

Geometría en el espacio

Geometría en el espacio para IB Análisis y Enfoques NS: vectores en $\mathbb{R}^3$, producto escalar y vectorial, rectas y planos, ángulos, distancias y posiciones relativas, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-analisis-y-enfoques-ns/geometria-en-el-espacio.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

La **geometría en el espacio** lleva a tres dimensiones lo que ya sabes en el plano: los **vectores** tienen tres componentes, las **rectas** se describen con un punto y una dirección, y aparecen los **planos**. Con el **producto escalar** mides ángulos y compruebas perpendicularidad, y con el **producto vectorial** obtienes un vector perpendicular a otros dos, áreas y volúmenes. Después calculas **ángulos, distancias y posiciones relativas** (cómo se cortan rectas y planos, apoyándote en los sistemas del tema 7). Es uno de los temas con más peso del **Nivel Superior**: aparece en la Prueba 1, en la Prueba 2 y a menudo en problemas largos de contexto (aviones, drones, construcciones).

Orden recomendado

Sigue los apartados en orden: **vectores, producto escalar, producto vectorial, rectas y planos, ángulos y distancias, posiciones relativas y volúmenes y áreas de sólidos**. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo. Hacer un esquema antes de calcular evita la mayoría de los errores.

APARTADO 1

Vectores en el espacio

IDEA CLAVE

En el espacio un vector tiene tres componentes, pero las reglas son las mismas que en el plano: restar coordenadas para obtener el desplazamiento, operar componente a componente y aplicar Pitágoras para medir. Con ellas se calculan longitudes, se detectan puntos alineados y se localizan puntos medios. Es la base de las rectas, los planos y los productos escalar y vectorial, y aparece en la Prueba 1 y en la Prueba 2.

Puntos y ejes en el espacio

Para situar un punto en el espacio se fijan un origen O y tres ejes perpendiculares entre sí que pasan por él: el eje x , el eje y y el eje z . Cada punto P queda descrito por una terna de números, sus **coordenadas** $P(x, y, z)$: cuánto hay que avanzar a lo largo de cada eje para llegar a él desde O . El conjunto de todos los puntos se escribe $\mathbb{R}^3$.

Vector fijo y vector libre

Dos puntos A y B determinan una flecha que va de A (el **origen**) a B (el **extremo**). Esa flecha es el **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$. Se caracteriza por tres datos:

- su **módulo**, que es la longitud del segmento AB y se escribe $|\overrightarrow{AB}|$;
- su **dirección**, la de la recta AB (o cualquier recta paralela a ella);
- su **sentido**, el que va del origen al extremo.

El camino contrario, $\overrightarrow{BA}$, es el **vector opuesto**, que se escribe $-\overrightarrow{AB}$. Si origen y extremo coinciden se obtiene el **vector nulo**, $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$.

Dos vectores fijos son **iguales** cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, aunque estén dibujados en lugares distintos. Al agrupar todos los vectores fijos que son iguales entre sí se obtiene un **vector libre**: un desplazamiento sin punto de partida concreto, que se nombra con una letra en negrita, $\mathbf{u}$, y que se puede dibujar empezando en el punto que se quiera. El que empieza en el origen O y termina en un punto P es el **vector de posición** de P , $\overrightarrow{OP}$.

Componentes de un vector

Un vector libre se describe con una columna de tres números, sus **componentes**:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

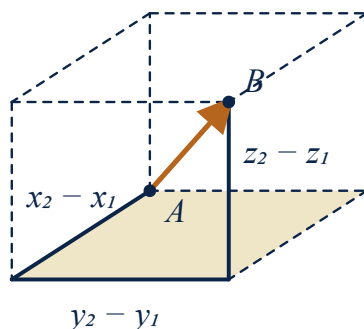
Cada componente es el desplazamiento a lo largo de un eje: positivo si va en el sentido del eje y negativo si va en el contrario.

PROPIEDAD · COMPONENTES DE $\overrightarrow{AB}$

Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Se resta siempre **extremo menos origen**: $B - A$.



Para ir de A a B se recorren tres tramos, uno paralelo a cada eje, y cada tramo es una componente. Esto es lo mismo que en el plano (puedes repasarlo en vectores en el plano), con una componente más.

Como $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son los vectores de posición, que tienen por componentes las coordenadas de A y B , también se cumple $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Y si se conoce el origen y las componentes, el extremo sale de sumar: $B = A + \overrightarrow{AB}$. Con el mismo razonamiento, si se conoce el extremo B y el vector, el origen es $A = B - \overrightarrow{AB}$.

Dos vectores son iguales si y solo si tienen las mismas componentes. Por eso, si $ABCD$ es un paralelogramo con los vértices en ese orden, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, y esa igualdad permite hallar un vértice desconocido.

Módulo de un vector

Al aplicar el teorema de Pitágoras dos veces seguidas (primero en la base de la caja y luego con la altura) se obtiene la longitud de la diagonal.

