

Números complejos

Números complejos para IB Análisis y Enfoques NS: forma binómica, polar y exponencial, De Moivre, raíces n-ésimas y polinomios, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-analisis-y-enfoques-ns/numeros-complejos.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

Los **números complejos** amplían los reales con la unidad imaginaria i , que cumple $i^2 = -1$. Con ellos toda ecuación polinómica tiene solución, y multiplicar se convierte en **girar y estirar** en el plano. Es uno de los temas más propios del **Nivel Superior** y aparece en todas las convocatorias, a menudo combinado con trigonometría, inducción o polinomios.

Orden recomendado

Empieza por la **forma binómica** (operar como con polinomios), pasa a la **forma polar y exponencial** (módulo y argumento), aplica el **teorema de De Moivre** para potencias y raíces, y termina con los **polinomios** con raíces complejas. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

Forma binómica y operaciones

IDEA CLAVE

Los números complejos amplían los reales para que **toda** ecuación como $x^2 + 1 = 0$ tenga solución. Se escriben $z = a + bi$ y se operan como expresiones algebraicas, recordando que $i^2 = -1$. En el examen del IB aparecen en la Prueba 1 (sumar, multiplicar, dividir, despejar z) y son la base de las formas polar y exponencial que vienen después.

La unidad imaginaria

En los reales, $x^2 = -1$ no tiene solución, porque un cuadrado nunca es negativo. Se inventa entonces un número nuevo cuyo cuadrado sea -1 .

DEFINICIÓN · UNIDAD IMAGINARIA Y NÚMERO COMPLEJO

La **unidad imaginaria** i es el número que cumple $i^2 = -1$ (se escribe $i = \sqrt{-1}$).

Un **número complejo en forma binómica** es una expresión

$$z = a + bi \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

a es la **parte real**, $\text{Re}(z) = a$, y b es la **parte imaginaria**, $\text{Im}(z) = b$. Observa que $\text{Im}(z)$ es el número b , **sin** la i . El conjunto de los complejos es $\mathbb{C}$.

Si $b = 0$, $z = a$ es un número real, así que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, $z = bi$ es un **imaginario puro**.

Con i , las ecuaciones de segundo grado con discriminante negativo ya se resuelven: si $\Delta < 0$, entonces $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-\Delta}i$. Por ejemplo, $x^2 - 6x + 10 = 0$ da $x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = 3 \pm i$.

Potencias de i

Al multiplicar por i sucesivamente, los resultados se repiten cada cuatro pasos:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \dots$$

PROPIEDAD · POTENCIAS DE i

Para $n \in \mathbb{Z}^+$, i^n depende solo del resto de dividir n entre 4:

Resto de n entre 4 0 1 2 3

$$i^n \quad 1 \quad i \quad -1 \quad -i$$

Es cierto porque $i^4 = 1$: $i^{4k+r} = (i^4)^k i^r = i^r$.

Igualdad y plano de Argand

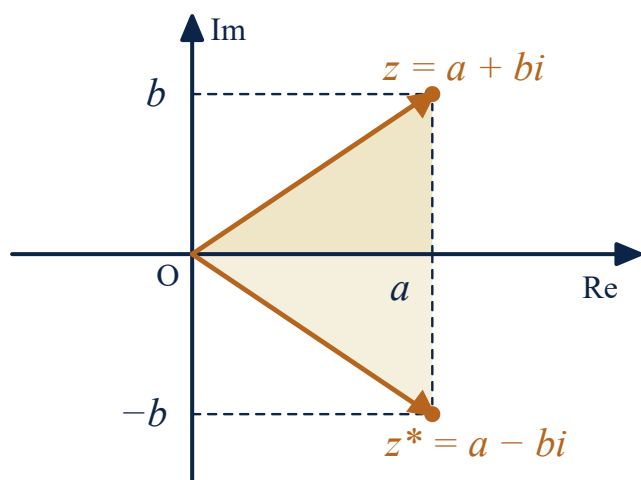
DEFINICIÓN · IGUALDAD DE COMPLEJOS

Dos complejos son iguales si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria:

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ y } b = d$$

Esta propiedad es la herramienta para resolver ecuaciones: una igualdad entre complejos equivale a **dos** igualdades entre reales.

Como un complejo son dos números (a, b) , se dibuja como un punto del plano, llamado **plano de Argand** (o plano complejo): el eje horizontal es el **eje real** y el vertical es el **eje imaginario**. El complejo $z = a + bi$ es el punto (a, b) , y también se puede ver como el vector que va del origen a ese punto.



Los reales quedan sobre el eje horizontal y los imaginarios puros sobre el vertical. Esta imagen sirve para interpretar el conjugado (más abajo) y, en el apartado siguiente, el módulo y el argumento.

Suma, resta y producto

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$.

DEFINICIÓN · SUMA, RESTA Y PRODUCTO

$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

No hace falta memorizar la fórmula del producto: se **desarrolla como un producto de binomios** y se sustituye $i^2 = -1$:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Sumar es sumar vectores en el plano de Argand; el producto, en cambio, tiene un significado geométrico más sutil que verás con la forma polar.

El conjugado y la división

DEFINICIÓN · CONJUGADO

El **conjugado** de $z = a + bi$ es $z^* = a - bi$: se cambia el signo de la parte imaginaria. En el plano de Argand es el punto simétrico de z respecto del eje real.

La clave es que, al multiplicar un complejo por su conjugado, **desaparece la i** :

$$z z^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

donde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ es el **módulo** de z (la distancia de z al origen). Es la misma idea que racionalizar un denominador con raíces.

MÉTODO · DIVIDIR DOS COMPLEJOS

1. Escribe el cociente $\frac{a + bi}{c + di}$.
2. Multiplica numerador y denominador por el **conjugado del denominador**, $c - di$.
3. El denominador pasa a ser el número real $c^2 + d^2$.
4. Desarrolla el numerador, sustituye $i^2 = -1$ y separa parte real y parte imaginaria.

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Tampoco hay que memorizar este resultado: se aplica el método cada vez.

Propiedades del conjugado

PROPIEDAD · PROPIEDADES DEL CONJUGADO

Para cualesquiera complejos z y w :

- $(z^*)^* = z$ y $(-z)^* = -z^*$.
- $(z \pm w)^* = z^* \pm w^*$.
- $(zw)^* = z^* w^*$.
- $\left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*}$ si $w \neq 0$.
- $(z^n)^* = (z^*)^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.
- $z + z^* = 2 \operatorname{Re}(z)$ y $z - z^* = 2 \operatorname{Im}(z) i$.
- $z = z^*$ si y solo si z es real.

En palabras: **el conjugado de una operación es la operación de los conjugados**. Cada propiedad se comprueba escribiendo $z = a + bi$ y $w = c + di$ y desarrollando los dos lados. Por ejemplo, para el producto: $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$ y $z^* w^* = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$, que es el conjugado de zw .

Ecuaciones con complejos

MÉTODO · RESOLVER UNA ECUACIÓN EN z (O EN z Y z^*)

1. Si la ecuación tiene una sola incógnita z y no aparece z^* , **despeja** z como en el álgebra de siempre y divide con el conjugado.
2. Si aparecen z^* , $|z|$ o z en varios sitios que no se pueden agrupar, escribe $z = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$ (y $z^* = x - yi$).
3. Desarrolla y agrupa en la forma (parte real) + (parte imaginaria) i en cada lado.
4. Iguala partes reales y partes imaginarias: sale un **sistema de dos ecuaciones reales** en x e y .
5. Resuélvelo y escribe la solución como $z = x + yi$. Si hay varias incógnitas complejas, repite con $w = p + qi$.

NOTA · COMPLEJOS EN LA CALCULADORA (CPG)

En la Prueba 2 la calculadora de pantalla gráfica opera con números complejos: puedes sumar, multiplicar, dividir, obtener el conjugado y el módulo, y resolver el sistema real que sale de una ecuación. Úsala para **comprobar** el resultado, pero en la Prueba 1 (y en las preguntas que piden «muestre que» o justificar) debes escribir el desarrollo a mano. Da siempre los valores exactos: $\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$, no $0,1 + 0,7i$.

Raíz cuadrada de un complejo

Todo complejo tiene dos raíces cuadradas, una opuesta a la otra. Para hallarlas en forma binómica se plantea $(x + yi)^2 = a + bi$.

MÉTODO · RAÍZ CUADRADA DE $a + bi$

1. Escribe $(x + yi)^2 = a + bi$, con $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Desarrolla: $x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$.
3. Iguala partes: $x^2 - y^2 = a$ y $2xy = b$.
4. Resuelve el sistema (en general, despejando $y = \frac{b}{2x}$ en la primera ecuación, lo que da una ecuación bicuadrada en x) y quédate con los valores **reales**.
5. Las dos raíces son $\pm(x + yi)$.

Con números sencillos suele bastar **probar enteros** que cumplan $2xy = b$ y $x^2 - y^2 = a$. En un cociente o en una ecuación de segundo grado con coeficientes complejos, este paso es el que permite aplicar la fórmula de $x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Potencias, producto y cociente

- a) Calcula i^{103} .
- b) Calcula $(4 - 3i)(2 + i)$ y da su parte real y su parte imaginaria en la forma $a + bi$.
- c) Escribe $\frac{1 + 2i}{3 - i}$ en la forma $a + bi$.

a) Se divide el exponente entre 4: $103 = 4 \cdot 25 + 3$, así que el resto es 3 y $i^{103} = i^3 = -i$.

b) Se desarrolla como un producto de binomios:

$$(4 - 3i)(2 + i) = 8 + 4i - 6i - 3i^2 = 8 - 2i + 3 = 11 - 2i$$

c) Se multiplica por el conjugado del denominador, $3 + i$:

$$\frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i + 6i + 2i^2}{9 + 1} = \frac{1 + 7i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Ecuaciones con z , con conjugado y raíz cuadrada

- a) Halla el complejo z que cumple $(1 + 2i)z = 7 - i$.
- b) Halla el complejo z que cumple $2z + z^* = 9 + 2i$.
- c) Halla las dos raíces cuadradas de $-5 + 12i$.

a) Se despeja z y se divide con el conjugado de $1 + 2i$:

$$z = \frac{7 - i}{1 + 2i} = \frac{(7 - i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{7 - 14i - i + 2i^2}{5} = \frac{5 - 15i}{5} = 1 - 3i$$

b) Aparece z^* , así que se escribe $z = x + yi$ y $z^* = x - yi$:

$$2(x + yi) + (x - yi) = 3x + yi = 9 + 2i$$

Igualando partes real e imaginaria: $3x = 9$ y $y = 2$. Entonces $z = 3 + 2i$.

c) Se plantea $(x + yi)^2 = -5 + 12i$, es decir, $x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i$:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= -5 \\ 2xy &= 12 \end{aligned}$$

De la segunda, $y = \frac{6}{x}$. Sustituyendo, $x^2 - \frac{36}{x^2} = -5$, es decir, $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$. Con $u = x^2$: $u^2 + 5u - 36 = 0$, de donde $u = 4$ o $u = -9$. Como x es real, $u = x^2 = 4$, luego $x = \pm 2$ e $y = \frac{6}{x} = \pm 3$. Las raíces son

$$2 + 3i \quad \text{y} \quad -2 - 3i$$

Comprobación: $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un parámetro y un sistema con conjugados

- a) Halla el valor real de p para que $\frac{p+3i}{2+i}$ sea un imaginario puro y escribe entonces ese número.
b) Los complejos z y w cumplen

$$\begin{aligned} z + iw &= 2 + 5i \\ z^* + 2w &= 7 - 4i \end{aligned}$$

Halla z y w en la forma $a + bi$.

- a) Se divide con el conjugado de $2 + i$:

$$\frac{p+3i}{2+i} = \frac{(p+3i)(2-i)}{5} = \frac{2p-pi+6i-3i^2}{5} = \frac{(2p+3)+(6-p)i}{5}$$

Es un imaginario puro cuando la parte real es cero: $2p+3=0$, es decir, $p=-\frac{3}{2}$. El número es entonces

$$\frac{6-(-3/2)i}{5} = \frac{15/2}{5}i = \frac{3}{2}i.$$

- b) Se escribe $z = x + yi$ y $w = p + qi$ con $x, y, p, q \in \mathbb{R}$. Entonces $z^* = x - yi$ y $iw = pi + qi^2 = -q + pi$.

Primera ecuación: $(x - q) + (y + p)i = 2 + 5i$, luego

$$x - q = 2, \quad y + p = 5$$

Segunda ecuación: $(x - yi) + 2(p + qi) = (x + 2p) + (2q - y)i = 7 - 4i$, luego

$$x + 2p = 7, \quad 2q - y = -4$$

Se resuelve el sistema de cuatro ecuaciones. De la primera, $x = 2 + q$. De la tercera, $2 + q + 2p = 7$, así que $q = 5 - 2p$. De la segunda, $y = 5 - p$. En la cuarta: $2(5 - 2p) - (5 - p) = -4$, es decir, $5 - 3p = -4$ y $p = 3$. Entonces $q = -1$, $x = 2 + q = 1$ e $y = 5 - p = 2$.

Por tanto $z = 1 + 2i$ y $w = 3 - i$. Comprobación en la primera ecuación: $1 + 2i + i(3 - i) = 1 + 2i + 3i + 1 = 2 + 5i$.

En el examen: al tratar z^* pasa siempre a $x + yi$ y separa las partes real e imaginaria; cada igualdad de partes es un resultado puntuable. Comprueba la solución en las ecuaciones originales, porque un signo mal puesto en z^* cambia todo el sistema.

Errores típicos

ERROR TÍPICO · CONFUNDIR $\text{Im}(z)$ CON bi

La parte imaginaria de $z = 3 - 5i$ es -5 , **no** $-5i$. $\text{Im}(z)$ es siempre un número real. Del mismo modo, el conjugado cambia el signo de b , no el de a : el conjugado de $-2 + 4i$ es $-2 - 4i$, no $2 + 4i$.

ERROR TÍPICO · OLVIDAR QUE $i^2 = -1$ AL MULTIPLICAR

En $(2 + 3i)(1 - i)$ hay que escribir $2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i$. El fallo típico es dejar i^2 sin sustituir, o escribir $-3i^2 = -3$ en vez de $+3$. Tras desarrollar, revisa que **no quede ninguna i^2** en la expresión final.

ERROR TÍPICO · DIVIDIR SIN CONJUGAR, O CONJUGAR MAL

No se puede dejar i en el denominador: $\frac{1}{2+i}$ **no** es una respuesta final. Hay que multiplicar arriba y abajo por $2 - i$ y obtener $\frac{2-i}{5}$. Otro error común es multiplicar por $-(2+i)$ o por $2+i$, que no elimina la i del denominador; el conjugado cambia solo el signo de la parte imaginaria.

Resumen

- $i^2 = -1$. Las potencias de i se repiten cada 4: $i, -1, -i, 1$; usa el resto de dividir el exponente entre 4.
- $z = a + bi$: $\text{Re}(z) = a$, $\text{Im}(z) = b$ (números reales). En el plano de Argand, z es el punto (a, b) .
- Igualdad: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ y $b = d$. Una ecuación compleja equivale a un sistema de dos ecuaciones reales.
- Suma y resta: parte a parte. Producto: se desarrolla y se sustituye $i^2 = -1$.
- Conjugado $z^* = a - bi$: $z z^* = a^2 + b^2 = |z|^2$. Para dividir, se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador.
- El conjugado respeta las operaciones: $(z \pm w)^* = z^* \pm w^*$, $(zw)^* = z^* w^*$, $(z/w)^* = z^*/w^*$, $(z^n)^* = (z^*)^n$.
- Con z^* en la ecuación, escribe $z = x + yi$ e iguala partes. La raíz cuadrada de $a + bi$ sale de $(x + yi)^2 = a + bi$: $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$.

APARTADO 2

Forma polar y exponencial

IDEA CLAVE

Un número complejo se puede dar por sus coordenadas (a, b) o por su **distancia al origen y su dirección**. La forma polar y la exponencial usan la segunda descripción, y con ella multiplicar y dividir se vuelve muy fácil: se multiplican (o dividen) las distancias y se suman (o restan) los ángulos. Es la base del teorema de De Moivre y de las raíces, y sale en la Prueba 1 sin calculadora.

Módulo y argumento

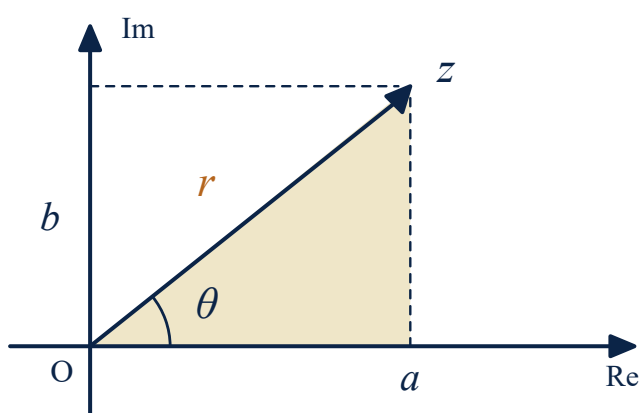
Piensa en $z = a + bi$ como el punto (a, b) del plano de Argand (si no recuerdas la forma $a + bi$, repásala en forma binómica y operaciones). Ese punto queda fijado por dos datos: cuánto dista del origen y qué ángulo forma su segmento con el eje real positivo.

DEFINICIÓN • MÓDULO Y ARGUMENTO

El **módulo** de $z = a + bi$ es la distancia de z al origen:

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Un **argumento** de z es cualquier ángulo θ (en radianes) que forme el segmento Oz con el eje real positivo, medido en sentido antihorario. Se escribe $\arg z = \theta$. Los argumentos de un mismo número se diferencian en múltiplos de 2π ; el **argumento principal** es el único que cae en $]-\pi, \pi]$, y es el que se pide salvo que se diga otra cosa.



El triángulo rectángulo de la figura da las relaciones de paso entre (a, b) y (r, θ) :

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta, \quad \tan \theta = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

El número 0 tiene módulo 0 y **no tiene argumento** (no apunta a ninguna parte).

Dos consecuencias rápidas del dibujo: el conjugado z^* es el simétrico respecto al eje real, así que $|z^*| = |z|$ y $\arg z^* = -\arg z$; y $-z$ está en la dirección contraria, con el mismo módulo y argumento $\arg z \pm \pi$.

Cuidado con el cuadrante

La ecuación $\tan \theta = \frac{b}{a}$ tiene dos soluciones en cada vuelta, separadas π , y la tecla $\arctan$ solo devuelve la que está en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, es decir, **la de los cuadrantes primero y cuarto** ($a > 0$). Si $a < 0$ hay que corregir. Lo más seguro es **dibujar el punto** y trabajar con el ángulo agudo de referencia.

MÉTODO · ARGUMENTO PRINCIPAL DE $z = a + bi$

1. Dibuja (aunque sea a mano alzada) el punto (a, b) y di en qué cuadrante está.
2. Calcula el ángulo de referencia $\alpha = \arctan \left| \frac{b}{a} \right|$, que es agudo.
3. Según el cuadrante:
 - 1.º ($a > 0, b > 0$): $\theta = \alpha$.
 - 2.º ($a < 0, b > 0$): $\theta = \pi - \alpha$.
 - 3.º ($a < 0, b < 0$): $\theta = -(\pi - \alpha) = \alpha - \pi$.
 - 4.º ($a > 0, b < 0$): $\theta = -\alpha$.
4. Si el punto está sobre un eje no hace falta calcular nada: $\theta = 0$ (real positivo), $\frac{\pi}{2}$ (imaginario positivo), π (real negativo), $-\frac{\pi}{2}$ (imaginario negativo).

Comprobación útil: el signo de $\sin \theta$ debe coincidir con el de b y el de $\cos \theta$ con el de a .

Forma polar y forma exponencial

Sustituyendo $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$ en $z = a + bi$ y sacando factor común r :

DEFINICIÓN · FORMA POLAR (MÓDULO-ARGUMENTAL)

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$$

donde $r = |z| > 0$ y $\theta = \arg z$. Es solo una abreviatura: $\operatorname{cis} \theta$ significa $\cos \theta + i \sin \theta$.

Existe una tercera escritura, todavía más compacta, que se apoya en la **fórmula de Euler**:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Por ahora tómalas como una definición de lo que significa elevar e a un exponente imaginario (en cursos más avanzados se demuestra con series). Lo importante es que obedece las reglas de las potencias, y eso explica por qué los argumentos se suman al multiplicar, como veremos enseguida.

DEFINICIÓN · FORMA EXPONENCIAL

$$z = r e^{i\theta}$$

con $r = |z|$ y $\theta = \arg z$ en radianes.

Las tres formas describen el mismo número. Por ejemplo, $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3} = 2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i$. Dos casos que conviene saber de memoria: $e^{i\pi} = -1$ y $e^{i\pi/2} = i$.

MÉTODO · PASAR DE UNA FORMA A OTRA

- **De binómica a polar o exponencial:** calcula $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, halla θ con el método del cuadrante y escribe $r \operatorname{cis} \theta$ o $re^{i\theta}$.
- **De polar o exponencial a binómica:** calcula $\cos \theta$ y $\sin \theta$ (valores exactos si el ángulo es notable) y multiplica: $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$.

NOTA • CALCULADORA

En la Prueba 2 la calculadora de pantalla gráfica (CPG) puede dar el módulo y el argumento de un complejo y pasar entre las formas binómica y polar; comprueba antes si está en radianes o en grados. Úsala para verificar, pero en la Prueba 1 hay que saber hacerlo a mano, y con valores exactos: escribe $\frac{3\pi}{4}$, no 2,36, cuando el ángulo sea notable.

Producto y cociente en forma polar

En forma binómica multiplicar obliga a desarrollar y agrupar. En forma polar es casi inmediato. Sean $z = r_1 \operatorname{cis} \theta_1$ y $w = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$:

TEOREMA • PRODUCTO Y COCIENTE EN FORMA POLAR

$$zw = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \quad \frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) \quad (w \neq 0)$$

Dicho con módulos y argumentos: $|zw| = |z||w|$, $\arg(zw) = \arg z + \arg w$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ y $\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w$ (salvo múltiplos de 2π).

Por qué. Al multiplicar los paréntesis aparecen las identidades de suma de ángulos:

$$\begin{aligned} zw &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

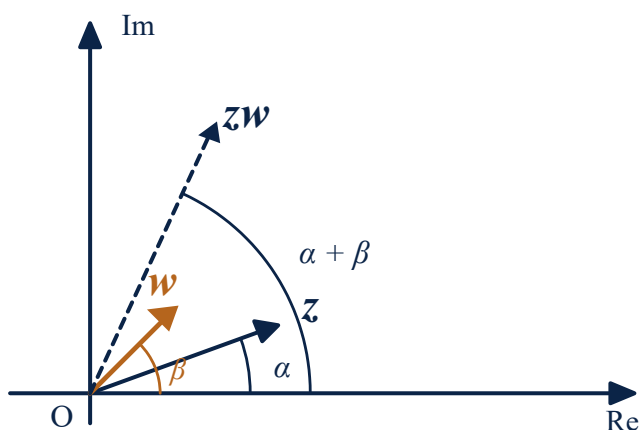
En forma exponencial el resultado es la regla de las potencias de siempre: $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, y el cociente resta los exponentes. Para el cociente se razona igual, o se usa que dividir es multiplicar por el inverso, que tiene módulo $\frac{1}{r}$ y argumento $-\theta$.

Después de operar, el ángulo puede salirse del intervalo $]-\pi, \pi]$: suma o resta 2π hasta que entre. Es el mismo número, solo que escrito con su argumento principal.

Interpretación geométrica

Multiplicar por $w = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$ hace dos cosas a la vez sobre cualquier punto z :

- **lo estira** (o encoge) multiplicando su distancia al origen por r_2 ;
- **lo gira** un ángulo θ_2 alrededor del origen, en sentido antihorario si $\theta_2 > 0$.



Casos particulares que se usan muchísimo:

Multiplicar por

Efecto

$i = \text{cis } \frac{\pi}{2}$ giro de 90° (no cambia el módulo)

$-1 = \text{cis } \pi$ giro de 180°

$\text{cis } \theta$ (módulo 1) giro puro de ángulo θ

$k > 0$ real estiramiento de razón k , sin giro

Dividir por w hace lo contrario: encoge por r_2 y gira $-\theta_2$.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1

★ Básico

Pasar de binómica a polar y al revés

Escribe en forma polar $r \text{ cis } \theta$, con el argumento principal en radianes y valores exactos:

- $z_1 = -3 + 3i$.
- $z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$.
- $z_3 = -7i$.
- Pasa $z_4 = 6 \text{ cis } \frac{2\pi}{3}$ a forma binómica.

- El punto $(-3, 3)$ está en el 2.º cuadrante. $r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. El ángulo de referencia es $\alpha = \arctan \left| \frac{3}{-3} \right| = \frac{\pi}{4}$, y en el 2.º cuadrante $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$. Así, $z_1 = 3\sqrt{2} \text{ cis } \frac{3\pi}{4}$.
- El punto $(-2\sqrt{3}, -2)$ está en el 3.º cuadrante. $r = \sqrt{12+4} = 4$. Ángulo de referencia: $\alpha = \arctan \frac{2}{2\sqrt{3}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. En el 3.º cuadrante, $\theta = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$, que está en $] -\pi, \pi]$. Así, $z_2 = 4 \text{ cis } \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.
- Está sobre el eje imaginario negativo: $r = 7$ y $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Entonces $z_3 = 7 \text{ cis } \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
- $z_4 = 6 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 6 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -3 + 3\sqrt{3}i$.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Producto y cociente de dos complejos

Sean $z = 4e^{3\pi i/4}$ y $w = 2e^{2\pi i/3}$.

- Calcula zw en forma exponencial con el argumento principal.
- Calcula $\frac{z}{w}$ en forma exponencial con el argumento principal.

- Se multiplican los módulos y se suman los argumentos:

$$zw = 4 \cdot 2 e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 8e^{\frac{17\pi}{12}i}$$

Como $\frac{17\pi}{12} > \pi$, se resta 2π para llevarlo a $] -\pi, \pi]$:

$$\frac{17\pi}{12} - 2\pi = \frac{17\pi - 24\pi}{12} = -\frac{7\pi}{12} \implies zw = 8e^{-\frac{7\pi}{12}i}$$

- Se dividen los módulos y se restan los argumentos:

$$\frac{z}{w} = \frac{4}{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{\pi}{12}i}$$

El ángulo $\frac{\pi}{12}$ ya está en $] -\pi, \pi]$, no hace falta ajustarlo.

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Un giro con estiramiento

Sean $u = 1 + \sqrt{3}i$ y $v = \sqrt{3} - i$.

- Escribe u en forma exponencial.
- Escribe v en forma exponencial.
- Calcula $\frac{u}{v}$ en forma binómica, sin desarrollar fracciones con el conjugado.
- En un mapa del plano complejo, el punto P representa a u . Se gira P un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ en sentido antihorario alrededor del origen y a la vez se multiplica su distancia al origen por $\sqrt{2}$. Halla, en forma binómica, el número p que representa el nuevo punto.

- $u = 1 + \sqrt{3}i$ está en el 1.º cuadrante. $r = \sqrt{1+3} = 2$ y $\theta = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Luego $u = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- $v = \sqrt{3} - i$ está en el 4.º cuadrante. $r = \sqrt{3+1} = 2$, $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ y en el 4.º cuadrante $\theta = -\frac{\pi}{6}$. Luego $v = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

- Se divide en forma exponencial: módulo $\frac{2}{2} = 1$ y argumento $\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$. Entonces

$$\frac{u}{v} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

- Estirar por $\sqrt{2}$ y girar $\frac{\pi}{4}$ equivale a multiplicar por $w = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1 + i$. Entonces

$$p = uw = (1 + \sqrt{3}i)(1 + i) = 1 + i + \sqrt{3}i + \sqrt{3}i^2 = (1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$$

Comprobación en forma polar: p debe tener módulo $2\sqrt{2}$ y argumento $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$, en el 2.º cuadrante. En efecto, $1 - \sqrt{3} < 0$ y $1 + \sqrt{3} > 0$, y $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

En el examen: cuando se pide $\frac{u}{v}$ o un producto y los números son «bonitos» en polar, pasar a forma exponencial ahorra mucho cálculo, pero escribe siempre los módulos y argumentos de partida (se puntúan) y reduce el argumento final a $]-\pi, \pi]$ antes de dar el resultado.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • USAR ARCTAN SIN MIRAR EL CUADRANTE

Para $z = -1 + i$ la calculadora da $\arctan \frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4}$, pero el punto está en el 2.º cuadrante y el argumento correcto es $\frac{3\pi}{4}$. Con $\arctan \frac{b}{a}$ solo aciertas cuando $a > 0$. Dibuja el punto, calcula el ángulo agudo de referencia y colócalo en su cuadrante; comprueba que el signo de $\sin \theta$ es el de b .

ERROR TÍPICO • OPERAR MAL LOS MÓDULOS Y LOS ARGUMENTOS

Al multiplicar, los módulos **se multiplican** y los argumentos **se suman**; al dividir, los módulos se dividen y los argumentos se restan. Fallos habituales: sumar los módulos, multiplicar los argumentos, o dejar un argumento como $\frac{17\pi}{12}$ cuando se pide el principal (hay que restar 2π y dar $-\frac{7\pi}{12}$).

ERROR TÍPICO • MEZCLAR GRADOS Y RADIANES O ESCRIBIR r NEGATIVO

En la forma exponencial $re^{i\theta}$ el ángulo va siempre en **radianes**: e^{i60° no tiene sentido. Y en la forma polar el módulo r es positivo: $-2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$ no está en forma polar; se escribe $2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{6} - \pi \right) = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{6} \right)$.

Resumen

- Módulo $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Argumento $\theta = \arg z$: el ángulo con el eje real positivo; el principal está en $] -\pi, \pi]$. 0 no tiene argumento.
- Para hallar θ : dibuja el punto, calcula $\alpha = \arctan|b/a|$ y ajústalo al cuadrante ($\alpha, \pi - \alpha, \alpha - \pi, -\alpha$). $\arctan(b/a)$ solo vale si $a > 0$.
- Forma polar $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta$; forma exponencial $z = re^{i\theta}$ (Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$). De polar a binómica: $a = r \cos \theta, b = r \sin \theta$.
- $zw = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ y $\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$. Reduce el ángulo final a $] -\pi, \pi]$.
- Geométricamente, multiplicar por $r \operatorname{cis} \theta$ estira por r y gira θ ; multiplicar por i gira 90° . Además $\arg z^* = -\arg z$.

APARTADO 3

Teorema de De Moivre y raíces n-ésimas

IDEA CLAVE

El teorema de De Moivre dice que **eleva a n un complejo en forma polar es elevar el módulo a n y multiplicar el argumento por n** . De ahí salen dos herramientas muy rentables en el examen del IB: calcular potencias grandes sin desarrollar y hallar las **raíces n -ésimas**, que dibujan un polígono regular en el plano de Argand. Además permite deducir identidades como $\cos 3\theta$ o expresar $\sin^4 \theta$ con cosenos de ángulos múltiplos.

El teorema

Partimos de la forma polar: al multiplicar dos complejos se **multiplican los módulos y se suman los argumentos**. Si multiplicas un complejo por sí mismo varias veces, el módulo se multiplica por sí mismo y el argumento se suma consigo mismo. Eso es el teorema.

TEOREMA • TEOREMA DE DE MOIVRE

Para $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Con la notación abreviada, $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$, y con la exponencial, $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

La versión exponencial es casi evidente porque $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ sigue la regla de las potencias. La demostración que se pide en el programa es la que **no** usa la exponencial, y se hace por **inducción**. Basta con tomar $r = 1$, porque el módulo r^n sale fuera sin dificultad.

Demostración por inducción

Llamamos $P(n)$ a la afirmación $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

1. **Caso base.** Para $n = 1$ los dos lados son $\cos \theta + i \sin \theta$. Se cumple.
2. **Hipótesis.** Suponemos que $P(k)$ es cierta para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.
3. **Paso.** Multiplicamos por $\cos \theta + i \sin \theta$ y usamos la hipótesis:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + i \sin k\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta) + i(\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta) \\ &= \cos(k\theta + \theta) + i \sin(k\theta + \theta) = \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta \end{aligned}$$

En la última línea hemos usado las fórmulas del coseno y del seno de una suma. Es justo $P(k+1)$. 4. **Conclusión.** $P(1)$ es cierta y $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, así que $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

NOTA · AMPLIACIÓN: EXPONENTES ENTEROS Y RACIONALES

La fórmula sigue valiendo para **cualquier entero** n . Para $n = 0$ es $z^0 = 1$. Para $n = -m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$ se usa $z^{-m} = \frac{1}{z^m}$ y que el inverso de $r \operatorname{cis} \theta$ es $\frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta)$. También sirve para exponentes racionales, pero entonces el resultado **no es único** (es el caso de las raíces, que ves más abajo). En el examen, la demostración por inducción se pide solo para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Potencias de un complejo

Elevar $z = a + bi$ a una potencia grande desarrollando el binomio es lento y propenso a errores. Con la forma polar es casi inmediato.

MÉTODO · CALCULAR z^n

1. Calcula el módulo $r = |z|$ y el argumento $\theta = \arg z$ (cuidado con el cuadrante).
2. Escribe $z = r \operatorname{cis} \theta$ y aplica el teorema: $z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$.
3. Si piden la forma binómica, pasa a $r^n \cos n\theta + i r^n \sin n\theta$ y simplifica con los valores exactos. Si $n\theta$ es muy grande, réstale múltiplos de 2π antes de calcular el seno y el coseno.

Una consecuencia útil: z^n es un número **real** cuando $n\theta$ es un múltiplo de π , y **imaginario puro** cuando $n\theta$ es un múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$. Así se averigua el menor exponente que da un resultado real sin calcular las potencias una a una.

Raíces n -ésimas

Una **raíz n -ésima** de z es un complejo w tal que $w^n = z$. En los reales, $\sqrt[3]{8}$ solo tiene un valor real; en los complejos, la ecuación $w^3 = 8$ tiene **tres** soluciones. Veamos por qué escribiendo $w = s \operatorname{cis} \alpha$ y $z = r \operatorname{cis} \theta$ y aplicando De Moivre:

$$s^n \operatorname{cis}(n\alpha) = r \operatorname{cis} \theta$$

Dos complejos son iguales si tienen el mismo módulo y sus argumentos **difieren en un múltiplo de 2π** . Por tanto $s^n = r$, es decir $s = \sqrt[n]{r}$ (la raíz real positiva), y $n\alpha = \theta + 2k\pi$ con k entero. Despejando α se obtiene una familia de ángulos, y solo n de ellos dan puntos distintos, porque al llegar a $k = n$ el ángulo ha dado una vuelta completa.

