3 es siempre la misma: hacer aparecer la hipótesis y que lo que sobre sea un múltiplo evidente de 5 (aquí, $5 \cdot 3^k$).

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Demostración

Una desigualdad que empieza en $n = 5$

Demuestra por inducción matemática que $2^n > n^2$ para todo entero $n \geq 5$.

Antes de demostrar, conviene ver por qué se pide $n \geq 5$: para $n = 2$ hay igualdad ($4 = 4$), para $n = 3$ es falsa ($8 < 9$) y para $n = 4$ vuelve a haber igualdad ($16 = 16$). Es cierta desde $n = 5$ ($32 > 25$), y ese es el caso base. Así que el caso base **no es** $n = 1$.

Sea $P(n)$: $2^n > n^2$.

- Caso base.** Para $n = 5$: $2^5 = 32$ y $5^2 = 25$, y $32 > 25$. $P(5)$ es cierta.
- Hipótesis.** Supongamos que $P(k)$ es cierta para algún entero $k \geq 5$: $2^k > k^2$.
- Paso inductivo.** Hay que probar que $2^{k+1} > (k + 1)^2$. Partimos del lado de las potencias de 2 y usamos la hipótesis:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2.$$

Ahora hay que comparar $2k^2$ con $(k + 1)^2$:

$$2k^2 - (k + 1)^2 = k^2 - 2k - 1 = (k - 1)^2 - 2.$$

Como $k \geq 5$, $(k - 1)^2 \geq 16 > 2$, luego $2k^2 - (k + 1)^2 > 0$, es decir, $2k^2 > (k + 1)^2$. Encadenando,

$$2^{k+1} > 2k^2 > (k + 1)^2.$$

Por tanto $P(k + 1)$ es cierta.

- Conclusión.** Como $P(5)$ es cierta y $P(k)$ cierta implica $P(k + 1)$ cierta para todo $k \geq 5$, por inducción matemática $2^n > n^2$ para todo entero $n \geq 5$. ■

En el examen: en las desigualdades, las dos cosas que más puntos cuestan son escribir un caso base equivocado (usar $n = 1$ cuando no vale) y no justificar la segunda desigualdad de la cadena. Di siempre **para qué valores de k** es cierto lo que usas (aquí, $k \geq 5$), y en la conclusión menciona el valor inicial real.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · LA CONCLUSIÓN MAL ESCRITA

Terminar con «luego es cierto» o con «CQD» sin más, o escribir «por inducción es cierto para $n = k + 1$ », pierde el punto de la conclusión. Una conclusión completa dice **las dos partes**: que el caso base es cierto, que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, y que por tanto $P(n)$ vale para todo n (del valor inicial en adelante). Escríbela de memoria, con tus propias palabras, y no te la saltes aunque falte tiempo: son dos líneas.

ERROR TÍPICO · USAR LO QUE SE QUIERE PROBAR

En el paso inductivo, empezar escribiendo $P(k + 1)$ como si ya fuera cierta y «comprobar» que ambos lados coinciden, o pasar términos de un lado a otro, es dar por demostrado lo que hay que demostrar. Escribe $P(k + 1)$ como **objetivo**, parte de **un solo lado**, aplica la hipótesis $P(k)$ y llega al otro lado. Tampoco vale sustituir $n = k + 1$ en la hipótesis sin más: la hipótesis es $P(k)$, no $P(k + 1)$.

ERROR TÍPICO · CREER QUE COMPROBAR CASOS O DAR UN EJEMPLO DEMUESTRA

Verificar $n = 1, 2, 3, 4$ no demuestra una fórmula, y un único ejemplo tampoco demuestra una afirmación general ($n^2 + n + 41$ es primo 40 veces seguidas y falla en $n = 40$). A la inversa, un solo contraejemplo sí basta para refutar. En el examen, el caso base se calcula con los dos lados y vale solo como primera parte de la demostración.

Resumen

- Demostrar es deducir con pasos justificados para **todos** los valores; comprobar casos no es demostrar, y un único contraejemplo sí refuta una afirmación general.
- Directa: de la hipótesis a la conclusión, trabajando sobre un lado (sin «pasar términos»). Enteros: par $2m$, impar $2m + 1$, múltiplo de d : dm .
- Contradicción: supón lo contrario, llega a un absurdo concreto y concluye (ejemplo clásico: $\sqrt{2}$ irracional).
- Inducción: **caso base**, **hipótesis** $P(k)$, **paso inductivo** $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ usando la hipótesis, y **frase de conclusión** que menciona ambas partes.
- Sumas: suma hasta $k + 1$ = suma hasta k + término nuevo. Divisibilidad: escribe $f(k) = dm$ y haz aparecer un múltiplo de d . Desigualdades: acota con la hipótesis y justifica para qué k vale cada paso; el caso base puede no ser $n = 1$.
- En el examen la estructura da la puntuación: no omitas la hipótesis ni la conclusión.

APARTADO 6

Teorema del binomio

IDEA CLAVE

El teorema del binomio da el desarrollo de $(a + b)^n$ sin multiplicar n paréntesis. En este apartado aprendes a calcular los coeficientes, a escribir el término general y a localizar un término concreto (el de x^k o el término independiente), que es lo que se pide en el examen del IB. En NS, además, se extiende a exponentes negativos o fraccionarios.

Factorial

DEFINICIÓN · FACTORIAL

Para un entero $n \geq 1$, el **factorial** de n es el producto de todos los enteros positivos hasta n :

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$$

Por convenio, $0! = 1$.

Por ejemplo, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Los factoriales crecen muy deprisa, así que casi nunca se calculan enteros: se simplifican. Como $n! = n \cdot (n - 1)!$, un cociente se reduce cancelando el factor común:

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$$

El convenio $0! = 1$ no es un capricho: hace que las fórmulas de más abajo sigan funcionando en los casos extremos.

Números combinatorios

DEFINICIÓN · NÚMERO COMBINATORIO (COEFICIENTE BINOMIAL)

Para enteros $n \geq r \geq 0$, el **número combinatorio** « n sobre r » es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n - r)!}$$

También se escribe ${}^nC_r$. Cuenta de cuántas formas se pueden elegir r elementos de un grupo de n , sin importar el orden.

Ejemplo: de un grupo de 8 estudiantes se eligen 3 para una comisión. El número de comisiones posibles es

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

Observa el atajo: el numerador es el producto de r factores que bajan desde n , y el denominador es $r!$. Es decir,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1)}{r!}$$

Esta forma es la que se generaliza al final del apartado. En la Prueba 1 se calcula a mano con ese atajo; en la Prueba 2 puedes obtener cualquier número combinatorio directamente con la calculadora de pantalla gráfica (CPG).

PROPIEDAD • PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

Para enteros $0 \leq r \leq n$:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. Simetría: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
3. Fórmula de Pascal: $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ (para $r < n$).

La intuición de cada una, con el grupo de n personas:

- Hay una sola forma de elegir a nadie ($r = 0$) y una sola de elegir a todos ($r = n$).
- Elegir a quienes **entran** en la comisión equivale a elegir a quienes **se quedan fuera**: por eso $\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$. Sirve para ahorrar cuentas: $\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = 66$.
- Para elegir $r + 1$ personas de un grupo de $n + 1$, fijas a una persona concreta: o **no** la eliges (te quedan $r + 1$ por elegir entre las otras n) o **sí** la eliges (te quedan r por elegir entre las otras n). De ahí la suma. Comprobación numérica: $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35 = \binom{7}{3}$.