DEFINICIÓN · MÓDULO DE UN VECTOR

$$\left| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

La distancia entre $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

El módulo nunca es negativo y vale 0 solo para el vector nulo. Un vector de módulo 1 es **unitario**. Dividiendo un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ entre su módulo se obtiene el unitario que apunta igual que $\mathbf{u}$:

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u}$$

Por ejemplo, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ tiene módulo $\sqrt{4 + 9 + 36} = 7$ y su unitario es $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Suma, resta y producto por un escalar

Las tres operaciones se hacen **componente a componente**.

PROPIEDAD · OPERACIONES CON VECTORES

Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ y $k \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix} \quad k\mathbf{u} = \begin{pmatrix} k u_1 \\ k u_2 \\ k u_3 \end{pmatrix}$$

- **Suma.** Es encadenar dos desplazamientos: si $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$. Esta igualdad $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ se conoce como relación de Chasles y vale para tres puntos cualesquiera.
- **Resta.** $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Observa que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el vector nulo de $\mathbb{R}^3$.
- **Producto por un escalar.** El vector $k\mathbf{u}$ conserva la dirección de $\mathbf{u}$, tiene su mismo sentido si $k > 0$ y el contrario si $k < 0$, y su módulo se multiplica por $|k|$:

$$|k\mathbf{u}| = |k| |\mathbf{u}|$$

La suma es conmutativa y el producto por un escalar es distributivo: $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$.

Vectores paralelos (colineales)

Dos vectores son **paralelos** cuando uno es un múltiplo del otro. También se dice que son **colineales**, porque dibujados desde un mismo punto quedan en una sola recta.

DEFINICIÓN · VECTORES PARALELOS

Los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si existe $k \in \mathbb{R}$ con $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$. En componentes, las tres razones coinciden:

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} (= k)$$

Si alguna componente de $\mathbf{v}$ vale 0, no se puede dividir: entonces la componente correspondiente de $\mathbf{u}$ tiene que valer 0 también, y el valor de k se saca de las otras. Un método seguro es calcular k con una componente que no sea cero y comprobar con ella las demás. Cuidado: en el espacio no basta con comparar dos de las tres razones.

Tres puntos A , B y C están **alineados** exactamente cuando $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos. Y si un vector paralelo a otro tiene un parámetro desconocido, la proporcionalidad de las componentes da ecuaciones para calcularlo.

Punto medio de un segmento

El punto medio M cumple $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Igualando componentes sale una media de coordenadas.

PROPIEDAD · PUNTO MEDIO

El punto medio de $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Si lo que se conoce es el punto medio M y un extremo A , el otro extremo se obtiene despejando: $B = 2M - A$. De forma más general, el punto P del segmento con $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ (con $0 \leq t \leq 1$) es $P = A + t\overrightarrow{AB}$.

Vectores base: **i**, **j** y **k**

Los vectores unitarios en el sentido de cada eje son

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN · VECTORES BASE

i, **j** y **k** son los **vectores base** de $\mathbb{R}^3$. Todo vector se puede escribir como combinación suya:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$: la componente que falta vale 0. En los problemas del IB la notación cambia de un apartado a otro sin aviso, y las operaciones se hacen igual: $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) + (3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

NOTA · CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG) para comprobar un módulo o una distancia, pero en la Prueba 1 no hay calculadora: hay que dominar la raíz y simplificarla, por ejemplo $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$. Escribe siempre el planteamiento: el método puntúa aunque falle la aritmética.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1

★ Básico

Componentes, módulo y un origen desconocido

Se dan los puntos $A(3, -2, 4)$, $B(-1, 4, 1)$ y $C(5, 0, -3)$.

- Halla las componentes de $\overrightarrow{AB}$.
- Calcula $|\overrightarrow{AB}|$ en forma exacta.
- Halla el punto D tal que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

- Extremo menos origen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 4 - (-2) \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Pitágoras con tres componentes:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 36 + 9} = \sqrt{61}$$

- El extremo es el origen más las componentes: $D = C + \overrightarrow{AB} = (5 - 4, 0 + 6, -3 - 3) = (1, 6, -6)$.

Comprobación: $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ 6 - 0 \\ -6 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2

★★ Medio

Combinar operaciones y fijar módulo y sentido

Sean $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

- Calcula $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ y exprésalo en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.
- Calcula $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.
- Halla el vector unitario con la misma dirección y sentido que $\mathbf{u}$.
- Halla un vector de módulo 21 con la misma dirección que $\mathbf{u}$ y sentido contrario.

- Se opera componente a componente:

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -14 \\ 22 \end{pmatrix} = 11\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$$

- La suma es $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y su módulo es $\sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

- El módulo de $\mathbf{u}$ es $\sqrt{9 + 4 + 36} = 7$, así que

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

- Hace falta $k\mathbf{u}$ con $k < 0$ y $|k| \cdot 7 = 21$, es decir, $k = -3$:

$$-3\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \sqrt{81 + 36 + 324} = \sqrt{441} = 21$$

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Punto medio, alineación y paralelogramo en el espacio

Se consideran los puntos $A(1, 2, -1)$ y $B(4, -1, 5)$.

