

Progresiones aritméticas y geométricas

Progresiones para IB Análisis y Enfoques NS: término general, sumas, suma infinita, interés compuesto y crecimiento, con ejercicios IB resueltos.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-analisis-y-enfoques-ns/progresiones-aritmeticas-y-geometricas.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

Una progresión es una lista de números que sigue una regla fija: sumar siempre lo mismo (**aritmética**) o multiplicar siempre por lo mismo (**geométrica**). Con dos fórmulas para el término general y dos para la suma se resuelve casi todo lo que pregunta el IB sobre sucesiones, incluida la **suma de infinitos términos** y los problemas de **interés compuesto, crecimiento y depreciación**.

Orden recomendado

Estudia primero las **progresiones aritméticas**, después las **geométricas** (con la suma infinita) y termina con las **aplicaciones**, que combinan las fórmulas con los logaritmos del tema 2. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

Progresiones aritméticas: término general, suma y notación sigma

IDEA CLAVE

Una progresión aritmética es una lista de números en la que se pasa de cada uno al siguiente sumando siempre la misma cantidad. Con dos fórmulas, la del término general y la de la suma, puedes obtener cualquier término o sumar cientos de ellos sin escribirlos. Es la base del tema y aparece en la Prueba 1 y en la Prueba 2, sola o dentro de problemas de contexto.

Sucesiones y término general

Una **sucesión** es una lista ordenada de números: un primer término, un segundo, un tercero y así sucesivamente. Se escribe $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, donde el subíndice $n \in \mathbb{Z}^+$ indica la posición.

Hay dos maneras habituales de describir una sucesión:

- **Con el término general**, una fórmula que da u_n directamente a partir de n . Por ejemplo, $u_n = n^2 + 1$ da 2, 5, 10, 17, ... y permite calcular $u_{50} = 2501$ sin pasar por los anteriores.
- **Por recurrencia**, una regla que da cada término a partir del anterior, junto con el primer término. Por ejemplo, $u_1 = 3$ y $u_{n+1} = 2u_n - 1$ dan 3, 5, 9, 17, ... Para llegar a u_{50} hay que calcular los 49 anteriores.

Una definición por recurrencia siempre necesita su punto de partida, porque la regla sola no dice por dónde empezar.

Notación sigma

Para indicar una suma de términos se usa la letra griega Σ :

DEFINICIÓN · NOTACIÓN SIGMA

$$\sum_{r=1}^n u_r = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

La letra r es el **índice**: toma los valores enteros desde el límite inferior (aquí 1) hasta el superior (aquí n), y para cada valor se calcula u_r y se suma. El nombre del índice es irrelevante: $\sum_{r=1}^n u_r = \sum_{k=1}^n u_k$.

Por ejemplo, $\sum_{r=1}^4 r^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$ y $\sum_{r=1}^5 (2r + 1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$. El límite inferior no tiene por qué ser 1: $\sum_{r=3}^6 r = 3 + 4 + 5 + 6 = 18$ tiene cuatro sumandos, que son $6 - 3 + 1$.

Dos reglas se deducen de la propia suma: una constante se puede sacar fuera, $\sum_{r=1}^n c u_r = c \sum_{r=1}^n u_r$, y una suma de dos expresiones se puede separar en dos sumas. Además, sumar una constante n veces da $\sum_{r=1}^n c = nc$.

Progresiones aritméticas

DEFINICIÓN · PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Una sucesión u_n es una **progresión aritmética** si la diferencia entre cada término y el anterior es siempre la misma:

$$u_{n+1} = u_n + d \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+$$

El número d es la **diferencia común**. Puede ser positiva (la sucesión crece), negativa (decrece) o cero (todos los términos son iguales).

Por ejemplo, 7, 4, 1, -2, ... es aritmética con $u_1 = 7$ y $d = -3$; en cambio, 1, 2, 4, 8, ... no lo es, porque $2 - 1 \neq 4 - 2$. Para comprobar que una sucesión es aritmética hay que ver que **todas** las diferencias consecutivas coinciden; con dos no basta.

Término general

Partiendo de u_1 y sumando d cada vez: $u_2 = u_1 + d$, $u_3 = u_1 + 2d$, $u_4 = u_1 + 3d$. Para llegar a u_n se han dado $n - 1$ pasos de tamaño d .

TEOREMA · TÉRMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

Fíjate en que el número de pasos es $n - 1$ y no n : el primer término no ha recibido ninguna suma. Si escribes la fórmula desarrollada, $u_n = dn + (u_1 - d)$, ves que es una expresión de primer grado en n , con la diferencia d como coeficiente de n . Por eso los puntos (n, u_n) están alineados.

Si se conocen dos términos cualesquiera, u_p y u_q , la diferencia entre ellos es $u_q - u_p = (q - p)d$, de modo que $d = \frac{u_q - u_p}{q - p}$.

Suma de los primeros términos

Cuando se suman los términos de una progresión se obtiene una **serie**; en una progresión aritmética, una *serie aritmética*. La suma de los n primeros términos se denota $S_n = \sum_{r=1}^n u_r$.

Existe un truco, atribuido al joven Gauss, para sumar $1 + 2 + \dots + 100$: se escribe la suma dos veces, la segunda al revés, y se suman columna a columna.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Cada columna suma 101 y hay 100 columnas, así que el doble de la suma es $100 \cdot 101$ y la suma vale 5050. La misma idea funciona con cualquier progresión aritmética, porque al avanzar un puesto en la primera fila se suma d y en la segunda se resta d : todas las columnas suman lo mismo, $u_1 + u_n$.

TEOREMA · SUMA DE LOS n PRIMEROS TÉRMINOS

$$S_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n) = \frac{n}{2} (2u_1 + (n - 1)d)$$

Demostración. Escribimos S_n dos veces:

$$\begin{array}{l} S_n = u_1 + (u_1 + d) + \dots + (u_n - d) + u_n \\ S_n = u_n + (u_n - d) + \dots + (u_1 + d) + u_1 \end{array}$$

Al sumar columna a columna, cada columna da $u_1 + u_n$ y hay n columnas, luego $2S_n = n(u_1 + u_n)$. La segunda forma sale de sustituir $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

La primera forma tiene una lectura sencilla: la suma es el **número de términos por la media del primero y del último**. Úsala cuando conozcas u_n ; usa la segunda cuando solo conozcas u_1 y d .

NOTA · SUMA DE UN TRAMO DE LA PROGRESIÓN

Si necesitas la suma de los términos desde el u_p hasta el u_q , no apliques la fórmula con $n = q$: réstale lo que sobra al principio, $\sum_{r=p}^q u_r = S_q - S_{p-1}$. También puedes aplicar la fórmula directamente al tramo, con $q - p + 1$ términos y con u_p como primer término.

Hallar u_1 y d a partir de dos datos

Una progresión aritmética queda determinada por u_1 y d . Si el enunciado da dos datos (dos términos, un término y una suma, la suma y el último término...), cada dato se traduce en una ecuación con u_1 y d como incógnitas, y se resuelve el sistema.

MÉTODO · HALLAR u_1 Y d

1. Escribe cada dato con la fórmula adecuada: $u_n = u_1 + (n - 1)d$ para un término, $S_n = \frac{n}{2} (2u_1 + (n - 1)d)$ para una suma.
2. Obtienes dos ecuaciones lineales en u_1 y d (si el dato es una suma y la fórmula es de primer grado en ambas incógnitas).
3. Resuelve el sistema: lo más rápido suele ser restar una ecuación de la otra, lo que elimina u_1 .
4. Comprueba escribiendo los primeros términos o recalculando el dato que no hayas usado.

Si los datos son términos separados por varios puestos, la resta de las dos ecuaciones da $(q - p)d = u_q - u_p$ directamente.

Cuántos términos hay que sumar para superar una cantidad

En muchos problemas de contexto se pregunta cuántos términos hacen falta para que la suma pase de un valor K . Como S_n es una expresión de segundo grado en n , se plantea la desigualdad $S_n > K$.

MÉTODO • HALLAR EL MENOR n CON $S_n > K$

1. Escribe S_n en función de n con la fórmula adecuada y simplifica.
2. Plantea $S_n > K$. Si todos los términos son positivos, S_n crece con n .
3. Resuelve la ecuación $S_n = K$, que es de segundo grado, y quédate con la raíz positiva. En la Prueba 2 puedes hallarla con la calculadora de pantalla gráfica (CPG).
4. Como n es un entero positivo, **redondea hacia arriba**: el menor entero mayor que la raíz.
5. Comprueba calculando S_n y S_{n-1} : el primero debe superar K y el segundo no.

NOTA • CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes construir una tabla de valores de S_n con la CPG, o dibujar $y = S_n$ y la recta $y = K$ y leer el corte, y también calcular una suma directamente con la función de sumatorio. En la Prueba 1 se razona con las fórmulas y se resuelve a mano. Aunque uses la calculadora, escribe siempre la fórmula que has planteado, porque es lo que se puntúa.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Reconocer una progresión y calcular términos

La sucesión 5, 9, 13, 17, ... es una progresión aritmética.

- a) Halla la diferencia común d .
- b) Escribe el término general u_n .
- c) Calcula u_{30} .
- d) ¿Qué posición ocupa el término 205?
- e) Escribe la regla de recurrencia que define la sucesión.

a) $d = 9 - 5 = 4$. Se comprueba con otra pareja: $13 - 9 = 4$.

b) Con $u_1 = 5$ y $d = 4$:

$$u_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$$

c) $u_{30} = 4 \cdot 30 + 1 = 121$.

d) Se busca n con $u_n = 205$: $4n + 1 = 205$, luego $n = 51$. El término 205 ocupa el puesto 51. (En cambio, 100 no es un término: $4n + 1 = 100$ da $n = \frac{99}{4}$, que no es entero.)

e) $u_1 = 5$ y $u_{n+1} = u_n + 4$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Hallar u_1 y d desde dos términos y sumar

En una progresión aritmética, $u_4 = 17$ y $u_9 = -3$.

- a) Halla la diferencia común d .
- b) Halla el primer término u_1 .
- c) Escribe el término general u_n .
- d) Calcula la suma de los veinte primeros términos, S_{20} .

a) Restando u_4 de u_9 hay $9 - 4 = 5$ pasos de tamaño d :

$$u_9 - u_4 = 5d \implies -3 - 17 = 5d \implies d = -4$$

b) Como $u_4 = u_1 + 3d$: $17 = u_1 + 3(-4)$, luego $u_1 = 29$. Comprobación con $u_9 = 29 + 8(-4) = -3$.

c) $u_n = 29 + (n - 1)(-4) = 33 - 4n$.

d) Primero $u_{20} = 33 - 80 = -47$. Entonces

$$S_{20} = \frac{20}{2} (u_1 + u_{20}) = 10 (29 - 47) = -180$$

Con la otra forma: $S_{20} = 10(2 \cdot 29 + 19 \cdot (-4)) = 10(58 - 76) = -180$.

EJEMPLO 3 ★★★ Dificil

Ahorro semanal: término general, suma y cuándo se supera una meta

Una alumna ahorra para un viaje. La primera semana mete 12 euros en una hucha y cada semana siguiente mete 5 euros más que la anterior.

- Halla una expresión para el ingreso u_n de la semana n y calcula el ingreso de la semana 20.
- Expresa el total ahorrado tras n semanas como una suma con notación sigma y halla una fórmula de S_n en función de n .
- Halla el menor número de semanas necesario para tener más de 1000 euros.

- Los ingresos forman una progresión aritmética con $u_1 = 12$ y $d = 5$:

$$u_n = 12 + (n - 1) \cdot 5 = 5n + 7$$

Para la semana 20: $u_{20} = 5 \cdot 20 + 7 = 107$ euros.