TEOREMA · RAÍCES n -ÉSIMAS

Si $z = r \operatorname{cis} \theta \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, la ecuación $w^n = z$ tiene exactamente n soluciones:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

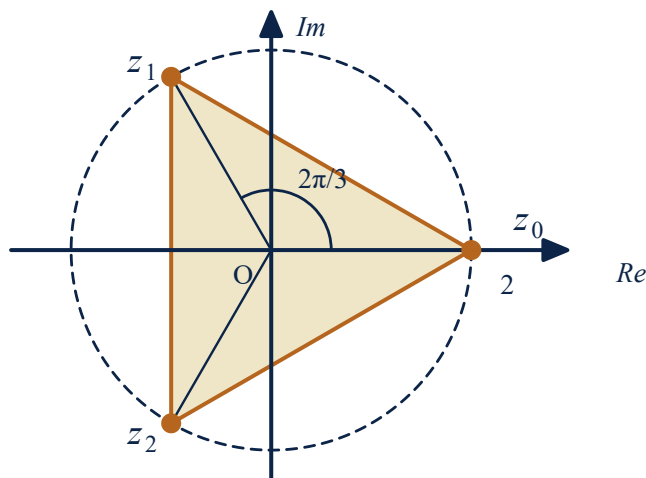
Todas tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$ y cada una se obtiene de la anterior **sumando $\frac{2\pi}{n}$ al argumento**.

MÉTODO · RESOLVER $w^n = z$

1. Escribe z en forma polar con θ conocido, $z = r \operatorname{cis} \theta$.
2. El módulo común es $\sqrt[n]{r}$ y el primer argumento es $\frac{\theta}{n}$.
3. Suma $\frac{2\pi}{n}$ al argumento para pasar a la siguiente raíz, hasta tener n raíces en total.
4. Si lo piden, pasa cada una a forma binómica con valores exactos.
5. Comprueba con una raíz: elévala a n y verifica que vuelve a z .

Dónde están las raíces

Como todas tienen el mismo módulo, las raíces están sobre una **circunferencia** de centro el origen. Como cada una está a $\frac{2\pi}{n}$ de la anterior, están **equiespaciadas**. Por tanto, las raíces n -ésimas son los vértices de un **polígono regular de n lados** inscrito en esa circunferencia. La figura muestra las tres raíces cúbicas de 8: forman un triángulo equilátero.



Esto da una forma rápida de comprobar o de completar una lista: conocida **una raíz**, las demás se obtienen **girándola** un ángulo $\frac{2\pi}{n}$ alrededor del origen. Si te piden el área o el perímetro del polígono, basta con el radio $\sqrt[n]{r}$ y la geometría del triángulo o cuadrado que forman.

Raíces de la unidad

El caso $z = 1$ es especial porque $1 = \text{cis } 0$. Sus raíces n -ésimas se llaman **raíces n -ésimas de la unidad**.

PROPIEDAD · RAÍCES n -ÉSIMAS DE LA UNIDAD

Las soluciones de $w^n = 1$ son

$$w_k = \text{cis } \frac{2k\pi}{n} = e^{2k\pi i/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Una de ellas es siempre 1, y se escribe $\omega = \text{cis } \frac{2\pi}{n}$ para la primera distinta de 1. Entonces las raíces son $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ y su **suma es cero**:

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0$$

Por qué la suma es cero. Es una progresión geométrica de razón ω , y $\omega^n = 1$, así que

$$1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \frac{1 - 1}{1 - \omega} = 0$$

(vale porque $\omega \neq 1$ cuando $n \geq 2$). La intuición geométrica es que un polígono regular centrado en el origen está **equilibrado**: sus vértices, vistos como vectores, se compensan. Una consecuencia directa: la suma de las partes reales de las raíces es 0, y lo mismo la de las partes imaginarias.

Para cualquier z , las raíces n -ésimas son las de la unidad **multiplicadas** por una de ellas: si w_0 es una raíz de $w^n = z$, las demás son $w_0, w_0\omega, w_0\omega^2, \dots$ y su suma también es cero.

Identidades trigonométricas

De Moivre se puede leer al revés: comparando la parte real e imaginaria de $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ con $\cos n\theta + i \sin n\theta$ se obtienen fórmulas para ángulos múltiplos.

MÉTODO • EXPRESAR $\cos n\theta$ Y $\sin n\theta$ CON $\cos \theta$ Y $\sin \theta$

1. Desarrolla $(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ con el teorema del binomio, usando $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.
2. Iguala con $\cos n\theta + i \sin n\theta$.
3. La **parte real** es $\cos n\theta$ y la **parte imaginaria** (el coeficiente de i) es $\sin n\theta$.
4. Si hace falta un solo tipo de razón, sustituye $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ (o al revés).

Con $n = 3$, y escribiendo $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$:

$$(c + is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3 = (c^3 - 3cs^2) + i(3c^2s - s^3)$$

La parte real es $\cos 3\theta = c^3 - 3cs^2$, y con $s^2 = 1 - c^2$ queda

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

y de la parte imaginaria sale $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$.

El camino inverso es expresar una potencia de $\cos \theta$ o de $\sin \theta$ como suma de cosenos o senos de ángulos múltiplos. Para ello se usa $z = \cos \theta + i \sin \theta$, para el que $z^{-1} = \cos \theta - i \sin \theta$.

PROPIEDAD • SUMA Y DIFERENCIA DE z^n Y z^{-n}

Si $z = \text{cis } \theta$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$z^n + z^{-n} = 2\cos n\theta, \quad z^n - z^{-n} = 2i\sin n\theta$$

Se comprueba con De Moivre: $z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ y $z^{-n} = \cos n\theta - i \sin n\theta$; al sumar se van los senos y al restar se van los cosenos.

MÉTODO • ESCRIBIR $\cos^n \theta$ O $\sin^n \theta$ CON ÁNGULOS MÚLTIPLOS

1. Escribe $2\cos \theta = z + z^{-1}$ (o $2i\sin \theta = z - z^{-1}$) y eleva a la potencia pedida.
2. Desarrolla con el teorema del binomio.
3. Agrupa los términos de la forma z^k y z^{-k} y cámbialos por $2\cos k\theta$ (o $2i\sin k\theta$).
4. Divide entre la constante que quedó al elevar el lado izquierdo.

Por ejemplo, con $\sin^4 \theta$: $(z - z^{-1})^4 = (2i\sin \theta)^4 = 16\sin^4 \theta$. Al desarrollar,

$$(z - z^{-1})^4 = z^4 - 4z^2 + 6 - 4z^{-2} + z^{-4} = (z^4 + z^{-4}) - 4(z^2 + z^{-2}) + 6 = 2\cos 4\theta - 8\cos 2\theta + 6$$

y dividiendo entre 16:

$$\sin^4 \theta = \frac{\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3}{8}$$

Esta forma es la que permite, después, integrar $\sin^4 \theta$ sin esfuerzo: cada término es un coseno de un ángulo múltiplo.

NOTA • CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes comprobar una potencia o una raíz con la calculadora de pantalla gráfica (CPG), que trabaja con complejos y da módulo y argumento. Es una buena forma de verificar un resultado, pero el método (módulo, argumento, De Moivre) debe quedar escrito. En la Prueba 1 no hay calculadora: aprende de memoria los valores exactos del seno y el coseno de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Potencias con De Moivre

- Calcula $(\sqrt{3} + i)^9$ y da el resultado en forma binómica.
- Calcula $(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{8})^4$ en forma binómica.
- Calcula $(1 - i)^8$.

- Módulo: $\sqrt{3+1} = 2$. Argumento: $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ (primer cuadrante). Así, $\sqrt{3} + i = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$ y

$$(\sqrt{3} + i)^9 = 2^9 \operatorname{cis} \frac{9\pi}{6} = 512 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = 512(0 - i) = -512i$$

- $2^4 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{8} = 16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = 16(0 + i) = 16i$.

- Módulo: $\sqrt{2}$. Argumento: $-\frac{\pi}{4}$ (cuarto cuadrante). Entonces

$$(1 - i)^8 = (\sqrt{2})^8 \operatorname{cis} \left(-\frac{8\pi}{4}\right) = 16 \operatorname{cis}(-2\pi) = 16$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Raíces cuartas y el polígono que forman

Considera la ecuación $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

- Escribe $-8 + 8\sqrt{3}i$ en forma polar y resuelve la ecuación. Da las cuatro soluciones en forma binómica.
- Las cuatro soluciones son los vértices de un polígono regular. Halla su área.

- Módulo: $\sqrt{64 + 192} = 16$. Argumento: el punto $(-8, 8\sqrt{3})$ está en el segundo cuadrante y $\tan \alpha = -\sqrt{3}$, así que $\arg = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Entonces $z^4 = 16 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$.

El módulo común es $\sqrt[4]{16} = 2$. El primer argumento es $\frac{2\pi/3}{4} = \frac{\pi}{6}$ y cada raíz suma $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$:

$$z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6} = -\sqrt{3} - i$$

$$z_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{3} = 1 - \sqrt{3}i$$

- Son cuatro puntos equiespaciados en la circunferencia de radio 2: un **cuadrado**. Su diagonal es el diámetro, 4, y el lado es $\ell = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. El área es $\ell^2 = 8$. (También: el cuadrado se descompone en cuatro triángulos rectángulos de catetos 2 y 2, de área 2 cada uno.)

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Una identidad de $\cos 3\theta$ y una ecuación cúbica

- a) Con el teorema de De Moivre, expresa $\cos 3\theta$ en función de $x = \cos \theta$ (como un polinomio en x).
- b) Resuelve la ecuación $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Da las tres soluciones de la forma $\cos \alpha$ con α un ángulo de $]0, \pi[$ múltiplo de $\frac{\pi}{9}$.
- c) Sin usar los valores de b), halla la suma de las tres soluciones de la ecuación y comprueba el resultado con los valores de b).

- a) Desarrollamos $(c + is)^3$ con $c = \cos \theta$ y $s = \sin \theta$:

$$(c + is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3 = (c^3 - 3cs^2) + i(3c^2s - s^3)$$

Por De Moivre, la parte real es $\cos 3\theta$. Con $s^2 = 1 - c^2$:

$$\cos 3\theta = c^3 - 3c(1 - c^2) = 4c^3 - 3c = 4x^3 - 3x$$

- b) Escribimos la ecuación como $2(4x^3 - 3x) = 1$. Si hacemos $x = \cos \theta$, queda $2 \cos 3\theta = 1$, es decir $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$. Entonces

$$3\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \implies \theta = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

Los ángulos distintos en $]0, \pi[$ son $\frac{\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{9}$ y $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$. Como el coseno es inyectivo en $]0, \pi[$, dan tres valores de x distintos y una ecuación cúbica no puede tener más. Las soluciones son

$$x = \cos \frac{\pi}{9}, \quad x = \cos \frac{5\pi}{9}, \quad x = \cos \frac{7\pi}{9}$$

- c) La ecuación no tiene término en x^2 , así que por las relaciones de Cardano-Vieta la suma de las raíces es $-\frac{0}{8} = 0$. Por tanto

$$\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = 0$$

Coincide con el valor numérico de b): $0,9397 - 0,1736 - 0,7660 \approx 0$.

En el examen: en un «hence» como el de b) usa de forma explícita el resultado de a): sustituye $x = \cos \theta$ y reconoce $\cos 3\theta$. No olvides que el ángulo da **todas** las soluciones $\pm\alpha + 2k\pi$, y que debes quedarte solo con los distintos.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • MULTIPLICAR POR n SOLO EL ARGUMENTO (O SOLO EL MÓDULO)

En $(r \operatorname{cis} \theta)^n$ el módulo **se eleva** a n y el argumento **se multiplica** por n . Los errores habituales son escribir $(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6})^9 = 2 \operatorname{cis} \frac{9\pi}{6}$ (olvidar el 2^9) o $512 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$ (olvidar el 9 del argumento).

ERROR TÍPICO • DAR SOLO UNA RAÍZ, O REPETIR UN ÁNGULO

Una ecuación $w^n = z$ tiene n **soluciones**, no una. Con $k = 0, 1, \dots, n-1$ obtienes n raíces distintas; si te pasas de $n-1$, repites las anteriores. Un buen control es comprobar que sumando $\frac{2\pi}{n}$ al argumento de la última vuelves a la primera. Si solo das la raíz «principal», pierdes la mayor parte de los puntos.

ERROR TÍPICO • PERDER EL ARGUMENTO CORRECTO ANTES DE APLICAR LA FÓRMULA

Todo el método depende de θ . Si $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ y usas $\arctan \frac{8\sqrt{3}}{-8} = -\frac{\pi}{3}$ sin mirar el cuadrante, estás en el cuarto cuadrante y todas las raíces salen giradas. Dibuja el punto en el plano de Argand y ajusta el ángulo antes de dividir entre n .

Resumen

- **De Moivre:** $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$. Se demuestra por inducción para $n \in \mathbb{Z}^+$ con las fórmulas de la suma de ángulos; vale para cualquier entero.
- **Potencias:** módulo y argumento en forma polar, eleva el módulo y multiplica el argumento. z^n es real si $n\theta$ es múltiplo de π .
- **Raíces n -ésimas** de $z = r \operatorname{cis} \theta$: $w_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$. Hay exactamente n .
- **Geometría:** están en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$, separadas $\frac{2\pi}{n}$: vértices de un **polígono regular** de n lados.
- **Raíces de la unidad:** $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ con $\omega = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{n}$; su **suma es cero**.
- **Trigonometría:** $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ al desarrollar $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$; con $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\theta$ y $z^n - z^{-n} = 2i \sin n\theta$ se escribe $\cos^n \theta$ o $\sin^n \theta$ con ángulos múltiplos.

APARTADO 4

Polinomios con raíces complejas

IDEA CLAVE

Un polinomio de grado n tiene siempre n raíces si se admiten números complejos, y cuando sus coeficientes son reales las raíces no reales aparecen **por parejas conjugadas**. Con esto, conocer una raíz compleja te regala otra, y la suma y el producto de las raíces se leen directamente de los coeficientes. En el examen del IB sirve para hallar las raíces que faltan, reconstruir un polinomio y despejar parámetros.

Todo polinomio tiene tantas raíces como su grado

En el tema 1 viste que un cero c de $P(x)$ equivale al factor $x - c$ (teorema del factor), pero solo con números reales. Si se permiten complejos, no se escapa ninguno. Aquí la variable se escribe z , porque las raíces pueden ser no reales.

TEOREMA • TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio $P(z)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. Por tanto se factoriza como

$$P(z) = a_n(z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n)$$

donde a_n es el coeficiente principal y $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ son las raíces, contadas con su multiplicidad (una raíz doble aparece dos veces).

No se demuestra en este curso. Lo que importa es la consecuencia: la ecuación $P(z) = 0$ de grado n tiene **exactamente n soluciones complejas**, contando las repetidas. Cada vez que encuentras una, el teorema del factor te deja dividir y bajar un grado.

Por ejemplo, $z^2 + 4 = 0$ no tiene raíces reales, pero sí dos complejas, $z = 2i$ y $z = -2i$, y $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$.

Raíces conjugadas

PROPIEDAD • RAÍCES COMPLEJAS DE UN POLINOMIO REAL

Sea $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ con **todos los coeficientes a_k reales**. Si w es una raíz de $P(z) = 0$, entonces su conjugado w^* también lo es.

La razón está en cómo se comporta el conjugado con las operaciones (suma, producto y potencias, que ya conoces de la forma binómica) y en que un número real es igual a su conjugado. Si $P(w) = 0$, conjuga los dos lados:

$$0 = 0^* = (a_n w^n + \cdots + a_1 w + a_0)^* = a_n^* (w^*)^n + \cdots + a_1^* w^* + a_0^* = a_n (w^*)^n + \cdots + a_1 w^* + a_0 = P(w^*)$$

El paso clave es $a_k^* = a_k$: **solo vale si los coeficientes son reales**. Si alguno no lo es, la propiedad falla.

Consecuencias que conviene tener a mano:

- Las raíces no reales vienen en **parejas** $a + bi$ y $a - bi$. Si el polinomio es real de grado impar, queda al menos una raíz real sin pareja.
- Cada pareja forma un factor cuadrático con **coeficientes reales**:

$$(z - (a + bi))(z - (a - bi)) = z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$$

La suma de la pareja es $2a$ y su producto es $|w|^2 = a^2 + b^2$: ambos reales, como debe ser.

Factorizar en los reales y en los complejos

MÉTODO • FACTORIZAR UN POLINOMIO REAL CUANDO SE CONOCE UNA RAÍZ NO REAL

1. Comprueba que los coeficientes son reales y que la raíz $w = a + bi$ tiene $b \neq 0$. Entonces $w^* = a - bi$ también es raíz.
2. Forma el factor cuadrático real $z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$, que equivale a $(z - w)(z - w^*)$.
3. Divide $P(z)$ entre ese factor (división larga o igualando coeficientes). El cociente tiene grado $n - 2$.
4. Si el cociente es de grado 1, da una raíz real; si es de grado 2, resuélvelo con la fórmula de la ecuación de segundo grado.
5. Escribe la factorización: **en** $\mathbb{R}$ se dejan los factores cuadráticos sin raíces reales; **en** $\mathbb{C}$ se descompone cada uno en $(z - w)(z - w^*)$.

Un cuadrático real $z^2 + pz + q$ no tiene raíces reales si su discriminante $p^2 - 4q$ es negativo; entonces sus raíces son un par conjugado. Así que, en los reales, **un polinomio se factoriza en lineales y cuadráticos irreducibles**, y en los complejos solo en lineales.

NOTA • CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes resolver una ecuación polinómica con la calculadora de pantalla gráfica (CPG). Para que muestre también las raíces no reales, hay que poner la calculadora en modo complejo. Úsala para comprobar tu resultado, pero en un problema que pide «halle» o «demuestre» escribe igualmente el planteamiento (el factor cuadrático, la división, el sistema). En la Prueba 1 no hay calculadora.

Reconstruir un polinomio a partir de sus raíces

Si conoces todas las raíces $w_1, \dots, w_n$ y el coeficiente principal, el teorema fundamental da el polinomio sin más que multiplicar los factores. Con coeficientes reales, **añade siempre las conjugadas de las raíces no reales**: si te dicen «tiene por raíz $3 + i$ », el polinomio real de menor grado que la tiene necesita también $3 - i$, y por tanto es al menos de grado 2.

MÉTODO • CONSTRUIR UN POLINOMIO REAL CON RAÍCES DADAS

1. Escribe todas las raíces, añadiendo la conjugada de cada una que no sea real.
2. Agrupa cada pareja conjugada en su factor cuadrático real $z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$.
3. Multiplica los factores y por el coeficiente principal que pida el enunciado (si dice «mónico», es 1).
4. Desarrolla y comprueba, por ejemplo, evaluando en una de las raíces reales o comparando la suma de raíces con el coeficiente de z^{n-1} .

Suma y producto de las raíces

Al desarrollar $a_n(z - w_1) \cdots (z - w_n)$ y comparar con $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$, los coeficientes quedan ligados a las raíces. No hace falta conocer las raíces para usar estas relaciones, y valen también con coeficientes complejos.

PROPIEDAD · SUMA Y PRODUCTO DE LAS RAÍCES

Para $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ con raíces $w_1, \dots, w_n$:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad w_1 w_2 \dots w_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Casos concretos que se usan a menudo:

Grado	Polinomio	Suma de raíces	Producto de raíces
2	$az^2 + bz + c$	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
3	$az^3 + bz^2 + cz + d$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{d}{a}$
4	$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$	$-\frac{b}{a}$	$\frac{e}{a}$

NOTA · AMPLIACIÓN: LAS DEMÁS RELACIONES

Hay una relación por cada coeficiente. Para grado 3 con raíces w_1, w_2, w_3 , la suma de los productos de las raíces de dos en dos es $\frac{c}{a}$. Para grado 4, la suma de los productos de dos en dos es $\frac{c}{a}$ y la de los productos de tres en tres es $-\frac{d}{a}$. Se obtienen igual: desarrollando el producto de factores. Casi nunca se piden en el examen del IB; los que sí aparecen son la suma y el producto.

La comprobación en grado 2 es inmediata: $a(z - w_1)(z - w_2) = az^2 - a(w_1 + w_2)z + aw_1 w_2$. Fíjate en el **signo** y en que se divide entre el coeficiente principal: el polinomio $2z^3 - 6z^2 + \dots$ tiene suma de raíces $-\frac{-6}{2} = 3$, no 6 ni -6.

Usarlas junto con la conjugación es muy potente: si las raíces son w y w^* (y otras), su suma aporta $2\operatorname{Re}(w)$ y su producto aporta $|w|^2$, dos números reales fáciles de manejar.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Una raíz compleja y las demás

La ecuación $z^3 - 5z^2 + 17z - 13 = 0$ tiene por raíz $z = 2 + 3i$.

- Escribe otra raíz no real.
- Halla la raíz real.
- Factoriza $P(z) = z^3 - 5z^2 + 17z - 13$ como producto de un factor lineal y un factor cuadrático, ambos con coeficientes reales.

- Los coeficientes de P son reales, así que la conjugada de $2 + 3i$ también es raíz: $z = 2 - 3i$.
- Las dos raíces conjugadas dan el factor cuadrático real. Su suma es $(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$ y su producto es $2^2 + 3^2 = 13$, luego

$$(z - (2 + 3i))(z - (2 - 3i)) = z^2 - 4z + 13$$

Dividimos $P(z)$ entre $z^2 - 4z + 13$. El cociente es de grado 1, $z + m$, y al desarrollar $(z^2 - 4z + 13)(z + m) = z^3 + (m - 4)z^2 + (13 - 4m)z + 13m$ y comparar con P : el término independiente da $13m = -13$, luego $m = -1$. Comprobación del coeficiente de z^2 : $m - 4 = -5$. Correcto, y también $13 - 4m = 17$. El tercer factor es $z - 1$, así que la raíz real es $z = 1$.

Otra vía: la suma de las tres raíces es $-\frac{-5}{1} = 5$, así que $(2 + 3i) + (2 - 3i) + r = 5$ y $r = 1$.

c) $P(z) = (z - 1)(z^2 - 4z + 13)$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Reconstruir un polinomio real de grado 4

Un polinomio $P(z)$ mónico de grado 4 con coeficientes reales tiene por raíces $2i$ y $3 + i$.

- Escribe las otras dos raíces.
- Halla $P(z)$ desarrollado.
- Factoriza $P(z)$ en $\mathbb{R}$ (factores lineales o cuadráticos con coeficientes reales).

a) Como P tiene coeficientes reales, las conjugadas $-2i$ y $3 - i$ también son raíces. Con las dos dadas hacen las cuatro raíces del polinomio de grado 4, que son todas.

b) Se agrupan las parejas conjugadas:

- Pareja $\pm 2i$: suma 0 y producto $2^2 = 4$, factor $z^2 + 4$.
- Pareja $3 \pm i$: suma 6 y producto $3^2 + 1^2 = 10$, factor $z^2 - 6z + 10$.

Al ser mónico,

$$P(z) = (z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10) = z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 4z^2 - 24z + 40 = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$$

Comprobación con la suma de raíces: $2i - 2i + (3 + i) + (3 - i) = 6$, que coincide con $-\frac{-6}{1} = 6$. El producto de raíces es $40 = (-1)^4 \cdot \frac{40}{1}$, y vale $4 \cdot 10 = 40$.

c) Los dos factores cuadráticos tienen discriminante negativo ($0 - 16 < 0$ y $36 - 40 < 0$), así que no se descomponen más en los reales:

$$P(z) = (z^2 + 4)(z^2 - 6z + 10)$$

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Parámetros con suma y producto de raíces

Considera el polinomio $P(z) = z^4 - 8z^3 + bz^2 + cz + 65$, con $b, c \in \mathbb{R}$. Las cuatro raíces de $P(z) = 0$ no son reales y dos de ellas son $1 + 2i$ y $p + qi$, con $p, q \in \mathbb{R}$, $q > 0$, distinta de $1 + 2i$.

- Halla la suma y el producto de las cuatro raíces.
- Halla p y q .
- Halla b y c .

Como los coeficientes son reales y ninguna raíz es real, las cuatro raíces son dos parejas conjugadas: $1 + 2i$, $1 - 2i$, $p + qi$ y $p - qi$.

a) Con $a_4 = 1$, $a_3 = -8$ y $a_0 = 65$:

$$\text{suma} = -\frac{-8}{1} = 8, \quad \text{producto} = (+1) \cdot \frac{65}{1} = 65$$

b) La suma de las cuatro raíces es $2 \cdot 1 + 2p = 8$, luego $p = 3$. El producto de cada pareja es el cuadrado del módulo: $(1^2 + 2^2)(p^2 + q^2) = 5(9 + q^2) = 65$. Entonces $9 + q^2 = 13$, es decir $q^2 = 4$, y como $q > 0$, $q = 2$. Las raíces son $1 \pm 2i$ y $3 \pm 2i$.

c) Se forman los factores reales de cada pareja: $1 \pm 2i$ da $z^2 - 2z + 5$ y $3 \pm 2i$ da $z^2 - 6z + 13$. Entonces

$$P(z) = (z^2 - 2z + 5)(z^2 - 6z + 13) = z^4 - 8z^3 + (13 + 12 + 5)z^2 + (-26 - 30)z + 65$$

$$P(z) = z^4 - 8z^3 + 30z^2 - 56z + 65$$

y por tanto $b = 30$ y $c = -56$. El coeficiente de z^3 y el término independiente coinciden con los del enunciado, lo que confirma el cálculo.

En el examen: justifica por qué las raíces son dos parejas conjugadas (coeficientes reales y raíces no reales) antes de usar suma y producto: esa frase da los puntos de método. Y escribe la suma con el signo correcto, $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • OLVIDAR LA RAÍZ CONJUGADA

Si te dicen que $z = 1 + 4i$ es raíz de un polinomio real, $1 - 4i$ **también lo es**, aunque el enunciado no lo diga. Al contar las raíces, al reconstruir el polinomio o al calcular la suma y el producto, entra siempre la pareja completa. Un polinomio real de grado 3 con la raíz $1 + 4i$ ya tiene dos raíces ocupadas y solo queda una real.

ERROR TÍPICO • USAR LA CONJUGADA CUANDO LOS COEFICIENTES NO SON REALES

La propiedad de las parejas conjugadas **exige coeficientes reales**. El polinomio $z^2 - (1 + i)z + i = (z - 1)(z - i)$ tiene la raíz i , pero $-i$ **no** es raíz: sustituyendo, $(-i)^2 - (1 + i)(-i) + i = -2 + 2i \neq 0$. Antes de añadir la conjugada, mira los coeficientes: si aparece alguna i , no se puede.

ERROR TÍPICO • ERRORES CON EL SIGNO Y EL COEFICIENTE PRINCIPAL EN SUMA Y PRODUCTO

La suma de raíces es $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, con el signo cambiado y dividida entre a_n . El producto es $(-1)^n \frac{a_0}{a_n}$: para n impar lleva signo menos. En $2z^3 - 6z^2 + 4z - 10$, la suma es 3 y el producto es 5 (no -10 , ni 10 , ni -5 si no divides). Cuando el polinomio no es mónico, comprueba siempre que has dividido entre a_n .

Resumen

- Teorema fundamental del álgebra: un polinomio de grado $n \geq 1$ tiene n raíces complejas (contando repeticiones) y $P(z) = a_n(z - w_1) \cdots (z - w_n)$.
- Si los coeficientes son **reales** y w es raíz, w^* también lo es. Las raíces no reales vienen por parejas $a \pm bi$; un polinomio real de grado impar tiene al menos una raíz real.
- Cada pareja forma un factor real $z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$: suma $2a$, producto $a^2 + b^2$. En $\mathbb{R}$ se factoriza en lineales y cuadráticos sin raíces reales; en $\mathbb{C}$, solo en lineales.
- Para reconstruir un polinomio real: añade las conjugadas de las raíces no reales, agrupa en factores cuadráticos, multiplica y ajusta el coeficiente principal.
- Suma de raíces $= -\frac{a_{n-1}}{a_n}$; producto de raíces $= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$. En grado 2: $-\frac{b}{a}$ y $\frac{c}{a}$.
- Con la CPG (Prueba 2) puedes obtener las raíces complejas en modo complejo, pero escribe siempre el planteamiento.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 6

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Forma binómica, operaciones y ecuaciones con z y z^*

EJERCICIO 1

★ Básico

IB · P1 Noviembre 2001

El número complejo z satisface $i(z + 2) = 1 - 2z$. Escriba z en la forma $z = a + bi$, siendo a y b números reales.

1. Desarrollamos: $iz + 2i = 1 - 2z$.
2. Agrupamos los términos con z : $iz + 2z = 1 - 2i$, es decir, $z(2 + i) = 1 - 2i$.
3. Despejamos: $z = \frac{1 - 2i}{2 + i}$.
4. Multiplicamos por el conjugado del denominador: $z = \frac{(1 - 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i - 4i + 2i^2}{5} = \frac{-5i}{5} = -i$.
5. Comprobación: $i(-i + 2) = 1 + 2i$ y $1 - 2(-i) = 1 + 2i$.

Resultado: $z = 0 - i$

EJERCICIO 2

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2004

Sea z el número complejo dado por $z = 1 + \frac{i}{i - \sqrt{3}}$. Expresa z en la forma $a + bi$, dando los valores **exactos** de las constantes reales a , b .

1. Racionalizamos $\frac{i}{i - \sqrt{3}}$ multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador, $-i - \sqrt{3}$ (es decir, $-\sqrt{3} - i$).
2. Denominador: $(-\sqrt{3} + i)(-\sqrt{3} - i) = 3 + 1 = 4$.
3. Numerador: $i(-\sqrt{3} - i) = -\sqrt{3}i - i^2 = 1 - \sqrt{3}i$.
4. Entonces $\frac{i}{i - \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4}$.
5. Sumamos 1: $z = 1 + \frac{1 - \sqrt{3}i}{4} = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

Resultado: $a = \frac{5}{4}$, $b = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

EJERCICIO 3

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2011

Sabiendo que $\frac{z}{z + 2} = 2 - i$, $z \in \mathbb{C}$, calcule z en la forma $a + ib$.

1. Multiplicamos por $z + 2$ (con $z \neq -2$): $z = (2 - i)(z + 2)$.
2. Desarrollamos: $z = (2 - i)z + 4 - 2i$.
3. Pasamos los términos con z a un lado: $z - (2 - i)z = 4 - 2i$, es decir, $(-1 + i)z = 4 - 2i$.

4. Despejamos y multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $-1 - i$:

$$z = \frac{4 - 2i}{-1 + i} = \frac{(4 - 2i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)} = \frac{-4 - 4i + 2i + 2i^2}{2} = \frac{-6 - 2i}{2} = -3 - i.$$

5. Comprobación: $z + 2 = -1 - i$ y $(2 - i)(-1 - i) = -2 - 2i + i + i^2 = -3 - i = z$.

Resultado: $z = -3 - i$

EJERCICIO 4

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

Sabiendo que z es el número complejo $x + iy$ y que $|z| + z = 6 - 2i$, calcule el valor de x y el valor de y .

1. Con $z = x + iy$: $|z| + z = \sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 6 - 2i$.

2. Igualando partes imaginarias: $y = -2$.

3. Igualando partes reales: $\sqrt{x^2 + 4} + x = 6$, es decir, $\sqrt{x^2 + 4} = 6 - x$.

4. Elevamos al cuadrado (hay que exigir $6 - x \geq 0$): $x^2 + 4 = 36 - 12x + x^2$, luego $12x = 32$ y $x = \frac{8}{3}$.

5. Comprobación: $6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} > 0$ y $\sqrt{\frac{64}{9} + 4} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$. Es válida.

Resultado: $x = \frac{8}{3}$, $y = -2$

EJERCICIO 5

★ Básico

IB · P1 Noviembre 1996

Sean $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ y $z_2 = 1 - i$. Calcule

a) $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$ en la forma $a + ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

b) $|z_1 z_2|$.

a) 1. Producto:

$$z_1 z_2 = (2 + i\sqrt{3})(1 - i) = 2 - 2i + i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 2)i.$$

2. Cociente: multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $1 + i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + i\sqrt{3})(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2}i.$$

b) 1. El módulo de un producto es el producto de los módulos: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. 2. $|z_1| = \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7}$ y $|z_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$. 3. Por tanto, $|z_1 z_2| = \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{14}$.

Resultado: a) $z_1 z_2 = (2 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 2)i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2}i$; b) $|z_1 z_2| = \sqrt{14}$

EJERCICIO 6

★ Básico

IB · P1 Mayo 1997

Los números complejos z y w son $z = -1 + 3i$ y $w = 3 + i$. Expresa zw y $\frac{z}{w}$ en la forma $a + bi$ donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$.

1. Producto: $zw = (-1 + 3i)(3 + i) = -3 - i + 9i + 3i^2$.

2. Con $i^2 = -1$: $zw = -3 - 3 + 8i = -6 + 8i$.

3. Cociente: multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de w , $3 - i$:

$$\frac{z}{w} = \frac{(-1 + 3i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{-3 + i + 9i - 3i^2}{9 + 1}.$$

4. Numerador: $-3 + 3 + 10i = 10i$. Entonces $\frac{z}{w} = \frac{10i}{10} = i$.

Resultado: $zw = -6 + 8i$, $\frac{z}{w} = 0 + 1i$

EJERCICIO 7

★ Básico

IB · P1 Mayo 1999

Sea $z = x + iy$. Calcule los valores de x e y si $(1 - i)z = 1 - 3i$.

1. Despejamos z dividiendo entre $1 - i$:

$$z = \frac{1 - 3i}{1 - i}.$$

2. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $1 + i$:

$$z = \frac{(1 - 3i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + i - 3i - 3i^2}{1 + 1} = \frac{4 - 2i}{2}.$$

3. Simplificamos: $z = 2 - i$. Igualando partes real e imaginaria con $z = x + iy$: $x = 2$, $y = -1$.

Resultado: $x = 2$, $y = -1$

EJERCICIO 8

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2005

Sabiendo que $|z| = 2\sqrt{5}$ halle el número complejo z que satisfaga la ecuación: $\frac{25}{z} - \frac{15}{z^*} = 1 - 8i$.

