

Geometría en el plano: vectores y rectas

Vectores en el plano para IB Análisis y Enfoques NS: operaciones, producto escalar, ángulos, ecuaciones de la recta y distancias, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-analisis-y-enfoques-ns/geometria-en-el-plano.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

Un **vector** es una flecha con dirección, sentido y longitud: sirve para describir desplazamientos, velocidades y fuerzas, y para hacer geometría con cálculos en lugar de dibujos. En este tema aprendes a **operar con vectores** en el plano, a usar el **producto escalar** para medir ángulos y comprobar perpendicularidad, y a escribir y estudiar **rectas** (paralelas, perpendiculares, ángulos y distancias). Es la base del tema de geometría en el espacio.

Orden recomendado

Sigue los apartados en orden. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

Vectores en el plano

IDEA CLAVE

Un vector describe un desplazamiento: cuánto hay que avanzar en horizontal y cuánto en vertical para ir de un punto a otro. Con pocas reglas (restar coordenadas, sumar componentes, multiplicar por un número) se resuelven problemas de longitudes, paralelismo y puntos medios. Es la base de las rectas y del producto escalar, y sale en la Prueba 1 y en la Prueba 2.

Vector, componentes y notación

Un **vector** queda determinado por dos datos: su **módulo** (la longitud de la flecha) y su **dirección y sentido**. El vector que va del punto A al punto B se escribe $\overrightarrow{AB}$; cuando no interesan los puntos, se usa una letra en negrita, como $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$. Se dibuja como una flecha que empieza en A y termina en B .

Lo que realmente caracteriza a un vector es el desplazamiento que realiza. Se anota en una **columna** con dos números, las **componentes**:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

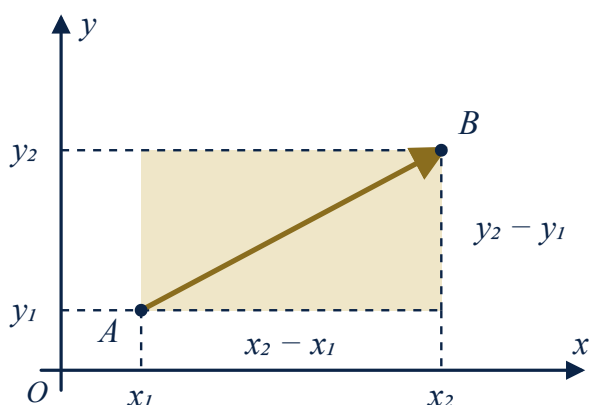
u_1 es el desplazamiento horizontal (positivo hacia la derecha) y u_2 el vertical (positivo hacia arriba).

PROPIEDAD · COMPONENTES DE $\overrightarrow{AB}$

Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Se resta siempre **extremo menos origen**: $B - A$.



La figura lo explica: para ir de A a B se avanza $x_2 - x_1$ en horizontal y $y_2 - y_1$ en vertical. Si algún valor sale negativo, el desplazamiento es hacia la izquierda o hacia abajo. Por ejemplo, para $A(2, 5)$ y $B(6, 1)$ se tiene $\overrightarrow{AB} =$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$: cuatro unidades a la derecha y cuatro hacia abajo. El camino de vuelta es $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, el **vector opuesto**, que se escribe $-\overrightarrow{AB}$.

La misma relación sirve «al revés»: si conoces A y las componentes del vector, el extremo es $B = A + \overrightarrow{AB}$, es decir, se suman las componentes a las coordenadas de A .

Vectores iguales, vector nulo y vector de posición

Dos vectores son **iguales** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. En la práctica basta con esto:

PROPIEDAD · IGUALDAD DE VECTORES

$\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si y solo si tienen las mismas componentes: $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.

Dos flechas iguales pueden estar en lugares distintos del plano: son el mismo desplazamiento dibujado desde puntos de partida diferentes. Por eso se habla de un vector $\mathbf{u}$ sin decir dónde empieza. Si $ABCD$ es un paralelogramo (con los vértices en ese orden), los lados opuestos dan vectores iguales: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Esto permite calcular un vértice que falta igualando componentes.

El **vector nulo** $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el desplazamiento que no mueve nada ($\overrightarrow{AA}$).

El **vector de posición** de un punto P es el que va del origen O hasta P , $\overrightarrow{OP}$. Sus componentes coinciden con las coordenadas de P : si $P(3, -2)$, entonces $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Esto es útil porque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, que es lo mismo que «extremo menos origen».

Módulo de un vector

El **módulo** de $\mathbf{u}$, que se escribe $|\mathbf{u}|$, es la longitud de su flecha. Las dos componentes forman los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la flecha, así que se aplica el teorema de Pitágoras.

DEFINICIÓN · MÓDULO DE UN VECTOR

$$\left| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

En particular, la distancia entre $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

El módulo no es negativo y vale 0 solo para el vector nulo. Un vector con $|\mathbf{u}| = 1$ se llama **unitario**. Para obtener uno que apunte en la misma dirección y sentido que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, se divide entre su módulo; se suele escribir $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u}$$

Con $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ el módulo es $\sqrt{36 + 64} = 10$, y el unitario es $\begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{pmatrix}$.

Suma, resta y producto por un escalar

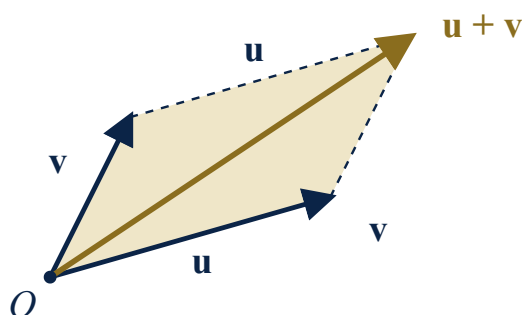
Estas operaciones se hacen **componente a componente**, y cada una tiene una lectura geométrica.

PROPIEDAD · OPERACIONES CON VECTORES

Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} \quad k\mathbf{u} = \begin{pmatrix} k u_1 \\ k u_2 \end{pmatrix}$$

- **Suma.** Es hacer un desplazamiento y después el otro. Si dibujas $\mathbf{v}$ empezando donde termina $\mathbf{u}$, la flecha que va del principio al final es $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Equivale a la diagonal del paralelogramo que forman ambos vectores dibujados desde el mismo punto (figura).
- **Resta.** $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$: se suma el opuesto.
- **Producto por un escalar.** Cambia la longitud sin cambiar la dirección: $|k\mathbf{u}| = |k| |\mathbf{u}|$. Si $k > 0$ el sentido es el de $\mathbf{u}$; si $k < 0$ es el contrario. Con $k = 0$ se obtiene el vector nulo.



Estas operaciones cumplen las propiedades habituales: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ y $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$. También hay una regla muy útil con puntos:

PROPIEDAD · RELACIÓN DE CHASLES

Para tres puntos cualesquiera A , B y C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Ir de A a B y luego de B a C es lo mismo que ir directamente de A a C .

Vectores paralelos

Dos vectores son **paralelos** si uno es un múltiplo del otro. Es decir, tienen la misma dirección (el sentido puede ser el contrario).

DEFINICIÓN · VECTORES PARALELOS

Los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$. En componentes, sus componentes son proporcionales:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} \quad \text{o, sin denominadores,} \quad u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$$

La forma sin denominadores es preferible porque también funciona cuando alguna componente vale 0. Si $k > 0$ los vectores tienen el mismo sentido y si $k < 0$, sentidos contrarios.

Esto sirve para comprobar si tres puntos A , B y C están **alineados**: lo están exactamente cuando $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos (comparten el punto A , así que están en la misma recta). Y sirve para fijar un valor desconocido: si dos

vectores son paralelos y uno de ellos tiene un parámetro, la proporcionalidad da una ecuación para ese parámetro.