- Halla el punto medio M del segmento AB .
- El punto $C(2, m, n)$ está en la recta que pasa por A y B . Halla m y n .
- Sea ahora $C(6, 1, 3)$. Halla el punto D para que $ABCD$ sea un paralelogramo (vértices en ese orden).
- Halla el punto P del segmento AB que cumple $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

- Media de cada coordenada: $M \left(\frac{1+4}{2}, \frac{2+(-1)}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right)$.

- Los tres puntos están alineados si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos. Aquí $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ m-2 \\ n+1 \end{pmatrix}$. La primera componente da la razón: $1 = \lambda \cdot 3$, luego $\lambda = \frac{1}{3}$. Con ella, las otras dos componentes deben cumplir:

$$m - 2 = \frac{1}{3}(-3) = -1 \implies m = 1 \quad n + 1 = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2 \implies n = 1$$

Se comprueba: $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

- En el paralelogramo $ABCD$ se cumple $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Si $D(x, y, z)$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-x \\ 1-y \\ 3-z \end{pmatrix} \implies x = 3, y = 4, z = -3$$

Luego $D(3, 4, -3)$. Otra forma: $D = A + \overrightarrow{BC}$, con $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, que da el mismo punto.

d) $P = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) + \frac{2}{3}(3, -3, 6) = (1 + 2, 2 - 2, -1 + 4) = (3, 0, 3)$.

En el examen: en b) puntúa plantear que $\overrightarrow{AC}$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}$ (por ejemplo, $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$) y comprobar las tres componentes con el mismo λ ; dar m y n sin justificar pierde el método. En c) indica qué igualdad de vectores usas y respeta el orden de los vértices: con otro orden el punto D sería distinto.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • RESTAR AL REVÉS O OLVIDAR UNA COMPONENTE

Para $A(2, 5, 1)$ y $B(6, 1, 4)$ es fácil escribir $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 5-1 \\ 1-4 \end{pmatrix}$, que en realidad es $\overrightarrow{BA}$. El vector $\overrightarrow{AB}$ es $B - A$:

extremo menos origen. Y al medir, el módulo lleva las tres componentes al cuadrado: $\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{41}$; quedarse con x e y da la longitud de la sombra del vector en el suelo, no la del vector.

ERROR TÍPICO • DAR POR PARALELOS DOS VECTORES COMPROBANDO SOLO DOS RAZONES

Con $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ las dos primeras razones coinciden ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$), pero la tercera no ($\frac{3}{5} \neq \frac{1}{2}$), así que **no** son paralelos. Hay que comprobar las tres componentes con el mismo k . Tampoco hay que olvidar el signo: $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ es paralelo, con sentido contrario.

ERROR TÍPICO • PENSAR QUE $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

El módulo no se reparte sobre la suma. Con $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ se tiene $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| = 2 + \sqrt{45}$, pero $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ y su módulo es 7. Calcula primero el vector suma y después su módulo.

Resumen

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$: extremo menos origen. El extremo es $B = A + \overrightarrow{AB}$ y el origen es $A = B - \overrightarrow{AB}$.
- Dos vectores son iguales si tienen las mismas componentes; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ caracteriza al paralelogramo $ABCD$.
- Módulo: $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Unitario: $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/|\mathbf{u}|$.
- Suma, resta y producto por un escalar se hacen componente a componente; $|k\mathbf{u}| = |k||\mathbf{u}|$ y $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Paralelos: $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, con las tres razones iguales. A, B, C alineados si $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$.
- Punto medio de AB : la media de cada coordenada. Punto con $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$: $P = A + t\overrightarrow{AB}$.

- Vectores base: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ y $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

APARTADO 2

Producto escalar y ángulo entre vectores en el espacio

IDEA CLAVE

En el espacio el producto escalar funciona igual que en el plano: convierte dos vectores en **un número** que informa del ángulo que forman. Con él compruebas si dos vectores son perpendiculares, calculas ángulos de triángulos y de figuras en 3D y despejas parámetros desconocidos. Es una herramienta de la Prueba 1 (vectores sencillos, exactos) y de la Prueba 2 (problemas con la CPG).

Dos formas de calcularlo

Si ya conoces el producto escalar en el plano, aquí solo se añade una tercera componente. Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dibujados desde el mismo punto forman un ángulo θ con $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ (en radianes, $0 \leq \theta \leq \pi$): siempre el menor de los dos giros posibles.

DEFINICIÓN · PRODUCTO ESCALAR EN $\mathbb{R}^3$

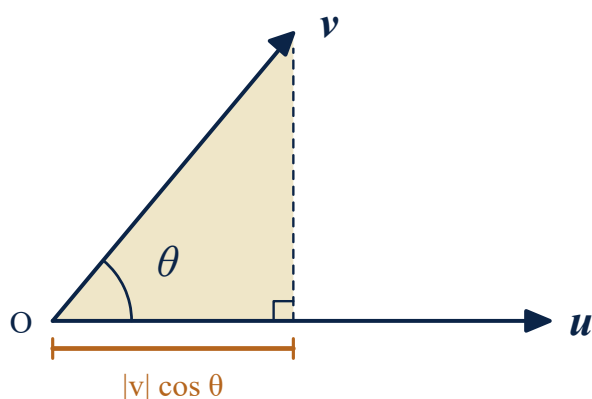
En componentes: si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Forma geométrica:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$$

El resultado es un **número real**, no un vector.