Triángulo de Pascal

La fórmula de Pascal permite construir los números combinatorios sin calcular factoriales: cada número es la suma de los dos que tiene encima. La fila n (empezando a contar en $n = 0$) contiene $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$:

				1				
				1		1		
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		

Cada fila es simétrica (propiedad 2) y empieza y acaba en 1 (propiedad 1). Además, la suma de la fila n es 2^n : la fila 5 suma $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$. Para n pequeño (hasta unos 6 u 8), el triángulo es la forma más rápida de obtener los coeficientes.

El teorema del binomio

Desarrolla $(a + b)^3$ multiplicando: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Los coeficientes 1, 3, 3, 1 son la fila 3 del triángulo, es decir, $\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$. No es casualidad.

TEOREMA • TEOREMA DEL BINOMIO

Para todo entero $n \geq 0$,

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n$$

Por qué funciona: al multiplicar n paréntesis $(a + b)(a + b) \dots (a + b)$, de cada paréntesis se escoge a o b . Para obtener $a^{n-r} b^r$ hay que escoger b en exactamente r de los n paréntesis, y hay $\binom{n}{r}$ formas de decidir en cuáles. Ese número es el coeficiente.

Qué hay que ver en el desarrollo:

- Tiene $n + 1$ términos.
- Las potencias de a bajan de n a 0 y las de b suben de 0 a n ; en cada término suman n .
- Si b es negativo, los signos se alternan: $(a - b)^n$ se obtiene poniendo $b \rightarrow (-b)$.
- Como el IB trata esta fórmula como conocida en el curso (aparece en el cuadernillo de fórmulas), lo que se evalúa es saber **usarla**: sustituir bien a y b y simplificar.

MÉTODO · DESARROLLAR $(a + b)^n$

1. Identifica a , b y n . Pon entre paréntesis cada uno, **con su signo y su coeficiente** (por ejemplo, $b = -3$).
2. Escribe los coeficientes $\binom{n}{r}$ para $r = 0, \dots, n$ (con el triángulo de Pascal o con la fórmula).
3. Escribe cada término $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ sin simplificar todavía.
4. Simplifica: potencias de números, de x y signos.
5. Comprueba el resultado sustituyendo un valor sencillo (por ejemplo, $x = 1$) en la expresión original y en el desarrollo.

Término general y búsqueda de un término

En el desarrollo de $(a + b)^n$, el término que contiene b^r ocupa el lugar $r + 1$ (porque r empieza en 0). Se llama **término general**:

PROPIEDAD · TÉRMINO GENERAL

En el desarrollo de $(a + b)^n$, el término de índice r (el que lleva b^r) es

$$T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \quad r = 0, 1, \dots, n$$

Casi todas las preguntas del IB sobre el binomio se resuelven con el término general, no desarrollando todo. Lo que hay que hacer es escribir el término general, simplificar sus potencias de x y averiguar qué valor de r da el exponente buscado.

MÉTODO · HALLAR EL TÉRMINO EN x^k (O EL TÉRMINO INDEPENDIENTE)

1. Escribe el término general $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$ con las expresiones completas de a y de b .
2. Agrupa las potencias de x y obtén el **exponente de x en función de r** .
3. Iguala ese exponente a k y resuelve para r . Para el **término independiente**, $k = 0$.
4. Si r no es un entero entre 0 y n , **no existe** ese término (su coeficiente es 0).
5. Sustituye r en el término general y calcula el coeficiente numérico, incluidos signos y potencias de los números.

Un caso corto: el término en x^2 de $(1 + 3x)^5$. Aquí $a = 1$, $b = 3x$, y $T_{r+1} = \binom{5}{r} (3x)^r$ lleva x^r , así que $r = 2$ y el término es $\binom{5}{2} \cdot 3^2 x^2 = 10 \cdot 9 x^2 = 90x^2$.

Si el desarrollo está multiplicado por otra expresión, como $(x + 2)(1 + 3x)^5$, se buscan **por separado** los términos de $(1 + 3x)^5$ que, al multiplicarse por x o por 2, den la potencia pedida, y se suman. Para el x^2 : $x \cdot (15x) + 2 \cdot (90x^2) = 15x^2 + 180x^2 = 195x^2$, usando que el término en x de $(1 + 3x)^5$ es $\binom{5}{1} \cdot 3x = 15x$.

NOTA · DESARROLLOS CON UNA INCÓGNITA EN EL COEFICIENTE

Muchos problemas dan un dato del desarrollo («el coeficiente de x^3 es 540») y piden un parámetro. El procedimiento es el mismo: obtienes el coeficiente en función del parámetro con el término general y lo igualas al dato. En la Prueba 2, si la ecuación resultante no se resuelve a mano con comodidad, puedes resolverla con la CPG.

Generalización: exponentes negativos y fraccionarios (solo NS)

Hasta ahora n era un entero no negativo y el desarrollo era finito. En NS el teorema se extiende a cualquier exponente racional n (negativo o fraccionario), pero entonces el desarrollo es una **serie infinita** y solo es válido para ciertos valores de x .

TEOREMA • TEOREMA DEL BINOMIO GENERALIZADO (NS)

Si $n \in \mathbb{Q}$ y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots$$

Fíjate en que el coeficiente de x^r es el atajo $\frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}$ que vimos para $\binom{n}{r}$, ahora con n cualquiera. Si n es un entero positivo, uno de los factores $n-j$ se anula en algún momento y la serie **se corta**: se recupera el teorema de siempre. Si n es negativo o fraccionario, nunca se anula y los términos continúan sin fin.

Dos casos conocidos:

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

El primero es la serie geométrica de razón $-x$, que solo converge si $|x| < 1$: por eso esa condición no se puede omitir. Con $n = \frac{1}{2}$ se obtiene $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots$.

Ten en cuenta que el desarrollo tiene la forma $(1+x)^n$. Si el binomio no empieza en 1, hay que **sacar factor común** el primer término:

$$(a+bx)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}x\right)^n$$

y aplicar la serie con $\frac{b}{a}x$ en lugar de x . La condición de validez pasa entonces a ser $|\frac{b}{a}x| < 1$, es decir, $|x| < |\frac{a}{b}|$.

MÉTODO • DESARROLLAR $(a+bx)^n$ CON n NEGATIVO O FRACCIONARIO

1. Saca factor común a : $(a+bx)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}x\right)^n$. Calcula a^n (con n racional puede ser una raíz o un inverso).
2. Aplica el teorema generalizado con $\frac{b}{a}x$ en el lugar de x , hasta el término que pidan. Pon paréntesis en $\frac{b}{a}x$ antes de elevarlo.
3. Multiplica todo por a^n y simplifica cada coeficiente.
4. Escribe la condición de validez: $|\frac{b}{a}x| < 1$.

NOTA • QUÉ SE PIDE EN EL EXAMEN DEL IB

- Calcular $\binom{n}{r}$ o desarrollar $(a+bx)^n$ con n entero positivo (a mano en la Prueba 1; en la Prueba 2, los coeficientes con la CPG).
- Hallar un término concreto, el término independiente o un parámetro a partir de un coeficiente dado.
- Solo NS: los primeros términos de $(a+bx)^n$ con n negativo o fraccionario, el intervalo de x en el que vale y su uso para aproximar un valor. El resultado aproximado debe dejarse con fracciones o con tres cifras significativas, salvo que el enunciado diga otra cosa.
- Como siempre, escribe el término general antes de sustituir: aunque te equivoques en la cuenta, el método puntúa.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Desarrollar un binomio con coeficiente y signo negativo

Desarrolla y simplifica $(2x-3)^4$.