Punto medio de un segmento

El punto medio M de AB está a medio camino, así que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Igualando componentes se obtiene una fórmula sencilla.

PROPIEDAD · PUNTO MEDIO

El punto medio de $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Cada coordenada de M es la media de las coordenadas de A y B .

Más en general, el punto P del segmento AB con $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ (con $0 \leq t \leq 1$) se calcula como $P = A + t\overrightarrow{AB}$. Con $t = \frac{1}{2}$ sale el punto medio, y con $t = \frac{1}{3}$ el primero de los puntos que dividen el segmento en tres partes iguales.

Vectores base: $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$

Los vectores unitarios que apuntan en el sentido de los ejes son

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cualquier vector del plano se puede escribir con ellos, porque sus componentes dicen cuántos pasos hay que dar en cada eje:

DEFINICIÓN · VECTORES BASE

$\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son los **vectores base** del plano. Todo vector se escribe de forma única como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$. En los problemas del IB se pasa de una notación a la otra sin avisar, y las operaciones se hacen igual: $(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

NOTA · CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes comprobar con la calculadora de pantalla gráfica (CPG) un módulo o una distancia, pero en la Prueba 1 no hay calculadora: conviene dominar $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ y simplificar la raíz, por ejemplo $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Escribe siempre el planteamiento, porque el método puntúa aunque falle la cuenta.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Componentes, módulo y un extremo desconocido

Se dan los puntos $A(-1, 4)$, $B(5, 1)$ y $C(2, -3)$.

- Halla las componentes de $\overrightarrow{AB}$.
- Calcula $|\overrightarrow{AB}|$ en forma exacta.
- Halla las coordenadas del punto D tal que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

- Extremo menos origen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Por Pitágoras:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

- El extremo es el origen más las componentes: $D = C + \overrightarrow{AB} = (2 + 6, -3 - 3) = (8, -6)$.

Comprobación: $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 8 - 2 \\ -6 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Combinar operaciones y obtener vectores unitarios

Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- Calcula $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.
- Calcula $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.
- Halla el vector unitario con la misma dirección y sentido que $\mathbf{v}$.
- Halla un vector de módulo 10 con la misma dirección que $\mathbf{v}$ y sentido contrario.

- Componente a componente:

$$2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \end{pmatrix}$$

- Primero la suma: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, y su módulo es $\sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

- Como $|\mathbf{v}| = \sqrt{9 + 16} = 5$, el unitario es

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

- Se necesita un múltiplo $k\mathbf{v}$ con $k < 0$ y $|k| \cdot 5 = 10$, luego $k = -2$:

$$-2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sqrt{36 + 64} = 10$$

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Punto medio, alineación y paralelogramo

Se consideran los puntos $A(1, 2)$ y $B(7, 5)$.

- Halla el punto medio M del segmento AB .
- El punto $C(3, k)$ está en la recta que pasa por A y B . Halla el valor de k .
- Sea ahora $C(9, 4)$. Halla las coordenadas del punto D para que $ABCD$ sea un paralelogramo (vértices en ese orden).
- Halla el punto donde se cortan las diagonales AC y BD de ese paralelogramo.
- Halla el punto P del segmento AB que cumple $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Media de coordenadas: $M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+5}{2}\right) = \left(4, \frac{7}{2}\right)$.

- b) Tres puntos están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos. Aquí $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ k-2 \end{pmatrix}$. Se imponen componentes proporcionales:

$$6(k-2) - 3 \cdot 2 = 0 \implies 6k - 18 = 0 \implies k = 3$$

Se comprueba: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

- c) En un paralelogramo $ABCD$, los lados opuestos cumplen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Si $D(x, y)$:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-x \\ 4-y \end{pmatrix} \implies x = 3, y = 1$$

Luego $D(3, 1)$.

- d) Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio común. El punto medio de AC es $\left(\frac{1+9}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (5, 3)$. Se comprueba con la otra diagonal: el punto medio de BD es $\left(\frac{7+3}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (5, 3)$. Coinciden, así que el punto es $(5, 3)$.

e) $P = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (1, 2) + \frac{2}{3}(6, 3) = (1+4, 2+2) = (5, 4)$.

En el examen: en b) puntúa plantear explícitamente que los dos vectores son paralelos (o que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$) y despejar k ; dar k sin justificar pierde el método. En c) indica qué igualdad de vectores usas ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) y fíjate en el orden de los vértices: con otro orden saldría otro punto D .

Errores típicos

ERROR TÍPICO • RESTAR AL REVÉS: ORIGEN MENOS EXTREMO

Para $A(2, 5)$ y $B(6, 1)$ es fácil escribir $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 5-1 \end{pmatrix}$, que en realidad es $\overrightarrow{BA}$. El vector $\overrightarrow{AB}$ es $B - A$: **extremo menos origen**. Si dudas, comprueba el sentido con un dibujo rápido: B está a la derecha y más abajo, así que la primera componente es positiva y la segunda, negativa.

ERROR TÍPICO • PENSAR QUE $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

El módulo no «se reparte» sobre la suma. Con $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ se tiene $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| = 3 + 4 = 7$, pero $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y su módulo es 5. Solo coinciden si los vectores son paralelos con el mismo sentido. Calcula primero el vector y después su módulo.

ERROR TÍPICO · CONFUNDIR «PARALELOS» CON «IGUALES» O IGNORAR EL SIGNO DE k

Si $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ con $k = -2$, los vectores son paralelos aunque apunten en sentidos contrarios y $\mathbf{u}$ sea el doble de largo. Al pasar de un vector a otro hay que quedarse con el signo: $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$, no $+\frac{2}{3}$. Además, para que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ sean iguales no basta con que sean paralelos: tienen que coincidir ambas componentes.

Resumen

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$: extremo menos origen. Si se conoce A , el extremo es $B = A + \overrightarrow{AB}$.
- Dos vectores son iguales si tienen las mismas componentes; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ caracteriza al paralelogramo $ABCD$.
- Módulo: $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Vector unitario: $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$.
- Suma, resta y producto por un escalar se hacen por componentes; $|k\mathbf{u}| = |k||\mathbf{u}|$ y $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Paralelos: $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, es decir $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$. Tres puntos están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos.
- Punto medio de AB : la media de las coordenadas. Punto con $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$: $P = A + t\overrightarrow{AB}$.
- Vectores base: $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

APARTADO 2

Producto escalar y ángulo entre vectores

IDEA CLAVE

El producto escalar convierte dos vectores en **un número** que mide cuánto «apuntan en la misma dirección». Con él se calcula el ángulo entre dos vectores, se comprueba si son perpendiculares y se halla el ángulo entre dos rectas. Aparece en la Prueba 1 con vectores sencillos y en la Prueba 2 dentro de problemas de geometría y de movimiento.

Dos formas de calcularlo

Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con el mismo origen, sea θ el ángulo que forman, con $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Para que θ esté bien definido, los dos vectores se dibujan **saliendo del mismo punto**.

DEFINICIÓN · PRODUCTO ESCALAR

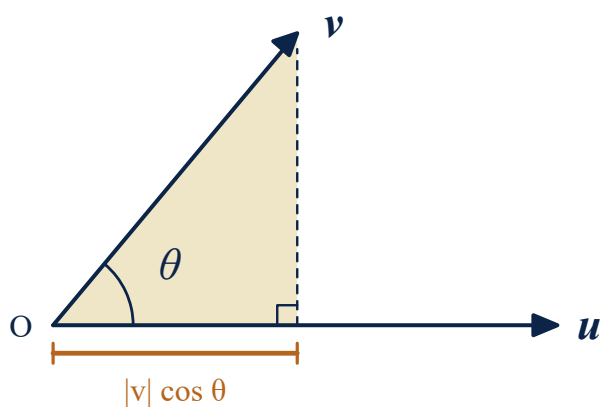
Forma geométrica:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$$

En componentes: si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

El resultado es un **número real**, no un vector.