1. Sea $z = x + iy$. Como $|z| = 2\sqrt{5}$, se cumple $zz^* = |z|^2 = 20$, y por tanto $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{20}$ y $\frac{1}{z^*} = \frac{z}{20}$.

2. Sustituimos en la ecuación:

$$\frac{25z^*}{20} - \frac{15z}{20} = 1 - 8i \Rightarrow 5z^* - 3z = 4 - 32i.$$

3. Con $z = x + iy$: $5(x - iy) - 3(x + iy) = 2x - 8iy = 4 - 32i$.

4. Igualamos partes real e imaginaria: $2x = 4 \Rightarrow x = 2$ y $-8y = -32 \Rightarrow y = 4$.

5. Comprobación del módulo: $|z| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Resultado: $z = 2 + 4i$

EJERCICIO 9

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2008

Demostración

Considere $w = \frac{z}{z^2 + 1}$ donde $z = x + iy$, $y \neq 0$ y $z^2 + 1 \neq 0$. Sabiendo que $\text{Im } w = 0$, compruebe que $|z| = 1$.

1. Como $z \neq 0$ (porque $y \neq 0$), se tiene $w \neq 0$, y w es real si y solo si $\frac{1}{w}$ es real.

2. Calculamos

$$\frac{1}{w} = \frac{z^2 + 1}{z} = z + \frac{1}{z}.$$

3. Como $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$,

$$\frac{1}{w} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

4. Como $\text{Im } w = 0$, $\frac{1}{w}$ es real, luego su parte imaginaria es cero:

$$y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

5. Como $y \neq 0$, debe ser $1 - \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$, es decir, $x^2 + y^2 = 1$.

6. Por tanto $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$.

Queda demostrado.

EJERCICIO 10

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2012

Sabiendo que $(4 - 5i)m + 4n = 16 + 15i$, donde $i^2 = -1$, halle m y n si

- a) m y n son números reales
b) m y n son números complejos conjugados

a) 1. Con $m, n \in \mathbb{R}$, igualamos partes real e imaginaria en $(4 - 5i)m + 4n = 16 + 15i$, es decir, $(4m + 4n) - 5mi = 16 + 15i$. 2. Parte imaginaria: $-5m = 15$, luego $m = -3$. 3. Parte real: $4m + 4n = 16$, luego $-12 + 4n = 16$ y $n = 7$.

b) 1. Sea $m = p + qi$ y $n = p - qi$ (conjugados), con $p, q \in \mathbb{R}$. 2. Calculamos $(4 - 5i)(p + qi) = 4p + 4qi - 5pi + 5q = (4p + 5q) + (4q - 5p)i$ y $4n = 4p - 4qi$. 3. Sumando: $(8p + 5q) + (-5p)i = 16 + 15i$. 4. Parte imaginaria: $-5p = 15$, luego $p = -3$. 5. Parte real: $8p + 5q = 16$, luego $-24 + 5q = 16$ y $q = 8$.

Resultado: a) $m = -3, n = 7$ b) $m = -3 + 8i, n = -3 - 8i$

EJERCICIO 11

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2012

a) Sabiendo que $(x + iy)^2 = -5 + 12i$, $x, y \in \mathbb{R}$. Compruebe que:

(i) $x^2 - y^2 = -5$

(ii) $xy = 6$

b) A partir de lo anterior, halle las dos raíces cuadradas de $-5 + 12i$.

c) Compruebe que para todo número complejo z , $(z^*)^2 = (z^2)^*$.

d) A partir de lo anterior, escriba las dos raíces cuadradas de $-5 - 12i$.

a) 1. Desarrollamos: $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. 2. Igualamos con $-5 + 12i$. 3. Parte real: $x^2 - y^2 = -5$. 4. Parte imaginaria: $2xy = 12$, es decir, $xy = 6$.

b) 1. De $xy = 6$, $y = \frac{6}{x}$. Sustituimos en $x^2 - y^2 = -5$:

$$x^2 - \frac{36}{x^2} = -5 \Rightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0.$$

2. Factorizamos: $(x^2 + 9)(x^2 - 4) = 0$. Como x es real, $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$. 3. Si $x = 2$, $y = 3$. Si $x = -2$, $y = -3$. 4. Las raíces cuadradas son $2 + 3i$ y $-2 - 3i$.

c) 1. Sea $z = x + iy$. Entonces $z^* = x - iy$ y $(z^*)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$. 2. Por otro lado, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, y su conjugado es $(z^2)^* = x^2 - y^2 - 2xyi$. 3. Los dos resultados coinciden.

d) 1. Si $w^2 = -5 + 12i$, conjugando y usando el apartado c): $(w^*)^2 = (w^2)^* = -5 - 12i$. 2. Luego las raíces cuadradas de $-5 - 12i$ son los conjugados de las de $-5 + 12i$.

Resultado: b) $2 + 3i$ y $-2 - 3i$ d) $2 - 3i$ y $-2 + 3i$

Queda demostrado.

EJERCICIO 12

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2013

Un número complejo z viene dado por $z = \frac{a+i}{a-i}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine el conjunto de valores de a para los cuales:

- (i) z es real.
- (ii) z es imaginario puro.

b) Compruebe que $|z|$ es constante para todo valor de a .

a) 1. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $a+i$:

$$z = \frac{(a+i)^2}{(a-i)(a+i)} = \frac{a^2 - 1 + 2ai}{a^2 + 1} = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} + i \frac{2a}{a^2 + 1}.$$

(i) 1. z es real si $\text{Im } z = 0$: $\frac{2a}{a^2 + 1} = 0$. 2. Como $a^2 + 1 \neq 0$, $a = 0$.

(ii) 1. z es imaginario puro si $\text{Re } z = 0$: $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} = 0$. 2. Entonces $a^2 = 1$, es decir, $a = \pm 1$. (En estos casos $\text{Im } z = \pm 1 \neq 0$.)

b) 1. El módulo de un cociente es el cociente de los módulos: $|z| = \frac{|a+i|}{|a-i|}$. 2. $|a+i| = \sqrt{a^2 + 1} = |a-i|$. 3.

Por tanto $|z| = 1$ para todo a .

Resultado: a) i) $a = 0$ ii) $a = -1$ o $a = 1$ b) $|z| = 1$

Queda demostrado.

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2014

Considere los números complejos $u = 2 + 3i$ y $v = 3 + 2i$.

a) Sabiendo que $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{10}{w}$, exprese w en la forma $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Halle w^* y expréselo de la forma $re^{i\theta}$.

a) 1. Sumamos las fracciones: $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv}$. 2. Calculamos $u+v = 5 + 5i$ y $uv = (2+3i)(3+2i) = 6 + 4i + 9i + 6i^2 = 13i$. 3. Entonces $\frac{10}{w} = \frac{5+5i}{13i}$, luego $w = \frac{130i}{5+5i} = \frac{26i}{1+i}$. 4. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador: $w = \frac{26i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{26i + 26}{2} = 13 + 13i$.

b) 1. El conjugado es $w^* = 13 - 13i$. 2. Su módulo es $|w^*| = \sqrt{13^2 + 13^2} = 13\sqrt{2}$. 3. Está en el cuarto cuadrante con parte real igual a la parte imaginaria en valor absoluto, así que $\arg w^* = -\frac{\pi}{4}$. 4. Por tanto $w^* = 13\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

Resultado: a) $w = 13 + 13i$ b) $w^* = 13 - 13i = 13\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

EJERCICIO 14

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 2000

Si z es un número complejo y $|z + 16| = 4|z + 1|$, calcule el valor de $|z|$.

1. Escribimos $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. La condición es $|z + 16| = 4|z + 1|$.

2. Elevamos al cuadrado ambos miembros: $(x + 16)^2 + y^2 = 16[(x + 1)^2 + y^2]$.

3. Desarrollamos: $x^2 + 32x + 256 + y^2 = 16x^2 + 32x + 16 + 16y^2$.

4. Simplificamos: $240 = 15x^2 + 15y^2$, es decir, $x^2 + y^2 = 16$.

5. Como $|z|^2 = x^2 + y^2 = 16$, se tiene $|z| = 4$ (el módulo es positivo).

Resultado: $|z| = 4$

EJERCICIO 15

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

Sabiendo que $(a + i)(2 - bi) = 7 - i$, halle el valor de a y de b , tal que $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Desarrollamos el producto, usando $i^2 = -1$:

$$(a + i)(2 - bi) = 2a - abi + 2i - bi^2 = (2a + b) + (2 - ab)i.$$

2. Igualamos con $7 - i$ las partes real e imaginaria: $2a + b = 7$ y $2 - ab = -1$, es decir, $ab = 3$.

3. De la primera, $b = 7 - 2a$. Sustituimos en la segunda: $a(7 - 2a) = 3$, o sea $2a^2 - 7a + 3 = 0$.

4. Resolvemos: $a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$, así que $a = 3$ o $a = \frac{1}{2}$.

5. Como $a \in \mathbb{Z}$, $a = 3$ y entonces $b = 7 - 6 = 1$. Comprobación: $ab = 3$.

Resultado: $a = 3, b = 1$

EJERCICIO 16

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Sean z_1 y z_2 números complejos. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas,

$$2z_1 + 3z_2 = 7 \quad z_1 + iz_2 = 4 + 4i.$$

Expresa las respuestas en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Eliminamos z_1 . Multiplicamos la segunda ecuación por 2: $2z_1 + 2iz_2 = 8 + 8i$.

2. Restamos esta ecuación de la primera: $(3 - 2i)z_2 = 7 - (8 + 8i) = -1 - 8i$.

3. Despejamos y multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $3 + 2i$:

$$z_2 = \frac{-1 - 8i}{3 - 2i} = \frac{(-1 - 8i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{-3 - 2i - 24i - 16i^2}{13} = \frac{13 - 26i}{13} = 1 - 2i.$$

4. De la segunda ecuación, $z_1 = 4 + 4i - iz_2 = 4 + 4i - i(1 - 2i) = 4 + 4i - i - 2 = 2 + 3i$.

5. Comprobación en la primera: $2(2 + 3i) + 3(1 - 2i) = 4 + 6i + 3 - 6i = 7$.

Resultado: $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 1 - 2i$

EJERCICIO 17

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2011

Sabiendo que $z = \frac{2 - i}{1 + i} - \frac{6 + 8i}{u + i}$, halle los valores de u , $u \in \mathbb{R}$, tales que $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.

1. Simplificamos el primer cociente multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{2 - i}{1 + i} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - 3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

2. Hacemos lo mismo con el segundo cociente (u es real, así que el conjugado de $u + i$ es $u - i$):

$$\frac{6 + 8i}{u + i} = \frac{(6 + 8i)(u - i)}{u^2 + 1} = \frac{(6u + 8) + (8u - 6)i}{u^2 + 1}.$$

3. Separamos la parte real y la imaginaria de z :

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} - \frac{6u+8}{u^2+1}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{3}{2} - \frac{8u-6}{u^2+1}.$$

4. Imponemos $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$:

$$\frac{1}{2} - \frac{6u+8}{u^2+1} = -\frac{3}{2} - \frac{8u-6}{u^2+1} \Rightarrow 2 = \frac{(6u+8) - (8u-6)}{u^2+1} = \frac{14-2u}{u^2+1}.$$

5. Quitamos el denominador ($u^2+1 \neq 0$): $2u^2+2 = 14-2u$, es decir, $u^2+u-6=0$.

6. Factorizamos: $(u-2)(u+3)=0$.

Resultado: $u=2$ o $u=-3$

EJERCICIO 18

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2018

Considere los números complejos distintos $z = a + ib$, $w = c + id$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- a) Halle la parte real de $\frac{z+w}{z-w}$.
- b) Halle el valor de la parte real de $\frac{z+w}{z-w}$ cuando $|z| = |w|$.

- a) 1. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $(a-c) - i(b-d)$:

$$\frac{z+w}{z-w} = \frac{[(a+c) + i(b+d)][(a-c) - i(b-d)]}{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

2. Parte real del numerador (parte real por parte real más parte imaginaria por parte imaginaria):

$$(a+c)(a-c) + (b+d)(b-d) = a^2 - c^2 + b^2 - d^2.$$

3. Por tanto,

$$\operatorname{Re} \frac{z+w}{z-w} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

El denominador no es cero porque $z \neq w$.

- b) 1. Si $|z| = |w|$, entonces $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. 2. El numerador del apartado a) es 0 y el denominador es distinto de 0.

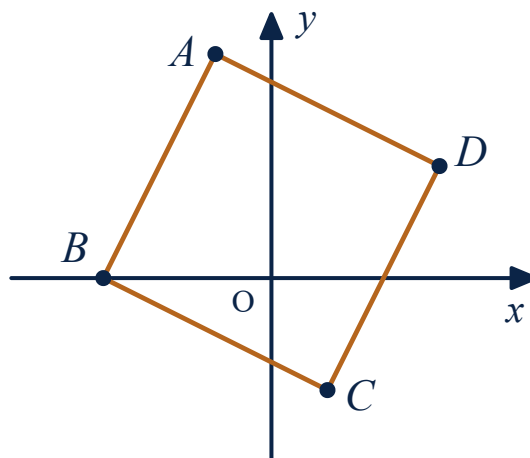
Resultado: a) $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{(a-c)^2 + (b-d)^2}$; b) 0

EJERCICIO 19

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2017

En el siguiente diagrama de Argand, el punto A representa el número complejo $-1 + 4i$ y el punto B representa el número complejo $-3 + 0i$. La forma de ABCD es un cuadrado. Determine los números complejos que representan los puntos C y D.



1. Escribimos los vértices como vectores: $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3) - (-1 + 4i) = -2 - 4i$.
2. El recorrido $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ es en sentido contrario a las agujas del reloj (A arriba, B a la izquierda, C abajo, D a la derecha). Por tanto $\overrightarrow{BC}$ se obtiene girando $\overrightarrow{AB}$ un ángulo de 90° en sentido positivo, que equivale a multiplicar por i :

$$\overrightarrow{BC} = i(-2 - 4i) = 4 - 2i.$$

3. $C = B + \overrightarrow{BC} = -3 + (4 - 2i) = 1 - 2i$.
4. En un cuadrado $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, así que $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1 + 4i) + (4 - 2i) = 3 + 2i$.
5. Comprobación: C queda debajo del eje real y ligeramente a la derecha del eje imaginario, y D a la derecha y por encima del eje real, como en el diagrama.

Resultado: $C = 1 - 2i$, $D = 3 + 2i$

EJERCICIO 20

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1997

Sea $z = 3 + ik$ y $w = k + 7i$, donde $k \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

- a) Expresa $\frac{z}{w}$ en la forma $a + ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.
- b) Para qué valores de k es $\frac{z}{w}$ un número real.

- a) 1. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de w , que es $k - 7i$:

$$\frac{z}{w} = \frac{(3 + ik)(k - 7i)}{(k + 7i)(k - 7i)} = \frac{(3 + ik)(k - 7i)}{k^2 + 49}.$$

2. Numerador: $3k - 21i + ik^2 - 7i^2k = 3k + 7k + i(k^2 - 21) = 10k + i(k^2 - 21)$. 3. Por tanto

$$\frac{z}{w} = \frac{10k}{k^2 + 49} + i \frac{k^2 - 21}{k^2 + 49}.$$

- b) 1. $\frac{z}{w}$ es real cuando su parte imaginaria vale 0: $\frac{k^2 - 21}{k^2 + 49} = 0$. 2. El denominador nunca se anula, así que $k^2 - 21 = 0$, y $k = \pm\sqrt{21}$.

Resultado: a) $\frac{z}{w} = \frac{10k}{k^2 + 49} + i \frac{k^2 - 21}{k^2 + 49}$ b) $k = \pm\sqrt{21}$

EJERCICIO 21

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1998

Si $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, calcule todos los pares ordenados (a, b) tal que $z^2 = -5 + 12i$

1. Desarrollamos el cuadrado: $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

2. Igualamos partes real e imaginaria con $-5 + 12i$:

$$a^2 - b^2 = -5, \quad 2ab = 12 \Rightarrow b = \frac{6}{a}.$$

3. Sustituimos b en la primera ecuación: $a^2 - \frac{36}{a^2} = -5$, es decir, $a^4 + 5a^2 - 36 = 0$.

4. Es una ecuación de segundo grado en a^2 : $(a^2 - 4)(a^2 + 9) = 0$. Como a es real, $a^2 + 9 \neq 0$ y por tanto $a^2 = 4$, $a = \pm 2$.

5. Con $b = \frac{6}{a}$: si $a = 2$, $b = 3$; si $a = -2$, $b = -3$.

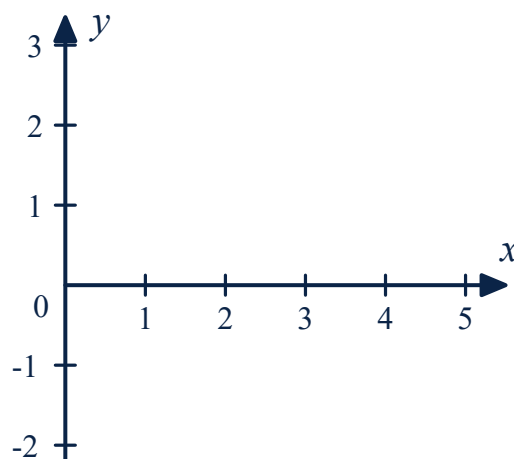
Resultado: $(a, b) = (2, 3)$ y $(a, b) = (-2, -3)$

EJERCICIO 22

★★ Medio

IB · P1 Mayo 1999

En el siguiente diagrama, dibuje el lugar de los puntos $P(x, y)$, representando el número complejo $z = x + iy$, sabiendo que $|z - 4 - 3i| = |z - 2 + i|$.



1. Sean $A = 4 + 3i$, es decir $A(4, 3)$, y $B = 2 - i$, es decir $B(2, -1)$. La condición $|z - A| = |z - B|$ dice que P está a la misma distancia de A que de B : el lugar es la mediatriz del segmento $[AB]$.

2. Lo comprobamos con coordenadas: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$. Desarrollando, $-8x - 6y + 25 = -4x + 2y + 5$, es decir, $x + 2y = 5$.

3. Es una recta. Pasa por el punto medio de AB , que es $(3, 1)$, y es perpendicular a AB (la pendiente de AB es 2 y la de la recta es $-\frac{1}{2}$).

4. Para dibujarla en el diagrama basta marcar dos puntos de la recta que caigan dentro de los ejes, por ejemplo $(1, 2)$ y $(5, 0)$ (también pasa por $(3, 1)$), y unirlos.

Resultado: el lugar es la recta $x + 2y = 5$, es decir, $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ (la mediatriz de $A(4, 3)$ y $B(2, -1)$)

EJERCICIO 23

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2003

El complejo z satisface la ecuación $\sqrt{z} = \frac{2}{1-i} + 1 - 4i$. Expresa z de la forma $x + iy$ donde $x, y \in \mathbb{Z}$.

1. Simplificamos la fracción multiplicando por el conjugado del denominador:

$$\frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i.$$

2. Entonces $\sqrt{z} = 1+i+1-4i = 2-3i$.

3. Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$z = (2-3i)^2 = 4 - 12i + 9i^2 = -5 - 12i.$$

Resultado: $z = -5 - 12i$

EJERCICIO 24

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

Los números complejos $z_1 = \frac{a}{1+i}$ y $z_2 = \frac{b}{1-2i}$ satisfacen la ecuación $z_1 + z_2 = 3$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Calcule el valor de a y el valor de b .

1. Racionalizamos cada fracción: $z_1 = \frac{a(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{a}{2}(1-i)$ y $z_2 = \frac{b(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{b}{5}(1+2i)$.

2. Sumamos: $z_1 + z_2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{5}\right) + \left(-\frac{a}{2} + \frac{2b}{5}\right)i = 3$.

3. Igualamos partes real e imaginaria: $\frac{a}{2} + \frac{b}{5} = 3$ y $-\frac{a}{2} + \frac{2b}{5} = 0$.

4. De la segunda, $a = \frac{4b}{5}$. En la primera: $\frac{2b}{5} + \frac{b}{5} = 3$, es decir, $\frac{3b}{5} = 3$ y $b = 5$.

5. Entonces $a = \frac{4 \cdot 5}{5} = 4$.

Resultado: $a = 4, b = 5$

EJERCICIO 25

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 2003

Considere la ecuación $2(p+iq) = q-ip-2(1-i)$, donde p y q son ambos números reales. Halle p y q .

1. Desarrollamos ambos miembros: $2p + 2qi = (q-2) + (2-p)i$.

2. Dos números complejos son iguales si lo son sus partes real e imaginaria: $2p = q-2$ y $2q = 2-p$.

3. De la primera, $q = 2p+2$. Sustituimos en la segunda: $2(2p+2) = 2-p$, es decir, $4p+4 = 2-p$.

4. Entonces $5p = -2$ y $p = -\frac{2}{5}$.

5. $q = 2\left(-\frac{2}{5}\right) + 2 = \frac{6}{5}$.

6. Comprobación de la segunda ecuación: $2q = \frac{12}{5}$ y $2-p = \frac{12}{5}$.

Resultado: $p = -\frac{2}{5}, q = \frac{6}{5}$

EJERCICIO 26

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2005

Resuelva la siguiente ecuación para z , donde z es un número complejo

$$\frac{z}{3+4i} + \frac{z-1}{5i} = \frac{5}{3-4i}.$$

Dé su respuesta en la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Racionalizamos los denominadores: $\frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{25}$, $\frac{1}{5i} = -\frac{i}{5}$ y $\frac{5}{3-4i} = \frac{5(3+4i)}{25} = \frac{3+4i}{5}$.
2. Multiplicamos toda la ecuación por 25: $z(3-4i) - 5i(z-1) = 5(3+4i)$.
3. Desarrollamos: $(3-4i)z - 5iz + 5i = 15 + 20i$, es decir, $(3-9i)z = 15 + 15i$.
4. Despejamos: $z = \frac{15(1+i)}{3(1-3i)} = \frac{5(1+i)}{1-3i}$.
5. Multiplicamos por el conjugado: $z = \frac{5(1+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1+3i+i-3}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$.
6. Comprobación: $\frac{z}{3+4i} = \frac{1+2i}{5}$ y $\frac{z-1}{5i} = \frac{2+2i}{5}$; su suma es $\frac{3+4i}{5} = \frac{5}{3-4i}$.

Resultado: $z = -1 + 2i$

EJERCICIO 27

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2009

Consideremos los números complejos $z = 1 + 2i$ y $w = 2 + ai$, donde $a \in \mathbb{R}$. Calcule a cuando

- $|w| = 2|z|$;
- $\operatorname{Re}(zw) = 2\operatorname{Im}(zw)$.

1. $|z| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ y $|w| = \sqrt{4+a^2}$. 2. La condición $|w| = 2|z|$ da $\sqrt{4+a^2} = 2\sqrt{5}$. Elevamos al cuadrado: $4+a^2 = 20$. 3. Entonces $a^2 = 16$ y $a = \pm 4$.
1. Calculamos el producto: $zw = (1+2i)(2+ai) = 2+ai+4i+2ai^2 = (2-2a) + (a+4)i$. 2. La condición $\operatorname{Re}(zw) = 2\operatorname{Im}(zw)$ da $2-2a = 2(a+4)$. 3. Entonces $2-2a = 2a+8$, luego $-4a = 6$ y $a = -\frac{3}{2}$.

Resultado: a) $a = \pm 4$ b) $a = -\frac{3}{2}$

EJERCICIO 28

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2022

Considere los números complejos $z_1 = 1 + bi$ y $z_2 = (1 - b^2) - 2bi$, donde $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

- Calcule una expresión para $z_1 z_2$ en función de b .
- Usando lo anterior, sabiendo que $\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4}$, calcule el valor de b .

1. Multiplicamos: $z_1 z_2 = (1+bi)((1-b^2)-2bi) = (1-b^2) - 2bi + bi(1-b^2) - 2b^2 i^2$. 2. Con $i^2 = -1$: parte real $= (1-b^2) + 2b^2 = 1+b^2$; parte imaginaria $= -2b + b - b^3 = -b - b^3 = -b(1+b^2)$. 3. Luego $z_1 z_2 = (1+b^2) - b(1+b^2)i = (1+b^2)(1-bi)$.
1. Como $1+b^2 > 0$, multiplicar por ese factor no cambia el argumento: $\arg(z_1 z_2) = \arg(1-bi)$. 2. Para que $\arg(1-bi) = \frac{\pi}{4}$ hace falta que la parte real y la imaginaria sean iguales y positivas (primer cuadrante, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$): $-b = 1$. 3. Entonces $b = -1$. Comprobación: $z_1 z_2 = 2(1+i)$, de argumento $\frac{\pi}{4}$.

Resultado: a) $z_1 z_2 = (1+b^2)(1-bi)$ b) $b = -1$

EJERCICIO 29

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

Considere el número complejo $w = \frac{z+i}{z+2}$, donde $i = \sqrt{-1}$ y $z = x + iy$.

- a) Si $w = i$, determine z y expréselo de la forma $z = r \operatorname{cis} \theta$.
- b) Demuestre que $w = \frac{(x^2 + 2x + y^2 + y) + i(x + 2y + 2)}{(x+2)^2 + y^2}$.
- c) A partir de lo anterior, compruebe que cuando $\operatorname{Re}(w) = 1$ los puntos (x, y) pertenecen a una recta L_1 , y escriba la pendiente de dicha recta.
- d) Sabiendo que $\arg(z) = \arg(w) = \frac{\pi}{4}$, halle $|z|$.

- a) 1. Imponemos $w = i$: $\frac{z+i}{z+2} = i$, luego $z+i = iz+2i$. 2. Agrupamos: $z-iz = i$, es decir, $z(1-i) = i$. 3. Despejamos y multiplicamos por el conjugado del denominador:

$$z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+i}{2}.$$

4. Módulo: $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 5. Argumento: z está en el segundo cuadrante y $\tan \theta = \frac{1/2}{-1/2} = -1$, luego $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

- b) 1. Con $z = x + iy$: $w = \frac{x+i(y+1)}{(x+2)+iy}$. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $(x+2) - iy$. 2. Denominador: $(x+2)^2 + y^2$. 3. Numerador:

$$(x+i(y+1))((x+2)-iy) = x(x+2) - ixy + i(y+1)(x+2) + y(y+1).$$

4. Parte real: $x^2 + 2x + y^2 + y$. Parte imaginaria: $-xy + (y+1)(x+2) = -xy + xy + 2y + x + 2 = x + 2y + 2$. 5. Por tanto $w = \frac{(x^2 + 2x + y^2 + y) + i(x + 2y + 2)}{(x+2)^2 + y^2}$.

- c) 1. $\operatorname{Re}(w) = 1$ significa $x^2 + 2x + y^2 + y = (x+2)^2 + y^2$ (con $(x+2)^2 + y^2 \neq 0$). 2. Desarrollamos el segundo miembro: $x^2 + 2x + y^2 + y = x^2 + 4x + 4 + y^2$. 3. Simplificamos: $y = 2x + 4$. Es la ecuación de una recta L_1 . 4. La pendiente es 2.
- d) 1. Como $\arg z = \frac{\pi}{4}$, $x = y = t$ con $t > 0$. 2. Como $\arg w = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Re}(w) = \operatorname{Im}(w) > 0$, y los denominadores coinciden, luego $x^2 + 2x + y^2 + y = x + 2y + 2$. 3. Sustituimos $x = y = t$: $2t^2 + 3t = 3t + 2$, es decir, $t^2 = 1$. 4. Como $t > 0$, $t = 1$ y $z = 1 + i$. (Comprobación: $\operatorname{Re}(w)$ y $\operatorname{Im}(w)$ tienen numeradores 5 y 5, positivos.) 5. $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Resultado: a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$ b) demostrado c) pendiente 2 d) $|z| = \sqrt{2}$

Queda demostrado.

EJERCICIO 30

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2014

La sucesión geométrica $\{u_n\}$, de términos complejos, está definida por $u_{n+1} = (1+i)u_n$, y $u_1 = 3$.

- a) Calcule el cuarto término de la sucesión, dando su respuesta en la forma $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Calcule la suma de los 20 primeros términos de $\{u_n\}$, dando su respuesta en la forma $ai(1+2^m)$ donde $a \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{Z}$ hay que determinar. Una segunda sucesión $\{v_n\}$ está definida por $v_n = u_n u_{n+k}$, $k \in \mathbb{N}$.
- c) i) Muestre que $\{v_n\}$ es una sucesión geométrica.
ii) Indique el primer término.
iii) Muestre que la razón común es independiente de k . Una tercera sucesión $\{w_n\}$ está definida por $w_n = |u_n - u_{n+1}|$.
- d) Muestre que $\{w_n\}$ es una sucesión geométrica.

- a) 1. La sucesión es geométrica de primer término $u_1 = 3$ y razón $r = 1+i$, así que $u_n = 3(1+i)^{n-1}$. 2. Calculamos $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ y $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i$. 3. Entonces $u_4 = 3(1+i)^3 = 3(-2+2i) = -6+6i$.

- b) 1. La suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica es $S_n = u_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$. Con $n = 20$:

$$S_{20} = 3 \cdot \frac{(1+i)^{20} - 1}{(1+i) - 1} = \frac{3[(1+i)^{20} - 1]}{i}.$$

2. Como $(1+i)^2 = 2i$, resulta $(1+i)^{20} = (2i)^{10} = 2^{10}i^{10} = 1024 \cdot (-1) = -1024$. 3. Sustituimos: $S_{20} = \frac{3(-1024-1)}{i} = \frac{-3075}{i} = 3075i$, porque $\frac{1}{i} = -i$. 4. Como $3075 = 3 \cdot 1025 = 3(1+2^{10})$, se tiene $S_{20} = 3i(1+2^{10})$.

- c) i) 1. Escribimos $v_n = u_n u_{n+k} = 3(1+i)^{n-1} \cdot 3(1+i)^{n+k-1} = 9(1+i)^{2n+k-2}$. 2. El cociente de dos términos consecutivos es

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{9(1+i)^{2n+k}}{9(1+i)^{2n+k-2}} = (1+i)^2 = 2i,$$

constante. Por tanto $\{v_n\}$ es una sucesión geométrica.

- ii) El primer término es $v_1 = u_1 u_{1+k} = 3 \cdot 3(1+i)^k = 9(1+i)^k$.

- iii) La razón común es $2i$, que no depende de k .

- d) 1. Tenemos $u_n - u_{n+1} = u_n - (1+i)u_n = -i u_n$. 2. Tomamos módulos: $w_n = |-i| |u_n| = |u_n| = 3|1+i|^{n-1} = 3(\sqrt{2})^{n-1}$. 3. El cociente $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{2}$ es constante, así que $\{w_n\}$ es una sucesión geométrica de primer término 3 y razón $\sqrt{2}$.

Resultado: a) $u_4 = -6 + 6i$ b) $S_{20} = 3i(1+2^{10})$, es decir, $a = 3$, $m = 10$ c) ii) $v_1 = 9(1+i)^k$; razón común $2i$ d) $\{w_n\}$ es geométrica de razón $\sqrt{2}$. **Queda demostrado.**

Forma polar y exponencial

EJERCICIO 31

★ Básico

IB · P1 Mayo 2001

Sabiendo que $z = (b+i)^2$, donde b es real y positivo, halle el valor exacto de b cuando $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

1. Desarrollamos el cuadrado: $z = (b+i)^2 = b^2 + 2bi + i^2 = (b^2 - 1) + 2bi$.

2. Como $\arg z = \frac{\pi}{3}$, el número está en el primer cuadrante y $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$:

$$\frac{2b}{b^2 - 1} = \sqrt{3}, \quad b^2 - 1 > 0.$$

3. Quitamos denominadores: $\sqrt{3}b^2 - 2b - \sqrt{3} = 0$.

4. Fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$b = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2\sqrt{3}} = \frac{2 \pm 4}{2\sqrt{3}} \Rightarrow b = \sqrt{3} \text{ o } b = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. Como $b > 0$, queda $b = \sqrt{3}$. Comprobación: $b^2 - 1 = 2 > 0$ y $\operatorname{Im} z = 2\sqrt{3} > 0$, así que $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ tiene argumento $\frac{\pi}{3}$.

Resultado: $b = \sqrt{3}$

EJERCICIO 32

★ Básico

IB · P1 Mayo 1998

Expresa el número complejo $z = -2 + i2\sqrt{3}$ en la forma $re^{i\theta}$ donde $\theta \in \mathbb{R}$, y $r > 0$.

1. Módulo: $r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$.

2. El punto $(-2, 2\sqrt{3})$ está en el segundo cuadrante. El ángulo de referencia cumple $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, luego $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3. Argumento: $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

4. Comprobación: $4 \cos \frac{2\pi}{3} = -2$ y $4 \sin \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$.

Resultado: $z = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

EJERCICIO 33

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2006

Sea $z_1 = r \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ y $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

a) Escriba z_2 en forma módulo-argumental.

b) Halle el valor de r si $|z_1 z_2^3| = 2$

a) 1. Módulo: $|z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. 2. Argumento: $\tan \theta = \sqrt{3}$ y z_2 está en el primer cuadrante, luego $\theta = \frac{\pi}{3}$. 3. Por tanto $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

b) 1. El módulo de un producto es el producto de los módulos, y el de una potencia es la potencia del módulo: $|z_1 z_2^3| = |z_1| |z_2|^3$. 2. Con $|z_1| = r$ y $|z_2| = 2$: $r \cdot 2^3 = 2$. 3. Entonces $8r = 2$ y $r = \frac{1}{4}$.

Resultado: a) $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ b) $r = \frac{1}{4}$

EJERCICIO 34

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2011

Los números complejos $z_1 = 2 - 2i$ y $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ están representados en un diagrama de Argand mediante los puntos A y B, respectivamente. Sabiendo que O es el origen,

- a) Halle AB, exprese la respuesta de la forma $a\sqrt{b - \sqrt{3}}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.
b) Calcule $\widehat{AOB}$ en función de π .