1. **Identificar.** $a = 2x$, $b = -3$, $n = 4$. Los coeficientes son la fila 4 del triángulo de Pascal: 1, 4, 6, 4, 1.
2. **Escribir cada término** (con $b = -3$ entre paréntesis, para no perder los signos):

$$(2x-3)^4 = (2x)^4 + 4(2x)^3(-3) + 6(2x)^2(-3)^2 + 4(2x)(-3)^3 + (-3)^4$$

3. **Simplificar cada término.**

- $(2x)^4 = 16x^4$.
- $4(2x)^3(-3) = 4 \cdot 8x^3 \cdot (-3) = -96x^3$.
- $6(2x)^2(-3)^2 = 6 \cdot 4x^2 \cdot 9 = 216x^2$.
- $4(2x)(-3)^3 = 4 \cdot 2x \cdot (-27) = -216x$.
- $(-3)^4 = 81$.

$$(2x - 3)^4 = 16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$$

4. **Comprobación** con $x = 1$: el original da $(2 - 3)^4 = 1$ y el desarrollo da $16 - 96 + 216 - 216 + 81 = 1$.

Los signos alternan porque b es negativo: se elevan -3 a potencias pares e impares.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Término en x^6 y término independiente

Considera el desarrollo de $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^9$.

- Halla el coeficiente del término en x^6 .
- Halla el término independiente de x .
- ¿Existe algún término en x^5 ? Indica su coeficiente.

1. **Término general.** Con $a = x^2$, $b = -\frac{3}{x}$ y $n = 9$:

$$T_{r+1} = \binom{9}{r} (x^2)^{9-r} \left(-\frac{3}{x}\right)^r = \binom{9}{r} (-3)^r x^{18-2r} x^{-r} = \binom{9}{r} (-3)^r x^{18-3r}$$

2. **Exponente de x :** $18 - 3r$, con $r = 0, 1, \dots, 9$.

- Término en x^6 .** $18 - 3r = 6 \iff r = 4$, que es un entero entre 0 y 9. El coeficiente es

$$\binom{9}{4} (-3)^4 = 126 \cdot 81 = 10206$$

- Término independiente.** $18 - 3r = 0 \iff r = 6$. El término es

$$\binom{9}{6} (-3)^6 = 84 \cdot 729 = 61236$$

- Término en x^5 .** $18 - 3r = 5 \iff r = \frac{13}{3}$, que no es entero. No existe ese término: todos los exponentes son múltiplos de 3 (18, 15, 12, $\dots$, -9). Su coeficiente es 0.

Observa que el exponente de x baja de 3 en 3, no de 1 en 1: por eso hay exponentes que nunca aparecen.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Raíz cúbica: serie infinita, validez y aproximación (NS)

Se considera la función $f(x) = \sqrt[3]{8+x}$.

- Escribe el desarrollo de $f(x)$ en potencias de x hasta el término en x^3 .
- Halla el mayor número M tal que el desarrollo es válido para todo x con $|x| < M$.
- Usa los términos hasta x^2 del desarrollo con $x = 1$ para aproximar $\sqrt[3]{9}$. Da el resultado como fracción.

1. **Sacar factor común.** El binomio no empieza en 1, así que sacamos el 8:

$$\sqrt[3]{8+x} = (8+x)^{1/3} = 8^{1/3} \left(1 + \frac{x}{8}\right)^{1/3} = 2 \left(1 + \frac{x}{8}\right)^{1/3}$$

2. **Aplicar el teorema generalizado** con $n = \frac{1}{3}$ y $\frac{x}{8}$ en el lugar de x . Los coeficientes son:

- x^1 : $n = \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \bullet x^2: \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)}{2!} &= -\frac{1}{9} \\ \bullet x^3: \frac{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)}{3!} &= \frac{10}{27} = \frac{5}{81} \\ \left(1 + \frac{x}{8}\right)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{8} - \frac{1}{9} \left(\frac{x}{8}\right)^2 + \frac{5}{81} \left(\frac{x}{8}\right)^3 + \dots = 1 + \frac{x}{24} - \frac{x^2}{576} + \frac{5x^3}{41472} + \dots \end{aligned}$$

3. Multiplicar por 2:

$$f(x) = 2 + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{288} + \frac{5x^3}{20736} + \dots$$

b) El teorema exige $\left|\frac{x}{8}\right| < 1$, es decir, $|x| < 8$. El mayor valor es $M = 8$.

c) Con $x = 1$ (que cumple $|x| < 8$) y hasta el término en x^2 :

$$\sqrt[3]{9} \approx 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} = \frac{576 + 24 - 1}{288} = \frac{599}{288} \approx 2,0799$$

El valor real es 2,0801 (con cuatro decimales): el error es de unas dos diezmilésimas. Añadir el término en x^3 lo reduciría aún más.

En el examen: en el apartado a) se puntúa por separado sacar factor común, usar $\frac{x}{8}$ (no x) en la fórmula y simplificar bien los coeficientes; el error más caro es olvidar el factor 2 del principio. Escribe la condición $|x| < 8$ aunque no te la pidan explícitamente.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · CREER QUE $(A+B)^N$ ES $A^N + B^N$

$(a+b)^2$ **no** es $a^2 + b^2$: faltan todos los términos intermedios. Por ejemplo, $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$, no $x^2 + 9$. Con exponentes mayores sucede lo mismo: $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. Los coeficientes $\binom{n}{r}$ de los términos centrales son los que se olvidan.

ERROR TÍPICO · NO ELEVAR EL COEFICIENTE O EL SIGNO DE B

En $(2x-3)^4$ hay que elevar a la potencia **todo** $b = -3$ y todo $a = 2x$: $(2x)^3 = 8x^3$, no $2x^3$, y $(-3)^3 = -27$. Es muy frecuente perder el 2 al elevar $(2x)^r$, o perder el signo menos de b . Pon siempre a y b entre paréntesis en el primer paso.

ERROR TÍPICO · CONFUNDIR EL TÉRMINO DE LUGAR K CON EL TÉRMINO EN x^k

El término general con b^r es el de **lugar** $r+1$, porque r empieza en 0. Y «el término en x^3 » no tiene por qué ser el de lugar 3 ni tener $r=3$: depende de cómo estén a y b . Si $a = 2x$ y $b = -\frac{1}{x}$, el exponente de x en T_{r+1} es $n-2r$, no r . Siempre se escribe el exponente de x en función de r y se iguala al valor pedido.

ERROR TÍPICO · OLVIDAR SACAR FACTOR COMÚN O LA CONDICIÓN DE VALIDEZ (NS)

$(2+x)^{-1}$ **no** es $1-x+x^2-\dots$ con 2 en lugar de 1: hay que escribir $(2+x)^{-1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1}$ y aplicar la serie a $\frac{x}{2}$, lo que da $\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \dots$. La condición de validez es $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, es decir, $|x| < 2$, no $|x| < 1$. Con exponentes negativos o fraccionarios, un desarrollo sin su condición de validez está incompleto.

Resumen

- $n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$ y $0! = 1$; los cocientes de factoriales se simplifican cancelando.
- $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!}$ cuenta las formas de elegir r elementos de n .
- Propiedades: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ y $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$. El triángulo de Pascal las recoge: cada número es la suma de los dos de encima.