- El total tras n semanas es

$$S_n = \sum_{r=1}^n (5r + 7)$$

Aplicando la fórmula con $u_1 = 12$ y $d = 5$:

$$S_n = \frac{n}{2} (2 \cdot 12 + (n - 1) \cdot 5) = \frac{n}{2} (5n + 19) = \frac{5n^2 + 19n}{2}$$

Comprobación con $n = 2$: la suma real es $12 + 17 = 29$ y la fórmula da $\frac{2 \cdot 29}{2} = 29$.

- Se plantea $S_n > 1000$:

$$\frac{5n^2 + 19n}{2} > 1000 \iff 5n^2 + 19n - 2000 > 0$$

La ecuación $5n^2 + 19n - 2000 = 0$ tiene como raíz positiva $n = \frac{-19 + \sqrt{40361}}{10} \approx 18,19$. La expresión S_n es creciente para $n > 0$, así que hay que pasar de ese valor, y como n es entero se redondea **hacia arriba**: $n = 19$.

Comprobación: $S_{18} = \frac{5 \cdot 324 + 19 \cdot 18}{2} = 981 < 1000$ y $S_{19} = \frac{5 \cdot 361 + 19 \cdot 19}{2} = 1083 > 1000$.

En el examen: se puntúa identificar u_1 y d , usar bien la fórmula de la suma y plantear la desigualdad. El error habitual en c) es redondear 18,19 a 18: con 18 semanas se tienen 981 euros, todavía menos de 1000. En la Prueba 2 la raíz se obtiene con la CPG, pero conviene escribir la desigualdad y comprobar S_{18} y S_{19} .

Errores típicos

ERROR TÍPICO · USAR n EN VEZ DE $n-1$ EN EL TÉRMINO GENERAL

En $u_n = u_1 + (n-1)d$ el factor es $n-1$, porque entre el primer término y el n -ésimo hay $n-1$ saltos. Escribir $u_n = u_1 + nd$ desplaza todos los términos un puesto. Comprobación rápida: con $n = 1$ la fórmula debe devolver u_1 . Con 5, 9, 13, ..., $5 + 1 \cdot 4 = 9 \neq u_1$ delata el fallo.

ERROR TÍPICO · CONTAR MAL LOS TÉRMINOS DE UN TRAMO

Los términos desde u_5 hasta u_{20} son $20 - 5 + 1 = 16$, no 15 ni 20. Para sumarlos no sirve S_{20} (incluye los cuatro primeros) ni S_{20-5} : lo correcto es $S_{20} - S_4$. Con la progresión 2, 5, 8, ..., por ejemplo, $S_{20} = 610$ y $S_4 = 26$, luego $u_5 + \dots + u_{20} = 584$.

ERROR TÍPICO · MEZCLAR LAS DOS FORMAS DE LA SUMA

Las dos fórmulas son $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ y $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)$. Un error frecuente es escribir $\frac{n}{2}(u_1 + (n-1)d)$, que mezcla ambas y da un resultado equivocado: en 2, 5, 8, ... con $n = 4$, la suma real es $2 + 5 + 8 + 11 = 26$, pero $\frac{4}{2}(2 + 3 \cdot 3) = 22$. Si no recuerdas cuál usar, piensa en «número de términos por la media del primero y del último».

Resumen

- Una sucesión se describe con el término general u_n o por recurrencia (u_{n+1} en función de u_n , con el primer término).

$$\sum_{r=1}^n u_r = u_1 + \dots + u_n.$$
- Progresión aritmética: $u_{n+1} = u_n + d$, con diferencia común d constante.
- Término general: $u_n = u_1 + (n - 1)d$, y $d = \frac{u_q - u_p}{q - p}$ para dos términos cualesquiera.
- Suma: $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d)$, obtenida sumando la serie con ella misma al revés.
- Con dos datos se plantea un sistema para u_1 y d . Para saber cuántos términos superan una cantidad se resuelve $S_n > K$ y se redondea el resultado hacia arriba.
- La suma de un tramo de u_p a u_q es $S_q - S_{p-1}$, con $q - p + 1$ términos.

APARTADO 2

Progresiones geométricas y suma infinita

IDEA CLAVE

Una progresión geométrica es una lista de números en la que cada uno se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad fija, la razón. Con dos fórmulas, $u_n = u_1 r^{n-1}$ y $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$, resuelves casi todas las preguntas; y si $|r| < 1$, la suma de infinitos términos tiene un valor finito, $S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$. Es un contenido habitual de la Prueba 1 y de la Prueba 2, a menudo combinado con una progresión aritmética.

Razón y término general

En una progresión aritmética se **suma** siempre lo mismo para pasar de un término al siguiente. En una geométrica se **multiplica**. Por ejemplo, 5, 10, 20, 40, ... se obtiene multiplicando por 2, y 81, 27, 9, 3, ... multiplicando por $\frac{1}{3}$.

DEFINICIÓN · PROGRESIÓN GEOMÉTRICA Y RAZÓN

Una sucesión $u_1, u_2, u_3, \dots$ es una **progresión geométrica** si existe un número $r \neq 0$, la **razón común**, tal que

$$u_{n+1} = r u_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}^+$$

Equivalentemente, el cociente entre un término y el anterior es siempre el mismo:

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Si $r > 1$ y $u_1 > 0$, los términos crecen; si $0 < r < 1$, se acercan a 0; si $r < 0$, los signos se alternan. Por eso, para hallar r basta dividir dos términos consecutivos cualesquiera, comprobando después que el cociente se repite.

Para llegar a un término lejano no hace falta calcular todos los anteriores. Partiendo de u_1 se multiplica por r una vez para llegar a u_2 , dos veces para llegar a u_3 , y así sucesivamente: para llegar a u_n se multiplica $n - 1$ veces.

PROPIEDAD · TÉRMINO GENERAL

En una progresión geométrica de primer término u_1 y razón r :

$$u_n = u_1 r^{n-1}$$

Más en general, $u_n = u_k r^{n-k}$ para cualesquiera n y k .

La segunda forma es la más cómoda cuando te dan dos términos que no son el primero: de u_5 a u_8 hay que multiplicar tres veces por r , es decir, $u_8 = u_5 r^3$. Si te dan dos términos, divídelos y obtendrás una potencia de r .

NOTA · TRES TÉRMINOS CONSECUTIVOS

Si a , b y c son tres términos consecutivos de una progresión geométrica, entonces $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, es decir, $b^2 = ac$. Esta condición permite plantear una ecuación cuando algún término es desconocido. Ojo: de $b^2 = ac$ salen dos valores de b (uno positivo y otro negativo); decide cuál sirve con los datos del enunciado.

Suma de los n primeros términos

Para sumar $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ hay un truco que conviene entender, porque explica la fórmula. Escribe la suma y, debajo, la misma suma multiplicada por r :

$$\begin{array}{r} S_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + \dots + u_1 r^{n-1} \\ rS_n = \quad u_1 r + u_1 r^2 + \dots + u_1 r^{n-1} + u_1 r^n \end{array}$$

Al restar, todos los términos intermedios se cancelan y solo quedan el primero de arriba y el último de abajo:

$$rS_n - S_n = u_1 r^n - u_1 \implies S_n(r - 1) = u_1(r^n - 1)$$

Si $r \neq 1$ se puede dividir por $r - 1$.

TEOREMA · SUMA DE LOS n PRIMEROS TÉRMINOS

Si $r \neq 1$:

$$S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Si $r = 1$, todos los términos son iguales a u_1 y $S_n = n u_1$.

Las dos formas son idénticas. Usa la primera cuando $r > 1$ y la segunda cuando $r < 1$, para trabajar con números positivos. La fórmula necesita u_1 , r y n : el **número de términos** que sumas. Si empiezas a sumar en un término que no es el primero, calcula primero cuál es su valor y úsalo como u_1 (o resta dos sumas: $u_{k+1} + \dots + u_n = S_n - S_k$).

MÉTODO · RESOLVER UN PROBLEMA DE PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

1. Identifica los datos: u_1 , r , algún término u_k , la suma, el número de términos.
2. Si te dan dos términos, divídelos para obtener una potencia de r y despeja r (con raíz, o con logaritmos si la incógnita es el exponente).
3. Con u_1 y r ya puedes calcular cualquier u_n o S_n .
4. Comprueba que el resultado tiene sentido: n debe ser un entero positivo y, si la progresión es de términos positivos, $r > 0$.

Hallar n con logaritmos

Cuando la incógnita es el número de términos, aparece en un exponente: por ejemplo, $u_n = u_1 r^{n-1} = B$ o $S_n = B$. Se despeja la potencia y se toman logaritmos, como en **logaritmos y propiedades**:

$$u_1 r^{n-1} = B \iff r^{n-1} = \frac{B}{u_1} \iff (n-1) \ln r = \ln \frac{B}{u_1} \iff n = 1 + \frac{\ln(B/u_1)}{\ln r}$$

Como n debe ser un entero, hay que fijarse en lo que pide el enunciado.

- Si pide **cuándo se alcanza exactamente** un valor y n no sale entero, ese valor no es un término de la progresión.
- Si pide **cuándo se supera** un valor, redondea **hacia arriba** al entero siguiente cuando los términos crecen.
- Al dividir ambos miembros de una desigualdad por $\ln r$ o por $\ln \frac{1}{r}$, **mira el signo**: si $0 < r < 1$, entonces $\ln r < 0$ y la desigualdad cambia de sentido.

NOTA · CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes resolver $u_n > B$ o $S_n > B$ con la calculadora de pantalla gráfica (CPG), por ejemplo con una tabla de valores de la sucesión o resolviendo la ecuación correspondiente. En la Prueba 1 no hay calculadora: ahí los datos están elegidos para que n salga entero o para que se pida la expresión exacta con logaritmos.

Suma infinita

¿Qué ocurre si se suma sin parar? Mira $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$. Imagina un segmento de longitud 1: tomas su mitad, luego la mitad de lo que queda, luego la mitad de lo que queda de nuevo. Después de cada paso, lo que falta para llegar a 1 es justo el último trozo que has añadido, y ese trozo se hace cada vez más pequeño. La suma se acerca a 1 sin pasarse nunca.

Eso mismo se ve en la fórmula. Con $r = \frac{1}{2}$ y $u_1 = \frac{1}{2}$: $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^n}{1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, y la potencia $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se acerca a 0 al aumentar n .

En general, en $S_n = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}$ todo depende de lo que haga r^n cuando n crece:

- Si $|r| < 1$, r^n se hace tan pequeño como se quiera, y se acerca a 0.
- Si $|r| \geq 1$, r^n no se acerca a 0 (se hace enorme, vale siempre 1 o alterna entre 1 y -1), y la suma no se estabiliza en ningún número.

TEOREMA · SUMA INFINITA DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Si $|r| < 1$, la suma de todos los términos de la progresión existe y vale

$$S_\infty = u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_1 r^{k-1} = \frac{u_1}{1 - r}$$

Si $|r| \geq 1$ (y $u_1 \neq 0$), la suma infinita **no existe**: no se puede usar la fórmula.

Se dice que la serie **converge** a $\frac{u_1}{1-r}$ cuando $|r| < 1$. Es lo mismo que $-1 < r < 1$; si el enunciado dice que «existe la suma infinita», eso ya te da la condición $-1 < r < 1$ y puede servir para descartar soluciones.

NOTA • LA CONDICIÓN $|r| < 1$

Antes de aplicar $S_{\infty} = \frac{u_1}{1-r}$ **escribe siempre** $|r| < 1$ y comprueba que se cumple. En una ecuación de la que salen dos valores de r , es el filtro que decide cuál vale. Si la razón es negativa, la suma también converge (con los sumandos alternando de signo): por ejemplo, con $u_1 = 1$ y $r = -\frac{1}{2}$ se obtiene $\frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$.