- a) 1. Los puntos son $A(2, -2)$ y $B(1, -\sqrt{3})$. 2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 2 - \sqrt{3})$. 3. Calculamos su módulo:

$$AB^2 = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 1 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} = 4(2 - \sqrt{3}).$$

4. Luego $AB = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, de la forma pedida con $a = 2$ y $b = 2$.

- b) 1. A está en el cuarto cuadrante y $\tan(\arg z_1) = \frac{-2}{2} = -1$, así que $\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$. 2. B también está en el cuarto cuadrante y $\tan(\arg z_2) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$, así que $\arg z_2 = -\frac{\pi}{3}$. 3. El ángulo $\widehat{AOB}$ es la diferencia de los argumentos:

$$\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Resultado: a) $AB = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ b) $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{12}$

EJERCICIO 35

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2006

Sea $z_1 = r \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ y $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

- a) Escriba z_2 en la forma módulo-argumental.
b) Halle el valor de r si $|z_1 \cdot z_2^3| = 2$.

- a) 1. Para $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$: $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$. 2. Está en el primer cuadrante y $\tan \theta = \sqrt{3}$, luego $\arg z_2 = \frac{\pi}{3}$. 3. Por tanto $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

- b) 1. El módulo de un producto es el producto de los módulos: $|z_1 z_2^3| = |z_1| |z_2|^3$. 2. Aquí $|z_1| = r$ y $|z_2|^3 = 2^3 = 8$, así que $8r = 2$. 3. Despejamos: $r = \frac{1}{4}$.

Resultado: a) $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ b) $r = \frac{1}{4}$

EJERCICIO 36

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2005

Los números complejos z_1 y z_2 son $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + i$.

- a) Halle $z_1 \cdot z_2$, expresando su respuesta en la forma $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.
b) La forma polar de z_1 se puede escribir $\left(\sqrt{5}, \arctan \frac{1}{2} \right)$.
(i) Exprese la forma polar de z_2 y de $z_1 \cdot z_2$ de forma similar.
(ii) A partir de lo anterior, compruebe que $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

- a) 1. Desarrollamos, con $i^2 = -1$: $z_1 z_2 = (2 + i)(3 + i) = 6 + 2i + 3i + i^2 = 5 + 5i$.

b) i) 1. $z_2 = 3 + i$: módulo $\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, y está en el primer cuadrante con $\tan \theta = \frac{1}{3}$, luego argumento $\arctan \frac{1}{3}$. Forma polar: $(\sqrt{10}, \arctan \frac{1}{3})$. 2. $z_1 z_2 = 5 + 5i$: módulo $\sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$, primer cuadrante con $\tan \theta = 1$, luego argumento $\frac{\pi}{4}$. Forma polar: $(5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

(ii) 1. Al multiplicar números complejos se multiplican los módulos y se suman los argumentos. Los módulos cumplen $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. 2. Los argumentos de z_1 y z_2 son positivos y menores que $\frac{\pi}{2}$, así que su suma está en $]0, \pi[$ y es el argumento principal de $z_1 z_2$. Por tanto, $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}.$$

Resultado: a) $z_1 z_2 = 5 + 5i$; b) i) $z_2 = (\sqrt{10}, \arctan \frac{1}{3})$, $z_1 z_2 = (5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$. Queda demostrado.

EJERCICIO 37

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2011

Los números complejos z_1 y z_2 tienen argumentos comprendidos entre 0 y π radianes. Sabiendo que $z_1 \cdot z_2 = -\sqrt{3} + i$ y que $\frac{z_1}{z_2} = 2i$, halle el módulo y el argumento de z_1 y de z_2 .

1. Al multiplicar complejos se multiplican los módulos y se suman los argumentos; al dividir, se dividen los módulos y se restan los argumentos.

2. Del producto: $|z_1 z_2| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2$. Está en el segundo cuadrante con $\tan \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, luego $\arg(z_1 z_2) = \frac{5\pi}{6}$.

3. Del cociente: $|2i| = 2$ y $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$.

4. Módulos: $|z_1| |z_2| = 2$ y $\frac{|z_1|}{|z_2|} = 2$. Multiplicando ambas igualdades, $|z_1|^2 = 4$, así que $|z_1| = 2$ y $|z_2| = 1$.

5. Argumentos: sean $\alpha = \arg z_1$ y $\beta = \arg z_2$, ambos en $[0, \pi]$. Entonces $\alpha + \beta \in [0, 2\pi]$ y $\alpha - \beta \in [-\pi, \pi]$, con

$$\alpha + \beta = \frac{5\pi}{6}, \quad \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

(los argumentos coinciden salvo múltiplos de 2π , pero cualquier otro valor se sale de los intervalos permitidos).

6. Sumando: $2\alpha = \frac{4\pi}{3}$, luego $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Restando: $2\beta = \frac{\pi}{3}$, luego $\beta = \frac{\pi}{6}$.

Resultado: $|z_1| = 2$, $\arg z_1 = \frac{2\pi}{3}$, $|z_2| = 1$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$

EJERCICIO 38

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2012

Sea $\omega = \cos \theta + i \sin \theta$. Calcule, en función de θ , el módulo y el argumento de $(1 - \omega^2)^*$.

1. Como $\omega = \cos \theta + i \sin \theta$, por De Moivre $\omega^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$.

2. Por tanto $1 - \omega^2 = (1 - \cos 2\theta) - i \sin 2\theta$. El conjugado es

$$(1 - \omega^2)^* = (1 - \cos 2\theta) + i \sin 2\theta.$$

3. Usamos $1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$ y $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$:

$$(1 - \omega^2)^* = 2 \sin \theta (\sin \theta + i \cos \theta).$$

4. Como $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ y $\cos \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$:

$$(1 - \omega^2)^* = 2 \sin \theta \operatorname{cis}(\frac{\pi}{2} - \theta).$$

5. El módulo es $|2 \operatorname{sen} \theta| = 2|\operatorname{sen} \theta|$. El argumento es $\frac{\pi}{2} - \theta$ cuando $\operatorname{sen} \theta > 0$, por ejemplo para $0 < \theta < \pi$ (si $\operatorname{sen} \theta < 0$, el factor negativo suma π al ángulo).

6. Comprobación del módulo: $|1 - \omega^2|^2 = (1 - \cos 2\theta)^2 + \operatorname{sen}^2 2\theta = 2 - 2 \cos 2\theta = 4 \operatorname{sen}^2 \theta$.

Resultado: $|(1 - \omega^2)^*| = 2|\operatorname{sen} \theta|$, $\arg(1 - \omega^2)^* = \frac{\pi}{2} - \theta$

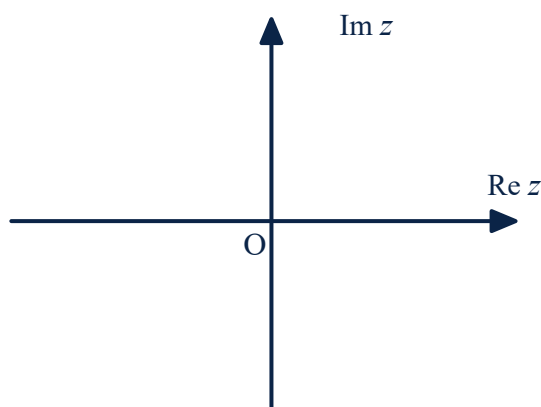
EJERCICIO 39

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2019

Sea $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ y sea $\arg z = \theta$.

a) Muestre los puntos que representan a z y $z - 2a$ en el siguiente diagrama de Argand.



b) Encuentre una expresión en función de θ para

(i) $\arg(z - 2a)$;

(ii) $\arg\left(\frac{z}{z - 2a}\right)$.

c) Usando lo anterior, o de otro modo calcule el valor de θ para el cual $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z - 2a}\right) = 0$.

a) 1. Como $a, b > 0$, el punto $z = a + bi$ está en el primer cuadrante, con coordenadas (a, b) . 2. $z - 2a = -a + bi$ tiene coordenadas $(-a, b)$: es el simétrico de z respecto al eje imaginario, en el segundo cuadrante y a la misma altura b . 3. Los dos puntos están a la misma distancia del eje imaginario y sus vectores de posición tienen el mismo módulo.

b) i) 1. $z - 2a = -a + bi$ es el simétrico de z respecto al eje imaginario. 2. El simétrico de un punto con argumento θ respecto al eje imaginario tiene argumento $\pi - \theta$ (queda en el segundo cuadrante, y $\pi - \theta \in]\pi/2, \pi[$).

Luego $\arg(z - 2a) = \pi - \theta$.

(ii) 1. El argumento de un cociente es la diferencia de argumentos:

$$\arg \frac{z}{z - 2a} = \arg z - \arg(z - 2a) = \theta - (\pi - \theta) = 2\theta - \pi.$$

2. Como $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, se cumple $-\pi < 2\theta - \pi < 0$, así que es el argumento principal.

c) 1. Además, $|z - 2a| = |z|$, luego $\frac{z}{z - 2a}$ tiene módulo 1 y su argumento es $2\theta - \pi$. 2. Un número complejo no nulo tiene parte real 0 si su argumento es $\pm \frac{\pi}{2}$. 3. Con $2\theta - \pi = -\frac{\pi}{2}$ se obtiene $\theta = \frac{\pi}{4}$. La otra posibilidad, $2\theta - \pi = \frac{\pi}{2}$, da $\theta = \frac{3\pi}{4}$, que no está en $]0, \pi/2[$.

Resultado: b) i) $\arg(z - 2a) = \pi - \theta$; ii) $\arg \frac{z}{z - 2a} = 2\theta - \pi$; c) $\theta = \frac{\pi}{4}$

EJERCICIO 40

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2018

Considere el número complejo $z = \frac{2+7i}{6+2i}$.

- Expresar z en la forma $a+ib$, donde $a, b \in \mathbb{Q}$.
- Halle el valor exacto del módulo de z .
- Halle el argumento de z , con una aproximación de 4 lugares decimales.

1. Multiplicamos por el conjugado del denominador:

$$z = \frac{(2+7i)(6-2i)}{(6+2i)(6-2i)} = \frac{12-4i+42i-14i^2}{36+4} = \frac{26+38i}{40}.$$

2. Simplificando, $z = \frac{13}{20} + \frac{19}{20}i$.

1. Con el resultado anterior:

$$|z| = \sqrt{\frac{169}{400} + \frac{361}{400}} = \sqrt{\frac{530}{400}} = \frac{\sqrt{530}}{20}.$$

2. Comprobación con el cociente de módulos: $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{53}{40}} = \frac{\sqrt{530}}{20}.$

1. La parte real y la imaginaria son positivas, así que z está en el primer cuadrante y el argumento es

$$\arg z = \arctan \frac{19/20}{13/20} = \arctan \frac{19}{13}.$$

2. Con la calculadora (en radianes), $\arg z \approx 0,9707$.

Resultado: a) $z = \frac{13}{20} + \frac{19}{20}i$; b) $|z| = \frac{\sqrt{530}}{20}$; c) $\arg z \approx 0,9707$ rad

EJERCICIO 41

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

Considere los números complejos $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 + i$ y $w = \frac{z_1}{z_2}$.

- Expresando z_1 y z_2 en forma de módulo-argumento escriba
 - el módulo de w
 - el argumento de w .
- Calcule el menor valor del entero positivo n para el cual w^n es un número real.

1. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$: $|z_1| = \sqrt{1+3} = 2$, y está en el primer cuadrante con $\tan \theta = \sqrt{3}$, luego $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$. Así $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$. 2. $z_2 = 1 + i$: $|z_2| = \sqrt{2}$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{4}$. Así $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$. 3. Al dividir se dividen los módulos y se restan los argumentos:

$$w = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{12}.$$

4. (i) $|w| = \sqrt{2}$. (ii) $\arg w = \frac{\pi}{12}$.

1. Por el teorema de De Moivre, $w^n = (\sqrt{2})^n \operatorname{cis} \frac{n\pi}{12}$. 2. Es real cuando su parte imaginaria es cero, es decir, $\sin \frac{n\pi}{12} = 0$, o sea $\frac{n\pi}{12} = k\pi$ con k entero. 3. Entonces $n = 12k$, y el menor entero positivo es $n = 12$.

Resultado: a) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\frac{\pi}{12}$ b) $n = 12$

EJERCICIO 42

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

El triángulo OAB tiene vértices en los puntos $O(0,0)$, $A(2, \sqrt{3})$ y $B(\sqrt{3}, 2)$. Se rota el triángulo $\frac{\pi}{3}$ radianes sobre el origen, de modo que la imagen de A es A' y la imagen de B es B' . Halle el valor exacto de las coordenadas de:

- a) A' .
b) B' .

- a) 1. Girar $\frac{\pi}{3}$ (en sentido antihorario) alrededor del origen transforma (x, y) en $(x \cos \frac{\pi}{3} - y \sin \frac{\pi}{3}, x \sin \frac{\pi}{3} + y \cos \frac{\pi}{3})$, con $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ y $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. Para $A(2, \sqrt{3})$: $x' = 2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$. 3. $y' = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
b) 1. Para $B(\sqrt{3}, 2)$: $x' = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2. $y' = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$.
Resultado: a) $A' \left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ b) $B' \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} \right)$

EJERCICIO 43

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2008

Encuentre, en su forma más simple, el argumento de $(\sin \theta + i(1 - \cos \theta))^2$ donde θ es un ángulo agudo.

1. Usamos las fórmulas del ángulo doble: $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ y $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

2. Entonces

$$\sin \theta + i(1 - \cos \theta) = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

3. Como θ es agudo, $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$ y $2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$. Es un módulo positivo, así que el argumento del número es $\frac{\theta}{2}$.

4. Al elevar al cuadrado, el módulo se eleva al cuadrado y el argumento se duplica (teorema de De Moivre): $(\sin \theta + i(1 - \cos \theta))^2 = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} (\cos \theta + i \sin \theta)$.

5. El argumento es θ , que está en $]-\pi, \pi]$.

Resultado: $\arg = \theta$

EJERCICIO 44

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2009

Si z es un número complejo no cero, definimos $L(z)$ por la ecuación $L(z) = \ln|z| + i \arg(z)$, $0 \leq \arg(z) < 2\pi$.

- a) Muestre que cuando z es un número real positivo, $L(z) = \ln z$.
b) Utilice la ecuación para calcular i) $L(-1)$; ii) $L(1 - i)$; iii) $L(-1 + i)$.
c) Usando lo anterior, muestre que la propiedad $L(z_1 z_2) = L(z_1) + L(z_2)$ no se cumple para todos los valores de z_1 y z_2 .

- a) 1. Si z es real positivo, $|z| = z$. 2. Su argumento es 0, que está en $[0, 2\pi[$. 3. Entonces $L(z) = \ln z + i \cdot 0 = \ln z$.
b) i) 1. $|-1| = 1$ y $\arg(-1) = \pi$. 2. $L(-1) = \ln 1 + i\pi = i\pi$.

- b) ii) 1. $|1 - i| = \sqrt{2}$. El punto $(1, -1)$ está en el cuarto cuadrante, con ángulo $-\frac{\pi}{4}$. Con $0 \leq \arg < 2\pi$, $\arg(1 - i) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. 2. $L(1 - i) = \ln \sqrt{2} + \frac{7\pi}{4}i = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{7\pi}{4}i$.
- b) iii) 1. $|-1 + i| = \sqrt{2}$. El punto $(-1, 1)$ está en el segundo cuadrante: $\arg = \frac{3\pi}{4}$. 2. $L(-1 + i) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{4}i$.
- c) 1. Tomamos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = -1 + i$. Su producto es $z_1 z_2 = (1 - i)(-1 + i) = -1 + i + i - i^2 = 2i$. 2. $|2i| = 2$ y $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$, así que $L(z_1 z_2) = \ln 2 + \frac{\pi}{2}i$. 3. Por otro lado, $L(z_1) + L(z_2) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{7\pi}{4}i + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{4}i = \ln 2 + \frac{5\pi}{2}i$. 4. Las partes imaginarias son distintas ($\frac{\pi}{2} \neq \frac{5\pi}{2}$), luego $L(z_1 z_2) \neq L(z_1) + L(z_2)$. La propiedad no se cumple en general.

Resultado: b) i) $L(-1) = i\pi$; ii) $L(1 - i) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{7\pi}{4}i$; iii) $L(-1 + i) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{4}i$. Queda demostrado (a y c).

EJERCICIO 45

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2021

Demostración

Considere $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, donde $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$.

Muestre que $\operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = 0$.

1. Como $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, se cumple $|z| = 1$ y $z^* = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$, con $zz^* = |z|^2 = 1$.

2. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $1 - z^*$:

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-z^*)}{(1-z)(1-z^*)}.$$

3. El denominador es $1 - z - z^* + zz^* = 2 - (z + z^*) = 2 - 2 \cos \theta$. Es real y distinto de cero, porque $z \neq 1$.

4. El numerador es $1 - z^* + z - zz^* = 1 - 1 + (z - z^*) = z - z^* = 2i \operatorname{sen} \theta$.

5. Entonces $\frac{1+z}{1-z} = \frac{2i \operatorname{sen} \theta}{2 - 2 \cos \theta} = \frac{i \operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$, un número imaginario puro.

6. Por tanto $\operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = 0$.

Queda demostrado.

EJERCICIO 46

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2021

Considere los números complejos

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5} \right) \quad \text{y} \quad w = 8 \left(\cos \frac{2k\pi}{5} - i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5} \right), \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

a) Calcule el módulo de zw .

b) Calcule el argumento de zw en función de k .

Supongamos que $zw \in \mathbb{Z}$.

c) i) Calcule el mínimo valor de k . ii) Para el valor de k encontrado en el apartado (i), calcule zw .

a) 1. El módulo de un producto es el producto de los módulos: $|zw| = |z||w| = 2 \cdot 8$.

b) 1. Escribimos w en forma polar: $w = 8 \left(\cos \frac{2k\pi}{5} - i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5} \right) = 8 \left(\cos \left(-\frac{2k\pi}{5} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{2k\pi}{5} \right) \right)$, así que $\arg w = -\frac{2k\pi}{5}$. 2. El argumento de un producto es la suma de los argumentos: $\arg(zw) = \frac{\pi}{5} - \frac{2k\pi}{5} = \frac{(1-2k)\pi}{5}$.

- c) i) 1. zw es entero cuando es real, es decir, cuando su argumento es múltiplo de π : $\frac{(1-2k)\pi}{5} = m\pi$, con $m \in \mathbb{Z}$, o sea $1-2k = 5m$. 2. Probamos $k = 1, 2, 3, \dots$: $1-2k = -1, -3, -5, \dots$. Los dos primeros no son múltiplos de 5; $k = 3$ da $1-2k = -5$, que sí lo es. 3. El mínimo valor es $k = 3$.
- (ii) 1. Con $k = 3$: $\arg(zw) = \frac{(1-6)\pi}{5} = -\pi$ y $|zw| = 16$. 2. $zw = 16(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = 16(-1 + 0) = -16$.
- Resultado:** a) $|zw| = 16$ b) $\arg(zw) = \frac{(1-2k)\pi}{5}$ c) i) $k = 3$ ii) $zw = -16$

EJERCICIO 47 ★★★ Dificil IB · P2 TZ2 Mayo 2014

- a) Sabiendo que $u = 1 + \sqrt{3}i$ y $v = 1 - i$,
- (i) exprese u y v en forma módulo-argumental.
- (ii) a partir de la anterior, halle $u^3 \cdot v^4$. Los números complejos u y v se representan en un diagrama de Argand mediante el punto A y el punto B, respectivamente. El punto A se rota $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del origen O, convirtiéndose en el punto A'. El punto B se rota $\frac{\pi}{2}$ en el sentido de las agujas del reloj alrededor de O, convirtiéndose en el punto B'.
- b) Halle el área del triángulo OA'B'. Sabiendo que u y v son raíces de la ecuación $z^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$, donde $b, c, d, e \in \mathbb{R}$,
- c) halle los valores de b, c, d y e .

- a) i) 1. Para $u = 1 + \sqrt{3}i$: $|u| = \sqrt{1+3} = 2$. Está en el primer cuadrante y $\tan \theta = \sqrt{3}$, así que $\arg u = \frac{\pi}{3}$. Luego $u = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$. 2. Para $v = 1 - i$: $|v| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Está en el cuarto cuadrante y $\tan \theta = -1$, así que $\arg v = -\frac{\pi}{4}$. Luego $v = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$.
- (ii) 1. Usamos el teorema de De Moivre: $u^3 = 2^3 \operatorname{cis} \pi = 8 \operatorname{cis} \pi$ y $v^4 = (\sqrt{2})^4 \operatorname{cis}(-\pi) = 4 \operatorname{cis}(-\pi)$. 2. Multiplicamos módulos y sumamos argumentos: $u^3 v^4 = 32 \operatorname{cis}(\pi - \pi) = 32 \operatorname{cis} 0 = 32$.
- b) 1. Rotar $\frac{\pi}{2}$ en sentido antihorario suma $\frac{\pi}{2}$ al argumento y no cambia el módulo: A' corresponde a $2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$. 2. Rotar $\frac{\pi}{2}$ en sentido horario resta $\frac{\pi}{2}$: B' corresponde a $\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{3\pi}{4}\right)$. 3. El ángulo entre OA' y OB' es $\frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{19\pi}{12}$, que equivale (por el otro lado) a $2\pi - \frac{19\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$. 4. El área del triángulo es $\frac{1}{2} |OA'| |OB'| \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 75^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{12} + 2}{4} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \approx 1,37$.
- c) 1. Los coeficientes son reales, así que las raíces no reales vienen en pares conjugados. Las cuatro raíces de la ecuación de grado 4 son u, u^*, v y v^* . 2. Para u y u^* : suma = 2, producto = $|u|^2 = 4$. El factor es $z^2 - 2z + 4$. 3. Para v y v^* : suma = 2, producto = $|v|^2 = 2$. El factor es $z^2 - 2z + 2$. 4. Multiplicamos con $t = z^2 - 2z$: $(t+4)(t+2) = t^2 + 6t + 8$. 5. Como $t^2 = z^4 - 4z^3 + 4z^2$, queda $z^4 - 4z^3 + 4z^2 + 6z^2 - 12z + 8 = z^4 - 4z^3 + 10z^2 - 12z + 8$. 6. Comparando coeficientes obtenemos b, c, d, e .

Resultado: a) i) $u = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$, $v = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ii) $u^3 v^4 = 32$ b) Área = $\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \approx 1,37$ c) $b = -4$, $c = 10$, $d = -12$, $e = 8$

EJERCICIO 48

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2007

Sea $u = 1 + \sqrt{3}i$ y $v = 1 + i$, donde $i^2 = -1$.

a) i) Compruebe que $\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$.

(ii) Expresando tanto u como v en forma módulo-argumental, compruebe que $\frac{u}{v} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.

(iii) A partir de lo anterior, halle el valor exacto de $\tan \frac{\pi}{12}$, expresando la respuesta en la forma $a + b\sqrt{3}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

b) Utilice la inducción matemática para demostrar que se cumple que $(1 + \sqrt{3}i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

c) Sea $z = \frac{\sqrt{2}v + u}{\sqrt{2}v - u}$. Calcule $\operatorname{Re} z$.

a) i) 1. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de v , $1 - i$:

$$\frac{u}{v} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i^2}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i.$$

(ii) 1. $u = 1 + \sqrt{3}i$: módulo 2, argumento $\frac{\pi}{3}$ (primer cuadrante, $\tan \theta = \sqrt{3}$). Luego $u = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$. 2. $v = 1 + i$: módulo $\sqrt{2}$, argumento $\frac{\pi}{4}$. Luego $v = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$. 3. Al dividir se dividen los módulos y se restan los argumentos:

$$\frac{u}{v} = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

(iii) 1. Igualamos los resultados de i) y ii). Dividiendo la parte imaginaria entre la real (el factor $\sqrt{2}$ se cancela):

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{(\sqrt{3}-1)/2}{(\sqrt{3}+1)/2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

2. Racionalizamos, multiplicando por $\sqrt{3}-1$:

$$\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

b) Usamos que $1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

1. Caso base, $n = 1$: $2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i$. Se cumple.

2. Hipótesis de inducción: suponemos que para $n = k$ se cumple $(1 + \sqrt{3}i)^k = 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3} \right)$.

3. Para $n = k + 1$:

$$(1 + \sqrt{3}i)^{k+1} = 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3} \right) \cdot 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

4. Multiplicamos y usamos las fórmulas de suma de ángulos:

$$= 2^{k+1} \left[\left(\cos \frac{k\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{k\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \right) + i \left(\sin \frac{k\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{k\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \right) \right] = 2^{k+1} \left(\cos \frac{(k+1)\pi}{3} + i \sin \frac{(k+1)\pi}{3} \right).$$

5. Es la fórmula para $n = k + 1$. Como se cumple para $n = 1$ y, si se cumple para k , se cumple para $k + 1$, por inducción es cierta para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

c) 1. Tenemos $\sqrt{2}v = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, de modo que

$$z = \frac{(\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} + \sqrt{3})i}{(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})i}.$$

2. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $(\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - \sqrt{3})i$. La parte real del numerador resultante es

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (2 - 1) + (2 - 3) = 0.$$

3. El denominador es $|\sqrt{2}v - u|^2$, real y distinto de cero. Luego $\operatorname{Re} z = 0$.

Resultado: a) iii) $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$; c) $\operatorname{Re} z = 0$. **Queda demostrado.**

EJERCICIO 49

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2018

Considere $w = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

a) (i) Expresa w^2 y w^3 en forma de módulo-argumento.

a) (ii) Dibuje en un diagrama de Argand los puntos representados por w^0 , w^1 , w^2 y w^3 . Estos cuatro puntos forman los vértices de un cuadrilátero, Q.

b) Demuestre que el área del cuadrilátero Q es $\frac{21\sqrt{3}}{2}$. Sea $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \right)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Los puntos representados en un diagrama de Argand por $z^0, z^1, z^2, \dots, z^n$ forman los vértices de un polígono P_n .

c) Muestre que el área del polígono P_n se puede expresar en la forma $a(b^n - 1) \sin \frac{\pi}{n}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) (i) 1. Aplicamos De Moivre: $w^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$. 2. $w^2 = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$. 3. $w^3 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$.

a) (ii) 1. $w^0 = 1$ está sobre el eje real positivo, en $(1, 0)$. 2. $w^1 = 1 + i\sqrt{3}$, en $(1, \sqrt{3})$. 3. $w^2 = 4 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2 + 2i\sqrt{3}$, en $(-2, 2\sqrt{3})$. 4. $w^3 = -8$, en $(-8, 0)$, sobre el eje real negativo. 5. Los puntos están a distancias 1, 2, 4, 8 del origen y en las direcciones $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ y π . Unidos en orden (y cerrando el último con el primero a lo largo del eje real) forman el cuadrilátero Q.

b) 1. El origen está sobre el lado que une w^0 y w^3 , así que Q se descompone en tres triángulos con vértice en el origen y lados w^0w^1, w^1w^2, w^2w^3 . 2. Área de un triángulo con dos lados r_1, r_2 y ángulo θ entre ellos: $\frac{1}{2}r_1r_2 \sin \theta$. El ángulo en el origen es $\frac{\pi}{3}$ en los tres. 3. Áreas: $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$; $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$. 4. Suma: $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 16\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$.

c) 1. Ahora $z^k = 2^k \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \right)$, así que $|z^k| = 2^k$ y cada punto avanza un ángulo $\frac{\pi}{n}$ respecto al anterior. El último, z^n , tiene argumento π y está sobre el eje real negativo; el origen queda sobre el lado que une z^0 con z^n . 2. El polígono se descompone en n triángulos con vértice en el origen, de lados 2^k y 2^{k+1} y ángulo $\frac{\pi}{n}$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$. El área del triángulo k es

$$\frac{1}{2} \cdot 2^k \cdot 2^{k+1} \sin \frac{\pi}{n} = 4^k \sin \frac{\pi}{n}.$$

3. Sumamos una serie geométrica de razón 4:

$$\text{Área} = \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 4^k = \sin \frac{\pi}{n} \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3} (4^n - 1) \sin \frac{\pi}{n}.$$

4. Es de la forma pedida con $a = \frac{1}{3}$ y $b = 4$.

Resultado: a) (i) $w^2 = 4 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$, $w^3 = 8 \operatorname{cis} \pi$; c) $a = \frac{1}{3}$, $b = 4$

Queda demostrado.

EJERCICIO 50

★★★ Dificil

IB · P2 TZ1 Mayo 2004

Un número complejo z es tal que $|z| = |z - 3i|$.

- a) Demuestre que la parte imaginaria de z es $\frac{3}{2}$.
- b) Sean z_1 y z_2 los dos posibles valores de z , tales que $|z| = 3$ i) Dibuje un diagrama para mostrar los puntos que representan z_1 y z_2 en el plano complejo, donde z_1 está en el primer cuadrante. ii) Demuestre que $\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$. iii) Calcule $\arg z_2$.
- c) Sabiendo que $\arg \left(\frac{z_1^k z_2}{2i} \right) = \pi$, encuentre el valor de k .

- a) 1. Sea $z = x + yi$. La condición $|z| = |z - 3i|$ equivale a $|z|^2 = |z - 3i|^2$:

$$x^2 + y^2 = x^2 + (y - 3)^2.$$

2. Desarrollamos: $y^2 = y^2 - 6y + 9$, luego $6y = 9$ y $y = \frac{3}{2}$. Así, $\operatorname{Im} z = \frac{3}{2}$.

- b) i) 1. Los dos puntos están sobre la recta horizontal $\operatorname{Im} z = \frac{3}{2}$ y sobre la circunferencia de centro el origen y radio 3. Por simetría, z_1 y z_2 son simétricos respecto del eje imaginario. z_1 está en el primer cuadrante y z_2 , en el segundo. 2. Con $y = \frac{3}{2}$: $x^2 + \frac{9}{4} = 9$, luego $x^2 = \frac{27}{4}$ y $x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Así, $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ y $z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

- (ii) 1. Para z_1 : $\operatorname{sen}(\arg z_1) = \frac{\operatorname{Im} z_1}{|z_1|} = \frac{3/2}{3} = \frac{1}{2}$. 2. Como z_1 está en el primer cuadrante, $\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$.

- (iii) 1. $z_2 = -\overline{z_1}$, simétrico de z_1 respecto del eje imaginario, luego $\arg z_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

- c) 1. El argumento de un producto es la suma de argumentos y el de un cociente es la resta: $\arg \left(\frac{z_1^k z_2}{2i} \right) = k \arg z_1 + \arg z_2 - \arg(2i) = \frac{k\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$. 2. Igualamos a π : $\frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \pi$, luego $\frac{k}{6} = \frac{2}{3}$ y $k = 4$. 3. (Los argumentos pueden diferir en múltiplos de 2π ; el valor positivo más pequeño es $k = 4$ y, en general, $k = 4 + 12m$ con m entero.)

Resultado: a) $\operatorname{Im} z = \frac{3}{2}$ b) $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, $z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; $\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$, $\arg z_2 = \frac{5\pi}{6}$ c) $k = 4$.

Queda demostrado.

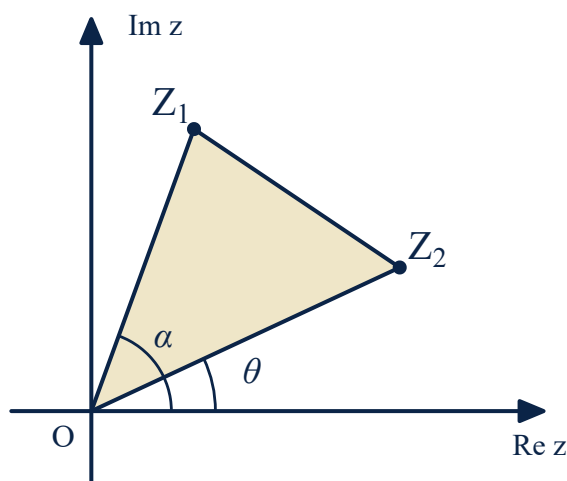
EJERCICIO 51

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2022

Demostración

En el siguiente diagrama de Argand, los puntos Z_1 , O y Z_2 son los vértices del triángulo Z_1OZ_2 , descrito en sentido contrario a las agujas del reloj.



El punto Z_1 representa el número complejo $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$, donde $r_1 > 0$.

El punto Z_2 representa el número complejo $z_2 = r_2 e^{i\theta}$, donde $r_2 > 0$.

Los ángulos α , θ se miden en sentido contrario a las agujas del reloj desde la parte positiva del eje real, de modo tal que $0 \leq \alpha$, $\theta < 2\pi$ y $0 < \alpha - \theta < \pi$.

a) Muestre que $z_1 z_2^* = r_1 r_2 e^{i(\alpha - \theta)}$, donde z_2^* es el número complejo conjugado de z_2 .

b) Sabiendo que $\text{Re}(z_1 z_2^*) = 0$, muestre que $Z_1 O Z_2$ es un triángulo rectángulo.

En los apartados (c), (d) y (e), considere el caso particular en el que $Z_1 O Z_2$ es un triángulo equilátero.

c) i) Exprese z_1 en función de z_2 . ii) A partir de lo anterior, muestre que $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$.

Sean z_1 y z_2 las raíces distintas de la ecuación $z^2 + az + b = 0$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

d) Utilice el resultado del subapartado (c)(ii) para mostrar que $a^2 - 3b = 0$.

Considere la ecuación $z^2 + az + 12 = 0$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$.

e) Sabiendo que $0 < \alpha - \theta < \pi$, deduzca que con el punto O y las raíces de esta ecuación se puede formar un solo triángulo equilátero $Z_1 O Z_2$.

a) 1. El conjugado de $z_2 = r_2 e^{i\theta}$ es $z_2^* = r_2 e^{-i\theta}$ (mismo módulo, argumento opuesto). 2. Multiplicamos: $z_1 z_2^* = r_1 e^{i\alpha} \cdot r_2 e^{-i\theta} = r_1 r_2 e^{i(\alpha - \theta)}$.

b) 1. Por el apartado a): $\text{Re}(z_1 z_2^*) = r_1 r_2 \cos(\alpha - \theta) = 0$. 2. Como $r_1 r_2 > 0$, resulta $\cos(\alpha - \theta) = 0$. 3. Con $0 < \alpha - \theta < \pi$, la única solución es $\alpha - \theta = \frac{\pi}{2}$. 4. $\alpha - \theta$ es el ángulo del triángulo en el vértice O (entre OZ_1 y OZ_2). Vale $\frac{\pi}{2}$, así que $Z_1 O Z_2$ es rectángulo, con el ángulo recto en O.

c) i) 1. Si el triángulo es equilátero, $OZ_1 = OZ_2$, luego $r_1 = r_2$, y el ángulo en O mide $\frac{\pi}{3}$, es decir, $\alpha - \theta = \frac{\pi}{3}$. 2. Entonces $z_1 = r_2 e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} = z_2 e^{i\frac{\pi}{3}}$.