- Teorema del binomio: $(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, con $n + 1$ términos; el término general es $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$.
- Para hallar el término en x^k (o el independiente, $k = 0$): exponente de x en función de r , igualar a k , comprobar que r es entero de 0 a n y calcular el coeficiente.
- Solo NS: si $n \in \mathbb{Q}$ y $|x| < 1$, $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$ es una serie infinita. Para $(a + bx)^n$ se saca factor común a^n y la validez es $|\frac{b}{a}x| < 1$.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 1

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Potencias, radicales y notación científica

EJERCICIO 1 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Expresa $(\sqrt{3} - 2)^3$ en la forma $a\sqrt{3} + b$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$(\sqrt{3} - 2)^3 = 15\sqrt{3} - 26$$

Polinomios: teorema del resto y del factor

EJERCICIO 2 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2018

Sea $f(x) = x^4 + px^3 + qx + 5$. El resto cuando $f(x)$ se divide por $(x + 1)$ es 7, y el resto cuando $f(x)$ se divide por $(x - 2)$ es 1. Encuentre el valor de p y el valor de q .

$$p = -3 \quad q = 2$$

EJERCICIO 3 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2014

Cuando el polinomio $3x^3 + ax + b$ se divide por $(x - 2)$, el resto es 2, y cuando se divide por $(x + 1)$, es 5. Encuentre el valor de a y el valor de b .

$$a = -10 \quad b = -2$$

EJERCICIO 4 ★ Básico IB · P1 Noviembre 1997

Calcule los posibles valores de k si $x = k$ es solución de la ecuación $x^3 + kx^2 - x - k = 0$.

$$k = 0 \quad k = 1 \quad k = -1$$

EJERCICIO 5 ★ Básico IB · P1 Noviembre 1998

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + c$.

a) Calcule $P(-2)$.

b) Si el resto cuando se divide $P(x)$ por $(x + 2)$ es -23 , calcule el valor de c .

$$\text{a) } P(-2) = -28 + c \quad \text{b) } c = 5$$

EJERCICIO 6 ★ Básico IB · P1 Mayo 1999

Cuando la función $f(x) = 6x^4 + 11x^3 - 22x^2 + ax + 6$ se divide por $(x + 1)$ el resto es -20 . Calcule el valor de a .

$$a = -1$$

EJERCICIO 7 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

Considere $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + k$. Halle el valor de k si $(x + 2)$ es un divisor de $f(x)$.

$$k = 6$$

EJERCICIO 8 ★ Básico IB · P1 Noviembre 2002

Cuando se divide el polinomio $x^4 + ax + 3$ por $(x - 1)$, el resto es 8. Halle el valor de a .

$$a = 4$$

EJERCICIO 9 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2008

El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ es divisible por $x + 1$ y por $x - 2$. Halle el valor de a y de b , donde $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a = -2 \quad b = -1$$

EJERCICIO 10 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

Cuando se divide $f(x) = x^4 + 3x^3 + px^2 - 2x + q$ por $(x - 2)$ el resto es igual a 15, y $(x + 3)$ es un factor de $f(x)$. Halle los valores de p y q .

$$p = 3 \quad q = -33$$

EJERCICIO 11 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2009

Cuando la función $q(x) = x^3 + kx^2 - 7x + 3$ se divide por $(x + 1)$, el resto es siete veces mayor que el resto que se obtiene cuando la función se divide por $(x + 2)$. Halle el valor de k .

$$k = -2$$

EJERCICIO 12 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2009

Cuando $3x^5 - ax + b$ se divide por $x - 1$, se obtiene el mismo resto que cuando se divide por $x + 1$. Sabiendo que $a, b \in \mathbb{R}$, halle:

- el valor de a .
- el conjunto de valores de b .

$$\text{a) } a = 3 \quad \text{b) } \forall b \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 13 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2012

Cuando se divide $2x^3 + kx^2 + 6x + 32$ y $x^4 - 6x^2 - k^2x + 9$ entre $x + 1$, en ambos casos se obtiene el mismo resto. Halle los posibles valores de k .

$$k = 5 \quad y \quad k = -4$$

EJERCICIO 14 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2013

El polinomio $3x^3 + px^2 + qx - 2$ tiene un divisor que es $(x + 2)$ y cuando se lo divide entre $(x + 1)$, el resto es igual a 4. Halle el valor de p y el valor de q .

$$p = 4 \quad q = -5$$

EJERCICIO 15 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2016

Cuando $x^2 + 4x - b$ se divide por $x - a$ el resto es 2. Sabiendo que $a, b \in \mathbb{R}$, calcule el menor valor posible para b .

El menor valor posible de b es -6 .

EJERCICIO 16 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2004

El polinomio $x^2 - 4x + 3$ es un divisor de $x^3 + (a - 4)x^2 + (3 - 4a)x + 3$. Calcule el valor de la constante a .

$$a = 1$$

EJERCICIO 17 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

Cuando el polinomio $P(x) = 4x^3 + px^2 + qx + 1$ se divide entre $(x - 1)$, el resto es -2 . Cuando $P(x)$ se divide entre $(2x - 1)$ el resto es $\frac{13}{4}$. Halle el valor de p y el valor de q .

$$p = -21 \quad q = 14$$

EJERCICIO 18 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

Sabiendo que $(x - 2)$ y $(x + 2)$ son factores de $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 4$, halle el valor de p y de q .

$$p = -1 \quad q = -4$$

EJERCICIO 19 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2011

La función $f(x) = 4x^3 + 2ax - 7a$, $a \in \mathbb{R}$ tiene por resto -10 cuando se divide por $x - a$.

- Encuentre el valor de a .
- Demuestre que para este valor de a la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución real única.

$$\text{a) } a = -2 \quad \text{b) } x = -1,74$$

EJERCICIO 20 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2014

La ecuación $5x^3 + 48x^2 + 100x + 2 = a$ tiene las raíces r_1, r_2 y r_3 . Sabiendo que $r_1 + r_2 + r_3 + r_1r_2r_3 = 0$, calcule el valor de a .

$$a = 50$$

EJERCICIO 21 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2018

El polinomio $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + 6$ es exactamente divisible entre $(x - 1)$, entre $(x - 2)$ y entre $(x - 3)$. Halle los valores de p, q y r .

$$p = -7 \quad q = 17 \quad r = -17$$

EJERCICIO 22 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

Considere el polinomio $q(x) = 3x^3 - 11x^2 + kx + 8$.

- Sabiendo que $q(x)$ tiene como factor a $(x - 4)$, calcule el valor de k .
- Usando lo anterior o de cualquier otra manera, factorice $q(x)$ como producto de factores lineales.

$$\text{a) } k = -6 \quad \text{b) } q(x) = (x - 4)(x + 1)(3x - 2)$$

EJERCICIO 23 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1999

El polinomio $p(x) = (ax + b)^3$ tiene resto -1 cuando se divide por $(x + 1)$, y tiene resto 27 cuando se divide por $(x - 2)$. Calcule los valores de los números reales a y b .

$$a = \frac{4}{3} \quad b = \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 24 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2001

El polinomio $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ tiene el mismo resto cuando se divide por $(x - 2)$ que cuando se divide por $(x + 1)$. Calcule el valor de a .

$$a = -6$$

EJERCICIO 25 ★★ Medio IB · P1 Mayo 2003

El polinomio $x^3 + ax^2 - 3x + b$ es divisible por $(x - 2)$ y da de resto 6 al dividirlo por $(x + 1)$. Halle el valor de a y de b .

$$a = -2 \quad b = 6$$

EJERCICIO 26 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2004

El polinomio $x^3 - 2x^2 + ax + b$ tiene un factor $(x - 1)$ y un resto 8 cuando se divide por $(x + 1)$. Calcule el valor de a y de b .

$$b = 6 \quad a = -5$$

EJERCICIO 27 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Mayo 2006

El polinomio $P(x) = 2x^3 + ax^2 - 4x + b$ es divisible por $(x - 1)$ y por $(x + 3)$. Halle el valor de a y el valor de b .