Por qué las dos fórmulas dan lo mismo

Los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ forman un triángulo cuyos lados miden $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, y el ángulo entre los dos primeros es θ . El teorema del coseno dice:

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$$

Por otro lado, en componentes, $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2$. Al desarrollar y simplificar los cuadrados $u_1^2 + u_2^2 = |\mathbf{u}|^2$ y $v_1^2 + v_2^2 = |\mathbf{v}|^2$, queda

$$-2u_1v_1 - 2u_2v_2 = -2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \implies u_1v_1 + u_2v_2 = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

La forma con el coseno sirve cuando conoces módulos y ángulo; la de componentes, cuando conoces las coordenadas. Casi siempre se usan **juntas**: se iguala una con otra para despejar el ángulo o un parámetro.

Propiedades

PROPIEDAD · PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Para vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y un número k :

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (conmutativa).
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (distributiva).
- $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$.
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$, y por tanto $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$.

La penúltima sale de la fórmula con $\theta = 0^\circ$: un vector forma ángulo 0° consigo mismo y $\cos 0^\circ = 1$. Las demás se comprueban en un momento con las componentes. Lo que **no** hay es una «división» ni una propiedad asociativa: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ no tiene sentido, porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ya es un número.

El **signo** del resultado informa del tipo de ángulo, porque lo único que puede cambiar de signo en $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$ es el coseno (los módulos son positivos si los vectores no son nulos):

Ángulo θ	$\cos\theta$	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ (agudo)	positivo	> 0
$\theta = 90^\circ$ (recto)	cero	$= 0$
$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ (obtuso)	negativo	< 0

Ángulo entre dos vectores

Despejando $\cos\theta$ en la fórmula geométrica y sustituyendo la de componentes:

MÉTODO · ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES NO NULOS

1. Calcula $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$.
2. Calcula los módulos $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.
3. Obtén el coseno:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

4. Calcula $\theta = \arccos(\cdot)$. Si el coseno es un valor notable ($\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0 y sus opuestos), da el ángulo exacto.

Como el coseno es inyectivo entre 0° y 180° , aquí **no hay caso ambiguo**: el ángulo es único y su signo dice si es agudo u obtuso. Si el ángulo que pide el problema es el de un triángulo ABC en el vértice B , usa los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, ambos saliendo de B .

NOTA · CALCULADORA

En la Prueba 2 la calculadora de pantalla gráfica (CPG) da $\arccos$ en grados si está configurada en grados. Si el coseno es un número exacto como $\frac{\sqrt{2}}{2}$, escribe también el ángulo exacto (45° o $\frac{\pi}{4}$): en la Prueba 1 no tienes calculadora.

Vectores perpendiculares

Si $\theta = 90^\circ$ entonces $\cos \theta = 0$, y recíprocamente. Para vectores no nulos:

PROPIEDAD · CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

Una consecuencia útil: en el plano, el vector $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ es perpendicular a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, porque $a(-b) + ba = 0$. Basta **intercambiar las componentes y cambiar el signo de una**. Si lo que buscas es un vector con una condición de perpendicularidad que dependa de un parámetro, plantea $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y despeja.

Proyección escalar

Mira de nuevo la figura. Si se baja desde el extremo de $\mathbf{v}$ una perpendicular a la recta de $\mathbf{u}$, el segmento que queda sobre esa recta mide $|\mathbf{v}| \cos \theta$: es la «sombra» de $\mathbf{v}$ sobre la dirección de $\mathbf{u}$.

DEFINICIÓN · PROYECCIÓN ESCALAR DE $\mathbf{v}$ SOBRE $\mathbf{u}$

$$|\mathbf{v}| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}$$

Es positiva si θ es agudo, negativa si es obtuso (la sombra cae «hacia atrás») y cero si los vectores son perpendiculares.

Esta cantidad es la distancia con signo que $\mathbf{v}$ avanza en la dirección de $\mathbf{u}$. La **distancia de un punto a una recta** se apoya en la misma idea.

Ángulo entre dos rectas

Dos rectas que se cortan forman cuatro ángulos, iguales dos a dos: uno agudo α (o recto) y su suplementario $180^\circ - \alpha$. Por convenio, **el ángulo entre dos rectas es el agudo** (o 90°). Se calcula con sus vectores directores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, que pueden formar un ángulo agudo o su suplementario obtuso según el sentido en que los hayas escrito. Para no depender de ese sentido se toma el **valor absoluto**:

PROPIEDAD · ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores directores de las rectas, el ángulo agudo α entre ellas cumple

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

Las rectas son perpendiculares si y solo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Si el producto escalar da un ángulo obtuso θ entre los vectores, el ángulo entre las rectas es $180^\circ - \theta$.

Si una recta se da en forma cartesiana $ax + by + c = 0$, un vector director es $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. En la Prueba 2, el ángulo entre dos rectas con pendientes m_1 y m_2 también puede obtenerse con la CPG, pero el método vectorial es el que se pide justificar.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1

★ Básico

Producto escalar con módulos y con componentes

- a) Los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ cumplen $|\mathbf{p}| = 4$, $|\mathbf{q}| = 5$ y forman un ángulo de 60° . Calcula $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$.
- b) Calcula $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, y di si el ángulo entre ellos es agudo, recto u obtuso.
- c) Halla k para que $\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ sean perpendiculares.
-
- a) Con la forma geométrica: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$.
- b) En componentes: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 = 8 - 15 = -7$. Es negativo, así que el ángulo es **obtuso**.
- c) Perpendiculares equivale a producto escalar nulo: $6k + 3 \cdot (-2) = 0$, es decir, $6k - 6 = 0$, luego $k = 1$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Ángulos y proyección en un triángulo

Un triángulo tiene vértices $A(1, 1)$, $B(0, 4)$ y $C(3, 5)$.

- a) Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- b) Halla el ángulo del triángulo en A (en radianes, exacto).
- c) Calcula $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- d) Calcula la proyección escalar de $\overrightarrow{AC}$ sobre $\overrightarrow{AB}$.

Primero los vectores, restando extremo menos origen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 10$.
- b) Los módulos son $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ y $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$. Entonces

$$\cos A = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{10}{2\sqrt{50}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y el ángulo es $A = \frac{\pi}{4}$ (es decir, 45°).

- c) En B se usan vectores que salen de B : $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Su producto es $1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 0$: el ángulo en B es **recto**.
- d) $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$. Coincide con $|\overrightarrow{AB}|$, y es lo esperado: como el ángulo en B es recto, el pie de la perpendicular desde C a la recta AB es justo B .

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Un parámetro y el ángulo entre dos senderos

- a) Los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ forman un ángulo de 45° . Halla todos los valores posibles de k .
- b) Dos senderos rectos de un parque tienen vectores de dirección $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Halla el ángulo que forman los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ (en radianes, exacto).
- c) Halla el ángulo agudo entre los dos senderos (en radianes, exacto).