(ii) 1. Sustituimos $z_1 = z_2 e^{i\frac{\pi}{3}}$: $z_1^2 + z_2^2 = z_2^2 (e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1)$ y $z_1 z_2 = z_2^2 e^{i\frac{\pi}{3}}$. 2. Basta ver que $e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$: el primer miembro es $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, que es $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. 3. Por tanto $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$.

d) 1. Por las relaciones de Cardano-Vieta para $z^2 + az + b = 0$: $z_1 + z_2 = -a$ y $z_1 z_2 = b$. 2. Entonces $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = a^2 - 2b$. 3. Por (c)(ii), $a^2 - 2b = z_1 z_2 = b$, luego $a^2 - 3b = 0$.

- e) 1. Con $b = 12$, la condición del apartado d) da $a^2 = 36$, es decir, $a = 6$ o $a = -6$. 2. Las raíces de $z^2 + az + 12 = 0$ son $z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 48}}{2} = \frac{-a \pm i\sqrt{12}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{3}i$ (conjugadas, no reales). 3. Si $a = 6$: las raíces son $-3 \pm \sqrt{3}i$, de módulo $\sqrt{12}$ y argumentos $\frac{5\pi}{6}$ (parte imaginaria positiva) y $\frac{7\pi}{6}$ (parte imaginaria negativa). Tomando z_1 la de argumento $\frac{7\pi}{6}$ y z_2 la de argumento $\frac{5\pi}{6}$: $\alpha - \theta = \frac{\pi}{3}$, que cumple $0 < \alpha - \theta < \pi$. 4. Si $a = -6$: las raíces son $3 \pm \sqrt{3}i$, con argumentos $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{11\pi}{6}$. Ordenadas con $0 \leq \alpha, \theta < 2\pi$, la diferencia es $\pm \frac{5\pi}{3}$, que no está en $]0, \pi[$. No cumple la condición. 5. Solo $a = 6$ cumple $0 < \alpha - \theta < \pi$, así que se forma un único triángulo equilátero $Z_1 O Z_2$.

Queda demostrado.

EJERCICIO 52 ★★★ Difícil IB · P1 TZ0 Noviembre 2022

Sea z_n el número complejo que se define así: $z_n = (n^2 + n + 1) + i$, para $n \in \mathbb{N}$.

- a) i) Halle $\arg(z_0)$. ii) Escriba una expresión que dé $\arg(z_n)$ en función de n .

Sea $w_n = z_0 z_1 z_2 z_3 \dots z_{n-1} z_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

- b) i) Muestre que $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$, para $a, b \in \mathbb{R}^+$, $ab < 1$. ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que $\arg(w_1) = \arctan(2)$
- c) Pruebe mediante inducción matemática que $\arg(w_n) = \arctan(n+1)$, para $n \in \mathbb{N}$.

- a) i) 1. $z_0 = (0 + 0 + 1) + i = 1 + i$, que está en el primer cuadrante con parte real e imaginaria iguales. 2. $\arg(z_0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.
- (ii) 1. La parte real $n^2 + n + 1$ es siempre positiva (primer cuadrante), así que el argumento es el arco tangente del cociente. 2. $\arg(z_n) = \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}$.
- b) i) 1. Sean $A = \arctan a$ y $B = \arctan b$, con $a, b > 0$. Entonces $A, B \in]0, \frac{\pi}{2}[$ y $\tan A = a$, $\tan B = b$. 2. Fórmula de la tangente de una suma: $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{a+b}{1-ab}$. 3. Como $ab < 1$, $a < \frac{1}{b} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right)$, luego $A < \frac{\pi}{2} - B$, es decir, $A+B \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En ese intervalo la tangente es inyectiva, así que $A+B = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$. 4. Es decir, $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.
- (ii) 1. $w_1 = z_0 z_1$ y $z_1 = 3 + i$. Los dos argumentos están en $]0, \frac{\pi}{2}[$, así que $\arg(w_1) = \arg z_0 + \arg z_1 = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{3}$. 2. Aplicamos (i) con $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$ ($ab = \frac{1}{3} < 1$): $\arctan 1 + \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \arctan \frac{4/3}{2/3} = \arctan 2$. 3. Comprobación directa: $w_1 = (1+i)(3+i) = 2 + 4i$, de argumento $\arctan \frac{4}{2} = \arctan 2$.

c) 1. Sea $P(n)$: $\arg(w_n) = \arctan(n+1)$. 2. **Caso base** $n=0$: $w_0 = z_0$ y $\arg(z_0) = \frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan(0+1)$. Se cumple $P(0)$. 3. **Hipótesis de inducción**: suponemos $P(k)$ cierta para algún $k \in \mathbb{N}$: $\arg(w_k) = \arctan(k+1)$. 4. **Paso inductivo**: $w_{k+1} = w_k z_{k+1}$ y $z_{k+1} = ((k+1)^2 + (k+1) + 1) + i = (k^2 + 3k + 3) + i$. Entonces $\arg(w_{k+1}) = \arg(w_k) + \arg(z_{k+1}) = \arctan(k+1) + \arctan \frac{1}{k^2 + 3k + 3}$. (Ambos argumentos están en $]0, \frac{\pi}{2}[$, y su suma queda en $]0, \pi[$, así que es el argumento principal.) 5. Aplicamos (i) con $a = k+1$ y $b = \frac{1}{k^2 + 3k + 3}$. Se cumple $ab = \frac{k+1}{k^2 + 3k + 3} < 1$, porque $k^2 + 3k + 3 - (k+1) = k^2 + 2k + 2 > 0$. 6. Calculamos $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{(k+1)(k^2 + 3k + 3) + 1}{(k^2 + 3k + 3) - (k+1)} = \frac{k^3 + 4k^2 + 6k + 4}{k^2 + 2k + 2} = \frac{(k+2)(k^2 + 2k + 2)}{k^2 + 2k + 2} = k+2$. 7. Por tanto $\arg(w_{k+1}) = \arctan(k+2) = \arctan((k+1)+1)$, es decir, $P(k+1)$ es cierta. 8. Como $P(0)$ es cierta y $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, por el principio de inducción $\arg(w_n) = \arctan(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Queda demostrado.

Teorema de De Moivre y potencias

EJERCICIO 53

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2008

Expresa $\frac{1}{(1-i\sqrt{3})^3}$ en la forma $\frac{a}{b}$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Pasamos $1 - i\sqrt{3}$ a forma polar: $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$. Está en el cuarto cuadrante y $\tan \theta = -\sqrt{3}$, así que $\arg = -\frac{\pi}{3}$. Entonces $1 - i\sqrt{3} = 2 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

2. Por el teorema de De Moivre:

$$(1 - i\sqrt{3})^3 = 2^3 \operatorname{cis}(-\pi) = 8(-1) = -8.$$

3. Por tanto

$$\frac{1}{(1 - i\sqrt{3})^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}.$$

Resultado: $-\frac{1}{8}$

EJERCICIO 54

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2009

Halle los valores de n para los cuales $(1 + \sqrt{3}i)^n$ es un número real.

1. Escribimos $1 + \sqrt{3}i$ en forma polar: $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$ y, al estar en el primer cuadrante, $\arg = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Es decir, $1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$.

2. Teorema de De Moivre: $(1 + \sqrt{3}i)^n = 2^n \operatorname{cis} \frac{n\pi}{3} = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \right)$.

3. El número es real cuando la parte imaginaria es cero: $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} = 0$.

4. Esto ocurre cuando $\frac{n\pi}{3} = k\pi$ con k entero, es decir, $n = 3k$.

Resultado: $n = 3k$, con $k \in \mathbb{Z}$ (los múltiplos de 3)

EJERCICIO 55

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2010

Demostración

Sabiendo que $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, compruebe que:

- a) $\operatorname{Im} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) = 0, n \in \mathbb{Z}^+$
b) $\operatorname{Re} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = 0, z \neq -1.$

a) 1. Por el teorema de De Moivre, $z^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$. 2. Como $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$ y $\operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen} n\theta$, se tiene $\frac{1}{z^n} = z^{-n} = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$. 3. Sumamos: $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$, que es un número real. 4. Por tanto $\operatorname{Im} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) = 0$.

b) 1. Como $z \neq -1$, el denominador $z + 1$ no es cero. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador, $z^* + 1$:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(z^*+1)}{(z+1)(z^*+1)} = \frac{zz^* + z - z^* - 1}{|z+1|^2}.$$

2. Como $|z| = 1$, $zz^* = \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$, y el numerador queda $z - z^*$. 3. Pero $z - z^* = 2i \operatorname{sen} \theta$, así que

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{2i \operatorname{sen} \theta}{|z+1|^2},$$

con denominador real y positivo. Es un número imaginario puro. 4. Por tanto $\operatorname{Re} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = 0$.

Queda demostrado.

EJERCICIO 56

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Mayo 2006

Sea $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, para $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$.

- a) i) Halle z^3 usando el teorema del binomio.
(ii) Utilice el Teorema de De Moivre para comprobar que $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta$
b) A partir de lo anterior, demuestre que $\frac{\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} \theta}{\cos 3\theta + \cos \theta} = \tan \theta$.
c) Sabiendo que $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$, halle el valor **exacto** de $\tan 3\theta$.

a) i) 1. Por el teorema del binomio, con $c = \cos \theta$, $s = \operatorname{sen} \theta$ y $i^2 = -1$, $i^3 = -i$:

$$z^3 = (c + is)^3 = c^3 + 3c^2(is) + 3c(is)^2 + (is)^3 = c^3 - 3cs^2 + i(3c^2s - s^3).$$

(ii) 1. Por el teorema de De Moivre, $z^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$. 2. Igualamos las partes reales: $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$. Sustituimos $\operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 3 \cos^3 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

3. Igualamos las partes imaginarias: $\operatorname{sen} 3\theta = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta$. Sustituimos $\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$:

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 3 \operatorname{sen}^3 \theta - \operatorname{sen}^3 \theta = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \operatorname{sen}^3 \theta.$$

b) 1. Usamos las fórmulas del apartado anterior:

$$\begin{aligned}\sin 3\theta - \sin \theta &= 2 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = 2 \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta), \\ \cos 3\theta + \cos \theta &= 4 \cos^3 \theta - 2 \cos \theta = 2 \cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1).\end{aligned}$$

2. Como $1 - 2 \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ y $2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$, ambos paréntesis son iguales. Además, para $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ se cumple $\cos 2\theta \neq 0$ y $\cos \theta \neq 0$, así que podemos simplificar:

$$\frac{\sin 3\theta - \sin \theta}{\cos 3\theta + \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos 2\theta}{2 \cos \theta \cos 2\theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta.$$

c) 1. Con $\sin \theta = \frac{1}{3}$ y $\cos \theta > 0$ (porque $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$): $\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 2. $\sin 3\theta = 3 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{27} = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$. 3. $\cos 3\theta = \cos \theta (4 \cos^2 \theta - 3) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{32}{9} - 3 \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{5}{9} = \frac{10\sqrt{2}}{27}$. 4. Por tanto $\tan 3\theta = \frac{23/27}{10\sqrt{2}/27} = \frac{23}{10\sqrt{2}} = \frac{23\sqrt{2}}{20}$.

Resultado: a) i) $z^3 = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + i (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$; c) $\tan 3\theta = \frac{23\sqrt{2}}{20}$. Queda demostrado.

EJERCICIO 57

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

Demostración

Demuestre que $(\sqrt{3} + i)^n + (\sqrt{3} - i)^n$ es real, donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

1. Sea $w = \sqrt{3} + i$. Entonces $\sqrt{3} - i = w^*$ es su conjugado.

2. Escribimos w en forma módulo-argumental: $|w| = \sqrt{3+1} = 2$ y, al estar en el primer cuadrante con $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\arg w = \frac{\pi}{6}$. Luego $w = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$ y $w^* = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6} \right)$.

3. Por el teorema de De Moivre:

$$w^n + (w^*)^n = 2^n \left[\operatorname{cis} \frac{n\pi}{6} + \operatorname{cis} \left(-\frac{n\pi}{6} \right) \right] = 2^n \left[\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right].$$

4. Los términos imaginarios se cancelan y queda $w^n + (w^*)^n = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{6}$, que es un número real para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Queda demostrado.

EJERCICIO 58

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2008

Sean $z_1 = (1 + i\sqrt{3})^m$ y $z_2 = (1 - i)^n$.

a) Calcule los módulos y argumentos de z_1 y z_2 en función de m y n , respectivamente.

b) Usando lo anterior, calcule los menores enteros positivos m y n para los cuales $z_1 = z_2$.

a) 1. Para $1 + i\sqrt{3}$: módulo $\sqrt{1+3} = 2$; primer cuadrante con $\tan \theta = \sqrt{3}$, luego argumento $\frac{\pi}{3}$. Es decir, $1 + i\sqrt{3} = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$. 2. Por De Moivre: $z_1 = 2^m \operatorname{cis} \frac{m\pi}{3}$. Módulo 2^m y argumento $\frac{m\pi}{3}$ (salvo múltiplos de 2π). 3. Para $1 - i$: módulo $\sqrt{2}$; cuarto cuadrante con ángulo de referencia $\frac{\pi}{4}$, luego argumento $-\frac{\pi}{4}$. Es decir, $1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right)$. 4. Por De Moivre: $z_2 = 2^{n/2} \operatorname{cis} \left(-\frac{n\pi}{4} \right)$. Módulo $2^{n/2}$ y argumento $-\frac{n\pi}{4}$.

b) 1. Dos números complejos son iguales si tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en un múltiplo de 2π . 2. Módulos: $2^m = 2^{n/2}$, luego $n = 2m$. 3. Argumentos: $\frac{m\pi}{3} = -\frac{n\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Sustituimos $n = 2m$: $\frac{m\pi}{3} = -\frac{m\pi}{2} + 2k\pi$, es decir, $\frac{5m}{6} = 2k$, o sea $5m = 12k$. 4. Como 5 y 12 no tienen divisores comunes, m debe ser múltiplo de 12. El menor entero positivo es $m = 12$ (con $k = 5$), y entonces $n = 24$. 5. Comprobación: $z_1 = 2^{12} \operatorname{cis} 4\pi = 4096$ y $z_2 = ((1 - i)^2)^{12} = (-2i)^{12} = 2^{12} \cdot i^{12} = 4096$.

Resultado: a) $|z_1| = 2^m$, $\arg z_1 = \frac{m\pi}{3}$; $|z_2| = 2^{n/2}$, $\arg z_2 = -\frac{n\pi}{4}$. b) $m = 12$, $n = 24$

EJERCICIO 59

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

Si $z_1 = a + a\sqrt{3}i$ y $z_2 = 1 - i$, donde a es una constante real, exprese z_1 y z_2 en la forma $r \operatorname{cis} \theta$, y obtenga una expresión para $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6$ en función de a y i .

1. $z_1 = a + a\sqrt{3}i = a(1 + \sqrt{3}i)$. El número $1 + \sqrt{3}i$ tiene módulo 2 y argumento $\frac{\pi}{3}$ (primer cuadrante, $\tan \theta = \sqrt{3}$).

2. Si $a > 0$: $z_1 = 2a \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$. Si $a < 0$, el módulo es $2|a|$ y el punto está en el tercer cuadrante: $z_1 = 2|a| \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$.

3. $z_2 = 1 - i$: módulo $\sqrt{2}$, cuarto cuadrante, $\tan \theta = -1$, luego $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. Para $a > 0$, el cociente tiene módulo $\frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$ y argumento $\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}a \operatorname{cis} \frac{7\pi}{12}.$$

5. De Moivre:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6 = \left(\sqrt{2}a\right)^6 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{2} = 8a^6 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = 8a^6(0 - i) = -8a^6i.$$

6. Para $a < 0$ el resultado es el mismo: el módulo es $\sqrt{2}|a|$, el argumento del cociente es $\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{19\pi}{12}$ y $\left(\sqrt{2}|a|\right)^6 \operatorname{cis} \frac{19\pi}{2} = 8a^6 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = -8a^6i$.

Resultado: $z_1 = 2a \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$ (si $a > 0$) o $z_1 = 2|a| \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$ (si $a < 0$); $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^6 = -8a^6i$

EJERCICIO 60

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2013

a) Si $w = 2 + 2i$, encuentre el módulo y el argumento de w .

b) Sabiendo que $z = \cos \left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6}\right)$, calcule en su forma más simple $w^4 z^6$.

a) 1. $|w| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. 2. w está en el primer cuadrante y $\tan \theta = \frac{2}{2} = 1$, luego $\arg w = \frac{\pi}{4}$.

b) 1. De a): $w = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$. Por De Moivre:

$$w^4 = \left(2\sqrt{2}\right)^4 \operatorname{cis} \pi = 64(-1) = -64.$$

2. $z = \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$, así que $z^6 = \operatorname{cis} 5\pi = \operatorname{cis} \pi = -1$. 3. Multiplicamos: $w^4 z^6 = (-64)(-1) = 64$.

Resultado: a) $|w| = \sqrt{8}$, $\arg w = \frac{\pi}{4}$ b) $w^4 z^6 = 64$

EJERCICIO 61

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2000

Sea $z_1 = a \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$ y $z_2 = b \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$. Exprese $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3$ en la forma $z = x + iy$

1. Por la división en forma polar, el módulo se divide y los argumentos se restan:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{b} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{a}{b} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

2. Por el teorema de Moivre, elevamos a 3 el módulo y multiplicamos el argumento por 3:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

3. Como $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2b^3} - \frac{a^3\sqrt{2}}{2b^3}i.$$

Resultado: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}a^3}{2b^3}(1 - i)$

EJERCICIO 62

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2009

a) Sea $z = x + iy$ cualquier número complejo distinto de cero.

(i) Expresa $\frac{1}{z}$ en la forma $u + iv$.

(ii) Si $z + \frac{1}{z} = k$, $k \in \mathbb{R}$, compruebe que o bien $y = 0$, o bien $x^2 + y^2 = 1$.

(iii) Compruebe que si $x^2 + y^2 = 1$ entonces $|k| \leq 2$.

b) Sea $w = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.

(i) Compruebe que $w^n + w^{-n} = 2 \cos n\theta$, $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Resuelva la ecuación $3w^2 - w + 2 - w^{-1} + 3w^{-2} = 0$; dé las raíces en la forma $x + iy$.

a) i) 1. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado:

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

2. Es decir, $\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$.

(ii) 1. Sumamos:

$$z + \frac{1}{z} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

2. Como la suma es el real k , su parte imaginaria es cero: $y \left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0$. 3. Un producto es cero si lo es algún factor: o bien $y = 0$, o bien $1 - \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$, es decir, $x^2 + y^2 = 1$.

(iii) 1. Si $x^2 + y^2 = 1$, la parte real es $k = x + \frac{x}{1} = 2x$. 2. Además $x^2 = 1 - y^2 \leq 1$, luego $|x| \leq 1$. 3. Por tanto $|k| = 2|x| \leq 2$.

b) i) 1. Por el teorema de De Moivre, $w^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$. 2. Como $w^{-n} = (w^n)^{-1}$ y $|w| = 1$, $w^{-n} = \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta) = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$. 3. Sumando, $w^n + w^{-n} = 2 \cos n\theta$.

(ii) 1. Agrupamos los términos: $3(w^2 + w^{-2}) - (w + w^{-1}) + 2 = 0$. 2. Por el apartado anterior: $3(2 \cos 2\theta) - 2 \cos \theta + 2 = 0$, es decir, $3 \cos 2\theta - \cos \theta + 1 = 0$. 3. Con $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$: $6 \cos^2 \theta - 3 - \cos \theta + 1 = 0$, o sea $6 \cos^2 \theta - \cos \theta - 2 = 0$. 4. Resolvemos la ecuación de segundo grado en $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \text{ o } \cos \theta = -\frac{1}{2}.$$

5. Como $w = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{sen} \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$:

- si $\cos \theta = \frac{2}{3}$, $\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$;
- si $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Se obtienen cuatro raíces, que son las cuatro de la ecuación de grado 4 que resulta al multiplicar por w^2

Resultado: b) ii) $w = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i$ o $w = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

EJERCICIO 63

★★★ Difícil

IB · P2 Noviembre 2002

Sea el complejo

$$z = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)^2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)^3}{\left(\cos \frac{\pi}{24} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{24}\right)^4}.$$

- a) i) Halle el módulo de z .
 ii) Halle el argumento de z y exprese su respuesta en radianes.
 b) Use el Teorema de De Moivre para mostrar que z es una raíz cúbica de la unidad, es decir $z = \sqrt[3]{1}$.
 c) Simplifique $(1 + 2z)(2 + z^2)$ y exprese su respuesta en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales exactos.

- a) i) 1. Escribimos cada factor en forma polar. Como $\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cis}(-\alpha)$: $\cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos \frac{\pi}{24} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{24} = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{24}\right)$. 2. Todos los factores tienen módulo 1, así que $|z| = 1$.
 ii) 1. Aplicamos el teorema de De Moivre: el numerador tiene $\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{cis} \pi = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, y el denominador $\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. 2. Al dividir se restan los argumentos: $\arg z = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$. 3. Luego $z = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$, y $\frac{2\pi}{3} \in]-\pi, \pi]$.
 b) 1. Por De Moivre, $z^3 = \operatorname{cis}\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{cis} 2\pi = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1$. 2. Como $z^3 = 1$, z es una raíz cúbica de la unidad.
 c) 1. En forma cartesiana: $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 2. Calculamos $z^2 = \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 3. Entonces $1 + 2z = 1 - 1 + \sqrt{3}i = \sqrt{3}i$ y $2 + z^2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 4. Multiplicamos: $\sqrt{3}i \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}i^2 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

Resultado: a) i) $|z| = 1$ ii) $\arg z = \frac{2\pi}{3}$ c) $(1 + 2z)(2 + z^2) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$. Queda demostrado.

EJERCICIO 64

★★★ Difícil

IB · P2 Noviembre 1999

- (i) a) Calcular $(1+i)^2$, donde $i = \sqrt{-1}$.
 (i) b) Pruebe, usando la inducción matemática, que $(1+i)^{4n} = (-4)^n$, donde $n \in \mathbb{N}^*$.
 (i) c) Usando lo anterior o de cualquier otra forma, calcule $(1+i)^{32}$.
 (ii) Sea $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, y $z_2 = 1-i$.
 (ii) a) Escriba z_1 y z_2 en la forma $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, donde $r > 0$ y $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
 (ii) b) Muestre que $\frac{z_1}{z_2} = \cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$.
 (ii) c) Calcule el valor de $\frac{z_1}{z_2}$ en la forma $a + bi$, donde a y b deben determinarse exactamente en forma radical. Usando lo anterior o de cualquier otra manera calcule los valores exactos de $\cos \frac{\pi}{12}$ y $\operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$.

- (i) a) 1. Desarrollamos el cuadrado de un binomio y usamos $i^2 = -1$: $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.
 b) 1. **Caso base** ($n = 1$): por el apartado a), $(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4 = (-4)^1$. Se cumple. 2. **Hipótesis de inducción**: suponemos que $(1+i)^{4k} = (-4)^k$ para un cierto $k \in \mathbb{N}^*$. 3. **Paso inductivo**: $(1+i)^{4(k+1)} = (1+i)^{4k} (1+i)^4 = (-4)^k \cdot (-4) = (-4)^{k+1}$, usando la hipótesis y el caso base. 4. La propiedad es cierta para $n = 1$ y, si lo es para k , lo es para $k + 1$. Por el principio de inducción, es cierta para todo $n \in \mathbb{N}^*$.
 c) 1. Como $32 = 4 \cdot 8$, aplicamos b) con $n = 8$: $(1+i)^{32} = (-4)^8 = 65\,536$.

- (ii) a) 1. Para $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$: $r = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$. 2. Dividimos entre r : $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}/2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen} \theta = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$. El ángulo está en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, luego $\theta = -\frac{\pi}{6}$. 3. Para $z_2 = 1-i$: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, luego $\theta = -\frac{\pi}{4}$.
 b) 1. Al dividir números complejos en forma módulo-argumental se dividen los módulos y se restan los argumentos: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$. 2. Como $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, resulta $\frac{z_1}{z_2} = \cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$.
 c) 1. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{4}$$

$$2. \text{ Desarrollamos: } (\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i) = \sqrt{6} + i\sqrt{6} - i\sqrt{2} + \sqrt{2} = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}). \quad 3. \text{ Por tanto } \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i.$$

Valores exactos: 1. Por b), $\frac{z_1}{z_2} = \cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$. Igualando partes real e imaginaria con el resultado de c):

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Resultado: a) $2i$ b) demostrado por inducción c) $65\,536$ (ii) a) $z_1 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right]$, $z_2 = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]$ b) demostrado c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$; $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. **Queda demostrado.**

Raíces n-ésimas

EJERCICIO 65

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

Halle las raíces cúbicas de i ; exprésalas de la forma $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Forma polar de i : módulo 1, argumento $\frac{\pi}{2}$, así que $i = \text{cis} \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$.

2. Las raíces cúbicas son

$$z_k = \text{cis} \left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} \right) = \text{cis} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

3. $k = 0$: $\text{cis} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

4. $k = 1$: $\text{cis} \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

5. $k = 2$: $\text{cis} \frac{3\pi}{2} = -i$.

6. Comprobación con $-i$: $(-i)^3 = -i^3 = i$.

Resultado: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i$

EJERCICIO 66

★ Básico

IB · P2 TZ1 Mayo 2019

Resuelva $z^2 = 4e^{\frac{i\pi}{2}}$, dando sus respuestas en la forma

a) $re^{i\theta}$ donde $r, \theta \in \mathbb{R}, r > 0$;

b) $a + ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) 1. Escribimos $z = re^{i\theta}$. Entonces $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ y la ecuación es $r^2 e^{2i\theta} = 4e^{\frac{i\pi}{2}}$. 2. Igualamos módulos: $r^2 = 4$, y como $r > 0$, $r = 2$. 3. Igualamos argumentos, salvo múltiplos de 2π : $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$. 4. Con $k = 0$ y $k = 1$ obtenemos las dos soluciones distintas: $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

b) 1. Pasamos a forma cartesiana con $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. 2. $2e^{\frac{i\pi}{4}} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. 3. $2e^{\frac{5i\pi}{4}} = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Resultado: a) $z = 2e^{\frac{i\pi}{4}}$ o $z = 2e^{\frac{5i\pi}{4}}$; b) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ o $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

EJERCICIO 67

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

- a) Hallar las raíces de la ecuación $z^4 = 1 - i$.
- b) Dibuje con precisión estas raíces sobre un plano de Argand.
- c) Si z_1 es la raíz en el primer cuadrante y z_2 es la raíz situada en el segundo cuadrante, halle $\frac{z_2}{z_1}$ expresándolo en la forma $a + bi$.

- a) 1. Escribimos $1 - i$ en forma polar: $|1 - i| = \sqrt{2}$ y, al estar en el cuarto cuadrante, $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$. Así, $1 - i = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$. 2. Sea $z = r \operatorname{cis} \theta$. Entonces $z^4 = r^4 \operatorname{cis} 4\theta$. Igualando módulos: $r^4 = \sqrt{2} \Rightarrow r = 2^{1/8}$. Igualando argumentos: $4\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$. 3. Tomamos $k = 0, 1, 2, 3$ (cuatro raíces distintas) y llevamos cada argumento a $]-\pi, \pi]$:

$$z_a = 2^{1/8} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{16}\right), \quad z_b = 2^{1/8} \operatorname{cis}\frac{7\pi}{16}, \quad z_c = 2^{1/8} \operatorname{cis}\frac{15\pi}{16}, \quad z_d = 2^{1/8} \operatorname{cis}\left(-\frac{9\pi}{16}\right).$$

- b) 1. Las cuatro raíces están sobre la circunferencia de centro el origen y radio $2^{1/8} \approx 1,09$. 2. Forman un cuadrado: cada una está separada de la siguiente $\frac{\pi}{2}$. Hay una en el cuarto cuadrante (argumento $-\frac{\pi}{16}$, muy cerca del eje real positivo), otra en el primero ($\frac{7\pi}{16}$, cerca del eje imaginario positivo), otra en el segundo ($\frac{15\pi}{16}$, cerca del eje real negativo) y otra en el tercero ($-\frac{9\pi}{16}$, cerca del eje imaginario negativo).
- c) 1. La raíz del primer cuadrante es $z_1 = 2^{1/8} \operatorname{cis}\frac{7\pi}{16}$ y la del segundo cuadrante es $z_2 = 2^{1/8} \operatorname{cis}\frac{15\pi}{16}$. 2. Al dividir se dividen los módulos y se restan los argumentos:

$$\frac{z_2}{z_1} = \operatorname{cis}\left(\frac{15\pi}{16} - \frac{7\pi}{16}\right) = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i.$$

Resultado: a) $z = 2^{1/8} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$ b) cuatro puntos que forman un cuadrado inscrito en la circunferencia de radio $2^{1/8}$ c) $\frac{z_2}{z_1} = 0 + 1i = i$

EJERCICIO 68

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2008

Demostración

Sea $w = \cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$.

- a) Compruebe que w es una raíz de la ecuación $z^5 - 1 = 0$.
- b) Compruebe que $(w - 1)(w^4 + w^3 + w^2 + w + 1) = w^5 - 1$ y deduzca que $w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 = 0$.
- c) A partir de lo anterior compruebe que $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

- a) 1. $w = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{5}$. Por el teorema de De Moivre, $w^5 = \operatorname{cis}\left(5 \cdot \frac{2\pi}{5}\right) = \operatorname{cis} 2\pi = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1$. 2. Luego $w^5 - 1 = 0$ y w es raíz de $z^5 - 1 = 0$.

- b) 1. Desarrollamos:

$$(w - 1)(w^4 + w^3 + w^2 + w + 1) = w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w - w^4 - w^3 - w^2 - w - 1 = w^5 - 1.$$

2. Por el apartado a), $w^5 - 1 = 0$, así que $(w - 1)(w^4 + w^3 + w^2 + w + 1) = 0$. 3. Como $w \neq 1$ (su argumento es $\frac{2\pi}{5}$), el factor $w - 1$ no es cero. Por tanto $w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 = 0$.

c) 1. Por De Moivre, $w^k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5}$. Tomamos partes reales en $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$:

$$1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0.$$

2. Como $\cos \frac{6\pi}{5} = \cos \left(2\pi - \frac{4\pi}{5} \right) = \cos \frac{4\pi}{5}$ y $\cos \frac{8\pi}{5} = \cos \left(2\pi - \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \frac{2\pi}{5}$, resulta

$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0.$$

3. Despejando: $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

Queda demostrado.

EJERCICIO 69

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

Sabiendo que $z \in \mathbb{C}$, resuelva la ecuación $z^3 - 8i = 0$, expresando las respuestas en la forma $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

1. Despejamos: $z^3 = 8i$.

2. Escribimos $8i$ en forma polar: $8i = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right)$, con módulo 8 y argumento $\frac{\pi}{2}$. Añadimos las vueltas completas: argumento $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

3. Las raíces cúbicas tienen módulo $\sqrt[3]{8} = 2$ y argumento $\theta = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$.

4. Para $k = 0$: $\theta = \frac{\pi}{6}$. Para $k = 1$: $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$. Para $k = 2$: $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$.

Resultado: $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$, $z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right)$, $z = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right)$

EJERCICIO 70

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2002

a) Expresa el número complejo $8i$ en forma polar.

b) Llamaremos z a la raíz cúbica de $8i$ situada en el primer cuadrante. Expresa z :

(i) en forma polar

(ii) en forma cartesiana.

a) 1. El número $8i$ está sobre el eje imaginario positivo: módulo 8 y argumento $\frac{\pi}{2}$. 2. Por tanto $8i = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = 8 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$.

b) i) 1. Las raíces cúbicas de $8i$ tienen módulo $\sqrt[3]{8} = 2$ y argumento $\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$. Los argumentos son $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{3\pi}{2}$. Solo $\frac{\pi}{6} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ corresponde al primer cuadrante. 3. Luego $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$.

(ii) 1. Pasamos a forma cartesiana: $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$. 2. Así, $z = \sqrt{3} + i$.

Resultado: a) $8i = 8 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$ b) i) $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$ ii) $z = \sqrt{3} + i$

EJERCICIO 71

★★ Medio

IB · P2 Noviembre 2003

Sea $z^5 - 32 = 0$.

- (i) Compruebe que $z_1 = 2 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{5} \right) \right)$ es una de las raíces complejas de esta ecuación.
- (ii) Calcule $z_1^2, z_1^3, z_1^4, z_1^5$, expresando las respuestas en términos de módulos y argumentos.
- (iii) Represente en el plano complejo los puntos definidos por $z_1, z_1^2, z_1^3, z_1^4, z_1^5$.

(i) 1. Por el teorema de De Moivre, $z_1^5 = 2^5 \left(\cos \frac{10\pi}{5} + i \sin \frac{10\pi}{5} \right) = 32(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 32$. 2. Luego $z_1^5 - 32 = 0$ y z_1 es raíz de la ecuación.

(ii) Aplicamos De Moivre, $(r \operatorname{cis} \theta)^k = r^k \operatorname{cis} k\theta$, con $r = 2$ y $\theta = \frac{2\pi}{5}$:

1. $z_1^2 = 4 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{5}$.

2. $z_1^3 = 8 \operatorname{cis} \frac{6\pi}{5} = 8 \operatorname{cis} \left(-\frac{4\pi}{5} \right)$, pues el argumento principal está en $]-\pi, \pi]$.

3. $z_1^4 = 16 \operatorname{cis} \frac{8\pi}{5} = 16 \operatorname{cis} \left(-\frac{2\pi}{5} \right)$.

4. $z_1^5 = 32 \operatorname{cis} 2\pi = 32 \operatorname{cis} 0$.