Decimales periódicos

Un número decimal periódico es la suma infinita de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{10^k}$, donde k es la longitud del período. Se escribe cada trozo del período como un término y se aplica la fórmula.

Por ejemplo, $0,\overline{6} = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots$ tiene $u_1 = 0,6$ y $r = 0,1$, luego

$$0,\overline{6} = \frac{0,6}{1-0,1} = \frac{0,6}{0,9} = \frac{2}{3}$$

Si el número tiene una parte no periódica, se separa: $0,1\overline{6} = 0,1 + 0,0\overline{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$.

MÉTODO • PASAR UN DECIMAL PERIÓDICO A FRACCIÓN

1. Escribe el número como la suma de su parte no periódica (si la hay) y de una progresión geométrica infinita formada por las repeticiones del período.
2. Identifica u_1 (la primera repetición, ya colocada en su posición decimal) y $r = 10^{-k}$, con k las cifras del período.
3. Calcula $\frac{u_1}{1-r}$, súmale la parte no periódica y simplifica.

Una progresión aritmética y otra geométrica

Un tipo de problema frecuente da una progresión aritmética y una geométrica relacionadas (por ejemplo, tres términos de una aritmética que son consecutivos de una geométrica, o dos progresiones con el mismo primer término). La clave es **escribir cada término con la fórmula de su progresión**, $u_n = u_1 + (n-1)d$ para la aritmética y $v_n = v_1 r^{n-1}$ para la geométrica, e igualar lo que el enunciado dice que coincide. Si los tres términos son consecutivos en la geométrica, usa $b^2 = ac$. Resuelve el sistema que salga y, antes de seguir, comprueba las soluciones con los datos (por ejemplo, $d \neq 0$ si el enunciado lo exige).

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Razón, término general y suma

En una progresión geométrica, $u_2 = 12$ y $u_5 = 96$.

- a) Halla la razón r y el primer término u_1 .
- b) Calcula u_{10} .
- c) Calcula la suma de los ocho primeros términos.
- d) Halla el menor valor de n para el que $u_n > 10\,000$.

- a) De u_2 a u_5 se multiplica tres veces por r :

$$u_5 = u_2 r^3 \implies r^3 = \frac{96}{12} = 8 \implies r = 2$$

Como $u_2 = u_1 r$, resulta $u_1 = \frac{12}{2} = 6$.

- b) $u_{10} = 6 \cdot 2^9 = 6 \cdot 512 = 3072$.

- c) Con $r > 1$ usamos $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$:

$$S_8 = \frac{6(2^8 - 1)}{2 - 1} = 6 \cdot 255 = 1530$$

- d) Se plantea $6 \cdot 2^{n-1} > 10\,000$, es decir, $2^{n-1} > \frac{5000}{3} \approx 1666,7$. Tomando logaritmos (con $\ln 2 > 0$):

$$n - 1 > \frac{\ln(5000/3)}{\ln 2} \approx 10,70 \implies n > 11,70$$

El menor entero es $n = 12$. Comprobación: $u_{11} = 6 \cdot 2^{10} = 6144 < 10\,000$ y $u_{12} = 6 \cdot 2^{11} = 12\,288 > 10\,000$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Suma infinita y decimales periódicos

- a) Escribe $0,\overline{27} = 0,272727\dots$ como suma de una progresión geométrica infinita y exprésalo como fracción irreducible.
- b) Calcula la suma infinita $12 - 4 + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \dots$
- c) Una progresión geométrica tiene suma infinita igual a 18 y su segundo término vale 4. Halla los posibles valores de la razón r .

- a) El período tiene dos cifras: $0,\overline{27} = 0,27 + 0,0027 + 0,000027 + \dots$, con $u_1 = 0,27$ y $r = 0,01$. Como $|r| < 1$:

$$S_{\infty} = \frac{0,27}{1 - 0,01} = \frac{0,27}{0,99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

- b) Los términos tienen $u_1 = 12$ y, dividiendo, $r = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$ (se comprueba: $-4 \cdot (-\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$). Como $|r| = \frac{1}{3} < 1$ la suma existe:

$$S_{\infty} = \frac{12}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{12}{4/3} = 9$$

- c) El segundo término es $u_2 = u_1 r = 4$, luego $u_1 = \frac{4}{r}$. Con $S_{\infty} = \frac{u_1}{1 - r} = 18$:

$$\frac{4}{r(1 - r)} = 18 \implies 9r(1 - r) = 2 \implies 9r^2 - 9r + 2 = 0$$

$$r = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} \implies r = \frac{2}{3} \text{ o } r = \frac{1}{3}$$

Los dos valores cumplen $|r| < 1$, así que ambos sirven. Comprobación: con $r = \frac{1}{3}$, $u_1 = 12$ y $S_{\infty} = \frac{12}{2/3} = 18$; con $r = \frac{2}{3}$, $u_1 = 6$ y $S_{\infty} = \frac{6}{1/3} = 18$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Tres términos de una aritmética que forman una geométrica

Una progresión aritmética tiene primer término $u_1 = 3$ y diferencia $d \neq 0$. Su segundo, su quinto y su decimocuarto término son, en este orden, tres términos consecutivos de una progresión geométrica.

- a) Halla la diferencia d de la progresión aritmética y la razón r de la geométrica.
- b) La progresión geométrica tiene como primer término el segundo término de la aritmética, $v_1 = u_2$, y la razón que has hallado. Calcula el menor número de términos n para que su suma supere 10^6 .
- c) Calcula la suma de los veinte primeros términos de la progresión aritmética.

- a) 1. Escribir los tres términos con $u_n = 3 + (n - 1)d$:

$$u_2 = 3 + d \quad u_5 = 3 + 4d \quad u_{14} = 3 + 13d$$

2. Imponer la condición geométrica $b^2 = ac$ para tres términos consecutivos:

$$(3 + 4d)^2 = (3 + d)(3 + 13d)$$

3. Desarrollar y simplificar:

$$9 + 24d + 16d^2 = 9 + 42d + 13d^2 \implies 3d^2 - 18d = 0 \implies 3d(d - 6) = 0$$

4. Descartar $d = 0$ porque el enunciado exige $d \neq 0$. Queda $d = 6$.

5. Los tres términos son $u_2 = 9$, $u_5 = 27$, $u_{14} = 81$, y la razón es $r = \frac{27}{9} = 3$ (también $\frac{81}{27} = 3$, luego es coherente).

- b) La geométrica es $v_n = 9 \cdot 3^{n-1}$ y su suma es

$$S_n = \frac{9(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{9(3^n - 1)}{2}$$

Se pide $\frac{9(3^n - 1)}{2} > 10^6$, es decir, $3^n > \frac{2 \cdot 10^6}{9} + 1 \approx 222\,223,2$. Con logaritmos ($\ln 3 > 0$):

$$n > \frac{\ln(222\,223,2)}{\ln 3} \approx 11,21$$

El menor entero es $n = 12$. Comprobación: $S_{11} = 797\,157 < 10^6$ y $S_{12} = 2\,391\,480 > 10^6$.

- c) Con $u_1 = 3$ y $d = 6$:

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2 \cdot 3 + 19 \cdot 6) = 10 \cdot 120 = 1200$$

En el examen: puntúa plantear $b^2 = ac$ con los términos bien escritos y rechazar $d = 0$ justificándolo con el enunciado. En b) no basta con dar 11,21: hay que terminar en $n = 12$ y, si te sobra tiempo, comprobar con S_{11} y S_{12} .

Errores típicos

ERROR TÍPICO · USAR LA FÓRMULA DE LA SUMA INFINITA SIN COMPROBAR $|r| < 1$

Con $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ la razón es $r = 2$. Aplicar $\frac{u_1}{1-r} = \frac{2}{-1} = -2$ da un número negativo para una suma de números positivos, lo cual es absurdo: **esa suma no existe**, porque crece sin límite. La fórmula solo es válida si $-1 < r < 1$.

ERROR TÍPICO · CONTAR MAL EL EXPONENTE O EL NÚMERO DE TÉRMINOS

En $u_n = u_1 r^{n-1}$ el exponente es $n-1$ y no n : el primer término, $n=1$, lleva $r^0 = 1$. Por ejemplo, con $u_1 = 5$ y $r = 3$, $u_4 = 5 \cdot 3^3 = 135$, no $5 \cdot 3^4 = 405$. En la suma ocurre al revés: S_n lleva r^n , porque suma n términos. Y cuando se suma desde el término $k+1$ hasta el n no hay n sumandos, sino $n-k$.

ERROR TÍPICO · PASAR A FRACCIÓN UN DECIMAL PERIÓDICO Y EQUIVOCARSE CON LA RAZÓN

En $0,\overline{27}$ la razón es 0,01, no 0,1, porque el período tiene **dos** cifras: cada repetición se desplaza dos lugares. Si usas $r = 0,1$ y $u_1 = 0,27$, obtienes $\frac{0,27}{0,9} = 0,3$, que no coincide con $0,2727\dots$. El resultado correcto es $\frac{3}{11}$. Comprueba siempre dividiendo la fracción obtenida y mirando que reproduce las primeras cifras.

Resumen

- Progresión geométrica: $u_{n+1} = r u_n$, con razón $r = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Término general: $u_n = u_1 r^{n-1}$ (también $u_n = u_k r^{n-k}$).
- Tres términos consecutivos a, b, c cumplen $b^2 = ac$.
- Suma de n términos, con $r \neq 1$: $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}$; si $r = 1$, $S_n = nu_1$. La fórmula se obtiene restando S_n y rS_n .
- Para hallar n en $u_n = B$ o $S_n = B$: aísla la potencia $r^{\dots}$, toma logaritmos y baja el exponente. Redondea según lo que pida el enunciado y cuida el signo de $\ln r$ en las desigualdades.
- Si $|r| < 1$: $S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$. Si $|r| \geq 1$, la suma infinita no existe.
- Un decimal periódico es una suma infinita con $r = 10^{-k}$ (k cifras de período): $0,\overline{27} = \frac{0,27}{0,99} = \frac{3}{11}$.
- En problemas mixtos, escribe cada término con su fórmula (aritmética o geométrica), iguala lo que el enunciado dice que coincide y comprueba las soluciones.

APARTADO 3

Interés simple y compuesto, crecimiento y depreciación

IDEA CLAVE

El interés simple es una progresión aritmética y el interés compuesto, una geométrica; el crecimiento de una población y la depreciación de un objeto siguen el mismo modelo que el compuesto. En este apartado aprendes las fórmulas, cómo se adaptan cuando el interés se abona varias veces al año y cómo calcular el tiempo necesario para alcanzar una cantidad, con logaritmos o con la calculadora. Son preguntas habituales de la Prueba 1 y, sobre todo, de la Prueba 2.

Interés simple: una progresión aritmética

Cuando se deposita un capital, el banco paga un **interés** a cambio. El porcentaje anual que se indica en el contrato es el **tipo de interés nominal anual**, $r\%$. El capital inicial se llama C_0 .

En el **interés simple** los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial, de modo que cada año se suma la misma cantidad:

$$\text{interés de cada año} = C_0 \cdot \frac{r}{100}$$

Por tanto, los capitales al final de cada año forman una progresión aritmética de diferencia $d = C_0 \frac{r}{100}$. Esto enlaza con las progresiones aritméticas: $C_n = C_0 + n d$.

PROPIEDAD · INTERÉS SIMPLE

Un capital C_0 a un tipo de interés simple del $r\%$ anual, tras n años, vale

$$C_n = C_0 \left(1 + n \frac{r}{100} \right)$$

El capital crece una cantidad fija cada año (progresión aritmética) y los intereses acumulados son $C_n - C_0 = C_0 n \frac{r}{100}$.