$$a = 5 \quad b = -3$$

EJERCICIO 28 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2010

Sabiendo que $Ax^3 + Bx^2 + x + 6$ es exactamente divisible por $(x + 1)(x - 2)$, encuentre el valor de A y el valor de B .

$$B = -4 \quad A = 1$$

EJERCICIO 29 ★★★ Difícil IB · P2 TZ0 Noviembre 2014

Considere $p(x) = 3x^3 + ax + 5a$, $a \in \mathbb{R}$. Cuando el polinomio se divide entre $(x - a)$, el resto es igual a -7 . Muestre que sólo hay un valor que satisfaga la condición anterior e indique dicho valor.

$$a = -1. \text{ Los otros dos valores de } a \text{ no son números reales}$$

EJERCICIO 30 ★★★ Difícil IB · P1 TZ2 Mayo 2021

La ecuación cúbica $x^3 - kx^2 + 3k = 0$, donde $k > 0$, tiene por raíces α , β y $\alpha + \beta$. Sabiendo que $\alpha\beta = -\frac{k^2}{4}$, halle el valor de k .

$$k = +\sqrt{24} = +2\sqrt{6}$$

Fracciones parciales

EJERCICIO 31 ★ Básico IB · P1 Noviembre 1999

Expresa $\frac{3x - 4}{x^2 - x}$ en fracciones simples.

$$\frac{3x - 4}{x^2 - x} = \frac{4}{x} - \frac{1}{x - 1}$$

EJERCICIO 32 ★★ Medio IB · P1 Mayo 1996

Expresa $\frac{12}{x^4 + x^3 - 2x^2}$ como suma de cuatro fracciones simples.

$$\frac{12}{x^4 + x^3 - 2x^2} = -\frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

EJERCICIO 33 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1996

Expresa $\frac{11x^2 - 9x + 19}{(x-1)(3x^2 + 4)}$ como suma de dos fracciones parciales.

$$\frac{11x^2 - 9x + 19}{(x-1)(3x^2 + 4)} = \frac{3}{x-1} + \frac{2x-7}{3x^2 + 4}$$

Ecuación cuadrática y discriminante

EJERCICIO 34 ★ Básico IB · P2 TZ0 Noviembre 2012 Demostración

Demuestre que la ecuación cuadrática $x^2 - (5-k)x - (k+2) = 0$ tiene dos raíces reales distintas para todos los valores reales de k .

El discriminante $\Delta = (k-3)^2 + 24 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 35 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2014

Las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2 + 4x - 1 = 0$ son α y β . Sin resolver la ecuación,

- Halle el valor de $\alpha^2 + \beta^2$.
- Halle una ecuación cuadrática cuyas raíces sean α^2 y β^2 .

a) $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ b) $x^2 - 5x + \frac{1}{4} = 0$

EJERCICIO 36 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2014

La ecuación cuadrática $2x^2 - 8x + 1 = 0$ tiene por raíces α y β .

- Sin resolver la ecuación, halle el valor de:
 - $\alpha + \beta$
 - $\alpha \cdot \beta$ Otra ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$, tiene por raíces $\frac{2}{\alpha}$ y $\frac{2}{\beta}$.
- Halle el valor de p y el valor de q .

a) $\alpha + \beta = 4$ $\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}$ b) $p = -16$ $q = 8$

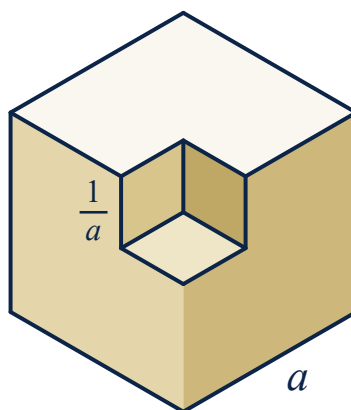
EJERCICIO 37 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2007

La función f viene dada por $f(x) = x^2 - 2x + k(3k + 2)$ donde $k \in \mathbb{R}$. Halle el conjunto de valores de k para los cuales $f(x) = 0$ presenta dos raíces reales distintas.

$$-1 < k < \frac{1}{3}$$

EJERCICIO 38 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2009

El diagrama muestra un sólido de volumen V obtenido al quitar de un cubo de lado $a > 1$ un cubo más pequeño de lado $\frac{1}{a}$.



Si $x = a - \frac{1}{a}$,

- Calcule V en función de x .
- Usando lo anterior, o de cualquier otra forma, demuestre que el único valor de a para el que $V = 4x$ es $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

a) $V = x^3 + 3x$

b) $V = 4x \Rightarrow x^3 + 3x = 4x \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$. Como $a > 1$, $x = a - \frac{1}{a} > 0$, luego $x = 1$: $a - \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (la otra raíz es negativa).

EJERCICIO 39 ★★ Medio IB · P1 Mayo 1996

Sabiendo que α y β son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - 5x - 3 = 0$, escriba los valores de $\alpha\beta$ y $\alpha + \beta$. Usando lo anterior, o de cualquier otra forma, obtenga la ecuación cuadrática cuyas raíces son $\frac{1}{\alpha + 1}$ y $\frac{1}{\beta + 1}$.

$\alpha + \beta = 5$ y $\alpha\beta = -3$ Ecuación cuadrática: $3x^2 - 7x + 1 = 0$

EJERCICIO 40 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2018

La ecuación $x^2 - 5x - 7 = 0$ tiene raíces α y β . La ecuación $x^2 + px + q = 0$ tiene raíces $\alpha + 1$ y $\beta + 1$. Encuentre el valor de p y el valor de q .

$$p = -7 \quad q = -1$$

EJERCICIO 41 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2017

En la ecuación cuadrática $7x^2 - 8x + p = 0$, ($p \in \mathbb{Q}$), una de las raíces es tres veces la otra raíz. Calcule el valor de p .

$$p = \frac{12}{7}$$

EJERCICIO 42 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2003

Considere la ecuación $(1 + 2k)x^2 - 10x + k - 2 = 0$, $k \in \mathbb{R}$. Halle el conjunto de valores de k para los cuales la ecuación tiene raíces reales.

$$-3 \leq k \leq \frac{9}{2}$$

EJERCICIO 43 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

La ecuación cuadrática $x^2 - 2kx + (k - 1) = 0$ tiene por raíces α y β tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 4$. Sin resolver la ecuación, halle los posibles valores del número real k .

$$k = 1 \quad k = -\frac{1}{2}$$

EJERCICIO 44 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1997

Las raíces de la ecuación $x^2 + 5x + k = 0$, donde k es constante, son $x = \alpha$ y $x = \beta$. Calcule en función de k la ecuación cuadrática cuyas raíces son $x = \alpha^2$ y $x = \beta^2$.

$$x^2 + (2k - 25)x + k^2 = 0$$

EJERCICIO 45 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1998

Calcule todos los valores de m para los cuales la ecuación $mx^2 - 2(m + 2)x + m + 2 = 0$ tiene

- a) Dos raíces reales;
- b) Dos raíces reales, una positiva y una negativa.

- a) $m > -2$, $m \neq 0$
- b) $-2 < m < 0$

Nota: la solución del libro da $m > -2$ en a), pero hay que excluir $m = 0$: con $m = 0$ la ecuación queda $-4x + 2 = 0$, de primer grado, con una sola raíz.