(iii) 1. Los cinco puntos del plano de Argand son $z_1 \approx 0,618 + 1,90i$, $z_1^2 \approx -3,24 + 2,35i$, $z_1^3 \approx -6,47 - 4,70i$, $z_1^4 \approx 4,94 - 15,2i$ y $z_1^5 = 32$. 2. Al pasar de cada punto al siguiente, el módulo se multiplica por 2 y el argumento aumenta $\frac{2\pi}{5}$ (72°). Los puntos forman una espiral que se abre en sentido antihorario: z_1 (módulo 2, ángulo 72°) en el primer cuadrante, z_1^2 (módulo 4, 144°) en el segundo, z_1^3 (módulo 8, 216°) en el tercero, z_1^4 (módulo 16, 288°) en el cuarto y z_1^5 (módulo 32, 360°) sobre el semieje real positivo.

Resultado: $z_1^2 = 4 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{5}$, $z_1^3 = 8 \operatorname{cis} \left(-\frac{4\pi}{5} \right)$, $z_1^4 = 16 \operatorname{cis} \left(-\frac{2\pi}{5} \right)$, $z_1^5 = 32 \operatorname{cis} 0$. Queda demostrado.

EJERCICIO 72

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2011

- a) Expresé $z^3 + 1$ como producto de dos factores: uno lineal y otro cuadrático. Sea $\gamma = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.
- b) (i) Compruebe que γ es una de las raíces cúbicas de -1 .
- (ii) Compruebe que $\gamma^2 = \gamma - 1$.
- (iii) A partir de lo anterior, halle el valor de $(1 - \gamma)^6$.

a) 1. $z = -1$ anula $z^3 + 1$, así que $(z + 1)$ es factor. 2. Dividimos: $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$. Comprobación: $(z + 1)(z^2 - z + 1) = z^3 - z^2 + z + z^2 - z + 1 = z^3 + 1$.

b) (i) 1. $\gamma = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ tiene módulo $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ y argumento $\frac{\pi}{3}$, es decir, $\gamma = \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$. 2. Por De Moivre: $\gamma^3 = \operatorname{cis} \pi = -1$. Entonces γ es una raíz cúbica de -1 .

(ii) 1. Calculamos $\gamma^2 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{1 + 2i\sqrt{3} - 3}{4} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. 2. Por otro lado, $\gamma - 1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Coinciden, luego $\gamma^2 = \gamma - 1$.

(iii) 1. De $\gamma^2 = \gamma - 1$ se obtiene $1 - \gamma = -\gamma^2$. 2. Entonces $(1 - \gamma)^6 = (-\gamma^2)^6 = \gamma^{12}$. 3. Como $\gamma^3 = -1$: $\gamma^{12} = (\gamma^3)^4 = (-1)^4 = 1$.

Resultado: a) $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$ b) (iii) $(1 - \gamma)^6 = 1$. Queda demostrado.

EJERCICIO 73

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2019

- a) Halle las raíces de la ecuación $w^3 = 8i$, $w \in \mathbb{C}$. Dé las respuestas en forma cartesiana. Una de las raíces, w_1 , satisface la condición $\operatorname{Re}(w_1) = 0$.
- b) Sabiendo que $w_1 = \frac{z}{z-i}$, exprese z en la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$.

- a) 1. Escribimos $8i$ en forma polar: $8i = 8 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$. 2. Las raíces cúbicas tienen módulo $\sqrt[3]{8} = 2$ y argumentos $\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$. 3. Para $k = 0$: $w = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$. 4. Para $k = 1$: $w = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i$. 5. Para $k = 2$: $w = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = -2i$.
- b) 1. La única raíz con parte real nula es $w_1 = -2i$. 2. Igualamos y despejamos z : $-2i = \frac{z}{z-i} \Rightarrow -2i(z-i) = z \Rightarrow -2iz - 2 = z$. 3. Agrupamos: $z(1+2i) = -2$, luego
- $$z = \frac{-2}{1+2i} = \frac{-2(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-2+4i}{5}.$$

Resultado: a) $w = \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, -2i$ b) $z = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$

EJERCICIO 74

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

Determine las raíces de la ecuación $(z+2i)^3 = 216i$, $z \in \mathbb{C}$, dando sus respuestas en la forma $z = a\sqrt{3} + bi$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Escribimos el segundo miembro en forma polar: $216i = 216 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$.
2. Sea $w = z + 2i$. Entonces $w^3 = 216 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, con módulo $\sqrt[3]{216} = 6$ y argumentos $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.
3. Calculamos las tres raíces:
- $k = 0$: $w = 6 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 3\sqrt{3} + 3i$.
 - $k = 1$: $w = 6 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} = -3\sqrt{3} + 3i$.
 - $k = 2$: $w = 6 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = -6i$.
4. Restamos $2i$ a cada una, ya que $z = w - 2i$:
- $z = 3\sqrt{3} + 3i - 2i = 3\sqrt{3} + i$.
 - $z = -3\sqrt{3} + 3i - 2i = -3\sqrt{3} + i$.
 - $z = -6i - 2i = -8i$.

Resultado: $z = 3\sqrt{3} + i, z = -3\sqrt{3} + i, z = 0\sqrt{3} - 8i$

EJERCICIO 75

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2015

- a) Halle tres raíces distintas de la ecuación $8z^3 + 27 = 0$, $z \in \mathbb{C}$, en forma módulo-argumental. Las raíces se representan mediante los vértices de un triángulo en un diagrama de Argand.
- b) Calcule el área del triángulo.

a) 1. Despejamos: $8z^3 + 27 = 0 \Rightarrow z^3 = -\frac{27}{8}$. 2. En forma polar, $-\frac{27}{8} = \frac{27}{8} \operatorname{cis} \pi$. 3. Las raíces cúbicas tienen módulo $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$ y argumentos $\frac{\pi + 2k\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$: $\frac{\pi}{3}$, π , $\frac{5\pi}{3}$. 4. Tomando el argumento principal en $]-\pi, \pi]$, el último es $\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$.

b) 1. Las tres raíces están sobre la circunferencia de centro el origen y radio $\frac{3}{2}$, separadas $\frac{2\pi}{3}$ entre sí. El triángulo es equilátero. 2. El lado es la distancia entre dos vértices consecutivos: $s = 2r \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}r = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 3. El área de un triángulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{27}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{16} \approx 2,92.$$

Resultado: a) $z = \frac{3}{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$, $\frac{3}{2} \operatorname{cis} \pi$, $\frac{3}{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{3}\right)$ b) $A = \frac{27\sqrt{3}}{16} \approx 2,92$

EJERCICIO 76

★★ Medio

IB · P2 Mayo 1996

Escriba, en forma polar, las raíces cúbicas de $-i$. Usando lo anterior, o de cualquier otra manera, resuelva la ecuación $[(1-i)z]^3 + i = 0$, expresando su respuesta en la forma $a + ib$.

1. Escribimos $-i$ en forma polar: $-i = \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Sus raíces cúbicas tienen módulo 1 y argumentos $\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$:

$$w_1 = \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right), \quad w_2 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}, \quad w_3 = \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{6}\right).$$

3. En forma cartesiana: $w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $w_2 = i$, $w_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

4. La ecuación $[(1-i)z]^3 + i = 0$ equivale a $[(1-i)z]^3 = -i$. Entonces $(1-i)z$ es una de las raíces cúbicas de $-i$, es decir, $(1-i)z = w$.

5. Despejamos z multiplicando por el conjugado de $1-i$: $z = \frac{w}{1-i} = \frac{w(1+i)}{2}$.

6. Con w_1 : $z = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(1+i)}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$.

7. Con w_2 : $z = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1+i}{2}$.

8. Con w_3 : $z = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(1+i)}{2} = \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$.

Resultado: raíces cúbicas de $-i$: $\operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$. Soluciones: $z = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$, $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z = \frac{1-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}+1}{4}i$

EJERCICIO 77

★★ Medio

IB · P2 Mayo 1999

Sean x e y números reales, y w una de las soluciones complejas de la ecuación $z^3 = 1$. Calcule:

- a) $1 + w + w^2$
b) $(wx + w^2y)(w^2x + wy)$

Como w es solución no real de $z^3 = 1$, se cumple $w^3 = 1$ y $w \neq 1$.

- a) 1. Pasamos todo a un lado: $w^3 - 1 = 0$, y factorizamos como diferencia de cubos: $(w - 1)(w^2 + w + 1) = 0$.
2. Como $w \neq 1$, el segundo factor es cero: $1 + w + w^2 = 0$.

- b) 1. Desarrollamos el producto:

$$(wx + w^2y)(w^2x + wy) = w^3x^2 + w^2xy + w^4xy + w^3y^2.$$

2. Usamos $w^3 = 1$ y $w^4 = w$: $x^2 + y^2 + xy(w^2 + w)$. 3. Del apartado a), $w + w^2 = -1$. Luego el producto vale $x^2 + y^2 - xy$.

Resultado: a) $1 + w + w^2 = 0$ b) $x^2 - xy + y^2$

EJERCICIO 78

★★ Medio

IB · P2 Noviembre 2001

- a) Expresar $z^5 - 1$ como producto de dos factores, uno de los cuales es lineal.
b) Calcule los ceros de $z^5 - 1$, dando su respuesta en la forma $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ donde $r > 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$.
c) Expresar $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ como producto de dos factores reales cuadráticos.

- a) 1. Como $z = 1$ es raíz de $z^5 - 1$, $(z - 1)$ es factor. Dividimos (o usamos la suma de una progresión geométrica):

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$

- b) 1. Resolvemos $z^5 = 1$. Escribimos $1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$; las raíces quintas tienen módulo 1 y argumentos $\frac{2k\pi}{5}$.
2. Tomamos los argumentos en $] - \pi, \pi]$, es decir, $k = -2, -1, 0, 1, 2$:

$$z = 1, \quad \cos \frac{2\pi}{5} \pm i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}, \quad \cos \frac{4\pi}{5} \pm i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}.$$

3. Escritas con argumento explícito, los ceros son $\cos 0 + i \operatorname{sen} 0$, $\cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$, $\cos \left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos \frac{4\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}$ y $\cos \left(-\frac{4\pi}{5}\right) + i \operatorname{sen} \left(-\frac{4\pi}{5}\right)$.

- c) 1. Las raíces de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ son las cuatro raíces distintas de 1. Agrupamos cada raíz con su conjugada. 2. Para $\alpha = \frac{2\pi}{5}$: $(z - \operatorname{cis} \alpha)(z - \operatorname{cis}(-\alpha)) = z^2 - 2 \cos \alpha z + 1$, porque la suma de las raíces es $2 \cos \alpha$ y su producto es 1. 3. Análogamente para $\frac{4\pi}{5}$. Por tanto

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \left(z^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} z + 1\right) \left(z^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} z + 1\right).$$

Resultado: a) $(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ b) $z = \operatorname{cis} 0, \operatorname{cis} \left(\pm \frac{2\pi}{5}\right), \operatorname{cis} \left(\pm \frac{4\pi}{5}\right)$ c)
 $\left(z^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} z + 1\right) \left(z^2 - 2 \cos \frac{4\pi}{5} z + 1\right)$

EJERCICIO 79

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2010

- a) Resuelva la ecuación $z^3 = -2 + 2i$, dando sus respuestas en forma de módulo-argumento.
b) Usando lo anterior, muestre que una de las soluciones es $1 + i$ cuando está escrita en forma cartesiana.

- a) 1. Escribimos $-2 + 2i$ en forma módulo-argumento. Módulo: $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Está en el segundo cuadrante con $\tan \varphi = -1$, luego el argumento es $\frac{3\pi}{4}$. Así, $-2 + 2i = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$. 2. Sumamos $2\pi k$ al argumento, para no perder soluciones: $z^3 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right)$. 3. Por De Moivre, $z = (2\sqrt{2})^{1/3} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3} \right)$. Como $(2\sqrt{2})^{1/3} = (2^{3/2})^{1/3} = \sqrt{2}$, el módulo es $\sqrt{2}$. 4. Damos a k los valores 0, 1, 2 y dejamos el argumento en $]-\pi, \pi]$: $k = 0$: $\frac{\pi}{4}$; $k = 1$: $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$; $k = 2$: $\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\pi}{12}$, que equivale a $-\frac{5\pi}{12}$.
b) 1. Tomamos la solución con $k = 0$: $z = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$. 2. Pasamos a forma cartesiana: $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$.

Resultado: a) $z = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{11\pi}{12}$, $\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(-\frac{5\pi}{12} \right)$; b) una solución es $1 + i$

EJERCICIO 80

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2007

El número complejo z se define por $z = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) + 4\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

- a) Exprese z en la forma $re^{i\theta}$, donde r y θ tienen valores exactos.
b) Encuentre las raíces cúbicas de z , expresándose en la forma $re^{i\theta}$, donde r y θ tienen valores exactos.

- a) 1. Pasamos cada sumando a forma cartesiana. Primero, $4 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = 4 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2 + 2\sqrt{3}i$. 2. Segundo, $4\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 6 + 2\sqrt{3}i$. 3. Sumamos: $z = 4 + 4\sqrt{3}i$. 4. Módulo: $r = \sqrt{16 + 48} = 8$. Está en el primer cuadrante y $\tan \theta = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$, luego $\theta = \frac{\pi}{3}$.
b) 1. Partimos de $z = 8e^{i\pi/3}$ y añadimos $2\pi k$ al argumento: $z = 8e^{i(\frac{\pi}{3} + 2\pi k)}$. 2. Las raíces cúbicas son $w = 8^{1/3} e^{i(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3})} = 2e^{i(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3})}$, con $k = 0, 1, 2$. 3. $k = 0$: $\frac{\pi}{9}$; $k = 1$: $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{9}$; $k = 2$: $\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{13\pi}{9}$, que equivale a $-\frac{5\pi}{9}$.

Resultado: a) $z = 8e^{i\pi/3}$; b) $2e^{i\pi/9}$, $2e^{i7\pi/9}$, $2e^{-i5\pi/9}$ (o $2e^{i13\pi/9}$)

EJERCICIO 81

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2007

- a) Expresar el número complejo $1 + i$ en la forma $\sqrt{a} e^{i\frac{\pi}{b}}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$.
- b) Utilizando el resultado obtenido en (a), compruebe que $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$, donde $n \in \mathbb{Z}$, tiene solamente ocho valores distintos.
- c) A partir de lo anterior, resuelva la ecuación $z^8 - 1 = 0$.

- a) 1. Módulo: $|1 + i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Argumento: primer cuadrante y $\tan \theta = 1$, luego $\theta = \frac{\pi}{4}$. 2. Entonces $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, con $a = 2$ y $b = 4$.
- b) 1. $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$. 2. Por De Moivre, $(e^{i\pi/4})^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$. 3. Para $n = 0, 1, \dots, 7$ los argumentos $\frac{n\pi}{4}$ son $0, \frac{\pi}{4}, \dots, \frac{7\pi}{4}$: ocho ángulos distintos en $[0, 2\pi[$, luego ocho valores distintos. 4. Para $n = 8$ el argumento es 2π y se repite el valor de $n = 0$. En general $e^{i\frac{(n+8)\pi}{4}} = e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{2\pi i} = e^{i\frac{n\pi}{4}}$, así que el patrón se repite cada 8 valores de n (también para n negativo). Por tanto hay exactamente ocho valores distintos.
- c) 1. Para cada n entero, $(e^{i\frac{n\pi}{4}})^8 = e^{2n\pi i} = 1$, así que los ocho valores de (b) cumplen $z^8 = 1$. 2. Una ecuación de grado 8 tiene como máximo 8 soluciones, luego son todas. 3. En forma cartesiana: $z = \pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$.
- Resultado:** a) $1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$; c) $z = e^{i\frac{n\pi}{4}}$, $n = 0, 1, \dots, 7$, es decir, $\pm 1, \pm i, \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$. Queda demostrado (b).

EJERCICIO 82

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2010

Considere $w = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

- a) Compruebe que
- (i) $w^3 = 1$.
- (ii) $1 + w + w^2 = 0$.
- b) Deduzca que $e^{i\theta} + e^{i(\theta+\frac{2\pi}{3})} + e^{i(\theta+\frac{4\pi}{3})} = 0$.
- c) i) Desarrolle y simplifique $F(z) = (z-1)(z-w)(z-w^2)$ donde z es un número complejo.
- (ii) Resuelva $F(z) = 7$; dé las respuestas en función de w .

- a) i) 1. $w = \text{cis } \frac{2\pi}{3}$. Por el teorema de De Moivre, $w^3 = \text{cis } \left(3 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \text{cis } 2\pi = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$.
- (ii) 1. Por el apartado anterior, $w^3 - 1 = 0$. Factorizamos: $w^3 - 1 = (w-1)(1+w+w^2) = 0$. 2. Como $w \neq 1$ (su argumento es $\frac{2\pi}{3}$), el primer factor no es cero, así que $1 + w + w^2 = 0$.
- b) 1. Escribimos cada exponente separando el factor común: $e^{i(\theta+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\theta} e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\theta} w$. 2. Análogamente, $e^{i(\theta+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\theta} e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\theta} \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\theta} w^2$. 3. Entonces la suma es $e^{i\theta} + e^{i\theta} w + e^{i\theta} w^2 = e^{i\theta} (1 + w + w^2) = e^{i\theta} \cdot 0 = 0$.
- c) i) 1. Multiplicamos primero los dos últimos factores: $(z-w)(z-w^2) = z^2 - (w+w^2)z + w^3$. 2. Por a), $w + w^2 = -1$ y $w^3 = 1$, luego $(z-w)(z-w^2) = z^2 + z + 1$. 3. Entonces $F(z) = (z-1)(z^2 + z + 1) = z^3 + z^2 + z - z^2 - z - 1 = z^3 - 1$.
- (ii) 1. $F(z) = 7 \Rightarrow z^3 - 1 = 7 \Rightarrow z^3 = 8$. 2. Como $F(z) = (z-1)(z-w)(z-w^2)$ y $F(z) = z^3 - 1$, las raíces de $z^3 = 1$ son $1, w$ y w^2 . Las de $z^3 = 8$ son 2 veces esas: si $z = 2u$ con $u^3 = 1$, entonces $z^3 = 8u^3 = 8$. 3. Por tanto $z = 2, z = 2w$ o $z = 2w^2$.

Resultado: a) comprobado b) comprobado c) i) $F(z) = z^3 - 1$ ii) $z = 2, z = 2w, z = 2w^2$

EJERCICIO 83

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

- a) Desarrolle y simplifique $(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.
- b) Sabiendo que b es una raíz de la ecuación $z^5 - 1 = 0$ que no pertenece al eje de los reales en el plano de Argand, compruebe que $1 + b + b^2 + b^3 + b^4 = 0$.
- c) Si $u = b + b^4$ y $v = b^2 + b^3$ compruebe que:
- (i) $u + v = u \cdot v = -1$.
- (ii) $u - v = \sqrt{5}$, sabiendo que $u - v > 0$.

- a) 1. Multiplicamos cada término del segundo factor por x y por -1 :
- $$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1.$$
2. Se cancelan todos los términos intermedios y queda $x^5 - 1$.
- b) 1. Por el apartado a) con $x = b$: $b^5 - 1 = (b-1)(1 + b + b^2 + b^3 + b^4)$. 2. Como b es raíz de $z^5 - 1 = 0$, $b^5 - 1 = 0$, luego $(b-1)(1 + b + b^2 + b^3 + b^4) = 0$. 3. b no está en el eje real, así que $b \neq 1$ y $b - 1 \neq 0$. 4. Por tanto $1 + b + b^2 + b^3 + b^4 = 0$.
- c) i) 1. Sumamos: $u + v = b + b^4 + b^2 + b^3 = b + b^2 + b^3 + b^4$. Por el apartado b) esto vale -1 . 2. Multiplicamos: $u \cdot v = (b + b^4)(b^2 + b^3) = b^3 + b^4 + b^6 + b^7$. 3. Como $b^5 = 1$, $b^6 = b$ y $b^7 = b^2$. Entonces $u \cdot v = b^3 + b^4 + b + b^2 = -1$. 4. Así, $u + v = u \cdot v = -1$.
- (ii) 1. Usamos la identidad $(u - v)^2 = (u + v)^2 - 4uv$. 2. Sustituimos: $(u - v)^2 = (-1)^2 - 4(-1) = 1 + 4 = 5$. 3. Como $u - v > 0$, $u - v = \sqrt{5}$.

Queda demostrado.

EJERCICIO 84

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2013

- a) i) Exprese cada uno de los siguientes números complejos en forma módulo-argumental: $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ y $z_3 = -2i$.
- (ii) A partir de lo anterior, compruebe que los puntos del plano complejo que representan a z_1 , z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo equilátero.
- (iii) Compruebe que $z_1^{3n} + z_2^{3n} = 2z_3^{3n}$, donde $n \in \mathbb{N}$.
- b) i) Indique las soluciones de la ecuación $z^7 = 1$ para $z \in \mathbb{C}$, dándolas en forma módulo-argumental.
- (ii) Si w es la solución de la ecuación $z^7 = 1$ que tiene el menor argumento positivo, determine el argumento de $1 + w$. Exprese la respuesta en función de π .
- (iii) Compruebe que $z^2 - 2z \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1$ es un factor cuadrático del polinomio $z^7 - 1$. Indique los otros dos factores cuadráticos con coeficientes reales.

- a) i) 1. Para $z_1 = \sqrt{3} + i$: $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$. Está en el primer cuadrante y $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, así que $\arg z_1 = \frac{\pi}{6}$. 2. Para $z_2 = -\sqrt{3} + i$: $|z_2| = 2$. Está en el segundo cuadrante, con ángulo de referencia $\frac{\pi}{6}$, así que $\arg z_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. 3. Para $z_3 = -2i$: $|z_3| = 2$ y está sobre el semieje imaginario negativo, así que $\arg z_3 = -\frac{\pi}{2}$.

(ii) 1. Los tres números tienen módulo 2, luego los tres puntos están en la circunferencia de centro el origen y radio 2. 2. Sus argumentos son $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ y $-\frac{\pi}{2}$. Pasando de uno al siguiente (en sentido antihorario) el ángulo aumenta siempre $\frac{2\pi}{3}$: de $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5\pi}{6}$ hay $\frac{2\pi}{3}$; de $\frac{5\pi}{6}$ a $\frac{3\pi}{2}$ ($\equiv -\frac{\pi}{2}$) hay $\frac{2\pi}{3}$; y de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{6}$ hay $\frac{2\pi}{3}$. 3. Por tanto, los tres puntos dividen la circunferencia en tres arcos iguales. Los tres lados son cuerdas de igual ángulo central y radio, así que miden lo mismo: $2 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$. El triángulo es equilátero.

(iii) 1. Por De Moivre, $z_1^{3n} = 2^{3n} \operatorname{cis} \frac{3n\pi}{6} = 2^{3n} \operatorname{cis} \frac{n\pi}{2}$. 2. $z_2^{3n} = 2^{3n} \operatorname{cis} \frac{15n\pi}{6} = 2^{3n} \operatorname{cis} \left(\frac{n\pi}{2} + 2n\pi \right) = 2^{3n} \operatorname{cis} \frac{n\pi}{2}$. 3. $z_3^{3n} = 2^{3n} \operatorname{cis} \left(-\frac{3n\pi}{2} \right) = 2^{3n} \operatorname{cis} \left(-\frac{3n\pi}{2} + 2n\pi \right) = 2^{3n} \operatorname{cis} \frac{n\pi}{2}$. 4. Los tres coinciden. Luego $z_1^{3n} + z_2^{3n} = 2 \cdot 2^{3n} \operatorname{cis} \frac{n\pi}{2} = 2z_3^{3n}$.

b) i) 1. Escribimos $z = r \operatorname{cis} \theta$. Entonces $z^7 = r^7 \operatorname{cis} 7\theta = 1 = \operatorname{cis} 0$. 2. Luego $r^7 = 1$, es decir, $r = 1$, y $7\theta = 2k\pi$, o sea $\theta = \frac{2k\pi}{7}$. 3. Tomando los argumentos en $] -\pi, \pi]$ ($k = -3, \dots, 3$), las siete soluciones son

$$z = \operatorname{cis} 0, \operatorname{cis} \left(\pm \frac{2\pi}{7} \right), \operatorname{cis} \left(\pm \frac{4\pi}{7} \right), \operatorname{cis} \left(\pm \frac{6\pi}{7} \right).$$

(ii) 1. La raíz de menor argumento positivo es $w = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{7}$. 2. Con $\alpha = \frac{2\pi}{7}$: $1 + w = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, usando las fórmulas del ángulo doble. 3. Sacamos factor común: $1 + w = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$. Como $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{7}$ es agudo, $2 \cos \frac{\pi}{7} > 0$ y es el módulo. 4. Por tanto $\arg(1 + w) = \frac{\pi}{7}$.

(iii) 1. Las raíces $w = \operatorname{cis} \frac{2\pi}{7}$ y $w^* = \operatorname{cis} \left(-\frac{2\pi}{7} \right)$ son raíces de $z^7 - 1 = 0$, y el polinomio tiene coeficientes reales. 2. Por tanto $(z - w)(z - w^*)$ divide a $z^7 - 1$. Lo desarrollamos:

$$(z - w)(z - w^*) = z^2 - (w + w^*)z + ww^* = z^2 - 2 \cos \frac{2\pi}{7} z + 1,$$

porque $w + w^* = 2 \operatorname{Re} w = 2 \cos \frac{2\pi}{7}$ y $ww^* = |w|^2 = 1$. 3. Del mismo modo, los pares conjugados $\operatorname{cis} \left(\pm \frac{4\pi}{7} \right)$ y $\operatorname{cis} \left(\pm \frac{6\pi}{7} \right)$ dan los otros dos factores cuadráticos reales: $z^2 - 2z \cos \frac{4\pi}{7} + 1$ y $z^2 - 2z \cos \frac{6\pi}{7} + 1$. (La raíz $z = 1$ da el factor lineal $z - 1$.)

Resultado: a) i) $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$, $z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$, $z_3 = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{2} \right)$. b) i) $\operatorname{cis} 0$, $\operatorname{cis} \left(\pm \frac{2\pi}{7} \right)$, $\operatorname{cis} \left(\pm \frac{4\pi}{7} \right)$, $\operatorname{cis} \left(\pm \frac{6\pi}{7} \right)$; ii) $\arg(1 + w) = \frac{\pi}{7}$; iii) $z^2 - 2z \cos \frac{4\pi}{7} + 1$ y $z^2 - 2z \cos \frac{6\pi}{7} + 1$. **Queda demostrado.**

EJERCICIO 85

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

Considere los números complejos $z_1 = 2\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ y $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

a) i) Escriba z_1 en forma cartesiana.

(ii) A partir de lo anterior, determine $(z_1 + z_2)^*$ en forma cartesiana.

b) i) Escriba z_2 en forma módulo-argumental.

(ii) A partir de lo anterior, resuelva la ecuación $z^3 = z_2$.

c) Sea $z = r \operatorname{cis} \theta$, donde $r \in \mathbb{R}^+$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Halle todos los posibles valores de r y de θ si $z^2 = (1 + z_2)^2$.

d) Halle el menor entero positivo n para el cual $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n \in \mathbb{R}^+$.

a) i) 1. Usamos $\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i$. 2. Entonces $z_1 = 2\sqrt{3}(-i) = -2\sqrt{3}i$.

(ii) 1. Sumamos: $z_1 + z_2 = -2\sqrt{3}i + (-1 + \sqrt{3}i) = -1 - \sqrt{3}i$. 2. El conjugado cambia el signo de la parte imaginaria: $(z_1 + z_2)^* = -1 + \sqrt{3}i$.

- b)** i) 1. El módulo es $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. 2. El punto $(-1, \sqrt{3})$ está en el segundo cuadrante, y $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{1}$ da un ángulo de referencia de $\frac{\pi}{3}$. Entonces $\arg z_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. 3. Por tanto $z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$.
- (ii) 1. Si $z = r \operatorname{cis} \theta$, por De Moivre $z^3 = r^3 \operatorname{cis} 3\theta$. La ecuación $z^3 = 2 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right)$ da $r^3 = 2$ y $3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
2. Entonces $r = \sqrt[3]{2}$ y $\theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$. 3. Para $k = 0, 1, 2$ obtenemos tres raíces: $\theta = \frac{2\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}$.
- c)** 1. Calculamos $1 + z_2 = 1 + (-1 + \sqrt{3}i) = \sqrt{3}i$, y por tanto $(1 + z_2)^2 = (\sqrt{3}i)^2 = -3$. 2. En forma polar, $-3 = 3 \operatorname{cis} \pi$. La ecuación es $r^2 \operatorname{cis} 2\theta = 3 \operatorname{cis} (\pi + 2k\pi)$. 3. Igualando módulos: $r^2 = 3$ y, como $r > 0$, $r = \sqrt{3}$.
4. Igualando argumentos: $2\theta = \pi + 2k\pi$, o sea $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Con $0 \leq \theta < 2\pi$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = \frac{3\pi}{2}$.
- d)** 1. Calculamos el cociente: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}}{2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6}$. 2. Por De Moivre, $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^n = 3^{n/2} \operatorname{cis} \frac{5n\pi}{6}$. 3. Es un real positivo cuando el argumento es múltiplo de 2π : $\frac{5n\pi}{6} = 2m\pi$, es decir, $5n = 12m$.
4. Como 5 y 12 no tienen divisores comunes, n debe ser múltiplo de 12. El menor entero positivo es $n = 12$.

Resultado: a) i) $z_1 = -2\sqrt{3}i$ ii) $-1 + \sqrt{3}i$ b) i) $z_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$ ii) $z = \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{9}, \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \frac{8\pi}{9}, \sqrt[3]{2} \operatorname{cis} \frac{14\pi}{9}$ c) $r = \sqrt{3}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$ d) $n = 12$

EJERCICIO 86

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

- a)** Halle todas las raíces de $z^{24} = 1$ que cumplan la condición $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$. Exprese las respuestas en la forma $re^{i\theta}$, donde $r, \theta \in \mathbb{R}^+$.
- b)** Sea S la suma de las raíces halladas en la parte (a).
- (i) Muestre que $\operatorname{Re} S = \operatorname{Im} S$.
- (ii) Escribiendo $\frac{\pi}{12}$ como $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$, halle el valor de $\cos \frac{\pi}{12}$ en la forma $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{c}$, donde a, b y c son números enteros.
- (iii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, muestre que $S = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2}) (1 + \sqrt{3}) (1 + i)$.

- a)** 1. Si $z^{24} = 1$, entonces $|z| = 1$ y $24 \arg z = 2\pi k$, es decir, $z = e^{i \frac{2\pi k}{24}} = e^{i \frac{k\pi}{12}}$ con $k = 0, 1, \dots, 23$. 2. Imponemos $0 < \frac{k\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, o sea $0 < k < 6$. Valen $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ($k = 6$ da $\arg z = \frac{\pi}{2}$, que no cumple la desigualdad estricta). 3. Las raíces son

$$e^{i \frac{\pi}{12}}, e^{i \frac{\pi}{6}}, e^{i \frac{\pi}{4}}, e^{i \frac{\pi}{3}}, e^{i \frac{5\pi}{12}}.$$

- b)** (i) 1. Los argumentos se agrupan en parejas que suman $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{12}$ con $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{\pi}{6}$ con $\frac{\pi}{3}$, y $\frac{\pi}{4}$ consigo mismo. 2. Para una pareja de argumentos θ y $\frac{\pi}{2} - \theta$:

$$e^{i\theta} + e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} = (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) + i(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta),$$

cuya parte real y parte imaginaria son iguales. 3. Además $e^{i \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ también tiene la parte real igual a la imaginaria. 4. S es suma de números con $\operatorname{Re} = \operatorname{Im}$, luego $\operatorname{Re} S = \operatorname{Im} S$.

- (ii) 1. $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$. 2. Sustituimos: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

(iii) 1. Por (i), $S = (\operatorname{Re} S)(1 + i)$, así que basta calcular $\operatorname{Re} S$:

$$\operatorname{Re} S = \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{12}.$$

2. $\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$, y $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 3. Entonces $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. 4. Sumamos el resto ($\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$):

$$\operatorname{Re} S = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}).$$

5. Factorizamos: $(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{6}$. Por tanto $\operatorname{Re} S = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})$. 6. Luego $S = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})(1 + i)$.

Resultado: a) $e^{i\frac{\pi}{12}}, e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{12}}$ b) (ii) $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Queda demostrado.

EJERCICIO 87

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

Sea ω una de las soluciones no reales de la ecuación $z^3 = 1$.

a) Determine el valor de

(i) $1 + \omega + \omega^2$;

(ii) $1 + \omega^* + (\omega^*)^2$.

b) Muestre que $(\omega - 3\omega^2)(\omega^2 - 3\omega) = 13$. Considere los números complejos $p = 1 - 3i$ y $q = x + (2x + 1)i$, donde $x \in \mathbb{R}$.

c) Halle los valores de x que satisfacen la ecuación $|p| = |q|$.

d) Resuelva la inecuación $\operatorname{Re}(pq) + 8 < (\operatorname{Im}(pq))^2$.

a) (i) 1. ω cumple $\omega^3 - 1 = 0$, que factoriza como $(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$. 2. Como ω no es real, $\omega \neq 1$, y entonces $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

(ii) 1. Los coeficientes de $z^3 = 1$ son reales, así que ω^* también es raíz no real de $z^3 = 1$. 2. Aplicando (i) a ω^* : $1 + \omega^* + (\omega^*)^2 = 0$.

b) 1. Desarrollamos: $(\omega - 3\omega^2)(\omega^2 - 3\omega) = \omega^3 - 3\omega^2 - 3\omega^4 + 9\omega^3$. 2. Como $\omega^3 = 1$ y $\omega^4 = \omega$: $= 1 - 3\omega^2 - 3\omega + 9 = 10 - 3(\omega + \omega^2)$. 3. Por (a)(i), $\omega + \omega^2 = -1$, luego el resultado es $10 + 3 = 13$.

c) 1. $|p| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ y $|q| = \sqrt{x^2 + (2x+1)^2}$. 2. Igualamos: $x^2 + (2x+1)^2 = 10$, es decir, $5x^2 + 4x + 1 = 10$, o sea $5x^2 + 4x - 9 = 0$. 3. Fórmula general: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{10} = \frac{-4 \pm 14}{10}$. 4. $x = 1$ o $x = -\frac{9}{5}$.

d) 1. Calculamos el producto:

$$pq = (1 - 3i)(x + (2x + 1)i) = x + (2x + 1)i - 3xi - 3(2x + 1)i^2 = (7x + 3) + (1 - x)i.$$

2. Entonces $\operatorname{Re}(pq) = 7x + 3$ e $\operatorname{Im}(pq) = 1 - x$. 3. La inecuación es $7x + 3 + 8 < (1 - x)^2$, es decir, $7x + 11 < x^2 - 2x + 1$, o sea $x^2 - 9x - 10 > 0$. 4. Factorizamos: $(x - 10)(x + 1) > 0$. La parábola abre hacia arriba, así que es positiva fuera de las raíces. 5. La solución es $x < -1$ o $x > 10$.