- a) Se iguala $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ con la fórmula del ángulo. Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = k + 3$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{k^2 + 1}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{10}$:

$$\frac{k + 3}{\sqrt{k^2 + 1} \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para quitar la raíz se eleva al cuadrado (hay que comprobar el resultado después, porque se pierde el signo):

$$\frac{(k + 3)^2}{10(k^2 + 1)} = \frac{1}{2} \implies 2(k + 3)^2 = 10(k^2 + 1) \implies k^2 + 6k + 9 = 5k^2 + 5$$

$$4k^2 - 6k - 4 = 0 \implies 2k^2 - 3k - 2 = 0 \implies k = \frac{3 \pm 5}{4} \implies k = 2 \text{ o } k = -\frac{1}{2}$$

Comprobación: el coseno original es positivo, así que hace falta $k + 3 > 0$. Se cumple con $k = 2$ ($5 > 0$) y con $k = -\frac{1}{2}$ ($\frac{5}{2} > 0$): **los dos valores son válidos**.

- b) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = -5$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{10}$ y $|\mathbf{w}| = \sqrt{5}$:

$$\cos \theta = \frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies \theta = \frac{3\pi}{4}$$

- c) El resultado de b) es un ángulo obtuso (135°), pero el ángulo entre rectas es el agudo, o sea el suplementario: $\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. También sale con el valor absoluto: $\cos \alpha = \frac{|-5|}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, luego $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (45°).

En el examen: al elevar al cuadrado, comprueba el signo del producto escalar para no dar soluciones falsas. Y al hablar de rectas escribe siempre el ángulo **agudo**, aunque el producto escalar de tus vectores salga negativo.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • ESCRIBIR EL PRODUCTO ESCALAR COMO UN VECTOR

El producto escalar de dos vectores es un **número**: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10$, no $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Multiplicar componente a componente y no sumar es el fallo más frecuente; si tu «producto escalar» sigue teniendo dos componentes, algo falta.

ERROR TÍPICO • USAR VECTORES QUE NO SALEN DEL MISMO PUNTO

Para el ángulo de un triángulo en el vértice B hay que usar $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. Si usas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, uno entra en B y el otro sale, y obtienes el ángulo **exterior**, $180^\circ - B$: el coseno sale con el signo cambiado.

ERROR TÍPICO • DAR EL ÁNGULO OBTUSO COMO ÁNGULO ENTRE RECTAS

Si $\cos \theta < 0$, el ángulo entre los vectores directores es obtuso, pero el ángulo entre las rectas se pide agudo: es $180^\circ - \theta$. Toma el valor absoluto del producto escalar, o resta a 180° al final.

Resumen

- Producto escalar: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta = u_1v_1 + u_2v_2$. Es un número, no un vector. Las dos formas coinciden por el teorema del coseno.
- Propiedades: conmutativo, distributivo, $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$. Positivo si el ángulo es agudo, negativo si es obtuso.
- Ángulo entre vectores: $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$, con los dos vectores saliendo del mismo punto.
- Perpendiculares: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. El vector $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ es perpendicular a $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Proyección escalar de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$: $|\mathbf{v}| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}$.
- Ángulo entre rectas (agudo): $\cos \alpha = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$ con sus vectores directores.

APARTADO 3

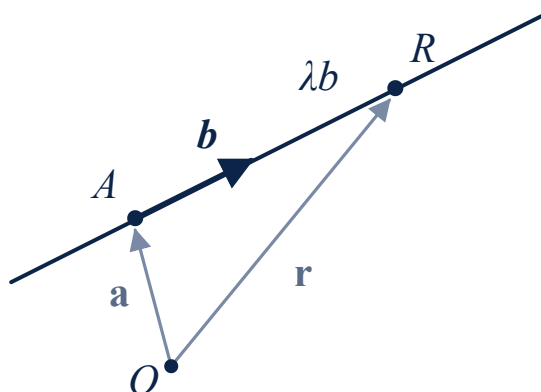
Ecuaciones de la recta, intersecciones y distancias

IDEA CLAVE

Una recta del plano se describe con un punto y una dirección, y de esa idea salen cuatro formas de escribirla: vectorial, paramétrica, continua y cartesiana. Saber pasar de una a otra, decidir si dos rectas se cortan, medir la distancia de un punto a una recta y aplicarlo a objetos que se mueven con velocidad constante es material habitual de la Prueba 1 y de la Prueba 2.

Ecuación vectorial de una recta

Una recta queda fijada por **un punto** que pertenece a ella y por **una dirección**. El punto se da con su vector de posición **a** (el vector que va del origen O al punto A), y la dirección con un **vector director** **b**, que es cualquier vector no nulo paralelo a la recta. Para llegar a un punto cualquiera R de la recta, se sale de A y se avanza una cierta cantidad de veces el vector **b** (hacia delante o hacia atrás).



DEFINICIÓN · ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

La recta que pasa por el punto A de vector de posición **a** y tiene vector director **b** es el conjunto de puntos de vector de posición

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

El número real λ es el **parámetro**: cada valor de λ da un punto distinto de la recta. Con $\lambda = 0$ se obtiene A .

En el plano se escribe con componentes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

La ecuación vectorial **no es única**: sirve cualquier punto de la recta como **a** y cualquier múltiplo no nulo de **b** como vector director. Dos ecuaciones que parecen distintas pueden describir la misma recta.

Si se conocen dos puntos A y B de la recta, un vector director es $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ (los vectores del apartado anterior: final menos inicio), y se toma A como punto.

Para saber si un punto P está en la recta, se sustituyen sus coordenadas y se comprueba que el mismo λ cumple las dos componentes.

Ecuaciones paramétricas, continua y cartesiana

Si se separa la ecuación vectorial componente a componente, se obtienen las **ecuaciones paramétricas**:

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda b_1 \\ y = a_2 + \lambda b_2 \end{cases}$$

Si $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, se despeja λ en las dos y se igualan: es la **ecuación continua**,

$$\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2}$$

Y al quitar denominadores y ordenar queda la **ecuación cartesiana** (o general) $ax + by + d = 0$. Hay una relación útil entre sus coeficientes y los de la recta.

PROPIEDAD · QUÉ DICEN LOS COEFICIENTES DE $ax + by + d = 0$

Si una recta tiene ecuación cartesiana $ax + by + d = 0$, entonces:

- el vector $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es **perpendicular** a la recta (un vector normal);
- un vector director de la recta es $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ (o $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$);
- si $b \neq 0$, la pendiente es $m = -\frac{a}{b}$, y la ecuación se puede escribir $y = mx + c$.

Con vector director $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ la pendiente es $m = \frac{b_2}{b_1}$ (si $b_1 \neq 0$).

La intuición: los puntos (x, y) de la recta cumplen que $(x, y) \cdot (a, b)$ vale siempre $-d$, es decir, su proyección sobre la dirección de (a, b) es constante. Por eso la recta es perpendicular a ese vector.

MÉTODO · PASAR DE UNA FORMA A OTRA

1. **De vectorial a cartesiana:** con $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, un vector normal es $(b_2, -b_1)$. La ecuación es $b_2x - b_1y = b_2a_1 - b_1a_2$. (Alternativa: eliminar λ de las paramétricas.)
2. **De cartesiana a vectorial:** busca un punto que la cumpla (da a x un valor y despeja y) y toma el vector director $(b, -a)$.
3. **De dos puntos A y B a cualquier forma:** vector director $\overrightarrow{AB}$, punto A , y de ahí a la que se pida.
4. **Comprobación:** sustituye en la cartesiana las coordenadas de dos puntos conocidos de la recta; tienen que dar 0.

NOTA · QUÉ FORMA SE PIDE EN EL EXAMEN

Si el enunciado dice «**halla una ecuación vectorial**», vale cualquier punto de la recta con cualquier vector director paralelo, porque hay infinitas respuestas correctas. Si pide «**la ecuación de la recta en la forma $ax + by + d = 0$** » con $a, b, d \in \mathbb{Z}$, quita los denominadores. Una recta vertical ($x = k$) no tiene pendiente ni ecuación continua con $b_1 = 0$ en el denominador: usa la cartesiana $x - k = 0$ o las paramétricas.