Por qué es cierta: cada año se añaden $C_0 \frac{r}{100}$, y al cabo de n años se han añadido n veces esa cantidad.

Interés compuesto: una progresión geométrica

En el **interés compuesto** los intereses de cada periodo se suman al capital y, desde ese momento, también producen intereses. Si el tipo es $r\%$ anual y los intereses se abonan una vez al año, el capital se multiplica cada año por el mismo número:

$$C_1 = C_0 + C_0 \frac{r}{100} = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)$$

Un aumento del $r\%$ equivale a multiplicar por $1 + \frac{r}{100}$. En el año siguiente se vuelve a multiplicar por ese número, y así sucesivamente. Es una progresión geométrica de razón $1 + \frac{r}{100}$ (véase las progresiones geométricas).

PROPIEDAD · INTERÉS COMPUESTO CON CAPITALIZACIÓN ANUAL

Un capital C_0 a un tipo de interés compuesto del $r\%$ anual, tras n años, vale

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

Un detalle sobre la notación: si se usa u_1 para el capital tras el primer año, entonces $u_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$ y el capital inicial es $C_0 = u_0$. La fórmula $u_n = u_1 r^{n-1}$ del apartado anterior sigue valiendo, pero aquí es más cómodo contar desde el capital inicial.

Capitalización k veces al año

Muchos contratos abonan los intereses cada mes, cada trimestre o cada semestre. Sea k el **número de periodos de capitalización por año**: $k = 12$ (mensual), $k = 4$ (trimestral), $k = 2$ (semestral), $k = 1$ (anual). El tipo nominal anual se reparte entre los periodos, de modo que en cada uno el capital se multiplica por $1 + \frac{r}{100k}$, y en n años hay kn periodos.

PROPIEDAD · INTERÉS COMPUESTO CON k CAPITALIZACIONES AL AÑO

Un capital C_0 , a un tipo nominal anual del $r\%$, con capitalización k veces al año, vale tras n años

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn}$$

Con $k = 1$ se obtiene la fórmula anterior.

Con el mismo tipo nominal, capitalizar más veces al año da más dinero, porque los intereses empiezan a producir intereses antes. Por ejemplo, 1000 euros al 5 % nominal durante 3 años se convierten en:

Capitalización	Fórmula	Resultado
Anual ($k = 1$)	$1000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$	$\approx 1157,63$ euros
Trimestral ($k = 4$)	$1000 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{12}$	$\approx 1160,75$ euros
Mensual ($k = 12$)	$1000 \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{36}$	$\approx 1161,47$ euros

Con interés simple, esos mismos 1000 euros darían solo $1000 \left(1 + 3 \cdot \frac{5}{100}\right) = 1150$ euros.

Crecimiento y depreciación

La fórmula del interés compuesto no es solo cosa del dinero. Sirve para cualquier magnitud que cambie cada periodo en un **porcentaje fijo**, es decir, que se multiplique por el mismo número.

DEFINICIÓN · CRECIMIENTO Y DEPRECIACIÓN

Una magnitud que en cada periodo aumenta un $p\%$ se multiplica por $1 + \frac{p}{100}$ (razón mayor que 1): es un **crecimiento**. Si disminuye un $p\%$, se multiplica por $1 - \frac{p}{100}$ (razón entre 0 y 1): es un **decrecimiento**, y cuando se trata del valor de un bien, una **depreciación**. En ambos casos, tras n periodos,

$$V_n = V_0 q^n \quad \text{con } q = 1 \pm \frac{p}{100}$$

Ejemplos de las dos situaciones:

- Una población de 12000 habitantes que crece un 3 % al año tiene $12000 \cdot 1,03^n$ habitantes tras n años. Tras 10 años, $12000 \cdot 1,03^{10} \approx 16127$ personas.
- Una máquina que pierde un 10 % de su valor cada año se multiplica por 0,9 anualmente: su valor tras n años es $V_0 \cdot 0,9^n$.

Si no te dan el porcentaje, sino dos valores de la progresión, la razón sale del cociente. Si una población pasa de 5000 a 5405 en dos años y se supone geométrica, $q^2 = \frac{5405}{5000} = 1,081$, de modo que $q = 1,0397 \dots$ y el crecimiento anual es de unos 4 %. Cuando el enunciado habla de «años», fíjate en si pregunta por el valor tras n años (hay n factores) o por el n -ésimo término de la lista (hay $n - 1$ factores si empieza en el primer año).

Hallar el tiempo necesario

Una pregunta frecuente es: ¿cuánto tiempo tarda el capital (o la población) en llegar a cierta cantidad? Hay que despejar n , que está en el exponente, y para eso se usan los logaritmos (véase los logaritmos).

MÉTODO · HALLAR CUÁNTO TIEMPO HACE FALTA

- Escribe la ecuación o la desigualdad: por ejemplo, $C_0 \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn} = C$, o bien $> C$ si se pide *superar* esa cantidad.
- Divide por C_0 para dejar la potencia aislada.
- Toma logaritmos en los dos miembros y baja el exponente: $kn \ln \left(1 + \frac{r}{100k}\right) = \ln \frac{C}{C_0}$.
- Despeja n . Si el número que multiplica a n es positivo (crecimiento), el sentido de la desigualdad se mantiene. En una depreciación, $\ln q < 0$, y al dividir por él **la desigualdad se invierte**.
- Interpreta el resultado: no basta con redondear al más cercano (véase la sección siguiente).

NOTA · CALCULADORA (PRUEBA 2)

En la Prueba 2 no hace falta despejar a mano. La calculadora de pantalla gráfica (CPG) tiene un **resolvedor financiero** de interés compuesto: introduces el tipo anual, el capital inicial (con signo negativo si es una cantidad que depositas), el capital final y el número de capitalizaciones al año, y el aparato devuelve el número de periodos. También sirve una tabla de valores de $C_0 \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^x$ o la intersección de dos gráficas. Con cualquiera de estos métodos, lee con cuidado si el resultado es en periodos o en años, y escribe siempre en la solución la ecuación que has planteado. En la Prueba 1, en cambio, hay que dejar la respuesta exacta en forma de cociente de logaritmos.

Redondeo e interpretación del resultado

- **Dinero.** Los importes se dan con dos decimales (céntimos). Redondea solo al final del cálculo; si redondeas la razón $1 + \frac{r}{100k}$ antes de elevar, el error se multiplica. Los intereses son la diferencia entre el capital final y el inicial.
- **Personas, objetos.** Una población se da como número entero.
- **«Años enteros».** Si el enunciado pregunta «¿cuántos años enteros hacen falta para superar...?» o «¿a partir de qué año...?», la respuesta es el **menor entero que cumple la condición**. Si $n > 8,53$, la respuesta es 9 (y también lo sería con $n > 8,2$): hay que redondear **hacia arriba**, porque en 8 años todavía no se alcanza. Con una depreciación («el valor baja de...») se razona igual: se busca el primer año entero en que la condición ya se cumple.
- **Intereses abonados por periodos.** Si los intereses se abonan solo al final de cada periodo, el capital no cambia dentro del periodo. Con capitalización trimestral, el capital es el mismo durante los tres meses; por eso, el tiempo en el que realmente se supera una cantidad es un número entero de trimestres, y puede ser mayor que el que da la fórmula con n real.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Interés simple: valor y tiempo

Se depositan 2400 euros a un interés simple del 3 % anual.

- Halla el interés que se recibe cada año.
- Halla el capital tras 6 años.
- Halla el menor número entero de años para que el capital sea al menos de 3000 euros.

Es una progresión aritmética: $C_n = 2400 \left(1 + n \cdot \frac{3}{100}\right) = 2400 + 72n$.

- El interés anual es $2400 \cdot \frac{3}{100} = 72$ euros, que es la diferencia d de la progresión.
- $C_6 = 2400 + 72 \cdot 6 = 2832$ euros.
- Se resuelve $2400 + 72n \geq 3000$, es decir, $72n \geq 600$ y $n \geq \frac{600}{72} = 8,33 \dots$

El menor entero es $n = 9$. Comprobación: $C_8 = 2976 < 3000$ y $C_9 = 3048 \geq 3000$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Capitalización mensual y comparación con la anual

Se invierten 8000 euros a un tipo de interés nominal anual del 3,6 % durante 5 años.

- Halla el capital final si los intereses se abonan **cada mes**. Redondea a dos decimales.
- Halla los intereses obtenidos en ese caso.
- Halla el capital final si los intereses se abonan **una vez al año**, y calcula cuántos euros más se obtienen con el abono mensual. Redondea cada importe a dos decimales.

- Aquí $k = 12$ y $n = 5$, de modo que hay $kn = 60$ periodos y en cada uno el capital se multiplica por $1 + \frac{3,6}{1200} = 1,003$:

$$C_5 = 8000 \left(1 + \frac{3,6}{1200}\right)^{60} = 8000 \cdot 1,003^{60} \approx 9575,16 \text{ euros}$$

- Los intereses son $9575,16 - 8000 = 1575,16$ euros.
- Con $k = 1$:

$$C_5 = 8000 \left(1 + \frac{3,6}{100}\right)^5 = 8000 \cdot 1,036^5 \approx 9547,48 \text{ euros}$$

La diferencia es $9575,16 - 9547,48 = 27,68$ euros más con el abono mensual.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Depreciación de un coche y tiempo para superar un capital

Un coche nuevo cuesta 24000 euros y pierde cada año el 15 % de su valor del año anterior.

- Escribe el valor V_n del coche tras n años.
- Halla su valor tras 4 años, redondeado a dos decimales.
- Halla el menor número entero de años para que el valor sea inferior a 5000 euros.

Por otra parte, se invierten 6500 euros a un tipo nominal anual del 4,2 % con abono trimestral.

- Halla el menor número entero de **trimestres** para que el capital supere los 10000 euros.
- Indica cuántos **años enteros** hay que esperar para tener más de 10000 euros.

- Perder el 15 % equivale a multiplicar por $1 - 0,15 = 0,85$. Es una progresión geométrica de razón 0,85 con valor inicial 24000:

$$V_n = 24000 \cdot 0,85^n$$

- $V_4 = 24000 \cdot 0,85^4 = 12528,15$ euros.

- Se plantea $24000 \cdot 0,85^n < 5000$. Se divide por 24000 y se toman logaritmos:

$$0,85^n < \frac{5000}{24000} = \frac{5}{24} \iff n \ln 0,85 < \ln \frac{5}{24}$$

Como $\ln 0,85 < 0$, al dividir la desigualdad se invierte:

$$n > \frac{\ln \frac{5}{24}}{\ln 0,85} \approx 9,65$$

El menor entero es $n = 10$. Comprobación: $V_9 \approx 5558,81 > 5000$ y $V_{10} \approx 4724,99 < 5000$.

- Ahora $k = 4$ y en cada trimestre el capital se multiplica por $1 + \frac{4,2}{400} = 1,0105$. Con m trimestres:

$$6500 \cdot 1,0105^m > 10000 \iff m > \frac{\ln \frac{10000}{6500}}{\ln 1,0105} \approx 41,24$$

El menor entero es $m = 42$ trimestres. Comprobación: tras 41 trimestres hay $\approx 9974,76$ euros y tras 42 hay $\approx 10079,49$ euros.

- 42 trimestres son 10,5 años. Los intereses solo se abonan al final de cada trimestre, y el capital supera los 10000 euros por primera vez a los 10,5 años. Pero la pregunta es por años enteros: tras 10 años (40 trimestres) solo hay $\approx 9871,11$ euros, y tras 11 años (44 trimestres) hay $\approx 10292,27$ euros. Hay que esperar 11 años.