EJERCICIO 46 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1999

Las raíces α y β de la ecuación cuadrática $x^2 - kx + (k+1) = 0$ son tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 13$. Calcule los posibles valores del número real k .

$$k = 5 \quad k = -3$$

EJERCICIO 47 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2000

¿Para qué valores de m la recta $y = mx + 5$ es tangente a la parábola $y = 4 - x^2$?

$$m = \pm 2$$

EJERCICIO 48 ★★ Medio IB · P1 Mayo 2001

La ecuación $kx^2 - 3x + (k+2) = 0$ tiene dos raíces reales distintas. Calcule el conjunto de los valores posibles de k .

$$\frac{2 + \sqrt{13}}{-2} < k < \frac{2 - \sqrt{13}}{-2}, \quad k \neq 0$$

Nota: la solución del libro no excluye $k = 0$, que está dentro del intervalo; con $k = 0$ la ecuación queda $-3x + 2 = 0$, de primer grado, con una sola raíz.

EJERCICIO 49 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2021

La ecuación $3px^2 + 2px + 1 = p$ tiene dos raíces reales distintas.

- a) Calcule los posibles valores de p .
- b) Considere el caso cuando $p = 4$. Las raíces de la ecuación se pueden expresar en la forma $x = \frac{a \pm \sqrt{13}}{6}$, donde $a \in \mathbb{Z}$. Encuentre el valor de a .

$$\text{a) } p < 0 \text{ o } p > \frac{3}{4} \quad \text{b) } a = -2$$

EJERCICIO 50 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2022

Considere la ecuación $kx^2 - (k+3)x + 2k+9 = 0$, donde $k \in \mathbb{R}$.

- a) Escriba una expresión para el producto de las raíces, en función de k .
- b) Usando lo anterior, o de otra manera, determine los valores de k para los cuales la ecuación tiene una solución real positiva y una solución real negativa.

$$\text{a) } \text{Producto} = \frac{2k+9}{k} \quad \text{b) } -\frac{9}{2} < k < 0$$

EJERCICIO 51 ★★★ Difícil IB · P2 TZ0 Noviembre 2021

- a) Pruebe la identidad $(p+q)^3 - 3pq(p+q) \equiv p^3 + q^3$. La ecuación $2x^2 - 5x + 1 = 0$ tiene dos raíces reales α y β . Considere la ecuación $x^2 + mx + n = 0$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y que tiene raíces $\frac{1}{\alpha^3}$ y $\frac{1}{\beta^3}$.
- b) Sin resolver $2x^2 - 5x + 1 = 0$, determine los valores de m y n .

b) $n = 8$ $m = -95$

Ecuaciones y sistemas no lineales

EJERCICIO 52 ★★ Medio IB · P1 Mayo 2000

Dado que $x > 0$, calcule la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{8x^3}{y} = 3$$

$$xy - y = x^2 + \frac{9}{4}$$

$x = 1,5$ $y = 9$

Demostración directa, contraejemplo y contradicción

EJERCICIO 53 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2021 Demostración

Considere dos números enteros positivos consecutivos, n y $n+1$. Muestre que la diferencia de sus cuadrados es igual a la suma de esos dos enteros.

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 = n + (n+1)$$

EJERCICIO 54 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2022 Demostración

Considere tres números enteros consecutivos cualesquiera: $n-1$, n y $n+1$.

- a) Pruebe que la suma de estos tres números enteros siempre es divisible entre 3.
- b) Pruebe que la suma de los cuadrados de estos tres números enteros no es nunca divisible entre 3.

a) $n-1 + n + n+1 = 3n = 3$

b) $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = n^2 + 1 - 2n + n^2 + n^2 + 1 + 2n = 3n^2 + 2$ Por contradicción, supongamos que $3n^2 + 2 = 3k$
 $3n^2 + 2 = 3k \Rightarrow 3(k - n^2) = 2 \Rightarrow 2 = 3$, lo cual es falso.

EJERCICIO 55 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2022 Demostración

Pruebe por contradicción que la ecuación $2x^3 + 6x + 1 = 0$ no tiene ninguna raíz entera.

Supongamos que tiene una raíz entera a . a tiene que ser un divisor del término independiente, luego $a = 1$ o $a = -1$
 Sea $P(x) = 2x^3 + 6x + 1$ Si $a = 1$: $P(1)$ debería valer 0, pero $P(1) = 9$, contradicción Si $a = -1$: $P(-1)$ debería valer 0, pero $P(-1) = -7$, contradicción

EJERCICIO 56

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2022

Demostración

Considere los números enteros a y b tales que $a^2 + b^2$ es exactamente divisible por 4. Demuestre por contradicción que a y b no pueden ser impares.

Supongamos que a y b son impares: $a = 2p + 1$, $b = 2r + 1$, $p, r \in \mathbb{Z}$ $a^2 + b^2 = (2p + 1)^2 + (2r + 1)^2 = 4p^2 + 1 + 4p + 4r^2 + 1 + 4r = 4(p^2 + p + r^2 + r) + 2$ $a^2 + b^2 = 4k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$, con lo que $a^2 + b^2$ no sería múltiplo de 4, lo cual contradice la hipótesis

EJERCICIO 57

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2022

Sea a una constante, donde $a > 1$.

- a) Muestre que $a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$. Considere un triángulo rectángulo cuyos lados miden a , $\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)$ y $\left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)$.
- b) Halle una expresión para el área del triángulo en función de a .

a) $a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2 = 0$ b) Área = $\frac{a^3 - a}{4}$

Demostración por inducción

EJERCICIO 58

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2009

Demostración

Demuestre utilizando la inducción matemática que $\sum_{r=1}^n r(r!) = (n+1)! - 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$1 \cdot 1! + \dots + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+1)! \cdot (1 + k + 1) - 1 = (k+2)! - 1$$

EJERCICIO 59

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2011

Demostración

Demuestre, utilizando la inducción matemática que, para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

$$1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \dots + k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + (k+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + (k+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 4 - \left[\frac{2k+4-k-1}{2^k}\right] = 4 - \frac{k+3}{2^k}$$

EJERCICIO 60

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2013

Demostración

Demuestre mediante inducción matemática que $n^3 + 11n$ es divisible entre 3 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$(k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = k^3 + 11k + 3(k^2 + k + 4) = \dot{3} + \dot{3} = \dot{3}$$

EJERCICIO 61 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2014 Demostración

Pruebe, usando la inducción matemática, que $7^{8n+3} + 2$, $n \in \mathbb{N}$, es divisible por 5.

$$7^{8k+11} + 2 = 7^{8k+3} \cdot 7^8 + 2 = (\dot{5} - 2) \cdot 7^8 + 2 = \dot{5} - 11529600 = \dot{5} - \dot{5} = \dot{5}$$

EJERCICIO 62 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2017 Demostración

Use el método de inducción matemática para probar que $4^n + 15n - 1$ es divisible por 9 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4^k \cdot 4 + 15k + 14 = (\dot{9} - 15k + 1) \cdot 4 + 15k + 14 = 4 \cdot \dot{9} - 45k + 18 = 4 \cdot \dot{9} - 9 \cdot 5k + 9 \cdot 2 = \dot{9} - \dot{9} + \dot{9} = \dot{9}$$

EJERCICIO 63 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2005 Demostración

Usando la inducción matemática, pruebe que $\sum_{r=1}^n (r+1)2^{r-1} = n(2^n)$ para todos los enteros positivos.

$$\sum_{r=1}^{k+1} (r+1)2^{r-1} = k(2^k) + (k+2) \cdot 2^k = k \cdot 2^k + k \cdot 2^k + 2^{k+1} = 2k \cdot 2^k + 2^{k+1} = k \cdot 2^{k+1} + 2^{k+1} = (k+1)(2^{k+1})$$

EJERCICIO 64 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2006

- a) Utilice la inducción matemática para demostrar que $(1)(1!) + (2)(2!) + (3)(3!) + \dots + (n)(n!) = (n+1)! - 1$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$
- b) Halle el número mínimo de términos de la serie para el cual la suma sobrepasa 10^9 .