Rectas paralelas y perpendiculares

Dos rectas con vectores directores $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ y pendientes m_1 y m_2 se relacionan así.

PROPIEDAD • PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

- **Paralelas:** los vectores directores son proporcionales, $\mathbf{b}_2 = k \mathbf{b}_1$ con $k \neq 0$; en pendientes, $m_1 = m_2$. Si además comparten un punto, son **la misma recta** (coincidentes).
- **Perpendiculares:** los vectores directores tienen producto escalar nulo, $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$; en pendientes, $m_1 m_2 = -1$ (con rectas no verticales ni horizontales).

La condición con el producto escalar viene del apartado de **producto escalar**: dos vectores no nulos son perpendiculares si y solo si su producto escalar es 0. En pendientes sale de ahí: con $\mathbf{b}_1 = (1, m_1)$ y $\mathbf{b}_2 = (1, m_2)$, $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 1 + m_1 m_2 = 0$.

Un truco para escribir rectas relacionadas directamente en forma cartesiana: la recta $ax + by + d = 0$ es paralela a todas las de la forma $ax + by + d' = 0$ (solo cambia el término independiente), y es perpendicular a las de la forma $bx - ay + d' = 0$.

Intersección de dos rectas

En el plano, dos rectas pueden:

- **cortarse en un único punto:** directores no proporcionales;
- ser **paralelas distintas:** directores proporcionales y ningún punto común;
- ser **coincidentes:** directores proporcionales y un punto común.

MÉTODO • INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

1. Mira los vectores directores. Si son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes: comprueba si un punto de una está en la otra.
2. Si no lo son, hay un único punto de corte. Con las rectas dadas en forma vectorial, $\mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 + \mu \mathbf{b}_2$, usa **parámetros distintos** (λ y μ) e iguala componente a componente: queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
3. Resuelve el sistema y sustituye el parámetro en la ecuación correspondiente para obtener el punto.
4. Comprueba el punto en la otra recta.

Si una está en forma vectorial y la otra en cartesiana, es más corto sustituir $x = a_1 + \lambda b_1$, $y = a_2 + \lambda b_2$ en la cartesiana: sale una ecuación con una sola incógnita, λ .

NOTA • PRUEBA 2

Con la calculadora de pantalla gráfica (CPG) puedes resolver el sistema 2×2 directamente, o dibujar las dos rectas en forma $y = mx + c$ y buscar el punto de intersección. Escribe siempre el planteamiento en el papel: sin él, un resultado erróneo no puntúa.

Distancia de un punto a una recta

La **distancia** de un punto P a una recta ℓ es la menor de las distancias de P a los puntos de ℓ . Se alcanza en el pie Q de la perpendicular a ℓ trazada por P : cualquier otro punto de la recta queda más lejos, porque la distancia PQ es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la distancia a ese otro punto.

MÉTODO · DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA, POR EL PIE DE LA PERPENDICULAR

1. Escribe la recta perpendicular a ℓ que pasa por P (su vector director es un vector normal de ℓ).
2. Halla el punto de corte Q de esa recta con ℓ .
3. La distancia es el módulo $|\overrightarrow{PQ}|$.

Con la ecuación cartesiana hay una fórmula directa. Para deducirla, sea F un punto cualquiera de la recta $ax + by + d = 0$ y $\mathbf{n} = (a, b)$ su vector normal. La distancia de P es la longitud de la proyección de $\overrightarrow{FP}$ sobre la dirección de $\mathbf{n}$, es decir, $\frac{|\overrightarrow{FP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$. Como F cumple $ax_F + by_F = -d$, el numerador es $|ax_0 + by_0 + d|$.

TEOREMA · DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La distancia del punto $P(x_0, y_0)$ a la recta $ax + by + d = 0$ es

$$\text{dist}(P, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

La recta tiene que estar escrita con todos los términos en un lado y el segundo miembro igual a 0.

La distancia entre **dos rectas paralelas** se obtiene tomando un punto cualquiera de una y calculando su distancia a la otra. Si las rectas se cortan, la distancia entre ellas es 0.

Aplicación: movimiento con velocidad constante

Un objeto que se mueve en línea recta con velocidad constante describe una recta, y la ecuación vectorial la recoge con el **tiempo** como parámetro:

DEFINICIÓN · POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \geq 0$$

donde $\mathbf{r}$ es la posición en el instante t , $\mathbf{r}_0$ la posición inicial ($t = 0$) y $\mathbf{v}$ el vector velocidad. La **rapidez** es el módulo $|\mathbf{v}|$, y la dirección del movimiento es la de $\mathbf{v}$.

Aquí el vector director $\mathbf{v}$ **no es cualquiera**: su módulo es la rapidez, y t ya no es un parámetro libre sino el tiempo real (en horas, segundos..., según las unidades del enunciado). Con la rapidez $|\mathbf{v}|$ en unidades de longitud por unidad de tiempo, el objeto recorre $|\mathbf{v}|t$ unidades de longitud en un tiempo t .

Tres preguntas típicas:

- **Posición en un instante:** sustituir t .
- **¿Pasa por un punto?** Resolver $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} = \text{punto}$; el t debe ser el mismo en las dos componentes y además $t \geq 0$.
- **¿Se encuentran dos objetos?** Hace falta estar en el mismo sitio **en el mismo instante**: $\mathbf{r}_A(t) = \mathbf{r}_B(t)$, con el mismo t en los dos. Las trayectorias (las rectas) pueden cortarse aunque los objetos no coincidan, porque pasan por el punto de corte en instantes distintos.

Para la **distancia mínima** entre dos objetos, se estudia el vector que va de uno al otro,

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t) = (\mathbf{r}_{0B} - \mathbf{r}_{0A}) + t(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

que también es una recta (en el tiempo) con vector director $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$. Hay dos caminos:

- escribir $|\mathbf{d}(t)|^2$ como función cuadrática de t y buscar su mínimo (el vértice de la parábola, o la derivada);
- usar que el mínimo se da cuando $\mathbf{d}(t)$ es **perpendicular** a $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$, es decir, $\mathbf{d}(t) \cdot (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = 0$.

En ambos casos, si el mínimo sale en un instante $t < 0$, no es válido: la menor distancia en el intervalo $t \geq 0$ es la del instante inicial.

NOTA • PRUEBA 2

Con la CPG, el mínimo de $|d(t)|$ se puede obtener dibujando la función distancia y buscando el mínimo. En la Prueba 1 se pide la versión exacta por la ecuación cuadrática o por el producto escalar.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Recta por dos puntos

Se consideran los puntos $A(1, 3)$ y $B(5, 1)$.

- Halla un vector director de la recta AB cuyas componentes sean enteros primos entre sí y cuya primera componente sea positiva.
- Halla la ecuación cartesiana de la recta AB en la forma $ax + by + d = 0$, con a, b, d enteros primos entre sí y $a > 0$.
- El punto $C(-3, k)$ está en la recta AB . Halla k .

- a) $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dividiendo entre 2 se obtiene el vector director $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Una ecuación vectorial es, por ejemplo,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- b) Un vector normal es $(1, 2)$ (se intercambian las componentes del director y se cambia el signo de una). La ecuación es $x + 2y = d'$, y como A está en la recta, $d' = 1 + 2 \cdot 3 = 7$:

$$x + 2y - 7 = 0$$

Comprobación con B : $5 + 2 \cdot 1 - 7 = 0$.

- c) Se sustituye C : $-3 + 2k - 7 = 0$, luego $2k = 10$ y $k = 5$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Una perpendicular y su punto de corte

La recta ℓ tiene ecuación vectorial $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se considera el punto $P(0, -1)$.