En el examen: puntúa plantear la razón correcta (0,85 y 1,0105), tomar logaritmos y cambiar el sentido de la desigualdad cuando se divide por un logaritmo negativo; la última parte pide interpretar el resultado y no redondear al más cercano. No sustituyas n por un valor redondeado antes de comprobarlo.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · USAR $1+r$ CON r EN PORCENTAJE

Con un interés del 4 % la razón es $1 + \frac{4}{100} = 1,04$, no $1 + 4 = 5$ ni 1,4. Divide siempre el porcentaje entre 100 antes de sumar 1. Con capitalización k veces al año, el porcentaje se divide también entre k : $1 + \frac{r}{100k}$. Un 6 % nominal con abono mensual es una razón de 1,005 por mes, no de 1,06.

ERROR TÍPICO · REDONDEAR AL ENTERO MÁS CERCANO AL BUSCAR EL TIEMPO

Si sale $n > 9,65$ y se pide el número de años enteros necesarios, la respuesta es 10, que es el menor entero que cumple la desigualdad. Tampoco se debe redondear antes de tiempo: con $n = 9,65$ el valor aún no cumple la condición. Comprueba siempre sustituyendo $n = 9$ y $n = 10$ en la fórmula original.

ERROR TÍPICO · OLVIDAR INVERTIR LA DESIGUALDAD EN UNA DEPRECIACIÓN

En $0,85^n < \frac{5}{24}$, al tomar logaritmos queda $n \ln 0,85 < \ln \frac{5}{24}$. Como $\ln 0,85$ es **negativo**, al dividir por él cambia el sentido: $n > \dots$ y no $n < \dots$. Escribir $n < 9,65$ daría el tiempo durante el cual el coche aún vale **más** de 5000 euros.

Resumen

- Interés simple: $C_n = C_0 \left(1 + n \frac{r}{100}\right)$, progresión aritmética de diferencia $C_0 \frac{r}{100}$.
- Interés compuesto: $C_n = C_0 \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn}$, con k capitalizaciones al año; progresión geométrica de razón $1 + \frac{r}{100k}$ por periodo.

- Crecimiento y depreciación: $V_n = V_0 q^n$ con $q = 1 + \frac{p}{100} > 1$ (crece) o $q = 1 - \frac{p}{100} < 1$ (decrece). Dos valores de una progresión geométrica dan la razón por cociente.
- Para el tiempo: aísla la potencia, toma logaritmos y baja el exponente. Si divides por un logaritmo negativo, la desigualdad se invierte. En la Prueba 2 sirven el resolutor financiero de la CPG o una tabla.
- Dinero con dos decimales y redondeo solo al final. Para «años enteros» se toma el menor entero que cumple la condición, y con abono por periodos hay que contar periodos enteros.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 3

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Sucesiones y notación sigma

EJERCICIO 1 ★ Básico IB · P2 TZ2 Mayo 2010

Considere la progresión aritmética 8, 26, 44, ...

- Halle una expresión para el término n -ésimo.
- Escriba la suma de los n primeros términos, utilizando la notación sigma.
- Calcule la suma de los 15 primeros términos.

a) $u_n = 18n - 10$ b) $S_n = \sum_{k=1}^n (18k - 10) = 9n^2 - n$ c) $S_{15} = 2010$

EJERCICIO 2 ★ Básico IB · P1 Mayo 2000

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es $S_n = 3n^2 - 2n$. Calcule el término u_n .

$u_n = 6n - 5$

EJERCICIO 3 ★ Básico IB · P1 Noviembre 2002

Halle $\sum_{r=1}^{50} \ln(2^r)$, expresando la respuesta en la forma $a \ln 2$, donde $a \in \mathbb{Q}$.

$\sum_{r=1}^{50} \ln(2^r) = 1275 \ln 2$

EJERCICIO 4 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2013

- Expresa la suma de los n primeros números enteros impares positivos utilizando la notación de sumatoria.
- Compruebe que la suma del apartado anterior es igual a n^2 .
- Deduzca el valor de la diferencia entre la suma de los 47 primeros números impares positivos y la suma de los 14 primeros números impares positivos.

(i) $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$
(ii) $S_n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2$
(iii) $S_{47} - S_{14} = 2013$

EJERCICIO 5 ★★ Medio IB · P2 Noviembre 2002

Una sucesión $\{u_n\}$ está dada por $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

- a) Halle u_2 , u_3 , u_4 .
b) (i) Exprese u_n en función de n .
(ii) Verifique que su respuesta a (b)(i) satisface la ecuación $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$.

a) $u_2 = 4$, $u_3 = 8$, $u_4 = 16$ b) $u_n = 2^n$

EJERCICIO 6 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

La suma de los n primeros términos de una serie viene dada por $S_n = 2n^2 - n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

- a) Halle los tres primeros términos de la serie.
b) Halle una expresión para el término n -ésimo de la serie, dando la respuesta en función de n .

a) $u_1 = 1$, $u_2 = 5$, $u_3 = 9$ b) $u_n = 4n - 3$

EJERCICIO 7 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

Halle $\sum_{n=1}^{15} a_n^2$, donde $a_n = \ln x^n$.

$\sum_{n=1}^{15} a_n^2 = 1240 (\ln x)^2$

EJERCICIO 8 ★★★ Difícil IB · P2 TZ0 Noviembre 2005 Demostración

- a) Demuestre mediante inducción matemática que $\sum_{r=1}^n \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.
b) A partir de lo anterior, compruebe que la suma de los primeros $(n+1)$ términos de la serie $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots$ es $\frac{(n+1)}{(2n+3)}$.

a) Para $n = 1$: $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$. Si es cierto para k , entonces
$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

que es la fórmula para $k+1$; por inducción, se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

- b) Los términos $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35}, \frac{1}{63}, \dots$ son $\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ con $r = 1, 2, 3, 4, \dots$; la suma de los primeros $n+1$ es el resultado de a) con $n+1$ en lugar de n : $\frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}$.

Progresiones aritméticas

EJERCICIO 9 ★ Básico IB · P1 Mayo 2002

Consideremos la serie aritmética 2, 5, 8, ...

- a) Halle una expresión para S_n , la suma de los n primeros términos.
b) Halle el valor de n para el cual $S_n = 1365$

a) $S_n = \frac{3n^2 + n}{2}$ b) $n = 30$

EJERCICIO 10 ★ Básico IB · P1 TZ0 Mayo 2006

En una progresión aritmética, el segundo término es 7 y la suma de los cinco primeros términos es 50. Halle la diferencia común de esta progresión aritmética.

$$d = 3$$

EJERCICIO 11 ★ Básico IB · P1 Mayo 1999

El segundo término de una progresión aritmética es 7. La suma de los cuatro primeros términos de la progresión aritmética es 12. Encuentre el primer término, a , y la diferencia común, d , de la progresión.

$$a = 15 \quad d = -8$$

EJERCICIO 12 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2016

El quinto término de una progresión aritmética es igual a 6 y la suma de los primeros 12 términos es 45. Encuentre el primer término y la diferencia común.

$$d = -\frac{3}{2} \quad u_1 = 12$$

EJERCICIO 13 ★ Básico IB · P1 Noviembre 1999

Una progresión aritmética tiene 5 y 13 como sus dos primeros términos, respectivamente.

- Escriba, en función de n , una expresión para el término n -ésimo, a_n .
- Encuentre el número de términos de la progresión que valgan menos de 400.

$$a) \quad a_n = 8n - 3 \quad b) \text{ Hay 50 términos menores que 400}$$

EJERCICIO 14 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2022

El n -ésimo término de una progresión aritmética viene dado por $u_n = 15 - 3n$.

- Indique el valor del primer término (u_1). [1 punto]
- Sabiendo que el n -ésimo término de esta progresión es -33 , halle el valor de n . [2 puntos]
- Halle la diferencia común (d). [2 puntos]

$$a) \quad u_1 = 12 \quad b) \quad n = 16 \quad c) \quad d = -3$$

EJERCICIO 15 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2011

En una serie aritmética cuyo n -ésimo término es u_n , se sabe que $u_4 = 7$ y $u_9 = 22$. Halle el valor mínimo de n para el cual $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n > 10000$.

$$n = 83$$

EJERCICIO 16 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

Una cuerda de 81 metros se corta en n trozos de longitud creciente, formando estas longitudes una progresión aritmética cuya diferencia común es igual a d metros. Sabiendo que las longitudes del trozo más corto y del más largo son 1,5 metros y 7,5 metros respectivamente, halle los valores de n y d .

$$n = 18 \quad d = \frac{6}{17}$$

EJERCICIO 17 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

La media de los diez primeros términos de una progresión aritmética es igual a 6. La media de los veinte primeros términos de la progresión aritmética es igual a 16. Halle el valor del término 15 de la progresión.

$$u_{15} = 25$$

EJERCICIO 18 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2012

La suma de los 16 primeros términos de una progresión aritmética es 212, y el quinto término es 8.

- a) Halle el primer término y la diferencia común.
b) Halle el menor valor de n para el cual la suma de los n primeros términos es mayor que 600.

a) $u_1 = 2$ $d = \frac{3}{2}$ b) $n = 28$

EJERCICIO 19 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2013

El cuarto término de una progresión aritmética es 34 y el décimo término es 76.

- a) Halle el primer término y la diferencia común.
b) La suma de los n primeros términos es mayor que 5000. Halle el menor valor posible de n .

a) $u_1 = 13$ $d = 7$ b) $n = 37$

EJERCICIO 20 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2000

Calcule la suma de los términos positivos de la progresión aritmética 85, 78, 71, ...

$$559$$

EJERCICIO 21 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2014

- a) (i) Halle la suma de todos los números enteros comprendidos entre 10 y 200 que son divisibles entre 7.
(ii) Exprese la suma anterior utilizando notación de sumatoria. En una progresión aritmética, el primer término es 1000 y la diferencia común es -6 . La suma de los n primeros términos de esta progresión es negativa.
b) Halle el menor valor de n .

a) (i) 2835 (ii) $\sum_{n=1}^{27} (7n + 7)$ b) $n = 335$

EJERCICIO 22 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2003

Los cuatro primeros términos de una sucesión aritmética son 2, $a - b$, $2a + b + 7$ y $a - 3b$, donde a y b son constantes. Halle a y b .

$$a = 2 \quad b = -3$$

EJERCICIO 23 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2007

Considere la progresión aritmética $-6, 1, 8, 15, \dots$

Halle el menor número de términos necesarios para que la suma de la serie sea mayor que 10.000.

$$n = 55$$

EJERCICIO 24 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2010

Calcule la suma de todos los números naturales de tres dígitos no divisibles por 3.

$$\text{Suma} = 329\,400$$

EJERCICIO 25 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2011

En una progresión aritmética el primer término es 8 y la diferencia común es $\frac{1}{4}$. Sabiendo que la suma de los $2n$ primeros términos es igual a la suma de los siguientes n términos, halle n .

$$n = 63$$

EJERCICIO 26 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2009

Considere el conjunto de números $a, 2a, 3a, \dots, na$, donde a y n son enteros positivos.

- (i) Compruebe que la expresión para la media de este conjunto es $\frac{a(n+1)}{2}$.
 (ii) Sea $a = 4$. Calcule el mínimo valor de n para el cual la suma de esos números supera a la media en 100.