$$(1)(1!) + (2)(2!) + (3)(3!) + \dots + (k)(k!) + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! = (k+1)!(1+k+1) - 1 = (k+2)! - 1$$

b) $n = 12$

EJERCICIO 65 ★★★ Difícil IB · P1 TZ2 Mayo 2010

- a) Considere la siguiente sucesión de ecuaciones:

$$1 \times 2 = \frac{1}{3}(1 \times 2 \times 3)$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 = \frac{1}{3}(2 \times 3 \times 4)$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = \frac{1}{3}(3 \times 4 \times 5)$$

- (i) Formule una conjetura para la n -ésima ecuación de la sucesión.
- (ii) Verifique su conjetura para $n = 4$.
- b) El término n -ésimo de una sucesión de números viene dado por $u_n = 2^n + 3$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Bill conjetura que todos los elementos de la sucesión son números primos. Compruebe que la conjetura de Bill es falsa.
- c) Utilice la inducción matemática para demostrar que $5 \times 7^n + 1$ es divisible por 6 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

a) i) $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n \times (n+1) = \frac{1}{3} \cdot [n \times (n+1) \times (n+2)]$

(ii) Para $n = 4$ los dos miembros valen 40 b) $u_5 = 35$ no primo. Conjetura falsa.

c) $5 \cdot 7^{k+1} + 1 = 5 \cdot 7^k \cdot 7 + 1 = (6 - 1) \cdot 7 + 1 = 6 - 6 = 6$

EJERCICIO 66

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2013

Demostración

Utilice el método de inducción matemática para demostrar que $5^{2n} - 24n - 1$ es divisible por 576 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$5^{2(k+1)} - 24(k+1) - 1 = 25(5^{2k} - 1) - 24k = 25(24k + 576) - 24k = 24 \cdot 24k + 25 \cdot 576 = 576k + 576 + 576 = 576$$

EJERCICIO 67

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2014

Demostración

Utilice la inducción matemática para demostrar que $(2n)! \geq 2^n(n!)^2$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$(2(k+1))! = (2k+2)(2k+1)(2k)! \geq 2(k+1)(2k+1)2^k(k!)^2 = 2^{k+1}(k+1)(2k+1)(k!)^2 \geq 2^{k+1}(k+1)^2(k!)^2 = 2^{k+1}((k+1)!)^2$$

EJERCICIO 68

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2007

Demostración

Pruebe por inducción que $12^n + 2(5^{n-1})$ es múltiplo de 7 para $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$12^k \cdot 12 + 2 \cdot 5^k = [7 - 2(5^{k-1})] \cdot 12 + 2 \cdot 5^k = 7 - 24 \cdot 5^k \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot 5^k = 7 - 5^k \left(\frac{24}{5} - 2 \right) = 7 - 5^k \cdot \frac{14}{5} = 7 - 5^{k-1} \cdot 7 = 7$$

EJERCICIO 69

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2015

Demostración

a) Muestre que $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, donde $n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

b) A partir de lo anterior, muestre que $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Demuestre, utilizando la inducción matemática, que $\sum_{r=1}^n \frac{1}{\sqrt{r}} > \sqrt{n}$, para $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$c) \sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{r}} = \sum_{r=1}^k \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k} + \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{k+1}$$

EJERCICIO 70

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2018

Demostración

Utilice la inducción matemática para demostrar que $(1-a)^n > 1-na$ para $\{n : n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2\}$, donde $0 < a < 1$.

$$(1-a)^{k+1} = (1-a)^k \cdot (1-a) > (1-ka) \cdot (1-a) = 1-a-ka+ka^2 = 1-(k+1)a+ka^2 \underset{ka^2>0}{>} 1-(k+1)a$$

EJERCICIO 71

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2017

Demostración

Demuestre mediante inducción matemática que $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}$ donde $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$.

$$\frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{k-1}{2} + \binom{k}{2}}{\frac{(k+1)!}{3!((k-2)!)}} = \frac{\binom{k}{3} + \binom{k}{2}}{\binom{k+1}{3}} = \frac{\frac{k!}{3!(k-3)!} + \frac{k!}{2!(k-2)!}}{\frac{k!(k+1)}{3!(k-2)!}} = \frac{k!(k-2) + 3k!}{3!(k-2)!} = \frac{k!(k+1)}{3!(k-2)!} =$$

EJERCICIO 72

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

Demostración

Utilice la inducción matemática para demostrar que $n(n^2 + 5)$ es divisible entre 6.

$$(k+1)((k+1)^2 + 5) = (k+1)(k^2 + 2k + 1 + 5) = k(k^2 + 5) + k(2k + 1) + k^2 + 2k + 6 = \overset{\bullet}{6} + 3k^2 + 3k + 6 = \overset{\bullet}{6} + 3k(k+1) + 6 \stackrel{(*)}{=} \overset{\bullet}{6} + \overset{\bullet}{6} + 6 = \overset{\bullet}{6}$$

(*) Si k es par $\rightarrow 3k = \overset{\bullet}{6}$; si k es impar $\rightarrow k+1$ es par $\rightarrow 3(k+1) = \overset{\bullet}{6}$

EJERCICIO 73

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 1999

Demostración

Use la inducción matemática para probar que el número $2^{2n} - 3n - 1$ es divisible por 9, para $n = 1, 2, \dots$

$$2^{2k+2} - 3(k+1) - 1 = 2^{2k} \cdot 4 - 3k - 4 = 4(2^{2k} - 1) - 3k = 4(\overset{\bullet}{9} + 3k) - 3k = \overset{\bullet}{9} + 9k = \overset{\bullet}{9} + \overset{\bullet}{9} = \overset{\bullet}{9}$$

Teorema del binomio

EJERCICIO 74

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

Desarrolle y simplifique $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^4$.

$$\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^4 = x^8 - 8x^5 + 24x^2 - \frac{32}{x} + \frac{16}{x^4}$$

EJERCICIO 75

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

- a) Escriba y simplifique el desarrollo de $(2+x)^4$ en potencias ascendentes de x .
b) A partir de lo anterior, halle el valor exacto de $(2,1)^4$.

a) $(2+x)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$ b) $(2,1)^4 = 19,4481$

EJERCICIO 76

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2013

Desarrolle $(2-3x)^5$ en potencias de x ascendentes, simplificando los coeficientes del desarrollo.

$$(2-3x)^5 = 32 - 240x + 720x^2 - 1080x^3 + 810x^4 - 243x^5$$

EJERCICIO 77

★ Básico

IB · P1 Noviembre 2002

Halle el coeficiente de x^3 en el desarrollo binomial de $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^8$.

Coeficiente de $x^3 = -7$

EJERCICIO 78 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

- a) Halle el desarrollo de $(2 + x)^5$, expresando la respuesta en orden ascendente de potencias de x .
b) Tomando $x = 0,01$, o de cualquier otro modo, halle el valor exacto de $2,01^5$.

a) $(2 + x)^5 = 32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5$ b) $2,01^5 = 32,8080401001$

EJERCICIO 79 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2015

Desarrolle $(3 - x)^4$ en potencias ascendentes de x y simplifique la respuesta.

$(3 - x)^4 = 81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4$

EJERCICIO 80 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2019

Determine los tres primeros términos de $(1 - 2x)^{11}$ en potencias ascendentes de x , dando cada término en su forma más simple.

$1 - 22x + 220x^2$

EJERCICIO 81 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

Calcule el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^7$.

Coeficiente de x^8 : 84

EJERCICIO 82 ★ Básico IB · P1 Mayo 2000

Calcule el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(2 + 3x)^{10}$, dando su respuesta como un número entero.