Resultado: a) (i) 0 (ii) 0 b) queda demostrado c) $x = 1$ o $x = -\frac{9}{5}$ d) $x < -1$ o $x > 10$. Queda demostrado.

EJERCICIO 88

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

Sea $w = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$.

- a) Verifique que w es una raíz de la ecuación $z^7 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.
- b) (i) Desarrolle $(w - 1)(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6)$.
(ii) A partir de lo anterior, deduzca que $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0$.
- c) Escriba las raíces de la ecuación $z^7 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$ en función de w y sitúe estas raíces en un diagrama de Argand. Considere la ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$, donde $b, c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Las raíces de esta ecuación son α y α^* donde α^* es el número complejo conjugado de α .
- d) (i) Sabiendo que $\alpha = w + w^2 + w^4$, muestre que $\alpha^* = w^6 + w^5 + w^3$.
(ii) Halle el valor de b y el valor de c .
- e) Utilizando los valores de b y c que ha obtenido en el apartado (d)(ii), halle la parte imaginaria de α en forma de radical irracional.

- a) 1. Por el teorema de De Moivre, $w^7 = \cos(7 \cdot \frac{2\pi}{7}) + i \sin(7 \cdot \frac{2\pi}{7}) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$. 2. Luego $w^7 - 1 = 0$ y w es raíz de $z^7 - 1 = 0$.
- b) (i) 1. Multiplicamos término a término; los términos intermedios se cancelan:
$$(w - 1)(1 + w + \dots + w^6) = (w + w^2 + \dots + w^7) - (1 + w + \dots + w^6) = w^7 - 1.$$

(ii) 1. Por (a), $w^7 - 1 = 0$, así que $(w - 1)(1 + w + \dots + w^6) = 0$. 2. Como $w \neq 1$, el segundo factor es cero: $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0$.
- c) 1. Las raíces séptimas de la unidad son $\text{cis } \frac{2\pi k}{7}$, con $k = 0, \dots, 6$, es decir, w^k . 2. Son $1, w, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6$. 3. En el diagrama de Argand están sobre la circunferencia de radio 1 centrada en el origen, y son los vértices de un heptágono regular, con 1 en el eje real positivo y cada raíz separada de la siguiente un ángulo $\frac{2\pi}{7}$.
- d) (i) 1. En la circunferencia unidad, el conjugado es el inverso: $(w^m)^* = w^{-m}$. Como $w^7 = 1$, $w^{-m} = w^{7-m}$. 2. Entonces $\alpha^* = w^{-1} + w^{-2} + w^{-4} = w^6 + w^5 + w^3$.
- (ii) 1. Para $z^2 + bz + c = 0$ con raíces α y α^* : $b = -(\alpha + \alpha^*)$ y $c = \alpha\alpha^*$. 2. $\alpha + \alpha^* = w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = -1$ (por (b)(ii)). Luego $b = 1$. 3. Producto:
$$\alpha\alpha^* = (w + w^2 + w^4)(w^6 + w^5 + w^3) = w^7 + w^6 + w^4 + w^8 + w^7 + w^5 + w^{10} + w^9 + w^7.$$

4. Con $w^7 = 1$: $w^8 = w, w^9 = w^2, w^{10} = w^3$. Queda $3 + (w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6) = 3 - 1 = 2$. 5. Luego $c = 2$.
- e) 1. La ecuación es $z^2 + z + 2 = 0$, con $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. 2. Entonces $\text{Im } \alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$. Hay que decidir el signo. 3. $\text{Im } \alpha = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7}$. Como $\sin \frac{8\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}$ y $\sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{3\pi}{7} > \sin \frac{\pi}{7}$, la suma es positiva. 4. Luego $\text{Im } \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Resultado: b) $b = 1$, $c = 2$; e) $\text{Im } \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Queda demostrado.

EJERCICIO 89

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

- a) Resuelva la ecuación $z^3 = 8i$, $z \in \mathbb{C}$ y dé las respuestas en la forma $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.
- b) Considere los números complejos $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)$.
- (i) Escriba z_1 en la forma $r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.
- (ii) Calcule $z_1 z_2$ y escriba el resultado en la forma $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- (iii) A partir de lo anterior, halle el valor de $\tan \frac{5\pi}{12}$ en la forma $c + d\sqrt{3}$, donde $c, d \in \mathbb{Z}$.
- (iv) Halle el menor valor $p > 0$ para el que $(z_2)^p$ es un número real positivo.

- a) 1. Escribimos $8i$ en forma polar: $|8i| = 8$ y $\arg(8i) = \frac{\pi}{2}$, es decir, $8i = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right)$. 2. Las raíces cúbicas tienen módulo $\sqrt[3]{8} = 2$ y argumentos $\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, con $k = 0, 1, 2$:

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2}.$$

3. En forma polar:

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right), \quad 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \right), \quad 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right).$$

4. En forma binómica: $z = \sqrt{3} + i$, $z = -\sqrt{3} + i$, $z = -2i$.

- b) (i) 1. $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Como z_1 está en el primer cuadrante y $\tan \theta = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. 2. $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$.

- (ii) 1. Escribimos z_2 en forma binómica: $z_2 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{3} + i$. 2. Multiplicamos:

$$z_1 z_2 = (1 + i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + \sqrt{3}i + i^2 = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i.$$

- (iii) 1. Al multiplicar en forma polar se suman los argumentos: $\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$. Como $z_1 z_2$ está en el primer cuadrante, la tangente de ese argumento es parte imaginaria entre parte real:

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$$

2. Racionalizamos:

$$\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

- (iv) 1. Por Moivre, $(z_2)^p = 2^p \left(\cos \frac{p\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{p\pi}{6} \right)$. 2. Es real positivo cuando el argumento es múltiplo de 2π : $\frac{p\pi}{6} = 2k\pi$, es decir, $p = 12k$. 3. El menor valor positivo es $p = 12$.

Resultado: a) $z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + i$, $z = 2 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + i$, $z = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = -2i$ b) (i) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$ (ii) $(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1)i$ (iii) $2 + \sqrt{3}$ (iv) $p = 12$

EJERCICIO 90

★★★ Difícil

IB · P3 TZ2 Mayo 2021

En esta pregunta le pediremos que investigue y demuestre una propiedad geométrica que cumplen las raíces de la ecuación $z^n = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, para los valores enteros de n , donde $n \geq 2$.

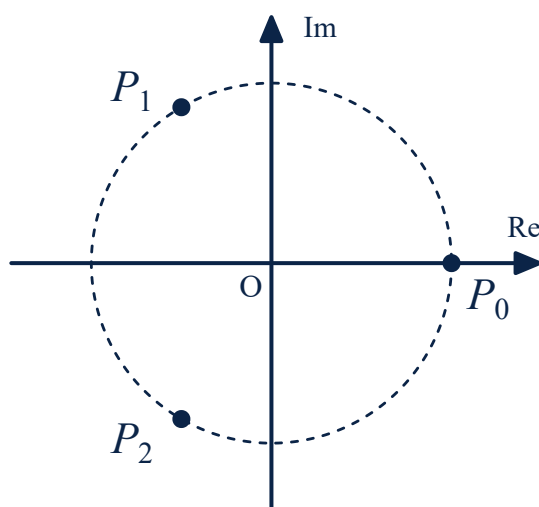
Las raíces de la ecuación $z^n = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$, donde $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Estas raíces se pueden representar en un diagrama de Argand mediante los puntos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ respectivamente.

Por ejemplo, las raíces de la ecuación $z^2 = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son 1 y w . En un diagrama de Argand, la raíz 1 se puede representar mediante el punto P_0 y la raíz w se puede representar mediante el punto P_1 .

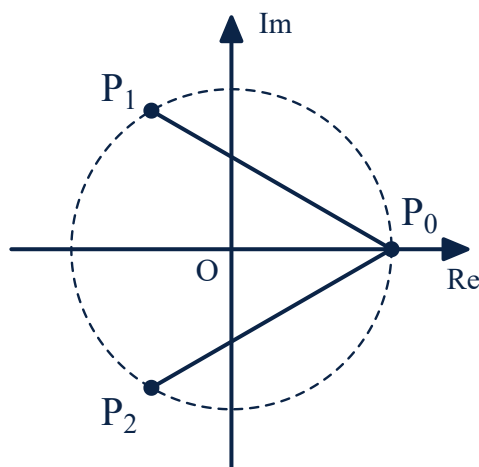
Considere ahora el caso $n = 3$.

Las raíces de la ecuación $z^3 = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son $1, w$ y w^2 . En el siguiente diagrama de Argand, los puntos P_0, P_1 y P_2 están sobre la circunferencia de radio 1 unidad con centro en $O(0, 0)$.



a) i) Muestre que $(w - 1)(w^2 + w + 1) = w^3 - 1$. ii) A partir de lo anterior, deduzca que $w^2 + w + 1 = 0$.

Ahora añadimos los segmentos de recta $[P_0P_1]$ y $[P_0P_2]$ al diagrama de Argand del apartado (a); el resultado se muestra en el siguiente diagrama de Argand.



P_0P_1 es la longitud de $[P_0P_1]$ y P_0P_2 es la longitud de $[P_0P_2]$.

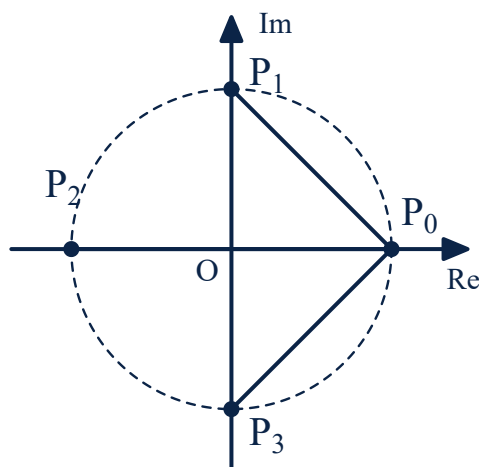
b) Muestre que $P_0P_1 \times P_0P_2 = 3$.

Considere ahora el caso $n = 4$.

Las raíces de la ecuación $z^4 = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son $1, w, w^2$ y w^3 .

c) Descomponiendo en factores $z^4 - 1$, o de cualquier otro modo, deduzca que $w^3 + w^2 + w + 1 = 0$.

En el siguiente diagrama de Argand, los puntos P_0, P_1, P_2 y P_3 están sobre la circunferencia de radio 1 unidad con centro en $O(0, 0)$. $[P_0P_1]$, $[P_0P_2]$ y $[P_0P_3]$ son segmentos de recta.



d) Muestre que $P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 = 4$.

Para el caso $n = 5$, la ecuación $z^5 = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, tiene por raíces $1, w, w^2, w^3$ y w^4 .

Se puede demostrar que $P_0P_1 \times P_0P_2 \times P_0P_3 \times P_0P_4 = 5$.

Considere ahora el caso general donde $n \geq 2$.

Las raíces de $z^n = 1$, donde $z \in \mathbb{C}$, son $1, w, w^2, \dots, w^{n-1}$. En un diagrama de Argand, estas raíces se pueden representar mediante los puntos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ respectivamente, donde $[P_0P_1], [P_0P_2], \dots, [P_0P_{n-1}]$ son segmentos de recta. Las raíces están sobre la circunferencia de radio 1 unidad con centro en $O(0, 0)$.

e) Sugiera un valor para $P_0P_1 \times P_0P_2 \times \dots \times P_0P_{n-1}$.

P_0P_1 se puede expresar como $|1 - w|$.

f) i) Escriba expresiones para P_0P_2 y P_0P_3 en función de w . ii) A partir de lo anterior, escriba una expresión para P_0P_{n-1} en función de n y de w .

Considere $z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)$, donde $z \in \mathbb{C}$.

g) i) Expresé $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1$ como un producto de factores lineales sobre el conjunto $\mathbb{C}$. ii) A partir de lo anterior, y utilizando los resultados del subapartado (g)i) y del apartado (f), o de cualquier otro modo, demuestre el resultado que ha sugerido en el apartado (e).

a) i) 1. Desarrollamos: $(w - 1)(w^2 + w + 1) = w^3 + w^2 + w - w^2 - w - 1 = w^3 - 1$.

a) ii) 1. w es raíz de $z^3 = 1$, así que $w^3 - 1 = 0$. 2. Por el apartado anterior, $(w - 1)(w^2 + w + 1) = 0$. 3. Como $w = e^{2\pi i/3} \neq 1$, el factor $w - 1$ no es cero. Entonces $w^2 + w + 1 = 0$.

b) 1. Los puntos P_0 y P_1 representan 1 y w , así que $P_0P_1 = |w - 1| = |1 - w|$. Del mismo modo $P_0P_2 = |1 - w^2|$. 2. El producto es

$$P_0P_1 \times P_0P_2 = |(1 - w)(1 - w^2)| = |1 - w - w^2 + w^3|.$$

3. Con $w^3 = 1$: $|2 - (w + w^2)|$. Por (a) (ii), $w + w^2 = -1$. 4. Entonces el producto es $|2 - (-1)| = 3$.

c) 1. Factorizamos: $z^4 - 1 = (z - 1)(z^3 + z^2 + z + 1)$. 2. Como $w^4 = 1$, $(w - 1)(w^3 + w^2 + w + 1) = 0$. 3. Como $w = e^{2\pi i/4} = i \neq 1$, resulta $w^3 + w^2 + w + 1 = 0$.

d) 1. Para $n = 4$, $w = i$, y P_1, P_2, P_3 representan $i, -1$ y $-i$. 2. $P_0P_1 = |1 - i| = \sqrt{2}$, $P_0P_2 = |1 - (-1)| = 2$ y $P_0P_3 = |1 - (-i)| = \sqrt{2}$. 3. El producto es $\sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$.

- e) 1. Con $n = 2$ da $|1 - (-1)| = 2$, con $n = 3$ da 3, con $n = 4$ da 4 y con $n = 5$ da 5. El patrón sugiere que el producto es n .
- f) i) 1. $P_0P_2 = |1 - w^2|$ y $P_0P_3 = |1 - w^3|$.
- f) ii) 1. Siguiendo el mismo patrón, $P_0P_{n-1} = |1 - w^{n-1}|$.
- g) i) 1. Los números $w, w^2, \dots, w^{n-1}$ cumplen $z^n = 1$ y son distintos de 1, así que son raíces de $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1$ (porque $z^n - 1 = (z - 1)(\dots)$ y $z - 1 \neq 0$). 2. Son $n - 1$ raíces distintas de un polinomio mónico de grado $n - 1$, luego

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = (z - w)(z - w^2) \dots (z - w^{n-1}).$$

- g) ii) 1. Sustituimos $z = 1$ en la igualdad anterior. El primer miembro es n (suma de n unos):

$$n = (1 - w)(1 - w^2) \dots (1 - w^{n-1}).$$

2. Tomamos módulos y usamos que el módulo de un producto es el producto de los módulos:

$$n = |1 - w| |1 - w^2| \dots |1 - w^{n-1}|.$$

3. Por (f), cada factor es P_0P_k . Luego $P_0P_1 \times P_0P_2 \times \dots \times P_0P_{n-1} = n$.

Resultado: b) 3; d) 4; e) el producto vale n ; f) $P_0P_{n-1} = |1 - w^{n-1}|$; g) i) $(z - w)(z - w^2) \dots (z - w^{n-1})$.

Queda demostrado.

EJERCICIO 91

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2021

Considere la ecuación $(z - 1)^3 = i$, $z \in \mathbb{C}$.

Las raíces de esta ecuación son w_1, w_2 y w_3 donde $\text{Im}(w_2) > 0$ y $\text{Im}(w_3) < 0$

- a) i) Verifique que $w_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ es una raíz de esta ecuación. ii) Calcule w_2 y w_3 , expresándolas en la forma $a + e^{i\theta}$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$.

Las raíces w_1, w_2 y w_3 representan los puntos A, B y C respectivamente en un diagrama de Argand.

- b) Dibuje los puntos A, B y C en el diagrama de Argand.

- c) Calcule AC.

Considere la ecuación $(z - 1)^3 = iz^3$, $z \in \mathbb{C}$.

- d) Usando el teorema de Moivre, muestre que $\alpha = \frac{1}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}}$ es una raíz de la ecuación.

- e) Calcule $\text{Re}(\alpha)$.

- a) i) 1. Si $w_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$, entonces $w_1 - 1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$. 2. Por el teorema de Moivre: $(w_1 - 1)^3 = (e^{i\frac{\pi}{6}})^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$. 3. Se cumple $(w_1 - 1)^3 = i$, luego w_1 es raíz.

- (ii) 1. Escribimos $i = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$ y tomamos raíces cúbicas de $z - 1$: $z - 1 = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}$, con $k = 0, 1, 2$. 2. $k = 0$: $\frac{\pi}{6}$; $k = 1$: $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$; $k = 2$: $\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$. 3. La parte imaginaria de $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ es $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} > 0$, y la de $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ es $-1 < 0$. Por tanto $w_2 = 1 + e^{i\frac{5\pi}{6}}$ y $w_3 = 1 + e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

- b) 1. Las tres raíces cumplen $|w - 1| = 1$: están sobre la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1. 2. $A = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (a 30° del centro), $B = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (a 150°) y $C = (1, -1)$ (a 270° , justo debajo del centro). 3. Los argumentos desde el centro están separados 120° , así que A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en esa circunferencia.

- c) 1. AC es el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 1. 2. Directamente:

$$AC = \left| e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{i\frac{3\pi}{2}} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + i \right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}.$$

d) 1. $z = 0$ no es solución de $(z - 1)^3 = iz^3$ (daría $-1 = 0$), así que podemos dividir entre z^3 : $\left(\frac{z-1}{z}\right)^3 = i$, es decir, $\left(1 - \frac{1}{z}\right)^3 = i$. 2. Para $\alpha = \frac{1}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}}$ tenemos $\frac{1}{\alpha} = 1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$, luego $1 - \frac{1}{\alpha} = e^{i\frac{\pi}{6}}$. 3. Por Moivre: $\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. 4. Entonces $\frac{(\alpha - 1)^3}{\alpha^3} = i$, es decir, $(\alpha - 1)^3 = i\alpha^3$. Queda comprobado que α es raíz.

e) 1. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador: $\alpha = \frac{1}{(1 - \cos \frac{\pi}{6}) - i \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{(1 - \cos \frac{\pi}{6}) + i \sin \frac{\pi}{6}}{(1 - \cos \frac{\pi}{6})^2 + \sin^2 \frac{\pi}{6}}$. 2. El denominador vale $1 - 2 \cos \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6} = 2 - 2 \cos \frac{\pi}{6} = 2(1 - \cos \frac{\pi}{6})$. 3. Por tanto $\operatorname{Re}(\alpha) = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2(1 - \cos \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{2}$.

Resultado: a) i) queda verificado ii) $w_2 = 1 + e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $w_3 = 1 + e^{i\frac{3\pi}{2}}$ b) triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1 c) $AC = \sqrt{3}$ d) queda mostrado e) $\operatorname{Re}(\alpha) = \frac{1}{2}$

Polinomios con raíces complejas

EJERCICIO 92 ★ Básico IB · P2 TZ1 Mayo 2014

Una raíz de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$ es $2 + 3i$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Calcule el valor de a y el valor de b .

- Los coeficientes a y b son reales, así que las raíces complejas de la ecuación aparecen en parejas conjugadas. La otra raíz es $2 - 3i$.
- Usamos las relaciones de Cardano-Vieta: la suma de las raíces es $-a$ y el producto es b .
- Suma: $(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4 = -a$, luego $a = -4$.
- Producto: $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13 = b$.

Resultado: $a = -4$, $b = 13$

EJERCICIO 93 ★ Básico IB · P1 Mayo 1997

El número complejo $z = 1 + 2i$ es una solución de la ecuación $z^3 - 3z^2 + 7z - 5 = 0$. Calcule las otras dos soluciones.

- Los coeficientes de la ecuación son reales, así que si $1 + 2i$ es solución, su conjugado $1 - 2i$ también lo es.
- Estas dos raíces forman el factor

$$(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i)) = (z - 1)^2 - (2i)^2 = z^2 - 2z + 5.$$
- Dividimos el polinomio entre este factor: $z^3 - 3z^2 + 7z - 5 = (z^2 - 2z + 5)(z - 1)$. Comprobación: $(z^2 - 2z + 5)(z - 1) = z^3 - z^2 - 2z^2 + 2z + 5z - 5 = z^3 - 3z^2 + 7z - 5$.
- La tercera raíz es $z = 1$. (También se obtiene porque el producto de las tres raíces es 5 y $(1 + 2i)(1 - 2i) = 5$.)

Resultado: $z = 1 - 2i$ y $z = 1$

EJERCICIO 94

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2005

Sea $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$, donde a, b y c son reales. Dos de las raíces de $P(z)$ son -2 y $-3 + 2i$. Halle el valor de a , de b y de c .

1. Los coeficientes son reales, así que las raíces no reales vienen en pares conjugados. Como $-3 + 2i$ es raíz, también lo es $-3 - 2i$. Las tres raíces son $-2, -3 + 2i$ y $-3 - 2i$.
2. Entonces $P(z) = (z + 2)(z - (-3 + 2i))(z - (-3 - 2i))$.
3. El producto de los dos factores complejos es

$$((z + 3) - 2i)((z + 3) + 2i) = (z + 3)^2 + 4 = z^2 + 6z + 13.$$
4. Multiplicamos: $P(z) = (z + 2)(z^2 + 6z + 13) = z^3 + 6z^2 + 13z + 2z^2 + 12z + 26 = z^3 + 8z^2 + 25z + 26$.
5. Comparando con $z^3 + az^2 + bz + c$ se obtiene $a = 8, b = 25, c = 26$.

Resultado: $a = 8, b = 25, c = 26$

EJERCICIO 95

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2009

Sabiendo que $z_1 = 2$ y $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ son raíces de la ecuación de tercer grado $z^3 + bz^2 + cz + d = 0$, donde $b, c, d \in \mathbb{R}$.

- a) escriba la tercera raíz de la ecuación, z_3 .
- b) halle los valores de b, c y d .
- c) escriba z_2 y z_3 en forma de $re^{i\theta}$.

- a) 1. Los coeficientes de la ecuación son reales, así que las raíces no reales aparecen con su conjugada. 2. Como $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ es raíz, también lo es $z_3 = z_2^* = 1 - \sqrt{3}i$.
- b) 1. Con las tres raíces, $z^3 + bz^2 + cz + d = (z - 2)(z - (1 + \sqrt{3}i))(z - (1 - \sqrt{3}i))$. 2. El producto de los factores complejos es $((z - 1) - \sqrt{3}i)((z - 1) + \sqrt{3}i) = (z - 1)^2 + 3 = z^2 - 2z + 4$. 3. Multiplicamos: $(z - 2)(z^2 - 2z + 4) = z^3 - 2z^2 + 4z - 2z^2 + 4z - 8 = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$. 4. Comparando coeficientes: $b = -4, c = 8, d = -8$.
- c) 1. Para $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$: $|z_2| = \sqrt{1 + 3} = 2$ y $\arg z_2 = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, luego $z_2 = 2e^{i\pi/3}$. 2. Para $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ (conjugado de z_2): mismo módulo y argumento opuesto, luego $z_3 = 2e^{-i\pi/3}$.

Resultado: a) $z_3 = 1 - \sqrt{3}i$ b) $b = -4, c = 8, d = -8$ c) $z_2 = 2e^{i\pi/3}, z_3 = 2e^{-i\pi/3}$

EJERCICIO 96

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2010

Considere el polinomio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sabiendo que $1 + i$ y $1 - 2i$ son ceros de $p(x)$, halle los valores de a, b, c y d .

1. $p(x)$ tiene coeficientes reales, así que los ceros complejos aparecen con sus conjugados. Por tanto también son ceros $1 - i$ y $1 + 2i$.
2. Los cuatro ceros son $1 + i, 1 - i, 1 - 2i, 1 + 2i$. Agrupamos cada par conjugado:

$$(x - (1 + i))(x - (1 - i)) = x^2 - 2x + 2, \quad (x - (1 - 2i))(x - (1 + 2i)) = x^2 - 2x + 5.$$
3. Entonces $p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 5)$. Llamamos $u = x^2 - 2x$:

$$(u + 2)(u + 5) = u^2 + 7u + 10.$$

4. Sustituimos u y desarrollamos: $u^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ y $7u = 7x^2 - 14x$, luego

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10.$$

5. Comparamos con $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Resultado: $a = -4$, $b = 11$, $c = -14$, $d = 10$

EJERCICIO 97

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 2000

Calcule el número real k para que $1 + ki$ sea un cero del polinomio $z^2 + kz + 5$.

1. Si $1 + ki$ es un cero, al sustituirlo en el polinomio se obtiene 0:

$$(1 + ki)^2 + k(1 + ki) + 5 = 0.$$

2. Desarrollamos: $1 + 2ki - k^2 + k + k^2i + 5 = 0$.

3. Separamos partes: real $6 + k - k^2$ e imaginaria $2k + k^2$.

4. Parte imaginaria cero: $k(k + 2) = 0$, luego $k = 0$ o $k = -2$.

5. Parte real cero: $k^2 - k - 6 = 0$, es decir, $(k - 3)(k + 2) = 0$, luego $k = 3$ o $k = -2$.

6. El único valor que cumple ambas condiciones es $k = -2$.

Resultado: $k = -2$

EJERCICIO 98

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2001

$(z + 2i)$ es un factor de $2z^3 - 3z^2 + 8z - 12$. Calcule los otros dos factores.

1. Los coeficientes de $2z^3 - 3z^2 + 8z - 12$ son reales, así que si $-2i$ es raíz (factor $z + 2i$), también lo es su conjugado $2i$, y $(z - 2i)$ es otro factor.

2. El producto de ambos es $(z + 2i)(z - 2i) = z^2 + 4$.

3. Dividimos el polinomio entre $z^2 + 4$. El cociente tiene grado 1: $2z + k$, y $(z^2 + 4)(2z + k) = 2z^3 + kz^2 + 8z + 4k$.

4. Comparando con $2z^3 - 3z^2 + 8z - 12$: $k = -3$ y $4k = -12$, coherentes. El cociente es $2z - 3$.

5. Así, $2z^3 - 3z^2 + 8z - 12 = (z + 2i)(z - 2i)(2z - 3)$.

Resultado: los otros dos factores son $(z - 2i)$ y $(2z - 3)$

EJERCICIO 99

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2007

El polinomio $P(z) = z^3 + mz^2 + nz - 8$ es divisible por $(z + 1 + i)$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $m, n \in \mathbb{R}$. Halle el valor de m y de n .

1. Como $P(z)$ tiene coeficientes reales y $-1 - i$ es raíz (porque $z + 1 + i$ es factor), su conjugado $-1 + i$ también es raíz, y $z + 1 - i$ es factor.

2. El producto de ambos factores es $(z + 1 + i)(z + 1 - i) = (z + 1)^2 + 1 = z^2 + 2z + 2$.

3. $P(z)$ es de grado 3, luego $P(z) = (z^2 + 2z + 2)(z + c)$. Comparamos el término independiente: $2c = -8$, así que $c = -4$.

4. Desarrollamos: $(z^2 + 2z + 2)(z - 4) = z^3 - 2z^2 - 6z - 8$.

5. Igualamos con $z^3 + mz^2 + nz - 8$: $m = -2$ y $n = -6$.

Resultado: $m = -2$, $n = -6$

EJERCICIO 100

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2009

- a) Muestre que el número complejo i es raíz de la ecuación $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = 0$.
b) Calcule las otras raíces de la ecuación.

- a) 1. Sustituimos $x = i$ usando $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$:

$$i^4 - 5i^3 + 7i^2 - 5i + 6 = 1 + 5i - 7 - 5i + 6.$$

2. Agrupando partes real e imaginaria: $(1 - 7 + 6) + (5 - 5)i = 0$. Por tanto i es raíz.

- b) 1. Los coeficientes de la ecuación son reales, así que las raíces complejas aparecen por parejas de conjugados. Como i es raíz, también lo es $-i$. 2. El polinomio es divisible por $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$. Dividimos:

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 = (x^2 + 1)(x^2 - 5x + 6).$$

3. Comprobación: $(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 6) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x^2 - 5x + 6$, que coincide. 4. Resolvemos $x^2 - 5x + 6 = 0$: $(x - 2)(x - 3) = 0$, luego $x = 2$ y $x = 3$.

Resultado: a) $i^4 - 5i^3 + 7i^2 - 5i + 6 = 0$ b) $x = -i$, $x = 2$, $x = 3$. Queda demostrado.

EJERCICIO 101

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

Demostración

Considere la ecuación $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$. Dos de las raíces de esta ecuación son $\log_2 6$ e $i\sqrt{3}$; además, la suma de todas las raíces es igual a $3 + \log_2 3$. Muestre que $6a + d + 12 = 0$.

1. Los coeficientes son reales, así que las raíces no reales vienen en pares conjugados. Como $i\sqrt{3}$ es raíz, también lo es $-i\sqrt{3}$.
2. Las cuatro raíces son $\log_2 6$, $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$ y una cuarta raíz real r .
3. La suma de las raíces es $3 + \log_2 3$:

$$\log_2 6 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} + r = 3 + \log_2 3 \Rightarrow r = 3 + \log_2 3 - \log_2 6 = 3 - \log_2 \frac{6}{3} = 3 - 1 = 2.$$

4. Para una ecuación $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, la suma de las raíces es $-a$. Luego $a = -(3 + \log_2 3)$.
5. El producto de las cuatro raíces es d (el grado es par):

$$d = \log_2 6 \cdot (i\sqrt{3})(-i\sqrt{3}) \cdot 2 = \log_2 6 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \log_2 6.$$

6. Como $\log_2 6 = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$:

$$6a + d + 12 = -18 - 6 \log_2 3 + 6(1 + \log_2 3) + 12 = -18 - 6 \log_2 3 + 6 + 6 \log_2 3 + 12 = 0.$$

Queda demostrado.

EJERCICIO 102

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2016

Dos raíces distintas de la ecuación $z^4 - 10z^3 + az^2 + bz + 50 = 0$ son $c + i$ y $2 + id$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $d > 0$.

- a) Escriba las otras dos raíces en función de c y d .
b) Calcule el valor de c y el valor de d .

- a) 1. Los coeficientes de la ecuación son reales, así que las raíces no reales aparecen en parejas conjugadas. 2. La conjugada de $c + i$ es $c - i$ y la de $2 + id$ es $2 - id$.

b) 1. La suma de las cuatro raíces es $-\frac{-10}{1} = 10$:

$$(c+i) + (c-i) + (2+id) + (2-id) = 2c+4 = 10 \Rightarrow c=3.$$

2. El producto de las cuatro raíces es el término independiente, 50:

$$(c+i)(c-i)(2+id)(2-id) = (c^2+1)(4+d^2) = 50.$$

3. Con $c=3$: $10(4+d^2) = 50$, luego $d^2 = 1$. 4. Como $d > 0$, $d = 1$.

Resultado: a) $c-i$ y $2-id$ b) $c=3$, $d=1$

EJERCICIO 103

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2001

$(z+2i)$ es un factor de $2z^3 - 3z^2 + 8z - 12$. Calcule los otros dos factores.

1. Si $(z+2i)$ es factor y el polinomio tiene coeficientes reales, $z = -2i$ es raíz y también lo es su conjugada $z = 2i$. Por tanto $(z-2i)$ es también factor.

2. El producto de ambos es $(z+2i)(z-2i) = z^2 + 4$.

3. Dividimos $2z^3 - 3z^2 + 8z - 12$ entre $z^2 + 4$: el cociente es $2z - 3$, porque $(z^2 + 4)(2z - 3) = 2z^3 - 3z^2 + 8z - 12$.

4. Por tanto $2z^3 - 3z^2 + 8z - 12 = (z+2i)(z-2i)(2z-3)$.

Resultado: los otros dos factores son $(z-2i)$ y $(2z-3)$

EJERCICIO 104

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2013

Un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales es de grado cinco. La ecuación $p(x) = 0$ tiene una raíz compleja $2+i$. La gráfica de $y = p(x)$ tiene el eje x como tangente en $(2, 0)$ y corta a los ejes de coordenadas en $(-1, 0)$ y $(0, 4)$. Halle $p(x)$ en forma factorizada con coeficientes reales.

1. Los coeficientes son reales, así que las raíces complejas vienen en pares conjugados: si $2+i$ es raíz, también lo es $2-i$.

2. La gráfica es tangente al eje x en $(2, 0)$: $x = 2$ es raíz doble.

3. Corta al eje x en $(-1, 0)$: $x = -1$ es raíz simple.

4. Son $2+2+1 = 5$ raíces, el grado de p . Entonces $p(x) = a(x+1)(x-2)^2(x-(2+i))(x-(2-i))$.

5. El producto de los dos últimos factores es $(x-2)^2 - i^2 = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$, que tiene coeficientes reales. Luego $p(x) = a(x+1)(x-2)^2(x^2 - 4x + 5)$.

6. Usamos $(0, 4)$: $p(0) = a \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = 20a = 4$, así que $a = \frac{1}{5}$.

Resultado: $p(x) = \frac{1}{5}(x+1)(x-2)^2(x^2 - 4x + 5)$

EJERCICIO 105

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2022

Considere la ecuación $z^4 + pz^3 + 54z^2 - 108z + 80 = 0$, donde $z \in \mathbb{C}$ y $p \in \mathbb{R}$.