(i) La suma es $a(1 + 2 + \dots + n) = a \frac{n(n+1)}{2}$, luego la media es $\frac{1}{n} \cdot a \frac{n(n+1)}{2} = \frac{a(n+1)}{2}$. (ii) $n = 8$

EJERCICIO 27 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2012

Halle la suma de todos los múltiplos de 3 comprendidos entre 100 y 500.

$$\text{Suma} = 39\,900$$

EJERCICIO 28 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 1996

Calcule la suma de todos los números enteros entre 200 y 500 que son divisibles por 7.

$$\text{Suma} = 15\,050$$

EJERCICIO 29 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2019

En una progresión aritmética la suma de los términos 3° y 8° es igual a 1. Sabiendo que la suma de los siete primeros términos es 35, determine el primer término y la diferencia común.

$$d = -3 \quad u_1 = 14$$

EJERCICIO 30 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2018

El tercer término de una progresión aritmética es 1407 y el décimo término es 1183.

- a) Encuentre el primer término y la diferencia común de la progresión.
 b) Calcule el número de términos positivos en la progresión.

a) $d = -32 \quad u_1 = 1471$ b) Hay 46 términos positivos

EJERCICIO 31 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2016

Considere el desarrollo de $(1+x)^n$ en potencias ascendentes de x , donde $n \geq 3$.

- a) Escriba los cuatro primeros términos del desarrollo. Los coeficientes de los términos segundo, tercero y cuarto del desarrollo son términos consecutivos de una progresión aritmética.
- b) (i) Muestre que $n^3 - 9n^2 + 14n = 0$.
- (ii) A partir de lo anterior, halle el valor de n .

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3$ b) ii) $n = 7$

- b) i) Por ser consecutivos de una progresión aritmética, $2\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}$, es decir, $n(n-1) = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$; al simplificar resulta $n^3 - 9n^2 + 14n = 0$.

EJERCICIO 32 ★★ Medio IB · P2 Mayo 1999

La razón entre el quinto término y el duodécimo término de una progresión aritmética es $\frac{6}{13}$. Si cada término de esta progresión es positivo, y el producto del primer término y el tercer término es 32, encuentre la suma de los primeros 100 términos de esta progresión.

$S_{100} = 10300$

EJERCICIO 33 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

La suma de los n primeros términos de una progresión $\{u_n\}$ viene dada por $S_n = 3n^2 - 2n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

- a) Escriba el valor de u_1 .
- b) Halle el valor de u_6 .
- c) Demuestre que $\{u_n\}$ es una progresión aritmética, indicando claramente cuál es la diferencia de la progresión.

a) $u_1 = 1$ b) $u_6 = 31$ c) $d = 6$

- c) Para $n \geq 2$, $u_n = S_n - S_{n-1} = 6n - 5$, y también vale para $n = 1$; como $u_{n+1} - u_n = 6$ es constante, es una progresión aritmética de diferencia $d = 6$.

EJERCICIO 34 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2004

Encontrar una expresión para la suma de los primeros 35 términos de la serie

$$\ln x^2 + \ln \frac{x^2}{y} + \ln \frac{x^2}{y^2} + \ln \frac{x^2}{y^3} + \dots$$

dando su respuesta en la forma $\ln \frac{x^m}{y^n}$, donde $m, n \in \mathbb{N}$.

$S_{35} = \ln \left(\frac{x^{70}}{y^{595}} \right)$

EJERCICIO 35 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2021

En una progresión aritmética, el primer término es 60 y la diferencia común es $-2,5$.

- a) Sabiendo que el término k -ésimo de la progresión es cero, halle el valor de k . Sea S_n la suma de los n primeros términos de la progresión.
- b) Halle el valor máximo de S_n .

a) $k = 25$ b) Valor máximo de $S_n = 750$

EJERCICIO 36 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2021

Considere la progresión aritmética $u_8 = S_8 = 8$. Calcule el valor del primer término, u_1 , y el valor de la diferencia común, d .

$$d = 2 \quad u_1 = -6$$

EJERCICIO 37 ★★★ Difícil IB · P1 TZ1 Mayo 2013

Los primeros términos de una progresión aritmética son $\frac{1}{\log_2 x}, \frac{1}{\log_8 x}, \frac{1}{\log_{32} x}, \frac{1}{\log_{128} x}, \dots$

Calcule x si la suma de los 20 primeros términos de la progresión es igual a 100.

$$x = 16$$

Progresiones geométricas

EJERCICIO 38 ★ Básico IB · P1 Mayo 2001

El término n -simo, u_n , de una progresión geométrica viene dado por $u_n = 3(4)^{n+1}, n \in \mathbb{Z}^+$.

- Calcule la razón común r .
- Calcule S_n , la suma de los n primeros términos de la progresión.

$$\text{a) } r = 4 \quad \text{b) } S_n = 16(4^n - 1)$$

EJERCICIO 39 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2008

Una progresión geométrica tiene como primer término 2 y la razón común es 1,05. Halle el valor del menor de los términos mayores de 500.

$$u_{115} = 520,7$$

EJERCICIO 40 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2013

La suma de los dos primeros términos de una serie geométrica es igual a 10, mientras que la suma de los cuatro primeros términos es igual a 30.

- Compruebe que la razón común r satisface $r^2 = 2$.
- Sabiendo que $r = \sqrt{2}$,
 - Halle el primer término.
 - Halle la suma de los diez primeros términos.

$$\text{b) (i) } a = \frac{10}{1 + \sqrt{2}} \quad \text{(ii) } S_{10} = 310$$

EJERCICIO 41 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

Los términos primero y cuarto de una serie geométrica son, respectivamente, 18 y $-\frac{2}{3}$. Halle:

- la suma de los n primeros términos de la serie.
- la suma de los infinitos términos de la serie.

$$\text{a) } S_n = -\frac{27}{2} \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^n - 1 \right] \quad \text{b) } S_\infty = \frac{27}{2}$$

EJERCICIO 42 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2019 Demostración

Suponga que u_1 es el primer término de una serie geométrica de razón r . Demuestre mediante inducción matemática que la suma de los n primeros términos, S_n , viene dada por $S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

Paso inductivo (la hipótesis es que la fórmula vale para $n = k$):

$$S_{k+1} = S_k + u_{k+1} = \frac{u_1(1-r^k)}{1-r} + u_1 r^k = \frac{u_1(1-r^k) + u_1 r^k(1-r)}{1-r} = \frac{u_1 - u_1 r^k + u_1 r^k - u_1 r^{k+1}}{1-r} = \frac{u_1(1-r^{k+1})}{1-r}$$

Caso base: para $n = 1$, $S_1 = u_1 = \frac{u_1(1-r)}{1-r}$.

EJERCICIO 43 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2012

Una barra de metal de 1 metro de longitud se corta en 10 piezas, cuyas longitudes forman una progresión geométrica. La pieza más larga tiene una longitud igual a 8 veces la longitud de la pieza más corta. Halle la longitud de la pieza más corta, redondeando al milímetro más cercano.

29 milímetros

EJERCICIO 44 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2018

Considere una progresión geométrica donde el primer término es 4 y el cuarto término es $-2,916$.

- Halle la razón común de esta progresión.
- Halle la suma de los infinitos términos de esta progresión.

a) $r = -0,9$ b) $S_\infty = 2,11$

EJERCICIO 45 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2022

Sea una progresión geométrica donde el primer término es 50 y el cuarto término es 86,4. Sea S_n la suma de los n primeros términos de la progresión. Halle el valor más pequeño de n para el cual $S_n > 33500$.

Para $n = 27$, $S_n > 33500$

EJERCICIO 46 ★★★ Difícil IB · P2 TZ0 Noviembre 2011 Demostración

Si $a_1, a_2, a_3, \dots$ son términos de una progresión geométrica de razón común $r \neq 1$, utilice la inducción matemática para comprobar que

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_4)^2 + \dots + (a_n - a_{n+1})^2 = \frac{a_1^2(1-r)(1-r^{2n})}{1+r}$$

Paso inductivo (la hipótesis es que la fórmula vale para $n = k$):

$$\frac{a_1^2(1-r)(1-r^{2k})}{1+r} + (a_1 r^k - a_1 r^{k+1})^2 = \frac{a_1^2(1-r)(1-r^{2k}) + a_1^2 r^{2k}(1-r)^2(1+r)}{1+r} = \frac{a_1^2(1-r)[1-r^{2k} + r^{2k}(1-r^2)]}{1+r} = \frac{a_1^2(1-r)(1-r^{2k+2})}{1+r}$$

Caso base: para $n = 1$, $(a_1 - a_2)^2 = a_1^2(1-r)^2 = \frac{a_1^2(1-r)(1-r^2)}{1+r}$.

Suma infinita de una progresión geométrica

EJERCICIO 47 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2012

Calcule el valor de k si $\sum_{r=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^r = 7$

$k = 14$

EJERCICIO 48 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2008

- a) Halle la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica: 27; -9; 3; -1; ...
b) Utilice la inducción matemática para demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

a) $S_\infty = \frac{81}{4}$

- b) Se supone cierta la fórmula para $n = k$ y se suma el término siguiente:

$$\frac{a(1-r^k)}{1-r} + ar^k = \frac{a(1-r^k) + ar^k(1-r)}{1-r} = \frac{a - ar^{k+1}}{1-r} = \frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$$

EJERCICIO 49 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2012

Cada vez que una pelota bota, alcanza un 95% de la altura lograda en el bote anterior. Inicialmente la pelota se deja caer desde una altura de 4 metros.

- a) ¿Qué altura alcanza la pelota después del cuarto bote?
b) ¿Cuántas veces bota la pelota antes de que ya no alcance una altura de 1 metro?
c) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota?

- a) 3,26 m b) $n = 28$ c) 156 m

EJERCICIO 50 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2013

En una progresión geométrica, el primer término es a , la razón común es r y la suma de los infinitos términos es igual a 76. En una segunda progresión geométrica, el primer término es a , la razón común es r^3 y la suma de los infinitos términos es igual a 36. Halle r .

$$r = \frac{2}{3}$$

EJERCICIO 51 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2000

La suma de una serie geométrica infinita es $\frac{27}{2}$, y la suma de los tres primeros términos es 13. Calcule el primer término.

$$u_1 = 9$$

EJERCICIO 52 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2001

Considere la serie geométrica infinita $1 + \left(\frac{2x}{3}\right) + \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \dots$

- a) ¿Para qué valores de x la serie es convergente?
b) Calcule la suma de la serie si $x = 1,2$.

- a) $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$ b) $S_\infty = 5$

EJERCICIO 53 ★★ Medio IB · P1 Mayo 2003

Una sucesión geométrica tiene todos sus términos positivos. La suma de los dos primeros términos es 15 y la suma de los infinitos términos de la sucesión es 27. Halle el valor de:

- a) la razón común.
b) el primer término

- a) $r = \frac{2}{3}$ b) $u_1 = 9$

EJERCICIO 54 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2004

Una progresión geométrica tiene una razón común negativa. La suma de los dos primeros términos es 6. La suma infinita es 8. Calcule la razón común y el primer término.

$$r = -\frac{1}{2} \quad u_1 = 12$$

EJERCICIO 55 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

La suma infinita de una serie geométrica es 32. La suma de los cuatro primeros términos es 30 y todos los términos son positivos. Halle la diferencia entre la suma infinita y la suma de los ocho primeros términos.

$$S_{\infty} - S_8 = \frac{1}{8}$$

EJERCICIO 56 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2007

Una serie geométrica infinita esta dada por $\sum_{k=1}^{\infty} 2(4-3x)^k$.