La figura está dibujada en un plano, y eso no es una limitación: dos vectores con el mismo origen, estén donde estén en el espacio, siempre quedan dentro de un plano, y en ese plano el ángulo θ se mide como siempre. Por eso la fórmula geométrica no cambia al pasar de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

Las dos expresiones son válidas a la vez, y casi todos los problemas las **igualan**: unas veces conoces las coordenadas y quieres el ángulo, otras conoces el ángulo y quieres un parámetro de las coordenadas.

Propiedades

PROPIEDAD · PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Para vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^3$ y un número k :

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (conmutativa).
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (distributiva).
- $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$.
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$, de modo que $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{0} = 0$.

Todas se comprueban sustituyendo las componentes. La cuarta es la fórmula del módulo ya conocida: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = |\mathbf{u}|^2$. Con la forma geométrica sale igual, porque un vector forma ángulo 0° consigo mismo. Ten presente que $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}$ sí tiene sentido (un número por un vector, y da un vector paralelo a $\mathbf{w}$), pero $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ no, porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ya es un número.

Como los módulos de vectores no nulos son positivos, el **signo** del producto escalar es el del coseno:

Ángulo θ	$\cos \theta$	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$
$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ (agudo)	positivo	> 0
$\theta = 90^\circ$ (recto)	cero	$= 0$
$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ (obtuso)	negativo	< 0

Ángulo entre dos vectores

MÉTODO · ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES NO NULOS

1. Calcula $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.
2. Calcula los módulos $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
3. Despeja el coseno:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$$

4. Obtén $\theta = \arccos(\cdot)$. Si el coseno es notable ($0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$), da el ángulo exacto.

Entre 0° y 180° el coseno toma cada valor una sola vez, así que el ángulo queda determinado sin ambigüedad. Para el ángulo de un triángulo ABC en el vértice A usa $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, que salen **los dos de A**.

NOTA · CALCULADORA

En la Prueba 2 la CPG calcula $\arccos$ (comprueba que está en grados o en radianes, según lo que pida el enunciado). Si el coseno es exacto, escribe además el ángulo exacto: en la Prueba 1 no hay calculadora. Si la CPG también te permite hallar el producto escalar de dos listas, úsala solo para comprobar, y deja escrita la operación completa en tu solución.

Vectores perpendiculares

Si $\theta = 90^\circ$ el coseno vale 0, y al revés. Para vectores no nulos:

PROPIEDAD · CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$$

Hay una diferencia importante respecto al plano: en $\mathbb{R}^2$ solo existe una dirección perpendicular a una dada, mientras que en $\mathbb{R}^3$ hay **infinitas** (todas las que están en un plano). Por eso la condición $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ es una sola ecuación con tres incógnitas: si te piden «un vector perpendicular a $\mathbf{u}$ », basta encontrar una solución cualquiera, y si te piden el valor de un parámetro, esa ecuación lo despeja. Para obtener un vector perpendicular a **dos** vectores a la vez se usa el producto vectorial, que se ve en el siguiente apartado.

Proyección de un vector sobre otro

La «sombra» de $\mathbf{v}$ sobre la recta de $\mathbf{u}$ es el segmento que queda al bajar desde el extremo de $\mathbf{v}$ una perpendicular a esa recta (ver la figura). Su longitud con signo es la proyección escalar, y si se coloca en la dirección de $\mathbf{u}$ se obtiene la proyección vectorial.

DEFINICIÓN · PROYECCIÓN DE $\mathbf{v}$ SOBRE $\mathbf{u}$ (CON $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$)

Proyección escalar (un número):

$$|\mathbf{v}| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}$$

Proyección vectorial (un vector paralelo a $\mathbf{u}$):

$$\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \right) \mathbf{u}$$

La escalar es positiva si θ es agudo, negativa si es obtuso y cero si los vectores son perpendiculares.

La vectorial sale de la escalar multiplicándola por el vector unitario $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ (que marca la dirección de $\mathbf{u}$), y por eso aparece $|\mathbf{u}|^2$ abajo. Si restas a $\mathbf{v}$ su proyección vectorial sobre $\mathbf{u}$, lo que queda es perpendicular a $\mathbf{u}$: sirve para comprobar el resultado.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Producto escalar con módulos y con componentes

- Los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ cumplen $|\mathbf{p}| = 6$ y $|\mathbf{q}| = 2$, y forman un ángulo de 120° . Calcula $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$.
- Calcula $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ para $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, y di si el ángulo que forman es agudo, recto u obtuso.
- Halla k para que $\begin{pmatrix} k \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sean perpendiculares.