Tres de las raíces de esta ecuación son $3 + i$, α y α^2 , donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Considerando el producto de todas las raíces de esta ecuación, halle el valor de α .
- Halle el valor de p .

a) 1. Los coeficientes son reales, así que $3 - i$ también es raíz. Las cuatro raíces son $3 + i$, $3 - i$, α y α^2 . 2. Para una ecuación de grado 4 con coeficiente principal 1, el producto de las raíces es el término independiente: 80. 3. $(3 + i)(3 - i)\alpha \cdot \alpha^2 = 10\alpha^3 = 80$, luego $\alpha^3 = 8$. 4. Como $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 2$.

b) 1. Las raíces son $3 + i$, $3 - i$, 2 y 4. 2. La suma de las raíces es $-p$: $(3 + i) + (3 - i) + 2 + 4 = 12 = -p$. 3. Por tanto $p = -12$. Comprobación: $(z^2 - 6z + 10)(z^2 - 6z + 8) = z^4 - 12z^3 + 54z^2 - 108z + 80$.

Resultado: a) $\alpha = 2$ b) $p = -12$

EJERCICIO 106

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2009

Considere la ecuación $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Los puntos en el diagrama de Argand que representan las tres raíces de la ecuación son los vértices de un triángulo cuya área es igual a 9. Sabiendo que una de las raíces es $-1 + 3i$, halle:

- las otras dos raíces
- a , b y c .

a) 1. Los coeficientes son reales, así que si $-1 + 3i$ es raíz, también lo es su conjugada $-1 - 3i$. La tercera raíz, r , es real (un polinomio cúbico real tiene un número impar de raíces reales). 2. Los vértices del triángulo son $A(-1, 3)$, $B(-1, -3)$ y $C(r, 0)$. 3. El lado AB es vertical, sobre la recta $x = -1$, y mide 6. La altura desde C a ese lado es la distancia horizontal $|r + 1|$. 4. Área: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |r + 1| = 9 \Rightarrow |r + 1| = 3$, de donde $r = 2$ o $r = -4$.

b) 1. Los dos factores complejos dan $((z + 1) - 3i)((z + 1) + 3i) = (z + 1)^2 + 9 = z^2 + 2z + 10$. 2. Caso $r = 2$: $(z - 2)(z^2 + 2z + 10) = z^3 + 2z^2 + 10z - 2z^2 - 4z - 20 = z^3 + 6z - 20$. Luego $a = 0$, $b = 6$, $c = -20$. 3. Caso $r = -4$: $(z + 4)(z^2 + 2z + 10) = z^3 + 2z^2 + 10z + 4z^2 + 8z + 40 = z^3 + 6z^2 + 18z + 40$. Luego $a = 6$, $b = 18$, $c = 40$.

Resultado: a) las otras raíces son $-1 - 3i$ y 2 (o bien $-1 - 3i$ y -4) b) $a = 0$, $b = 6$, $c = -20$ (o bien $a = 6$, $b = 18$, $c = 40$)

EJERCICIO 107

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Mayo 2019

Consideremos la ecuación $x^5 - 3x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$, donde $m, n, p, q \in \mathbb{R}$. La ecuación tiene tres raíces reales distintas que pueden escribirse como $\log_2 a$, $\log_2 b$ y $\log_2 c$. La ecuación también tiene dos raíces imaginarias, una de las cuales es di donde $d \in \mathbb{R}$.

- Muestre que $abc = 8$. Los valores a , b y c son términos consecutivos en una progresión geométrica.
- Muestre que una de las raíces reales es igual a 1.
- Sabiendo que $q = 8d^2$, encuentre las otras dos raíces reales.

1. Las raíces son $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$, di y $-di$ (los coeficientes son reales, luego la raíz imaginaria di viene con su conjugada). 2. En un polinomio mónico de grado 5 el coeficiente de x^4 es el opuesto de la suma de las raíces, así que la suma vale 3:

$$\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c + di - di = 3.$$

3. Aplicamos $\log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = \log_2(abc)$. Entonces $\log_2(abc) = 3$ y $abc = 2^3 = 8$.

1. Si a , b , c son consecutivos en una progresión geométrica, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, es decir, $ac = b^2$. 2. Sustituimos en $abc = 8$: $b \cdot b^2 = 8$, luego $b^3 = 8$ y $b = 2$. 3. Entonces una raíz real es $\log_2 b = \log_2 2 = 1$.
1. Para un polinomio mónico de grado 5, el producto de las raíces es $-q$. 2. El producto de las raíces es $\log_2 a \cdot 1 \cdot \log_2 c \cdot (di)(-di) = d^2 \log_2 a \log_2 c$, porque $(di)(-di) = d^2$. 3. Así, $-q = d^2 \log_2 a \log_2 c$. Con $q = 8d^2$ y $d \neq 0$ (la raíz es imaginaria): $\log_2 a \cdot \log_2 c = -8$. 4. De $ac = b^2 = 4$ se tiene $\log_2 a + \log_2 c = \log_2 4 = 2$. 5. Sean $u = \log_2 a$ y $v = \log_2 c$. Entonces $u + v = 2$ y $uv = -8$, así que u y v son las raíces de $t^2 - 2t - 8 = 0$, es decir, $(t - 4)(t + 2) = 0$. 6. Luego $\{u, v\} = \{4, -2\}$.

Resultado: a) $abc = 8$; b) una raíz real es 1; c) las otras dos raíces reales son 4 y -2

Queda demostrado.

EJERCICIO 108

★★★ Difícil

IB · P2 Noviembre 1996

- Sean z_1 y z_2 las raíces de la ecuación $2z^2 - (2 - 2i)z - 5i = 0$.
 - Usando la fórmula cuadrática, muestre que $z_1 = \frac{1}{2}(1 - i) + \sqrt{2i}$ y $z_2 = \frac{1}{2}(1 - i) - \sqrt{2i}$.
 - Expresa z_1 y z_2 en la forma $a + ib$, donde a y b son números reales.
- a) Si $z = \cos \theta + i \sin \theta$, muestre que $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$.
 - Sabiendo que cada una de las cuatro raíces de la ecuación $5z^4 - 11z^3 + 16z^2 - 11z + 5 = 0$ tiene un módulo igual a 1, calcule estas raíces. [Sugerencia: divida la ecuación por z^2]

- a) 1. Para $2z^2 - (2 - 2i)z - 5i = 0$: $a = 2$, $b = -(2 - 2i)$, $c = -5i$. La fórmula cuadrática da

$$z = \frac{(2 - 2i) \pm \sqrt{(2 - 2i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5i)}}{4}.$$

2. Calculamos $(2 - 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i$. El discriminante es $-8i + 40i = 32i$. 3. $\sqrt{32i} = \sqrt{16 \cdot 2i} = 4\sqrt{2i}$. Entonces

$$z = \frac{2 - 2i \pm 4\sqrt{2i}}{4} = \frac{1}{2}(1 - i) \pm \sqrt{2i}.$$

- b) 1. Buscamos $\sqrt{2i} = x + iy$. Entonces $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 2i$. 2. Igualando partes: $x^2 - y^2 = 0$ y $2xy = 2$. De la primera, $y = \pm x$; como $xy = 1 > 0$, $y = x$ y $x^2 = 1$. 3. Así $\sqrt{2i} = \pm(1 + i)$. 4. $z_1 = \frac{1}{2}(1 - i) + (1 + i) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$. 5. $z_2 = \frac{1}{2}(1 - i) - (1 + i) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

(ii) a) 1. Con $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ y el teorema de De Moivre, $z^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$. 2. Como $|z| = 1$, $\frac{1}{z^n} = z^{-n} = \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta) = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$. 3. Sumando: $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\theta$.

(ii) b) 1. Dividimos la ecuación por z^2 (las raíces son no nulas):

$$5z^2 - 11z + 16 - \frac{11}{z} + \frac{5}{z^2} = 0 \Rightarrow 5 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) - 11 \left(z + \frac{1}{z} \right) + 16 = 0.$$

2. Como $|z| = 1$, podemos escribir $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. Por el apartado anterior, $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ y $z^2 + \frac{1}{z^2} = 2 \cos 2\theta = 2(2 \cos^2 \theta - 1)$. 3. Sustituimos: $10(2 \cos^2 \theta - 1) - 22 \cos \theta + 16 = 0$, o sea, $20 \cos^2 \theta - 22 \cos \theta + 6 = 0$, que simplificada es $10 \cos^2 \theta - 11 \cos \theta + 3 = 0$. 4. Resolvemos: $\cos \theta = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{20} = \frac{11 \pm 1}{20}$, es decir, $\cos \theta = \frac{3}{5}$ o $\cos \theta = \frac{1}{2}$. 5. Si $\cos \theta = \frac{1}{2}$, entonces $\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 6. Si $\cos \theta = \frac{3}{5}$, entonces $\operatorname{sen} \theta = \pm \frac{4}{5}$ y $z = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i$.

Resultado: i) b) $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$; ii) b) $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}i$

Queda demostrado.

EJERCICIO 109

★★★ Dificil

IB · P1 TZ1 Mayo 2021

Considere la ecuación cuártica $z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 80z + 400 = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Dos de las raíces de esta ecuación son $a + bi$ y $b + ai$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Calcule los posibles valores de a .

- Los coeficientes son reales, así que las raíces no reales vienen en pares conjugados. Las cuatro raíces son $a + bi$, $a - bi$, $b + ai$ y $b - ai$.
- Suma de las raíces: $-\frac{4}{1} = -4$, luego $2a + 2b = -4$, es decir, $a + b = -2$.
- Producto de las raíces: $\frac{400}{1} = 400$. Como $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ y $(b + ai)(b - ai) = a^2 + b^2$, resulta $(a^2 + b^2)^2 = 400$, y por tanto $a^2 + b^2 = 20$.
- De $a + b = -2$ y $a^2 + b^2 = 20$: $ab = \frac{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{4 - 20}{2} = -8$.
- a y b son las raíces de $t^2 + 2t - 8 = 0$, es decir, $(t - 2)(t + 4) = 0$, luego $t = 2$ o $t = -4$.
- Por tanto $(a, b) = (2, -4)$ o $(a, b) = (-4, 2)$. Comprobación con $a = 2$, $b = -4$: $(z^2 - 4z + 20)(z^2 + 8z + 20) = z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 80z + 400$.

Resultado: $a = 2$ o $a = -4$

Complejos y trigonometría: identidades y sumas

EJERCICIO 110

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2011

- a) Escriba el desarrollo de $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$ en la forma $a + ib$, donde a y b están en función de $\sin \theta$ y $\cos \theta$.
- b) A partir de lo anterior demuestre que $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.
- c) De forma similar demuestre que $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$.
- d) Usando lo anterior resuelva la ecuación $\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos \theta = 0$, donde $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- e) Considerando las soluciones de la ecuación $\cos 5\theta = 0$, muestre que $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ y escriba el valor de $\cos \frac{7\pi}{10}$.

- a) 1. Desarrollamos el cubo con el binomio de Newton y usamos $i^2 = -1$, $i^3 = -i$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta.$$

2. Agrupamos parte real y parte imaginaria:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i (3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta).$$

- b) 1. Por el teorema de De Moivre, $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$. 2. Igualamos las partes reales con el apartado a): $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$. 3. Sustituimos $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

- c) 1. Por De Moivre, $\cos 5\theta + i \sin 5\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^5$. Con el binomio de Newton, la parte real de $(c + is)^5$ (donde $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$) es

$$\cos 5\theta = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4,$$

porque los términos con $i^2 = -1$ e $i^4 = 1$ son los reales. 2. Sustituimos $s^2 = 1 - c^2$ y $s^4 = (1 - c^2)^2$:

$$\cos 5\theta = c^5 - 10c^3(1 - c^2) + 5c(1 - 2c^2 + c^4).$$

3. Desarrollamos: $c^5 - 10c^3 + 10c^5 + 5c - 10c^3 + 5c^5 = 16c^5 - 20c^3 + 5c$. Por tanto $\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$.

- d) 1. Sustituimos las fórmulas de b) y c):

$$\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos \theta = (16c^5 - 20c^3 + 5c) + (4c^3 - 3c) + c = 16c^5 - 16c^3 + 3c.$$

2. Factorizamos: $c(16c^4 - 16c^2 + 3) = 0$. 3. O bien $\cos \theta = 0$, o bien $16c^4 - 16c^2 + 3 = 0$. Con $x = c^2$: $16x^2 - 16x + 3 = 0$, de donde $x = \frac{16 \pm 8}{32}$, es decir, $c^2 = \frac{3}{4}$ o $c^2 = \frac{1}{4}$. 4. Como $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, el coseno no es

negativo: $\cos \theta = 0$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ o $\cos \theta = \frac{1}{2}$. 5. En ese intervalo: $\cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$; $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{6}$; $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3}$.

- e) 1. Por el apartado c), $\cos 5\theta = 0$ equivale a $c(16c^4 - 20c^2 + 5) = 0$. 2. Las soluciones con $c \neq 0$ cumplen $16x^2 - 20x + 5 = 0$ con $x = c^2$:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 320}}{32} = \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

3. Los ángulos con $\cos 5\theta = 0$ son $5\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, es decir, $\theta = \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \dots$. De los que tienen coseno distinto de cero, $\theta = \frac{\pi}{10}$ es el menor y tiene el coseno mayor y positivo, así que $\cos^2 \frac{\pi}{10}$ es la raíz mayor:

$\cos^2 \frac{\pi}{10} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$. 4. Como $\cos \frac{\pi}{10} > 0$: $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$. 5. Del mismo modo, $\cos \frac{3\pi}{10} > 0$ es el otro valor

positivo, con $\cos^2 \frac{3\pi}{10} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$. 6. Como $\frac{7\pi}{10} = \pi - \frac{3\pi}{10}$, se cumple $\cos \frac{7\pi}{10} = -\cos \frac{3\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.

Resultado: a) $(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)$ d) $\theta = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{6}$ e) $\cos \frac{7\pi}{10} = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$.
Queda demostrado.

EJERCICIO 111

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2011

- a) Compruebe que $|e^{i\theta}| = 1$. Considere la serie geométrica $1 + \frac{1}{3}e^{i\theta} + \frac{1}{9}e^{2i\theta} + \dots$
- b) Escriba la razón común, z , de la serie y compruebe que $|z| = \frac{1}{3}$.
- c) Halle una expresión para la suma de los infinitos términos de esta serie.
- d) A partir de lo anterior, compruebe que $\frac{1}{3} \sin \theta + \frac{1}{9} \sin 2\theta + \frac{1}{27} \sin 3\theta + \dots = \frac{3 \sin \theta}{10 - 6 \cos \theta}$.

- a) 1. Por la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. 2. Su módulo es $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \sqrt{1} = 1$.
Queda comprobado.

- b) 1. La razón común es el cociente de dos términos consecutivos:

$$z = \frac{\frac{1}{3}e^{i\theta}}{1} = \frac{1}{3}e^{i\theta}.$$

2. Su módulo es $|z| = \frac{1}{3} |e^{i\theta}| = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$.

- c) 1. Como $|z| = \frac{1}{3} < 1$, la serie geométrica converge y su suma es $S_\infty = \frac{u_1}{1 - z}$, con $u_1 = 1$. 2. Entonces

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{i\theta}} = \frac{3}{3 - e^{i\theta}}.$$

- d) 1. Escribimos S_∞ en forma cartesiana y multiplicamos por el conjugado del denominador:

$$S_\infty = \frac{3}{(3 - \cos \theta) - i \sin \theta} = \frac{3[(3 - \cos \theta) + i \sin \theta]}{(3 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}.$$

2. Simplificamos el denominador: $(3 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 9 - 6 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 10 - 6 \cos \theta$. 3. La parte imaginaria de la serie original es $\frac{1}{3} \sin \theta + \frac{1}{9} \sin 2\theta + \frac{1}{27} \sin 3\theta + \dots$, porque $(\frac{1}{3}e^{i\theta})^n = \frac{1}{3^n}(\cos n\theta + i \sin n\theta)$. 4. Igualamos con la parte imaginaria de S_∞ :

$$\frac{1}{3} \sin \theta + \frac{1}{9} \sin 2\theta + \frac{1}{27} \sin 3\theta + \dots = \frac{3 \sin \theta}{10 - 6 \cos \theta}.$$

Resultado: a) $|e^{i\theta}| = 1$ b) $z = \frac{1}{3}e^{i\theta}$ c) $S_\infty = \frac{3}{3 - e^{i\theta}}$ d) $\frac{3 \sin \theta}{10 - 6 \cos \theta}$. **Queda demostrado.**

EJERCICIO 112

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2017

- a) Resuelva $2 \sin(x + 60^\circ) = \cos(x + 30^\circ)$, $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.
- b) Muestre que $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- c) Sea $z = 1 - \cos 2\theta - i \sin 2\theta$, $z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
- (i) Halle, en función de θ , el módulo y el argumento de z . Expresé cada respuesta en su forma más simple.
- (ii) A partir de lo anterior, halle las raíces cúbicas de z en forma módulo-argumental.

- a) 1. Desarrollamos ambos lados con las fórmulas del ángulo suma:

$$2(\sin x \cos 60^\circ + \cos x \sin 60^\circ) = \cos x \cos 30^\circ - \sin x \sin 30^\circ.$$

2. Sustituimos los valores exactos: $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$. 3. Agrupamos: $\frac{3}{2} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$, es decir, $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. 4. En $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ la tangente es negativa solo en el segundo cuadrante: $x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. 5. Comprobación: $2 \sin 210^\circ = -1$ y $\cos 180^\circ = -1$.

b) 1. Usamos $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$ (se obtiene desarrollando $\sin(\theta + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \theta + \cos \theta)$). 2. Con $\theta = 105^\circ$: $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \sqrt{2} \sin 150^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 3. Como $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, queda demostrado.

c) (i) 1. Usamos $1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$ y $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$:

$$z = 2 \sin^2 \theta - 2i \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta (\sin \theta - i \cos \theta).$$

2. Como $-i(\cos \theta + i \sin \theta) = \sin \theta - i \cos \theta$ y $-i = \operatorname{cis}(-\frac{\pi}{2})$:

$$z = 2 \sin \theta \operatorname{cis}(\theta - \frac{\pi}{2}).$$

3. Para $0 < \theta < \pi$ se cumple $\sin \theta > 0$, así que $2 \sin \theta$ es el módulo, y $\theta - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ es el argumento principal. 4. Por tanto $|z| = 2 \sin \theta$ y $\arg z = \theta - \frac{\pi}{2}$.

(ii) 1. Las raíces cúbicas de $z = r \operatorname{cis} \varphi$ tienen módulo $r^{1/3}$ y argumentos $\frac{\varphi + 2\pi k}{3}$, con $k = 0, 1, 2$. 2. Aquí $r^{1/3} = (2 \sin \theta)^{1/3}$ y $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$. 3. Tomando $k = -1, 0, 1$ para que los argumentos queden en $]-\pi, \pi]$:

$$w_0 = (2 \sin \theta)^{1/3} \operatorname{cis} \frac{\theta - \frac{\pi}{2}}{3}, \quad w_1 = (2 \sin \theta)^{1/3} \operatorname{cis} \frac{\theta + \frac{3\pi}{2}}{3}, \quad w_{-1} = (2 \sin \theta)^{1/3} \operatorname{cis} \frac{\theta - \frac{5\pi}{2}}{3}.$$

Resultado: a) $x = 150^\circ$ b) queda demostrado c) (i) $|z| = 2 \sin \theta$, $\arg z = \theta - \frac{\pi}{2}$ (ii) $(2 \sin \theta)^{1/3} \operatorname{cis} \frac{\theta - \frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}$, $k = -1, 0, 1$. Queda demostrado.

EJERCICIO 113

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2016

- a) Utilice el teorema de Moivre para encontrar el valor de $(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))^3$.
- b) Utilice la inducción matemática para probar que $(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$, con $n \in \mathbb{Z}^+$. Sea $z = \cos \theta + i \sin \theta$.
- c) Encuentre una expresión en función de θ para $(z)^n + (z^*)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$ donde z^* es el complejo conjugado de z .
- d) (i) Demuestre que $z \cdot z^* = 1$.
- (ii) Escriba el desarrollo binomial de $(z + z^*)^3$ en función de z y z^* .
- (iii) Usando lo anterior muestre que $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.
- e) Usando lo anterior, resuelva $4 \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$ para $0 \leq \theta < \pi$.

a) 1. Por el teorema de Moivre, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. 2. Con $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $n = 3$: $\cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1$.

b) 1. Caso base, $n = 1$: $\cos \theta - i \sin \theta$ coincide con el lado derecho. Se cumple. 2. Hipótesis de inducción: suponemos que para $n = k$ se cumple $(\cos \theta - i \sin \theta)^k = \cos k\theta - i \sin k\theta$. 3. Paso inductivo, $n = k + 1$:

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^{k+1} = (\cos k\theta - i \sin k\theta)(\cos \theta - i \sin \theta).$$

4. Desarrollamos (con $i^2 = -1$):

$$= \cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta - i(\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta).$$

5. Por las fórmulas del coseno y el seno de una suma, $= \cos(k+1)\theta - i \sin(k+1)\theta$. 6. Si se cumple para $n = k$, se cumple para $n = k + 1$, y se cumple para $n = 1$. Por inducción, es cierto para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

c) 1. Por Moivre, $z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. 2. El conjugado es $z^* = \cos \theta - i \sin \theta$, y por el apartado b) $(z^*)^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$. 3. Sumamos: $z^n + (z^*)^n = 2 \cos n\theta$.

d) (i) 1. $z \cdot z^* = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

(ii) 1. Por el binomio de Newton:

$$(z + z^*)^3 = z^3 + 3z^2 z^* + 3z(z^*)^2 + (z^*)^3.$$

(iii) 1. Sacamos factor común $3zz^*$ en los términos centrales y usamos (i), $zz^* = 1$:

$$(z + z^*)^3 = z^3 + (z^*)^3 + 3zz^*(z + z^*) = z^3 + (z^*)^3 + 3(z + z^*).$$

2. Por c), $z + z^* = 2 \cos \theta$ y $z^3 + (z^*)^3 = 2 \cos 3\theta$. Entonces

$$8 \cos^3 \theta = 2 \cos 3\theta + 6 \cos \theta.$$

3. Despejamos: $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

e) 1. Reescribimos la ecuación como $(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) - (2 \cos^2 \theta - 1) = 0$. 2. Por d)(iii), el primer paréntesis es $\cos 3\theta$, y por la fórmula del ángulo doble, el segundo es $\cos 2\theta$. La ecuación queda $\cos 3\theta = \cos 2\theta$. 3. Dos ángulos tienen el mismo coseno si $3\theta = 2\theta + 2k\pi$ o $3\theta = -2\theta + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Es decir, $\theta = 2k\pi$ o $\theta = \frac{2k\pi}{5}$. 4. En $0 \leq \theta < \pi$: de $\theta = \frac{2k\pi}{5}$ salen $k = 0, 1, 2$, es decir $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ ($k = 3$ da $\frac{6\pi}{5} > \pi$). La otra familia solo aporta $\theta = 0$.

Resultado: a) -1 c) $2 \cos n\theta$ e) $\theta = 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$ **Queda demostrado.**

EJERCICIO 114

★★★ Difícil

IB · P2 Noviembre 2003

- (i) a) Expresa $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta$ en la forma $r \cos(\theta + \alpha)$, con $r > 0$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, dando los valores **exactos** de r y α .
b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, halle el conjunto de valores de $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta$.
c) Resuelva $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta = -1$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, expresando el valor **exacto** de los resultados.
- (ii) Demuestre que $\frac{\sin 4\theta(1 - \cos 2\theta)}{\cos 2\theta(1 - \cos 4\theta)} = \tan \theta$, con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, y $\theta \neq \frac{\pi}{4}$.

- (i) a) 1. Desarrollamos $r \cos(\theta + \alpha) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$ e igualamos coeficientes con $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta$: $r \cos \alpha = \sqrt{3}$ y $r \sin \alpha = 1$. 2. Elevamos al cuadrado y sumamos: $r^2 = 3 + 1 = 4$, luego $r = 2$. 3. Dividimos: $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$. 4. Así, $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta = 2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.
b) 1. Si $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces $\theta + \frac{\pi}{6}$ recorre el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$, que tiene longitud 2π : el coseno alcanza ahí todos sus valores, de -1 a 1 . 2. Por tanto $2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ toma todos los valores entre -2 y 2 .
c) 1. La ecuación es $2 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -1$, es decir, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. 2. En $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$ las soluciones son $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$ y $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$. 3. Restando $\frac{\pi}{6}$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{7\pi}{6}$.
- (ii) 1. Usamos las fórmulas del ángulo doble: $\sin 4\theta = 2 \sin 2\theta \cos 2\theta$, $1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$ y $1 - \cos 4\theta = 2 \sin^2 2\theta$. 2. Sustituimos:

$$\frac{\sin 4\theta(1 - \cos 2\theta)}{\cos 2\theta(1 - \cos 4\theta)} = \frac{2 \sin 2\theta \cos 2\theta \cdot 2 \sin^2 \theta}{\cos 2\theta \cdot 2 \sin^2 2\theta}.$$

3. Para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y $\theta \neq \frac{\pi}{4}$ se tiene $\cos 2\theta \neq 0$ y $\sin 2\theta \neq 0$, así que podemos simplificar: $= \frac{2 \sin^2 \theta}{\sin 2\theta}$. 4. Como

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta: \frac{2 \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta.$$

Resultado: a) $r = 2$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ b) $[-2, 2]$ c) $\theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{7\pi}{6}$. **Queda demostrado.**

EJERCICIO 115

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 2003

- a) Demuestre por inducción matemática que, para un entero positivo n , $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$ donde $i^2 = -1$.
- b) El número complejo z está definido por $z = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$.
- (i) Demuestre que $\frac{1}{z} = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)$.
- (ii) Demuestre que a partir de lo anterior, se puede deducir que $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\theta$.
- c) (i) Halle el desarrollo de $(z + z^{-1})^5$, según el teorema del binomio.
- (ii) A partir de ello, demuestre que $\cos^5 \theta = \frac{1}{16} (a \cos 5\theta + b \cos 3\theta + c \cos \theta)$, donde a , b y c son enteros positivos a hallar.

- a) 1. **Caso base** ($n = 1$): $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^1 = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$. Se cumple. 2. **Hipótesis de inducción**: suponemos $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^k = \cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta$ para un entero positivo k . 3. **Paso inductivo**:

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{k+1} = (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

4. Desarrollamos, con $i^2 = -1$: $= (\cos k\theta \cos \theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen} \theta) + i(\operatorname{sen} k\theta \cos \theta + \cos k\theta \operatorname{sen} \theta)$. 5. Por las fórmulas del coseno y del seno de una suma: $= \cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta$. 6. Es cierto para $n = 1$ y, si lo es para k , lo es para $k+1$. Por inducción, es cierto para todo entero positivo n .

- b) (i) 1. Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de z : $\frac{1}{z} = \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)} = \frac{\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$. 2. Como el coseno es par y el seno es impar, $\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)$.

- (ii) 1. Por a), $z^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$. 2. Por b)(i) y por a) aplicado al ángulo $-\theta$: $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = (\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta))^n = \cos(-n\theta) + i \operatorname{sen}(-n\theta) = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$. 3. Sumamos: $z^n + z^{-n} = 2 \cos n\theta$.

- c) (i) 1. Por el teorema del binomio, con $z \cdot z^{-1} = 1$:

$$(z + z^{-1})^5 = z^5 + 5z^3 + 10z + 10z^{-1} + 5z^{-3} + z^{-5}.$$

- (ii) 1. Por b)(ii) con $n = 1$: $z + z^{-1} = 2 \cos \theta$, luego $(z + z^{-1})^5 = 32 \cos^5 \theta$. 2. Agrupamos los términos del desarrollo: $(z^5 + z^{-5}) + 5(z^3 + z^{-3}) + 10(z + z^{-1}) = 2 \cos 5\theta + 10 \cos 3\theta + 20 \cos \theta$. 3. Igualamos: $32 \cos^5 \theta = 2 \cos 5\theta + 10 \cos 3\theta + 20 \cos \theta$. 4. Dividimos entre 2: $16 \cos^5 \theta = \cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta$, es decir, $\cos^5 \theta = \frac{1}{16} (\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta)$.

Resultado: c) (i) $z^5 + 5z^3 + 10z + 10z^{-1} + 5z^{-3} + z^{-5}$ (ii) $a = 1$, $b = 5$, $c = 10$. Queda demostrado.

EJERCICIO 116

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2007

- a) i) Factorice $t^3 - 3t^2 - 3t + 1$, dando su respuesta como un producto de un factor lineal y un factor cuadrático. ii) Usando lo anterior, encuentre todas las soluciones exactas de la ecuación $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$
- b) Usando el teorema de Moivre y el desarrollo binomial i) muestre que $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$; ii) escriba una expresión similar para $\sin 3\theta$.
- c) i) Usando lo anterior muestre que $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$. ii) Encuentre los valores de θ , $0 \leq \theta \leq 180$, para los que esta identidad no es válida.
- d) Utilizando los resultados de las partes (a) y (c), determine los valores **exactos** de $\tan 15^\circ$ y $\tan 75^\circ$.

a) i) 1. Probamos con $t = -1$: $(-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 1 = -1 - 3 + 3 + 1 = 0$. Por el teorema del factor, $(t + 1)$ es un factor. 2. Dividimos: $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = (t + 1)(t^2 - 4t + 1)$. Comprobamos: $t^3 - 4t^2 + t + t^2 - 4t + 1 = t^3 - 3t^2 - 3t + 1$.

a) ii) 1. La ecuación es $(t + 1)(t^2 - 4t + 1) = 0$. Del factor lineal, $t = -1$. 2. Del cuadrático, $t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

b) i) 1. Por De Moivre, $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$. 2. Por el desarrollo binomial, con $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta.$$

3. Igualamos partes reales: $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$.

b) ii) 1. Igualamos partes imaginarias de las dos expresiones anteriores. 2. $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$.

c) i) 1. $\tan 3\theta = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = \frac{3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta}{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta}$. 2. Dividimos numerador y denominador entre $\cos^3 \theta$ (con $\cos \theta \neq 0$):

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}.$$

c) ii) 1. La identidad deja de ser válida cuando $\tan \theta$ no existe, es decir, $\cos \theta = 0$, que en $[0, 180]$ da $\theta = 90$. 2. También cuando el denominador vale cero: $1 - 3 \tan^2 \theta = 0$, luego $\tan \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, que da $\theta = 30$ y $\theta = 150$.

d) 1. Tomamos $\theta = 15^\circ$. Entonces $3\theta = 45^\circ$ y $\tan 45^\circ = 1$. Sea $t = \tan 15^\circ$: $\frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = 1$. 2. Multiplicamos: $3t - t^3 = 1 - 3t^2$, es decir, $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$. Es la ecuación del apartado (a), con soluciones -1 , $2 - \sqrt{3}$ y $2 + \sqrt{3}$. 3. Como $0 < 15^\circ < 45^\circ$, se cumple $0 < \tan 15^\circ < 1$. Solo $2 - \sqrt{3} \approx 0,268$ está en ese intervalo. 4. Para $\theta = 75^\circ$: $3\theta = 225^\circ$ y $\tan 225^\circ = \tan 45^\circ = 1$. Resulta la misma ecuación. Como $75^\circ > 45^\circ$, $\tan 75^\circ > 1$, y la única solución mayor que 1 es $2 + \sqrt{3}$.

Resultado: a) i) $(t + 1)(t^2 - 4t + 1)$; ii) $t = -1$, $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$; b) ii) $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$; c) ii) $\theta = 30, 90, 150$; d) $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ y $\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$. **Queda demostrado** (b i y c i).

EJERCICIO 117

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2015

- a) i) Utilice el teorema del binomio para desarrollar $(\cos \theta + i \sin \theta)^5$. ii) Use el teorema de De Moivre para probar que

$$\sin 5\theta = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta.$$

iii) Indique una expresión similar para $\cos 5\theta$ en función de $\cos \theta$ y $\sin \theta$. Sea $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, donde α se mide en grados, la solución de $z^5 - 1 = 0$ que tiene el menor argumento positivo.

- b) Halle el valor de r y el valor de α .
c) Usando (a) (ii) y su respuesta de (b) demuestre que $16 \sin^4 \alpha - 20 \sin^2 \alpha + 5 = 0$.
d) Usando lo anterior, exprese $\sin 72^\circ$ en la forma $\frac{\sqrt{a+b\sqrt{c}}}{d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

- a) i) 1. Usamos el teorema del binomio con coeficientes 1, 5, 10, 10, 5, 1 y las potencias $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos^5 \theta + 5i \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta - 10i \cos^2 \theta \sin^3 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta + i \sin^5 \theta.$$

- a) ii) 1. Por De Moivre, $(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$. 2. Igualamos las partes imaginarias del desarrollo anterior:

$$\sin 5\theta = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta.$$

- a) iii) 1. Igualamos las partes reales: $\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta$.

- b) 1. Las soluciones de $z^5 = 1$ son $\text{cis } \frac{2\pi k}{5}$, es decir, de módulo 1 y argumentos $0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, \dots$ 2. El menor argumento positivo es 72° . Luego $r = 1$ y $\alpha = 72^\circ$.

- c) 1. Como $z^5 = 1$, el argumento $5\alpha = 360^\circ$, así que $\sin 5\alpha = \sin 360^\circ = 0$. 2. Sustituimos en (a) (ii): $\sin \alpha (5 \cos^4 \alpha - 10 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 0$. 3. $\sin 72^\circ \neq 0$, luego $5 \cos^4 \alpha - 10 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 0$. 4. Sustituimos $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$:

$$5(1 - \sin^2 \alpha)^2 - 10(1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 0.$$

5. Desarrollamos: $5 - 10 \sin^2 \alpha + 5 \sin^4 \alpha - 10 \sin^2 \alpha + 10 \sin^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 0$, es decir, $16 \sin^4 \alpha - 20 \sin^2 \alpha + 5 = 0$.

- d) 1. Es una ecuación de segundo grado en $\sin^2 \alpha$:

$$\sin^2 \alpha = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 320}}{32} = \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

2. Como $72^\circ > 45^\circ$, $\sin^2 72^\circ > \frac{1}{2}$. Con $\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \approx 0,345 < \frac{1}{2}$ y $\frac{5 + \sqrt{5}}{8} \approx 0,905$, la solución es $\sin^2 72^\circ = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$. 3. $\sin 72^\circ > 0$, así que $\sin 72^\circ = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$.

Resultado: b) $r = 1$, $\alpha = 72^\circ$; d) $\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ (es decir, $a = 10$, $b = 2$, $c = 5$, $d = 4$). Queda demostrado (a ii y c).