Coeficiente de x^7 : 2099520

EJERCICIO 83 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

Halle el coeficiente del término en x^3 en el desarrollo de $\left(2 - \frac{3x}{2}\right)^6$.

Coeficiente de $x^3 = -540$

EJERCICIO 84 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2021

En el desarrollo de $(x + k)^7$, donde $k \in \mathbb{R}$, el coeficiente del término en x^5 es 63. Halle los posibles valores de k .

$k = \pm\sqrt{3}$

EJERCICIO 85 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2009

Cuando $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, se desarrolla en potencias ascendentes de x , el coeficiente correspondiente a x^3 es 70.

- a) Halle el valor de n .
b) A partir de lo anterior, halle el coeficiente correspondiente a x^2 .

a) $n = 16$ b) $\binom{16}{2} \cdot \frac{1}{4} = 30$

EJERCICIO 86 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2010

- a) Simplifique la resta de coeficientes binomiales $\binom{n}{3} - \binom{2n}{2}$, donde $n \geq 3$.
b) A partir de lo anterior, resuelva la inecuación $\binom{n}{3} - \binom{2n}{2} > 32n$, donde $n \geq 3$.

a) $\binom{n}{3} - \binom{2n}{2} = \frac{n^3 - 15n^2 + 8n}{6}$ b) Para todo número natural mayor que 23

EJERCICIO 87 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2012

- a) Desarrolle y simplifique $\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$.
b) A partir de lo anterior, determine el término constante del desarrollo $(2x^2 + 1)\left(x - \frac{2}{x}\right)^4$.

a) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^4 = x^4 - 8x^2 + 24 - \frac{32}{x^2} + \frac{16}{x^4}$ b) -40

EJERCICIO 88 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2000

El coeficiente de x en el desarrollo de $\left(x + \frac{1}{ax^2}\right)^7$ es $\frac{7}{3}$. Calcule los posibles valores de a .

$a = \pm 3$

EJERCICIO 89 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2008

Determine los tres primeros términos en el desarrollo de $(1 - 2x)^5(1 + x)^7$.

$1 - 3x - 9x^2$

EJERCICIO 90 ★★ Medio IB · P2 TZ1 mayo 2011

- a) Escriba la expresión cuadrática $2x^2 + x - 3$ como producto de dos factores lineales.
b) Utilizando lo anterior, o de cualquier otra forma, calcule el coeficiente de x en el desarrollo de $(2x^2 + x - 3)^8$.

a) $2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + 3)$ b) Coeficiente de $x = -17.496$

EJERCICIO 91 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

Desarrolle y simplifique $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^4$.

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^4 = \frac{x^8 - 4x^6y^2 + 6x^4y^4 - 4x^2y^6 + y^8}{x^4y^4}$$

EJERCICIO 92 ★★ Medio IB · P1 Mayo 1996

Determine los coeficientes de $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ en el desarrollo $\left(x + \frac{1}{x}\right)^9$.

Coeficiente de $\frac{1}{x} = \binom{9}{5} = 126$ Coeficiente de $\frac{1}{x^2} = 0$

EJERCICIO 93 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2018

Halle el valor del término constante del desarrollo de $x^4 \left(x + \frac{3}{x^2}\right)^5$.

Término constante: 270

EJERCICIO 94 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2018

- a) Exprese el coeficiente binomial $\binom{3n+1}{3n-2}$ como un polinomio en n .
- b) A partir de lo anterior, halle el menor valor de n para el cual $\binom{3n+1}{3n-2} > 10^6$.

a) $\binom{3n+1}{3n-2} = \frac{9}{2}n^3 - \frac{1}{2}n$ b) Menor valor $n = 61$

EJERCICIO 95 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2017

Halle el término independiente de x en el desarrollo del binomio $\left(2x^2 + \frac{1}{2x^3}\right)^{10}$.

Término independiente de $x = 840$

EJERCICIO 96 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2017

El coeficiente de x^2 en el desarrollo de $\left(\frac{1}{x} + 5x\right)^8$ es igual al coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(a + 5x)^7$, $a \in \mathbb{R}$.
Calcule el valor de a .

$a = 2$

EJERCICIO 97 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2016

Halle el término constante en el desarrollo de $\left(4x^2 - \frac{3}{2x}\right)^{12}$.

Término constante: 3247695

EJERCICIO 98 ★★ Medio IB · P1 Mayo 1997

Calcule el término independiente de x en el desarrollo binomial de $\left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{9x}\right)^9$.

Término independiente: $\frac{7}{486}$

EJERCICIO 99 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1997

Calcule el valor entero positivo de n para que los coeficientes de x^2 en el desarrollo de los binomios $(1+x)^{2n}$ y $(1+15x^2)^n$ sean iguales.

$n = 8$

EJERCICIO 100 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1998

Calcule el valor no nulo de k si los coeficientes de x^3 y x^4 en el desarrollo de $(1+kx)^5$ son iguales.

$k = 2$

EJERCICIO 101 ★★ Medio IB · P1 Mayo 1999

Sabiendo que $(1+x)^5(1+ax)^6 \equiv 1+bx+10x^2+\dots+a^6x^{11}$, calcule los valores de $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

$a = -2 \quad b = -7$

EJERCICIO 102 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2005

Encuentre el coeficiente de x en el desarrollo de $\left(3x - \frac{2}{x}\right)^5$.

Coeficiente de x : 1080

EJERCICIO 103 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2021

Considere el desarrollo de $(3+x^2)^{n+1}$, para $n \in \mathbb{Z}^+$. Sabiendo que el coeficiente de x^4 es 20412, calcule el valor de n .

$n = 7$

EJERCICIO 104 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2022

Considere el siguiente desarrollo de la potencia de un binomio: $(x+1)^7 = x^7 + ax^6 + bx^5 + 35x^4 + \dots + 1$, donde $x \neq 0$ y $a, b \in \mathbb{Z}^+$

- a) Muestre que $b = 21$. El tercer término del desarrollo es la media del segundo término y el cuarto término del desarrollo.
- b) Halle los posibles valores de x .

b) $x = 5$ $x = 1$

EJERCICIO 105 ★★★ Difícil IB · P2 TZ2 Mayo 2014

Halle el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo de $(x-1)^3 \left(\frac{1}{x} + 2x\right)^6$.

Coeficiente de $x^{-2} = -96$

EJERCICIO 106 ★★★ Difícil IB · P2 TZ1 Mayo 2012

Halle el término constante en el desarrollo de $\left(x - \frac{2}{x}\right)^4 \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^3$.

Término constante = 288

EJERCICIO 107 ★★★ Difícil IB · P1 TZ0 Noviembre 2021

Considere la expresión $\frac{1}{\sqrt{1+ax}} - \sqrt{1-x}$, $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. El desarrollo binomial de esta expresión, en potencias ascendentes de x hasta el término en x^2 es $4bx + bx^2$ con $b \in \mathbb{Q}$.

- a) Encuentre el valor de a y el valor de b .
- b) Indique la restricción que debe imponerse a x para que este desarrollo sea válido.

a) $a = -\frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{6}$ b) El desarrollo será válido si $|x| < 1$, es decir, $-1 < x < 1$

EJERCICIO 108 ★★★ Difícil IB · P1 TZ1 Mayo 2022

Considere el desarrollo de $\left(8x^3 - \frac{1}{2x}\right)^n$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$. Determine todos los posibles valores de n para los cuales el desarrollo tiene un término constante distinto de cero

Si $k = 3$: $n = 4$ Si $k = 6$: $n = 8$ Si $k = 9$: $n = 12$
 $n = 4r, \quad r \in \mathbb{Z}^+$