- Con la forma geométrica: $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 6 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$.
 - En componentes: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 = 3 + 0 - 8 = -5$. Es negativo, luego el ángulo es **obtuso**.
 - Perpendiculares significa producto escalar nulo: $2k + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = 0$, es decir, $2k - 10 = 0$, y $k = 5$.
- Resultado:** a) -6 ; b) -5 (ángulo obtuso); c) $k = 5$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Ángulos y proyecciones en un triángulo del espacio

Un triángulo tiene vértices $A(1, 0, 2)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(2, 4, 3)$.

- Calcula $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Halla el ángulo del triángulo en A (en radianes, exacto).
- Calcula $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Halla la proyección escalar de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$.
- Halla la proyección vectorial de $\overrightarrow{AB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$.

Se restan coordenadas, extremo menos origen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 = 9.$

b) Los módulos son $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$ y $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + 16 + 1} = 3\sqrt{2}$. Entonces

$$\cos A = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies A = \frac{\pi}{4}$$

c) Los dos vectores deben salir de B : $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Su producto es $2 - 4 + 2 = 0$: el ángulo en B es **recto**.

d) $\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

e) Se multiplica $\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}|^2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ por $\overrightarrow{AC}$:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Comprobación: $\overrightarrow{AB}$ menos esa proyección es $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, y su producto escalar con $\overrightarrow{AC}$ es $\frac{3}{2} + 0 - \frac{3}{2} = 0$, como debe ser.

Resultado: a) 9; b) $\frac{\pi}{4}$; c) 0; d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Parámetros con perpendicularidad y con un ángulo dado

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla k para que $\mathbf{c}$ sea perpendicular a $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Sean ahora $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, que forman un ángulo de 60° .

b) Halla todos los valores posibles de k .

c) Para el valor de k del apartado b), calcula la proyección escalar de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

a) Primero el vector: $3\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -6-0 \\ 9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$. La perpendicularidad exige

$$\mathbf{c} \cdot (3\mathbf{a} - \mathbf{b}) = k - 18 + 10 = 0 \implies k = 8$$

b) Se igualan las dos formas del producto escalar. Se tiene $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = k + 1$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{k^2 + 2}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}$, con $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$:

$$\frac{k+1}{\sqrt{k^2+2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Se despeja la raíz y se eleva al cuadrado (esto puede introducir soluciones falsas, así que habrá que comprobar):

$$2(k+1) = \sqrt{2(k^2+2)} \implies 4(k+1)^2 = 2(k^2+2) \implies 2k^2 + 8k = 0 \implies k = 0 \text{ o } k = -4$$

Comprobación: el coseno es positivo, luego hace falta $k+1 > 0$. Con $k = 0$ se cumple ($1 > 0$); con $k = -4$ sale $-3 < 0$, y ese valor da en realidad un ángulo de 120° . Solo vale $k = 0$.

c) Con $k = 0$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$. La proyección escalar de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es $\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En el examen: al elevar al cuadrado una ecuación con raíz, comprueba siempre el signo del producto escalar para descartar la solución falsa; dar las dos soluciones sin comprobar se penaliza. Escribe también el desarrollo del producto escalar antes de igualar a cero.

Resultado: a) $k = 8$; b) $k = 0$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • MULTIPLICAR COMPONENTE A COMPONENTE Y QUEDARSE CON UN VECTOR

El producto escalar de dos vectores es un **número**: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 + 0 - 3 = 1$, no el vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Si tu resultado todavía tiene tres componentes, falta sumar.

ERROR TÍPICO • CALCULAR EL ÁNGULO CON VECTORES QUE NO SALEN DEL MISMO PUNTO

Para el ángulo en el vértice B de un triángulo ABC hay que usar $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. Con $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ obtienes el ángulo exterior, $180^\circ - B$, y el coseno sale con el signo cambiado.

ERROR TÍPICO · PENSAR QUE PERPENDICULAR A UN VECTOR ES UN ÚNICO VECTOR

En $\mathbb{R}^3$ la ecuación $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ tiene infinitas soluciones $\mathbf{v}$ (forman un plano). No intentes «despejar» un vector perpendicular único: o te dan más condiciones, o hay que usar el producto vectorial para fijarlo con dos vectores.

Resumen

- En $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$. Es un número, no un vector.
- Propiedades: conmutativo, distributivo, $(k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$. Positivo si el ángulo es agudo, negativo si es obtuso.
- Ángulo: $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$, con los dos vectores saliendo del mismo punto.
- Perpendiculares: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Con un parámetro, esa ecuación lo despeja.
- Proyección escalar de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$: $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}$; vectorial: $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$.
- Si elevas al cuadrado para quitar una raíz, comprueba el signo del producto escalar.

APARTADO 3

Producto vectorial, áreas y volúmenes

IDEA CLAVE

El producto vectorial toma dos vectores del espacio y devuelve **otro vector**, perpendicular a los dos. Su módulo es el área del paralelogramo que forman, y combinado con un tercer vector da volúmenes. En el examen del IB sirve para hallar un vector normal a un plano, para calcular áreas de triángulos en $\mathbb{R}^3$ y para volúmenes de paralelepípedos y tetraedros.

Definición y cálculo

El producto vectorial solo existe en tres dimensiones. Se escribe $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y se lee «u cruz v».