- Calcule los valores de x para los cuales la serie tenga suma finita.
- Para $x = 1,2$, calcule el mínimo número de términos necesarios para que la suma sea mayor que 1,328.

$$\text{a) } 1 < x < \frac{5}{3} \quad \text{b) } n = 7$$

EJERCICIO 57 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2011

- Halle el conjunto de valores de x para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{x+1}\right)^n$ tiene una suma infinita.
- A partir de lo anterior, halle dicha suma, en función de x .

$$\text{a) } -\frac{1}{3} < x < 1 \quad \text{b) } S_{\infty} = \frac{2x}{1-x}$$

EJERCICIO 58 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2016

La suma del segundo y el tercer término de una progresión geométrica es igual a 96. La suma de los infinitos términos de esta progresión es igual a 500. Halle los posibles valores de la razón común, r .

$$r = 0,885 \quad r = 0,2$$

EJERCICIO 59 ★★ Medio IB · P2 Mayo 1997

Una pelota de goma se deja caer desde una altura de 81 metros. Cada vez que golpea el suelo, rebota a dos tercios de la distancia desde la que ha caído.

- Encuentre la altura máxima de la pelota entre el quinto rebote y el sexto rebote.
- Cuál es el total de la distancia recorrida por la pelota desde cuando se deja caer hasta el momento en que golpea el suelo por sexta vez?
- Supongamos que la pelota continúa botando indefinidamente.Cuál es la distancia total recorrida por la pelota?

$$\text{a) } \text{Altura de la pelota entre el 5º y el 6º bote: } \frac{32}{3} \text{ metros} \quad \text{b) } \text{Distancia} = 362,3 \text{ metros} \quad \text{c) } \text{Distancia total} = 405 \text{ metros}$$

EJERCICIO 60 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2008

La razón común de los términos en una serie geométrica es 2^x .

- a) Indique el conjunto de valores de x para los cuales existe la suma a infinito de la serie.
b) Si el primer término de la serie es 35, hallar el valor de x para el cual la suma infinita es 40.

- a) $-\infty < x < 0$ b) $x = -3$

EJERCICIO 61 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2021

La suma de los primeros n términos de una progresión geométrica viene dada por

$$S_n = \sum_{r=1}^n \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^r$$

- a) Encuentre el primer término de la progresión, u_1 .
b) Calcule S_∞ .
c) Calcule el menor valor de n para el que $S_\infty - S_n < 0,001$.

- a) $u_1 = \frac{7}{12}$ b) $S_\infty = \frac{14}{3}$ c) $n = 64$

EJERCICIO 62 ★★★ Difícil IB · P2 TZ2 Mayo 2010

Un círculo de 2 cm de radio se divide en un número infinito de sectores circulares. Las áreas de estos sectores circulares forman una progresión geométrica, de razón común igual a k . El ángulo del primer sector circular es igual a θ radianes.

- a) Compruebe que $\theta = 2\pi(1 - k)$.
b) El perímetro del tercer sector circular mide la mitad que el perímetro del primer sector circular. Halle el valor de k y de θ .

- a) $A_1 = 2\theta$, $A_2 = 2\theta k$, $A_3 = 2\theta k^2, \dots$ $S_\infty = 4\pi = \frac{2\theta}{1 - k}$
b) $P_1 = 4 + 2\theta$, $P_2 = 4 + 2\theta k$, $P_3 = 4 + 2\theta k^2, \dots$ $k = 0,456$ $\theta = 3,42 \text{ rad}$

Nota: la solución del libro da $k = 0,46$ y $\theta = 3,39 \text{ rad}$, pero $\theta = 3,39$ sale de sustituir el valor de k ya redondeado; con el valor exacto $k = 0,4557 \dots$ resulta $\theta = 2\pi(1 - k) = 3,42 \text{ rad}$.

EJERCICIO 63 ★★★ Difícil IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

La suma, S_n , de los n primeros términos de una progresión geométrica, cuyo término n -ésimo es u_n , viene dada por $S_n = \frac{7^n - a^n}{7^n}$, donde $a > 0$.

- a) Halle una expresión para u_n .
b) Halle el primer término y la razón común de la progresión.
c) Considere la suma de los infinitos términos de la progresión.
(i) Determine los valores de a para los cuales existe la suma de los infinitos términos de la progresión.
(ii) Halle la suma de los infinitos términos, cuando esta suma existe.

- a) $u_n = \frac{7 - a}{7} \cdot \left(\frac{a}{7}\right)^{n-1}$ b) $u_1 = \frac{7 - a}{7}$ $r = \frac{a}{7}$
c) (i) $0 < a < 7$ (ii) $S_\infty = 1$

Progresiones aritméticas y geométricas a la vez

EJERCICIO 64 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2005

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética $\{u_n\}$ viene dada por la expresión $S_n = 4n^2 - 2n$. Tres términos de esta progresión, u_2 , u_m y u_{32} , son términos consecutivos de una progresión geométrica. Halle m .

$$m = 7$$

EJERCICIO 65 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2009

- La suma de los seis primeros términos de una serie aritmética es igual a 81. La suma de los once primeros términos es igual a 231. Halle el primer término y la diferencia común.
- La suma de los dos primeros términos de una serie geométrica es igual a 1, mientras que la suma de los cuatro primeros términos es igual a 5. Sabiendo que todos sus términos son positivos, Halle el primer término y la razón común.
- El término r -ésimo de una nueva serie se define como el producto del término r -ésimo de la serie aritmética y el término r -ésimo de la serie geométrica anteriormente mencionadas. Compruebe que el término r -ésimo de esta nueva serie es $(r+1) \cdot 2^{r-1}$.

- $d = 3 \quad u_1 = 6$
- $r = 2 \quad u_1 = \frac{1}{3}$
- $[6 + (r-1) \cdot 3] \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^{r-1} = (r+1) \cdot 2^{r-1}$

EJERCICIO 66 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2011 Demostración

En una progresión aritmética, el primer término es a y la diferencia común es igual a d , $d \neq 0$. Los términos 3° , 4° y 7° de esta progresión aritmética son los tres primeros términos de una progresión geométrica.

- Compruebe que $a = -\frac{3}{2}d$.
- Compruebe que el 4° término de la progresión geométrica es el término 16° de la progresión aritmética.

- $\frac{a+3d}{a+2d} = \frac{a+6d}{a+3d} \rightarrow a = -\frac{3d}{2}$
- La geométrica es de razón $r = 3$. Su 4° término es $\frac{27d}{2}$.

EJERCICIO 67 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2013

En la progresión aritmética $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$, el primer término es $u_1 = 1,6$ y la diferencia común es $d = 1,5$. En la progresión geométrica $\{v_n : n \in \mathbb{Z}\}$, el primer término es $v_1 = 3$ y la razón es $r = 1,2$.

- Halle una expresión para $u_n - v_n$ en función de n .
- Determine el conjunto de valores de n para los cuales $u_n > v_n$.
- Determine el mayor valor de $u_n - v_n$. Dé la respuesta con una aproximación de cuatro cifras significativas.

- $u_n - v_n = 0,1 + 1,5n - 3 \cdot 1,2^{n-1}$
- $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
- $u_7 - v_7 = 1,642$ es el mayor valor.

EJERCICIO 68 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2004

Los tres términos a , 1 , b están en progresión aritmética. Los tres términos 1 , a , b están en progresión geométrica. Halle el valor de a y de b , sabiendo que $a \neq b$.

$$a = -2 \quad b = 4$$

EJERCICIO 69 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2011

En una progresión geométrica $u_1, u_2, u_3, \dots$ $u_1 = 27$ y su suma infinita es $\frac{81}{2}$.

a) Encuentre la razón común de la progresión geométrica.

Una progresión aritmética $v_1, v_2, v_3, \dots$ es tal que $v_2 = u_2$ y $v_4 = u_4$.

b) Hallar el mayor valor de N tal que $\sum_{n=1}^N v_n > 0$.

a) $r = \frac{1}{3}$ b) $N = 7$

EJERCICIO 70 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2017

Una progresión aritmética $u_1, u_2, u_3, \dots$ tiene $u_1 = 1$ y diferencia común $d \neq 0$.

Sabiendo que u_2, u_3 y u_6 son los primeros tres términos de una progresión geométrica.

a) Calcule el valor de d .

Sabiendo que $u_N = -15$

b) Determine el valor de $\sum_{r=1}^N u_r$.

a) $d = -2$ b) $\sum_{r=1}^N u_r = -63$

EJERCICIO 71 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2017

Los términos 1° , 4° y 8° de una progresión aritmética cuya diferencia común es d , $d \neq 0$, son los tres primeros términos de una progresión geométrica cuya razón común es r .

Sabiendo que el 1° término de ambas progresiones es 9, halle

a) el valor de d

b) el valor de r .

a) $d = 1$ b) $r = \frac{4}{3}$

EJERCICIO 72 ★★ Medio IB · P1 Mayo 1998

El primero, el segundo y el n -ésimo términos de una progresión aritmética son 2, 6 y 58 respectivamente.

a) Calcule el valor de n .

b) Para ese valor de n , calcule el valor exacto de la suma de los n términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y la razón común es $\frac{1}{2}$.

a) $n = 15$ b) $S_{15} = \frac{32767}{8192}$

EJERCICIO 73 ★★★ Dificil IB · P2 Noviembre 1997

- a) Compruebe que $p = 2$ es solución de la ecuación $p^3 + p^2 - 5p - 2 = 0$.
- b) Halle los valores de a y de b para los cuales se cumple: $p^3 + p^2 - 5p - 2 = (p - 2)(p^2 + ap + b)$.
- c) A partir de lo anterior, halle las otras dos raíces de la ecuación $p^3 + p^2 - 5p - 2 = 0$.
- d) La diferencia común de una progresión aritmética es igual a p . Por otro lado, la razón común de una progresión geométrica es también igual a p . El primer término de ambas progresiones es 1.
- (i) Escriba, en función de p , los cuatro primeros términos de cada progresión.
- (ii) Si la suma del tercer y del cuarto término de la progresión aritmética es igual a la suma del tercer y del cuarto término de la geométrica, halle los tres posibles valores de p .
- (iii) ¿Para qué valor de p , de los obtenidos en el apartado (d)(ii), existe la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica?
- (iv) Para ese mismo valor de p , halle la suma de los 20 primeros términos de la progresión aritmética, expresando la respuesta en la forma $a + b\sqrt{c}$, donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- a) $2^3 + 2^2 - 5 \cdot 2 - 2 = 0$
- b) $a = 3 \quad b = 1$
- c) $p = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
- d) (i) Progresión aritmética: 1, $1 + p$, $1 + 2p$, $1 + 3p$. Progresión geométrica: 1, p , p^2 , p^3 .
- (ii) $p = 2$ y $p = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
- (iii) S_{∞} existe para $p = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$
- (iv) $S_{20} = -265 + 95\sqrt{5}$

EJERCICIO 74 ★★★ Dificil IB · P2 TZ0 Noviembre 2014

El séptimo, el tercer y el primer término de una progresión aritmética constituyen los tres primeros términos de una progresión geométrica. En la progresión aritmética, el primer término es a y la diferencia común, no nula, es d .

- a) Muestre que $d = \frac{a}{2}$. El séptimo término de la progresión aritmética es 3. La suma de los n primeros términos de la progresión aritmética supera a la suma de los n primeros términos de la progresión geométrica por al menos 200.
- b) Halle el menos valor de n para el cual sucede esto.

- a) De $\frac{a+2d}{a+6d} = \frac{a}{a+2d}$ se deduce (a)
- b) Obtenemos $a = \frac{3}{4}$, $d = \frac{3}{8}$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 32$.

EJERCICIO 75 ★★★ Dificil IB · P2 TZ1 Mayo 2005

Los tres primeros términos de una progresión geométrica son el primero, el decimoprimer y el decimosexto términos de una progresión aritmética. Todos los términos de la progresión geométrica son diferentes. La suma infinita de la progresión geométrica es 18.

- a) Calcule la razón común de la progresión geométrica.
- b) Calcule la diferencia común de la progresión aritmética.