- Halla la ecuación cartesiana de ℓ en la forma $ax + by + d = 0$, con a, b, d enteros primos entre sí y $a > 0$.
- Halla la ecuación cartesiana, con el mismo criterio, de la recta m que pasa por P y es perpendicular a ℓ .
- Halla el punto Q en el que se cortan ℓ y m .
- Calcula la distancia de P a ℓ .

- a) Con $\mathbf{b} = (3, -2)$ un vector normal es $(2, 3)$, así que la ecuación es $2x + 3y = d'$. Con el punto $(-1, 4)$: $d' = -2 + 12 = 10$.

$$2x + 3y - 10 = 0$$

- b) La recta m tiene como vector director un vector normal de ℓ , $(2, 3)$ (se comprueba: $(3, -2) \cdot (2, 3) = 6 - 6 = 0$). Su vector normal es entonces $(3, -2)$: $3x - 2y = d'$. Con $P(0, -1)$: $d' = 0 + 2 = 2$.

$$3x - 2y - 2 = 0$$

- c) Se resuelve el sistema $2x + 3y = 10$, $3x - 2y = 2$. Multiplicando la primera por 2 y la segunda por 3 y sumando: $4x + 6y + 9x - 6y = 20 + 6$, es decir, $13x = 26$ y $x = 2$. Entonces $3y = 10 - 4 = 6$, $y = 2$. Por tanto $Q(2, 2)$. Comprobación en m : $6 - 4 - 2 = 0$.

- d) Como Q es el pie de la perpendicular por P , la distancia es

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(2, 3)| = \sqrt{13}$$

Con la fórmula: $\frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) - 10|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$. Los dos métodos coinciden.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Dos barcos: ¿se encuentran? ¿cuánto se acercan?

Dos barcos, A y B , navegan en línea recta con velocidad constante. Las posiciones, en kilómetros respecto a un faro situado en el origen, t horas después del mediodía, son

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Calcula la rapidez de B , en km/h.
- Halla el punto en el que se cortan las trayectorias de los dos barcos.
- Halla el instante en que A pasa por ese punto y el instante en que B pasa por él, y concluye si los barcos chocan.
- Halla el instante en que la distancia entre los barcos es mínima y el valor exacto de esa distancia mínima.

- a) La velocidad de B es $(-2, 2)$, así que la rapidez es $\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ km/h.

- b) Para las trayectorias se usan **parámetros distintos**: s para A y u para B .

$$\begin{cases} 1 + 2s = 11 - 2u \\ 2 + s = -2 + 2u \end{cases}$$

De la segunda, $s = 2u - 4$. En la primera: $1 + 4u - 8 = 11 - 2u$, luego $6u = 18$ y $u = 3$, $s = 2$. El punto es $\mathbf{r}_A(2) = (5, 4)$. Comprobación con B : $(11 - 6, -2 + 6) = (5, 4)$.

- c) Con los valores anteriores, A pasa por $(5, 4)$ en $t = 2$ y B en $t = 3$. Los instantes son distintos, así que **los barcos no coinciden en ese punto**. De hecho, no se encuentran nunca: $\mathbf{r}_A(t) = \mathbf{r}_B(t)$ exige el mismo t en las dos componentes, y el sistema $1 + 2t = 11 - 2t$, $2 + t = -2 + 2t$ da $t = \frac{5}{2}$ y $t = 4$, que son incompatibles. Las trayectorias se cruzan, pero no chocan.

- d) El vector de A a B es

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} 10 - 4t \\ t - 4 \end{pmatrix}$$

La distancia mínima se da cuando $\mathbf{d}(t)$ es perpendicular a la velocidad relativa $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = (-4, 1)$:

$$(10 - 4t)(-4) + (t - 4) \cdot 1 = 0 \implies 17t = 44 \implies t = \frac{44}{17} \text{ h} \approx 2,59 \text{ h}$$

Para el valor de la distancia, $|\mathbf{d}|^2 = (10 - 4t)^2 + (t - 4)^2 = 17t^2 - 88t + 116$. Con $t = \frac{44}{17}$:

$$|\mathbf{d}|^2 = 116 - \frac{44^2}{17} = \frac{1972 - 1936}{17} = \frac{36}{17} \implies |\mathbf{d}| = \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{17}}{17} \text{ km} \approx 1,46 \text{ km}$$

(La parábola $17t^2 - 88t + 116$ tiene su vértice en $t = \frac{88}{34} = \frac{44}{17}$, lo que confirma el instante.)

En el examen: lo que puntúa es usar parámetros distintos para cruzar las trayectorias y, después, comparar los instantes: dar el punto de corte como «punto de encuentro» sin ese paso es el error clásico. Para la distancia, plantea $\mathbf{d}(t)$ y escribe qué condición impones (perpendicular a la velocidad relativa, o mínimo de $|\mathbf{d}|^2$).

Errores típicos

ERROR TÍPICO • TOMAR EL PUNTO COMO VECTOR DIRECTOR, O LA PENDIENTE AL REVÉS

En $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$, el vector que da la **dirección** es $\mathbf{b}$, no $\mathbf{a}$. Con dos puntos A y B , el director es $\overrightarrow{AB} = B - A$; las coordenadas de B solas no sirven. Y al pasar de director (b_1, b_2) a cartesiana, la pendiente es $\frac{b_2}{b_1}$ y el vector normal $(b_2, -b_1)$: no mezclar el normal con el director. Se detecta enseguida sustituyendo un punto conocido en la ecuación final.

ERROR TÍPICO • USAR EL MISMO PARÁMETRO EN LAS DOS RECTAS

Al cortar $\mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_2 + \lambda \mathbf{b}_2$ con el **mismo** λ se está pidiendo que se llegue al punto «a la vez», y casi nunca hay solución (o sale una errónea). Usa λ y μ . La excepción es el movimiento: allí el parámetro es el tiempo, y para saber si dos objetos se encuentran sí hay que usar el **mismo** t .

ERROR TÍPICO • APLICAR LA FÓRMULA DE LA DISTANCIA SIN DEJAR LA RECTA EN LA FORMA $ax + by + d = 0$

Para $y = 2x + 1$ no se puede usar $a = 2, b = 1, d = 1$: hay que pasar todo a un lado, $2x - y + 1 = 0$, es decir, $a = 2, b = -1, d = 1$. Con un signo mal puesto, el numerador $|ax_0 + by_0 + d|$ y la raíz cambian. Si la recta viene en forma vectorial, prefiere el método del pie de la perpendicular o pásala antes a cartesiana.

Resumen

- Recta: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$ (punto A de vector de posición $\mathbf{a}$ y vector director $\mathbf{b}$). No es única: sirve cualquier punto y cualquier múltiplo de $\mathbf{b}$.
- Paramétricas $x = a_1 + \lambda b_1, y = a_2 + \lambda b_2$; continua $\frac{x - a_1}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2}$; cartesiana $ax + by + d = 0$, con normal (a, b) y director $(b, -a)$, pendiente $m = -\frac{a}{b}$.
- Paralelas: directores proporcionales (o $m_1 = m_2$). Perpendiculares: $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = 0$ (o $m_1 m_2 = -1$).
- Intersección: iguala con parámetros distintos (λ, μ) y resuelve el sistema; directores proporcionales indican paralelas o coincidentes.
- Distancia de $P(x_0, y_0)$ a $ax + by + d = 0$: $\frac{|ax_0 + by_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, o la longitud PQ con Q el pie de la perpendicular.
- Movimiento: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{v}$; rapidez $|\mathbf{v}|$. Dos objetos se encuentran si coinciden con el **mismo** t ; la distancia mínima sale de $\mathbf{d}(t) \cdot (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = 0$.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 5

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Operaciones con vectores, módulo y paralelismo

EJERCICIO 1

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2022

Considere los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tales que $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $|\mathbf{b}| = 15$.