DEFINICIÓN · PRODUCTO VECTORIAL

Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

El resultado es un **vector**, no un número.

Memorizar tres expresiones largas es incómodo. Una regla más fácil es desarrollar, por la primera fila, un determinante en el que la primera fila son los vectores base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Fíjate en el **signo menos** delante de la componente $\mathbf{j}$: es el fallo más habitual (se ve en los errores típicos). Es un determinante «simbólico», porque la primera fila no son números, pero sirve como regla de cálculo.

MÉTODO · CALCULAR $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ CON EL DETERMINANTE

1. Escribe una matriz 3×3 con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ en la primera fila, las componentes de $\mathbf{u}$ en la segunda y las de $\mathbf{v}$ en la tercera. **El orden importa.**
2. Desarrolla por la primera fila: componente en $\mathbf{i}$ con signo $+$, en $\mathbf{j}$ con signo $-$, en $\mathbf{k}$ con signo $+$.
3. Cada menor es un determinante 2×2 : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
4. Comprobación rápida: el resultado debe tener producto escalar cero con $\mathbf{u}$ y con $\mathbf{v}$.

NOTA · CALCULADORA

En la Prueba 2 la calculadora de pantalla gráfica (CPG) puede dar el producto vectorial de dos vectores introducidos como matrices columna. Úsala para comprobar, pero en la Prueba 1 hay que saber hacerlo a mano, y en la Prueba 2 conviene escribir también el planteamiento.

Propiedades

PROPIEDAD · PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

Para vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ y un número k :

- **Anticonmutativo:** $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$. Al cambiar el orden cambia el sentido.
- **Perpendicular a los dos factores:** $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$ y $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$.
- **Paralelos:** $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y solo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos (uno es múltiplo del otro). En particular $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- **Distributivo:** $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, y $(k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.
- **Módulo:** $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta$, siendo θ el ángulo entre los dos vectores ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$).

Para ver por qué el resultado es perpendicular, multiplica escalarmente $\mathbf{u}$ por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$: los seis términos que aparecen se anulan por pares, y lo mismo ocurre con $\mathbf{v}$. De ahí sale también la propiedad de los vectores paralelos: si $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{u}$, cada componente tiene la forma $\lambda(u_2u_3 - u_3u_2) = 0$.

La fórmula del módulo se deduce de la identidad $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$, que se comprueba desarrollando las componentes. Si sustituyes $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$, queda

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta$$

y como $\sin \theta \geq 0$ entre 0° y 180° , se extrae la raíz sin ambigüedad. Observa el parecido con el producto escalar: allí aparece $\cos \theta$ y da un número; aquí aparece $\sin \theta$ y da el módulo de un vector.

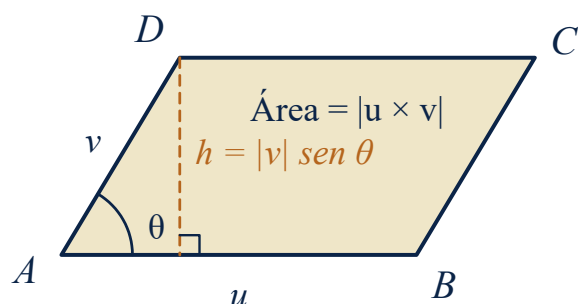
Un vector perpendicular a otros dos

Es la aplicación más frecuente. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos, cualquier vector perpendicular a ambos es un **múltiplo de** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Para obtener uno de módulo 1 se divide entre su módulo:

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$

Con tres puntos A, B, C no alineados, el vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ es perpendicular al plano que los contiene. Será la base para hallar la ecuación del plano en el apartado siguiente.

Área de un paralelogramo y de un triángulo



Un paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tiene base $|\mathbf{u}|$ y altura $h = |\mathbf{v}| \sin \theta$. Su área es base por altura, es decir, exactamente el módulo del producto vectorial.

PROPIEDAD · ÁREAS CON EL PRODUCTO VECTORIAL

- Paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$: $A = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.
- Triángulo con dos lados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$: $A = \frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.
- Triángulo ABC : $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

El triángulo es la mitad del paralelogramo porque la diagonal lo reparte en dos triángulos iguales. Lo bueno de esta fórmula es que funciona en el espacio, donde no se puede usar «base por altura entre dos» sin hallar antes la altura. Además, tienes la comparación con la fórmula trigonométrica $\frac{1}{2}ab \sin C$ del área de un triángulo: es la misma, escrita con vectores.

Producto mixto y volúmenes

Con tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ que salen del mismo punto se forma un **paralelepípedo** (una caja con caras paralelogramos). Su base es el paralelogramo de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, de área $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$; su altura es la componente de $\mathbf{w}$ en la dirección perpendicular a la base, es decir, $|\mathbf{w}| |\cos \varphi|$, donde φ es el ángulo entre $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

DEFINICIÓN · PRODUCTO MIXTO

El **producto mixto** de tres vectores es el número $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$. Se puede calcular como un determinante cuyas filas son las componentes de los tres vectores:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

TEOREMA · VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO Y DEL TETRAEDRO

El volumen del paralelepípedo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es

$$V = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

y el del tetraedro (pirámide de base triangular) que forman los tres vectores es la sexta parte:

$$V = \frac{1}{6}|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

El valor absoluto es necesario: el producto mixto puede salir negativo según el orden de los vectores, pero un volumen no. La sexta parte viene de que una pirámide ocupa un tercio del prisma de su misma base y altura, y la base triangular es la mitad del paralelogramo: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Un caso especial muy útil: si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$, el volumen es cero y los tres vectores son **coplanarios** (están en un mismo plano).