- a) $r = \frac{1}{2}$ b) $d = -\frac{9}{20}$

EJERCICIO 76 ★★★ Dificil IB · P1 TZ2 Mayo 2015

La ecuación cúbica $x^3 + px^2 + qx + c = 0$, tiene por raíces α, β, γ . Desarrollando $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, muestre que:

- a) (i) $p = -(\alpha + \beta + \gamma)$
- (ii) $q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
- (iii) $c = -\alpha\beta\gamma$ Ahora se sabe que $p = -6$ y $q = 18$ para los apartados (b) y (c).
- b) (i) En el caso en que las tres raíces α, β, γ forman una progresión aritmética, muestre que una de las raíces es 2.
- (ii) A partir de lo anterior, determine el valor de c .
- c) En otro caso, las tres raíces α, β, γ forman una progresión geométrica. Determine el valor de c .

- b) (ii) $c = -20$ (c) $c = -27$

(a) $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$ y se identifican coeficientes. (b)(i) Si las raíces son $m - d, m, m + d$, entonces $-p = 3m = 6$ y $m = 2$.

EJERCICIO 77 ★★★ Dificil IB · P1 TZ2 Mayo 2018

La progresión geométrica $u_1, u_2, u_3, \dots$ tiene razón común r .

Considere la progresión $A = \{a_n = \log_2 |u_n| : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

- a) Muestre que A es una progresión aritmética, e indique cuál es la diferencia común, d , en función de r .
- En una progresión geométrica en particular, $u_1 = 3$ y la suma de los infinitos términos es igual a 4.
- b) Halle el valor de d .

- a) $d = \log_2 |r|$ b) $d = -2$

EJERCICIO 78 ★★★ Dificil IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

Una función polinómica viene dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Las raíces de la ecuación polinómica $f(x) = 0$ son términos consecutivos de una progresión geométrica cuya razón común es igual a $\frac{1}{2}$ y cuyo primer término es 2. Sabiendo que $a_{n-1} = -63$ y $a_n = 16$, halle

- a) el grado del polinomio;
- b) el valor de a_0 .

- a) $n = 6$ b) $a_0 = \frac{1}{32}$

EJERCICIO 79 ★★★ Dificil IB · P1 TZ1 Mayo 2015

Sea $\{u_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, una sucesión aritmética con primer término igual a a y diferencia común d , donde $d \neq 0$. Sea otra sucesión $\{v_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, definida por $v_n = 2^{u_n}$.

- a) (i) Demuestre que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ es una constante.
 (ii) Escriba el primer término de la sucesión $\{v_n\}$.
 (iii) Escriba una fórmula para v_n en función de a , d y n . Sea S_n la suma de los primeros n términos de la sucesión $\{v_n\}$.
 b) (i) Escriba S_{n+1} en función de a , d y n .
 (ii) Halle los valores de d para los cuales $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ existe. Se sabe ahora que $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ existe y se denota por S_{∞} .
 (iii) Escriba S_{∞} en función de a y d .
 (iv) Sabiendo que $S_{\infty} = 2^{a+1}$ calcule el valor de d . Sea $\{w_n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, una sucesión geométrica con primer término igual a p y una razón común q , donde p y q son ambos mayores que cero. Sea ahora otra sucesión $\{z_n\}$ que se define por $z_n = \ln w_n$.
 c) Calcule $\sum_{i=1}^n z_i$, dando su respuesta en la forma $\ln k$ con k en función de n , p y q .

- a) i) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2^d$ ii) $v_1 = 2^a$ iii) $v_n = 2^{a+(n-1)d}$
 b) i) $S_n = \frac{2^a(2^{nd} - 1)}{2^d - 1}$ ii) $d < 0$ iii) $S_{\infty} = \frac{2^a}{1 - 2^d}$ iv) $d = -1$
 c) $\sum_{i=1}^n z_i = \ln \left(p^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right)$

EJERCICIO 80 ★★★ Dificil IB · P1 TZ1 Mayo 2022

Considere la serie $\ln x + p \ln x + \frac{1}{3} \ln x + \dots$ donde $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ y $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$.

- a) Considere el caso donde la serie es geométrica.
 (i) Muestre que $p = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.
 (ii) Sabiendo que $p > 0$ y $S_{\infty} = 3 + \sqrt{3}$, calcule el valor de x .
 b) Ahora considere el caso donde la serie es aritmética con diferencia común d .
 (i) Muestre que $p = \frac{2}{3}$.
 (ii) Escriba d en la forma $k \ln x$, donde $k \in \mathbb{Q}$.
 (iii) La suma de los primeros n términos de la serie es $-3 \ln x$. Calcule el valor de n .

- a) i) Si es geométrica, $\frac{p \ln x}{\ln x} = \frac{\frac{1}{3} \ln x}{p \ln x}$, es decir, $p^2 = \frac{1}{3}$. ii) $x = e^2$
 b) i) Si es aritmética, $2p \ln x = \ln x + \frac{1}{3} \ln x$, es decir, $p = \frac{2}{3}$. ii) $d = -\frac{1}{3} \ln x$ iii) $n = 9$

Interés compuesto, crecimiento y depreciación

EJERCICIO 81 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Se invierte una suma de 100 dólares.

- a) Si el interés se compone anualmente con una tasa de interés anual del 5 %, halle el valor total V de la inversión después de 20 años.
 b) Si el interés se compone mensualmente con una tasa de interés mensual del $\frac{5}{12}$ %, halle el número mínimo de meses en el cual el valor de la inversión supera a V .
 a) $V = 265,3$ dólares b) $n = 235$ meses

EJERCICIO 82 ★★ Medio IB · P2 TZ1 Mayo 2022

En esta pregunta, de todas las respuestas aproximadas con dos cifras decimales. Sam invierte 1700 dólares en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés nominal anual de 2,74 % compuesto semestralmente. Sam no realiza más pagos ni retiros de esta cuenta.

- Encuentra la cantidad que Sam tendrá en su cuenta después de 10 años. David también invierte 1700 dólares en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés nominal del $r\%$, compuesto anualmente. David no realiza más pagos ni retiros de esta cuenta.
- Encuentre el valor de r requerido para que la cantidad en la cuenta de David después de 10 años sea igual a la cantidad en la cuenta de Sam.
- Calcula el interés que ganará David durante los 10 años.

a) $1700 \left(1 + \frac{0,0274}{2}\right)^{20} = 2231,71$ dólares b) $r = 2,76\%$ c) Interés = 531,71 dólares

Nota: la solución del libro da $r = 0,76\%$ (errata), pero $1700 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} = 2231,71$ da $r = 2,76\%$.

EJERCICIO 83 ★★★ Difícil IB · P2 TZ1 Mayo 2018

Se sabe que la cantidad de peces en un lago determinado disminuirá en un 7% cada año, a menos que se agreguen algunos peces nuevos. Al final de cada año, se agregan 250 peces nuevos al lago. A principios de 2018, hay 2500 peces en el lago.

- Muestre que habrá aproximadamente 2645 peces en el lago a principios de 2020.
- Encuentre el número aproximado de peces en el lago al inicio de 2042.

b) Número de peces al comienzo del 2042 (año 25) ≈ 3384 peces

a) a principios de 2019 hay $2500 \cdot 0,93 + 250 = 2575$ y a principios de 2020 hay $2575 \cdot 0,93 + 250 = 2644,75 \approx 2645$.

EJERCICIO 84 ★★★ Difícil IB · P2 TZ0 Noviembre 2017

Phil pide un préstamo bancario de 150000 dólares para comprar una casa, a una tasa de interés anual del 3,5 %. El interés se calcula al final de cada año y se suma al monto pendiente.

- Encuentre la cantidad que Phil le paga al banco después de 20 años. De su respuesta al dólar más cercano. Para pagar el préstamo, Phil hace depósitos anuales de P dólares al final de cada año en una cuenta de ahorros, que paga una tasa de interés anual del 2 %. Él hace su primer depósito al final del primer año después de pedir el préstamo.
- Muestre que el valor total de los ahorros de Phil después de 20 años es $\frac{(1,02^{20} - 1)P}{(1,02 - 1)}$.
- Sabiendo que el objetivo de Phil es ser dueño de la casa después de 20 años, calcule el valor de P al dólar más próximo. David visita un banco diferente y consigue un depósito de Q dólares, a un interés anual del 2,8 %.
- (i) David desea retirar 5000 dólares al final de cada año por un período de n años. Muestre que una expresión para el valor mínimo de Q es $\frac{5000}{1,028} + \frac{5000}{1,028^2} + \dots + \frac{5000}{1,028^n}$.
(ii) Usando lo anterior o de cualquier manera, calcule el valor mínimo de Q que le permitiría a David retirar cantidades anuales de 5000 dólares indefinidamente. Muestre su respuesta al dólar más próximo.

a) Después de 20 años Phil paga al banco: ≈ 298468 dólares c) $P = 12284$ dólares d) ii) Mínimo valor de $Q = 178571$ dólares

b) Los depósitos forman una progresión geométrica de razón 1,02: $P(1 + 1,02 + \dots + 1,02^{19}) = P \frac{1,02^{20} - 1}{1,02 - 1}$.

d) i) Cada retirada de 5000 hecha al final del año k requiere haber depositado hoy $\frac{5000}{1,028^k}$; sumando para $k = 1, \dots, n$ se obtiene la expresión.

EJERCICIO 85 ★★★ Dificil IB · P2 TZ0 Noviembre 2016

El día que nació, el 1 de enero de 1998, los abuelos de Mary invirtieron x dólares en una cuenta de ahorro. A partir de ese momento, fueron depositando x dólares todos los meses, el primer día del mes. La cuenta ofrecía un tipo de interés fijo del 0,4 % mensual. El interés se calculaba el último día de cada mes y se añadía a la cuenta. Sea A_n dólares la cantidad que hay en la cuenta de Mary el último día del mes n -ésimo, justo después de que se haya añadido el interés.

- Halle una expresión para A_1 y muestre que $A_2 = 1,004^2x + 1,004x$.
- (i) Escriba una expresión similar para A_3 y otra para A_4 .
- (ii) A partir de lo anterior, muestre que la cantidad que había en la cuenta de Mary la víspera del día que cumplió 10 años viene dada por $251 (1,004^{120} - 1) x$.
- Escriba, en función de x , una expresión para A_n en la víspera del día que Mary cumplió 18 años, donde se muestre claramente el valor de n .
- Los abuelos de Mary querían que en su cuenta hubiera al menos 20 000 dólares la víspera del día que cumpliera 18 años. Determine el valor mínimo del depósito mensual x dólares que se requiere para conseguir este objetivo. Dé la respuesta aproximando al número entero de dólares más próximo.
- Inmediatamente después de cumplir 18 años, Mary decide invertir 15 000 dólares de este dinero en una cuenta del mismo tipo, obteniendo un 0,4 % de interés mensual. Todos los años, retira 1000 dólares el día de su cumpleaños, para comprarse un obsequio. Determine cuánto tiempo transcurrirá antes de que no quede dinero en la cuenta.

- $A_1 = 1,004x$; $A_2 = 1,004 (1,004x + x) = 1,004^2x + 1,004x$
- i) $A_3 = 1,004^3x + 1,004^2x + 1,004x$ $A_4 = 1,004^4x + 1,004^3x + 1,004^2x + 1,004x$
- (ii) $A_{120} = x (1,004 + 1,004^2 + \dots + 1,004^{120}) = x \frac{1,004 (1,004^{120} - 1)}{1,004 - 1} = 251 (1,004^{120} - 1) x$
- $A_{216} = 251 (1,004^{216} - 1) x$
- El depósito mensual debe ser de 59 dólares. e) Cuando transcurran 28 años ya no tendrá dinero.