- Calcule el posible rango de valores de $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$. Considere el vector $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.
- Sabiendo que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ es mínimo, calcule $\mathbf{p}$. Considere el vector $\mathbf{q}$ tal que $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde $x, y \in \mathbb{R}^+$.
- Calcule $\mathbf{q}$ tal que $|\mathbf{q}| = |\mathbf{b}|$ y $\mathbf{q}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$.

a) $2 \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq 28$

b) $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -24/13 \\ 10/13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,85 \\ 0,77 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 75/13 \\ 180/13 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5,77 \\ 13,8 \end{pmatrix}$

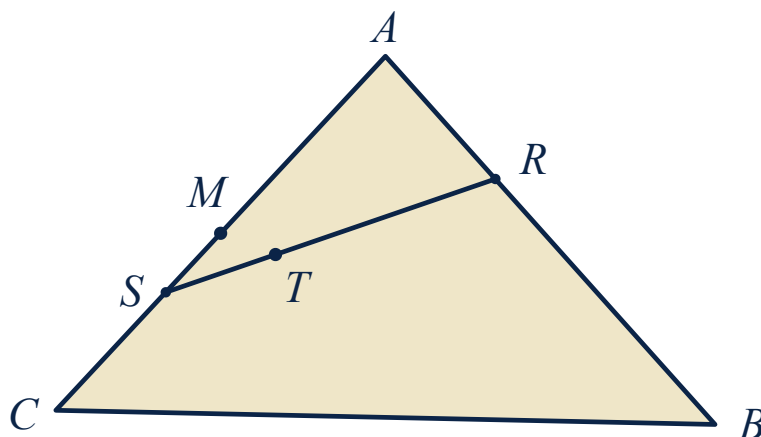
Nota: el libro da $\mathbf{p} = (-1,8; 0,77)$, que es el valor $-24/13 \approx -1,846$ truncado; damos aquí el valor exacto.

EJERCICIO 2

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2014

Los vectores de posición de los puntos A , B y C con relación al origen O son, respectivamente, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. La siguiente figura muestra el triángulo ABC y los puntos M , R , S y T .



M es el punto medio de $[AC]$. R es un punto perteneciente a $[AB]$ tal que $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. S es un punto perteneciente a $[AC]$ tal que $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. T es un punto perteneciente a $[RS]$ tal que $\overrightarrow{RT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{RS}$.

- a) (i) Exprese $\overrightarrow{AM}$ en función de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$.
 (ii) A partir de lo anterior, muestre que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$
- b) (i) Exprese $\overrightarrow{RA}$ en función de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
 (ii) Muestre que $\overrightarrow{RT} = -\frac{2}{9}\mathbf{a} - \frac{2}{9}\mathbf{b} + \frac{4}{9}\mathbf{c}$
- c) Demuestre que T pertenece a $[BM]$.

- a) (i) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(-\mathbf{a} + \mathbf{c})$
- b) (i) $\overrightarrow{RA} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$
- c) $\overrightarrow{BT} = \frac{8}{9}\overrightarrow{BM}$, luego B , T y M son colineales con el mismo origen B , y T está en $[BM]$.

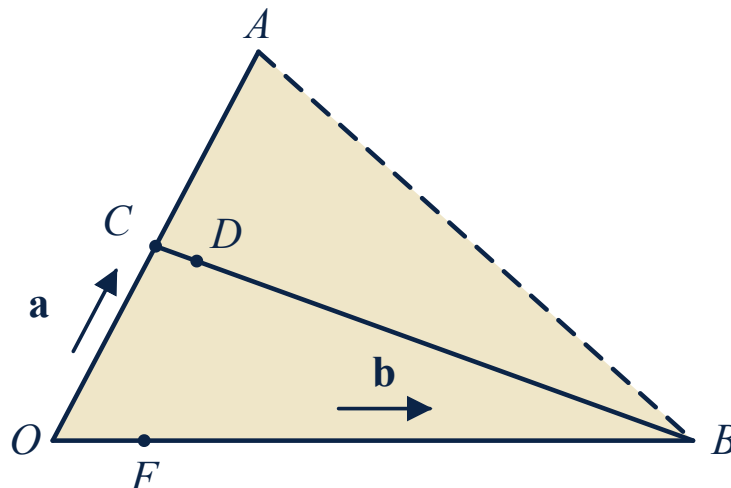
Nota: la solución del libro da $\overrightarrow{BM} = \frac{8}{9}\overrightarrow{BT}$, pero la relación correcta es $\overrightarrow{BT} = \frac{8}{9}\overrightarrow{BM}$ (con $\overrightarrow{BT} = \frac{4}{9}(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c})$ y $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c})$); así sale además T dentro del segmento.

EJERCICIO 3

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

En el diagrama que se muestra $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.



C es el punto medio de $[OA]$ y $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{6}\overrightarrow{FB}$.

- Calcule, en función de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$
 - $\overrightarrow{OF}$
 - $\overrightarrow{AF}$ Sabemos también que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AF}$ y $\overrightarrow{CD} = \mu\overrightarrow{CB}$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Calcule una expresión para
 - $\overrightarrow{OD}$ en función de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y λ .
 - $\overrightarrow{OD}$ en función de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y μ .
- Muestre que $\mu = \frac{1}{13}$ y calcule el valor de λ .
- Deduzca una expresión para $\overrightarrow{CD}$ sólo en función de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
- Sabiendo que el área $\triangle OAB = k$ (Área $\triangle CAD$), calcule el valor de k .

- (i) $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{7}\mathbf{b}$ (ii) $\overrightarrow{AF} = -\mathbf{a} + \frac{1}{7}\mathbf{b}$
- (i) $\overrightarrow{OD} = (1 - \lambda)\mathbf{a} + \frac{1}{7}\lambda\mathbf{b}$ (ii) $\overrightarrow{OD} = \frac{1 - \mu}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$
- $\lambda = \frac{7}{13}$
- $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{26}\mathbf{a} + \frac{1}{13}\mathbf{b}$
- $k = 26$

Producto escalar, ángulos y perpendicularidad

EJERCICIO 4

★ Básico

IB · P1 Noviembre 2002

Dados dos vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tales que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, halle el valor de $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

EJERCICIO 5 ★ Básico IB · P1 Mayo 1997

Las coordenadas de P y Q son respectivamente $(3, -1)$ y $(\lambda, -4 - \lambda)$ donde λ es una constante. Si O es el origen, calcule todos los valores de λ para los cuales $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{OQ}$.

$$\lambda = -1$$

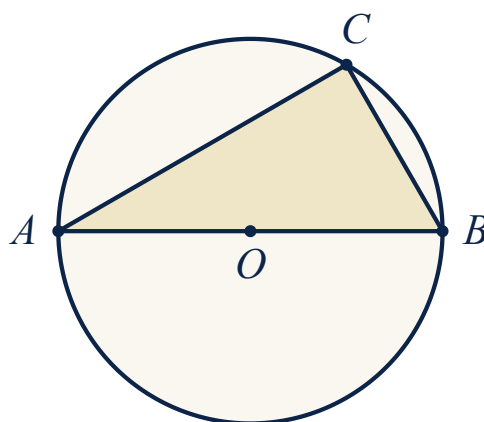
EJERCICIO 6 ★ Básico IB · P2 TZ0 Noviembre 2022

Considere los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \left(\cos \frac{1}{n}\right)\mathbf{i} + \left(\sin \frac{1}{n}\right)\mathbf{j}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$. Sea θ el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Halle una expresión que dé $\cos \theta$ en función de n .

$$\cos \theta = \frac{\cos \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{2}}$$

EJERCICIO 7 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2011

En la siguiente figura, $[AB]$ representa el diámetro del círculo con centro en O . El punto C está situado sobre la circunferencia del círculo. Sean $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ y $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$.