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1

★ Básico

Calcular un producto vectorial y comprobarlo

Sean $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Calcula $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
- Calcula $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$ y comprueba que el resultado es el esperado.
- Escribe $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ sin repetir el cálculo.

- a) Con el determinante:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) - \mathbf{j}(1 \cdot 2 - 3 \cdot 4) + \mathbf{k}(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4) \\ &= 7\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 9\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 7 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + (-9) \cdot 3 = 7 + 20 - 27 = 0$. Es cero, como debe ser: el producto vectorial es perpendicular a $\mathbf{u}$.
- c) Al cambiar el orden se cambia el signo: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un triángulo en el espacio: normal, área y vector unitario

Los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, 3, 1)$ son los vértices de un triángulo.

- Halla $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.
- Calcula el área del triángulo ABC .
- Halla el vector de módulo 1 perpendicular al plano del triángulo cuya primera componente sea positiva.

Primero los vectores que salen de A , restando extremo menos origen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) Con el determinante:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \mathbf{i}(1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3) - \mathbf{j}(2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1) + \mathbf{k}(2 \cdot 3 - 1 \cdot 1) \\ &= 5\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) El módulo es $\sqrt{25 + 0 + 25} = 5\sqrt{2}$, y el área es la mitad:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

- c) El vector $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ es perpendicular al plano. Se divide entre su módulo $5\sqrt{2}$:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

La primera componente es positiva, así que no hay que cambiar el signo.

EJEMPLO 3 ★★★ Dificil

Volumen de una caja con parámetro y vectores coplanarios

Considera los vectores $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$, donde $k \in \mathbb{R}$.

- Halla $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y, a partir de él, el producto mixto $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ en función de k .
- Para $k = 0$, calcula el volumen del paralelepípedo y el del tetraedro determinados por los tres vectores.
- Halla los valores de k para los que el paralelepípedo tiene volumen 5.
- Halla el valor de k para el que los tres vectores son coplanarios.

- a) Desarrollamos el determinante simbólico:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - \mathbf{j}(2 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + \mathbf{k}(2 \cdot 3 - 1 \cdot 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos escalarmente por $\mathbf{w}$:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot k + 6 \cdot 2 = 13 - 2k$$

- Con $k = 0$ el producto mixto vale 13. El paralelepípedo tiene volumen $|13| = 13$ y el tetraedro $\frac{13}{6}$.
- El volumen es $|13 - 2k|$, y se pide que valga 5. Hay dos casos:

$$13 - 2k = 5 \Rightarrow k = 4 \quad \text{o} \quad 13 - 2k = -5 \Rightarrow k = 9$$

El valor absoluto da **dos** soluciones; las dos cajas tienen el mismo volumen, aunque con orientaciones opuestas.

- Coplanarios significa volumen cero: $13 - 2k = 0$, luego $k = \frac{13}{2}$.

En el examen: cuando un volumen se iguala a un número, no olvides el valor absoluto, que da dos valores del parámetro. Y si te piden el volumen del **tetraedro**, divide entre 6: es la confusión más frecuente con el paralelepípedo.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • OLVIDAR EL SIGNO MENOS DEL VECTOR J

Al desarrollar el determinante simbólico, la componente en $\mathbf{j}$ lleva el signo $-$. Si calculas $+\mathbf{j}(u_1v_3 - u_3v_1)$ obtienes un vector que ya no es perpendicular a $\mathbf{u}$ ni a $\mathbf{v}$. Comprueba siempre con un producto escalar: debe salir 0.

ERROR TÍPICO • CAMBIAR EL ORDEN Y MANTENER EL SIGNO

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ son **opuestos**, no iguales. Para el área da igual (el módulo es el mismo), pero si el vector se usa como normal de un plano o en un producto mixto sin valor absoluto, el signo importa.

ERROR TÍPICO · USAR EL PRODUCTO VECTORIAL EN EL PLANO O CONFUNDIRLO CON EL ESCALAR

El producto vectorial se define solo para vectores de tres componentes: si los vectores están en el plano, añade una tercera componente 0. Y no lo confundas con el escalar: el escalar da un **número** (y sirve para ángulos y perpendicularidad), el vectorial da un **vector** (y sirve para áreas, normales y volúmenes).