- Halle una expresión para $\overrightarrow{CB}$ y otra para $\overrightarrow{AC}$, en función de $\mathbf{b}$ y de $\mathbf{c}$.
- A partir de lo anterior, demuestre que $\widehat{ACB}$ es un ángulo recto.

- $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$
- $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

EJERCICIO 8 ★★ Medio IB · P2 TZ0 Noviembre 2013

Sean los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, tales que $\mathbf{a} = (3 \cos \theta + 6)\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = (\cos \theta - 2)\mathbf{i} + (1 + \sin \theta)\mathbf{j}$. Sabiendo que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares,

- Compruebe que $3 \sin^2 \theta - 7 \sin \theta + 2 = 0$.
- Halle el menor valor positivo posible de θ .

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cos^2 \theta - 5 + 7 \sin \theta = -3 \sin^2 \theta + 7 \sin \theta - 2 = 0$

b) $\theta = 19,5^\circ$

EJERCICIO 9 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2014

$PQRS$ es un rombo. Sabiendo que $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{QR} = \mathbf{b}$,

- exprese los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QS}$ en función de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
- a partir de lo anterior, muestre que las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto.

a) $\overrightarrow{PR} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\overrightarrow{QS} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

b) $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QS} = 0$

EJERCICIO 10 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2009

Sabiendo que $\mathbf{a} = 2 \sin \theta \mathbf{i} + (1 - \sin \theta)\mathbf{j}$, halle el valor del ángulo θ , de forma que $\mathbf{a}$ sea perpendicular a la recta $x + y = 1$.

$\theta = 19,5^\circ$

EJERCICIO 11 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

Demostración

Tres vectores no nulos distintos entre sí vienen dados por $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ y $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Si $\overrightarrow{OA}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{OB}$ es perpendicular a $\overrightarrow{CA}$, compruebe que $\overrightarrow{OC}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = 0$$

EJERCICIO 12

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2016

Demostración

$OACB$ es un paralelogramo en el que $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores no nulos.

a) Muestre que

(i) $|\overrightarrow{OC}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$

(ii) $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$

b) Sabiendo que $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}|$, demuestre que $OACB$ es un rectángulo.

Como $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, desarrollando $|\overrightarrow{OC}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ y $|\overrightarrow{AB}|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ se obtienen (i) y (ii). Si $|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{AB}|$, restando resulta $4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, luego $OA \perp OB$ y el paralelogramo es un rectángulo.

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2016

Demostración

O, A, B y C son puntos distintos tales que $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ y $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Sabiendo que $\mathbf{c}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y $\mathbf{b}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$, pruebe que $\mathbf{a}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{a} = 0$$

EJERCICIO 14

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 2000

Sea α el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$ y $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. Exprese α en función de θ .

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\theta$$

EJERCICIO 15

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2013

Sean los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, tales que $\mathbf{a} = (3 \cos \theta + 6)\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = (\cos \theta - 2)\mathbf{i} + (1 + \sin \theta)\mathbf{j}$. Sabiendo que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares,

a) compruebe que $3 \sin^2 \theta - 7 \sin \theta + 2 = 0$.

b) halle el menor valor positivo posible de θ .

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cos^2 \theta - 5 + 7 \sin \theta = -3 \sin^2 \theta + 7 \sin \theta - 2 = 0$

b) $\theta = 19,5^\circ$

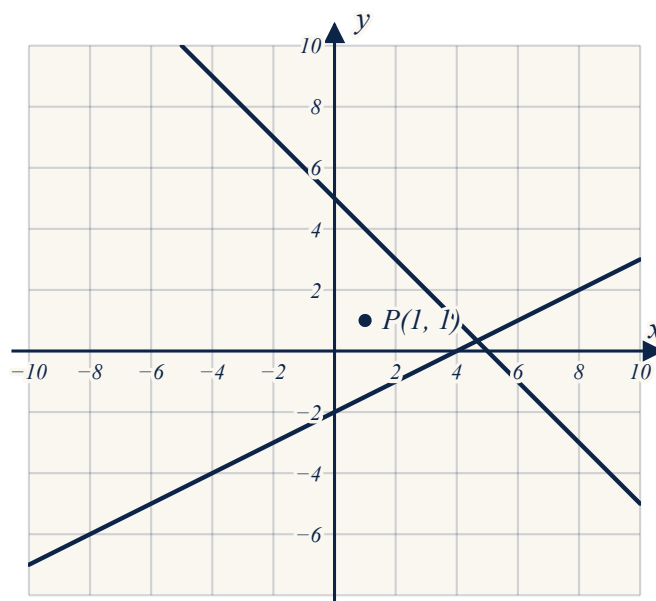
Ecuaciones de la recta, intersecciones y distancias

EJERCICIO 16

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

El siguiente diagrama muestra las rectas $x - 2y - 4 = 0$, $x + y = 5$ y el punto $P(1, 1)$. Se dibuja una recta desde P que corta a $x - 2y - 4 = 0$ en Q , y a $x + y = 5$ en R , de tal modo que P es el punto medio de $[QR]$.



Halle el valor **exacto** de las coordenadas de Q y de R .

$$R\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right) \quad Q\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

EJERCICIO 17

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1999

¿Para qué valores de k la recta $y = kx + 1$ es tangente al círculo con centro $(5, 1)$ y radio 3?

$$k = \pm \frac{3}{4}$$

EJERCICIO 18

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2022

Considere los puntos $A(-2, 20)$, $B(4, 6)$ y $C(-14, 12)$. La recta L pasa por el punto A y es perpendicular a $[BC]$.

- Calcule la ecuación de L . La recta L pasa por el punto $(k, 2)$.
- Calcule el valor de k .

a) $L : y = 3x + 26$

b) $k = -8$

Vectores y movimiento (posición y velocidad)

EJERCICIO 19

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2015

Ed camina en línea recta desde el punto $P(-1, 4)$ hasta el punto $Q(4, 16)$ con velocidad constante. Ed sale del punto P en el instante $t = 0$ y llega al punto Q en el instante $t = 3$, donde t se mide en horas. Sabiendo que en el instante t el vector de posición de Ed respecto al origen se puede expresar en la forma $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$,

- a) halle los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Roderick se encuentra en el punto $C(11, 9)$. Roderick quiere hacerle señas a Ed mientras este va caminando de P a Q . Roderick decide hacer señas cuando Ed pase por el punto más cercano a C .
- b) Halle el instante en el que Roderick hace señas a Ed.

a) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $t = \frac{360}{169} \approx 2,13$ horas

Nota: la solución del libro da « $t = 2,13$ seg», pero t se mide en horas (aproximadamente 2 h 8 min), no en segundos.

EJERCICIO 20

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2011

El puerto A se define como el origen de un conjunto de ejes de coordenadas y el puerto B se localiza en el punto $(70, 30)$, donde las distancias se miden en kilómetros. Un barco S_1 sale desde el puerto A a las 10:00 en línea recta y su posición t horas después de las 10:00 viene dada por $\mathbf{r} = t \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$. Una lancha rápida S_2 es capaz de conseguir tres veces la velocidad de S_1 y alcanzar a S_1 viajando la distancia más corta posible. ¿Cuál es la última vez que S_2 puede salir del puerto B ?

Última hora de salida: las 11:52 (a $\frac{28}{15}$ horas, es decir, 1 h 52 min, después de las 10:00)