Resumen

- Producto vectorial: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$, que se obtiene con el determinante simbólico de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (signo – en la componente $\mathbf{j}$). Es un vector.
- Propiedades: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$; es perpendicular a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{v}$; vale 0 si y solo si son paralelos; $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin \theta$.
- Vector perpendicular a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (o su múltiplo); unitario: dividir entre su módulo.
- Áreas: paralelogramo $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$; triángulo $\frac{1}{2}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$, por ejemplo $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.
- Producto mixto $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ = determinante de los tres vectores. Volumen del paralelepípedo = $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$; del tetraedro, la sexta parte. Si vale 0, los vectores son coplanarios.

APARTADO 4

Ecuaciones de la recta y del plano en el espacio

IDEA CLAVE

En el espacio, una recta se fija con un punto y un vector director, y un plano con un punto y dos vectores directores (o con un punto y un vector normal). Saber escribirlos en todas sus formas y pasar de una a otra es la base de los ángulos, las distancias y las posiciones relativas, y aparece en la Prueba 1 y en la Prueba 2.

Ecuaciones de la recta en el espacio

La idea es la misma que en el plano: una recta queda determinada por **un punto** A de ella, con vector de posición $\mathbf{a}$, y por **una dirección**, dada por un vector director $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$. Lo único que cambia es que ahora los vectores tienen tres componentes.

DEFINICIÓN · ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

La recta que pasa por $A(x_0, y_0, z_0)$ con vector director $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$ es el conjunto de puntos $\mathbf{r}$ que cumplen

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

o, con componentes,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Cada valor de λ da un punto de la recta. No hay una única ecuación: sirve cualquier punto de la recta y cualquier múltiplo no nulo de $\mathbf{d}$.

Si se igualan las componentes se obtienen las **ecuaciones paramétricas**:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda d_1 \\ y = y_0 + \lambda d_2 \\ z = z_0 + \lambda d_3 \end{cases}$$

Y si d_1, d_2 y d_3 no son cero, al despejar λ en las tres e igualar queda la **ecuación continua**:

$$\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2} = \frac{z - z_0}{d_3}$$

MÉTODO · RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS

1. Calcula el vector director como $\overrightarrow{AB} = B - A$ (final menos inicio). Si quieres, simplifícalo dividiendo por un factor común.
2. Toma A (o B) como punto de la recta.
3. Escribe la forma que te pidan: vectorial, paramétricas o continua.
4. Comprueba con el otro punto: debe existir un λ que lo produzca en las tres componentes.

Para decidir si un punto P pertenece a la recta, se sustituyen sus coordenadas en las paramétricas y se comprueba que el mismo λ cumple las tres ecuaciones. Basta que falle una para que P no esté en la recta.

NOTA · UNA RECTA DEL ESPACIO NO TIENE UNA SOLA ECUACIÓN CARTESIANA

En el plano, $ax + by + d = 0$ describe una recta. En el espacio, una ecuación de ese tipo describe un **plano** (lo ves más abajo). Una recta se escribe como intersección de dos planos, es decir, con dos ecuaciones a la vez, o con las formas vectorial, paramétrica y continua. Si una componente del director vale 0, por ejemplo $d_3 = 0$, la continua se escribe $\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2}, z = z_0$.

Ecuaciones del plano

Un plano necesita más información que una recta. Hay dos maneras habituales de fijarlo.

- **Un punto y dos vectores directores** no paralelos entre sí, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, que quedan contenidos en el plano: desde A puedes llegar a cualquier punto del plano avanzando cierta cantidad de $\mathbf{u}$ y cierta cantidad de $\mathbf{v}$.
- **Un punto y un vector normal** $\mathbf{n}$, perpendicular al plano.

DEFINICIÓN · ECUACIÓN VECTORIAL Y PARAMÉTRICAS DEL PLANO

El plano que pasa por A (vector de posición $\mathbf{a}$) y tiene vectores directores no paralelos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Al separar las componentes, con $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, se obtienen las ecuaciones paramétricas:

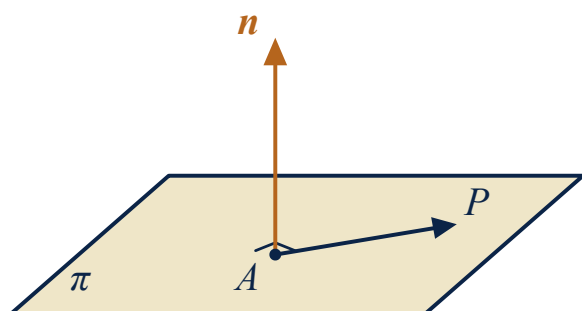
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Ahora hay **dos parámetros**: una recta tiene uno, un plano tiene dos.

Si el plano viene dado por tres puntos A , B y C que no están alineados, los dos vectores directores pueden ser $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y el punto, A .

El vector normal

Un vector $\mathbf{n}$ no nulo es **normal** (o perpendicular) al plano cuando es perpendicular a **todos** los vectores contenidos en él. Para comprobarlo basta con que lo sea a dos vectores directores no paralelos, y de ahí sale cómo calcularlo.



PROPIEDAD · VECTOR NORMAL A UN PLANO

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores directores del plano, entonces $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector normal. Cualquier múltiplo no nulo de él también lo es.

Un punto P está en el plano si y solo si $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = 0$, donde A es un punto del plano.

La intuición: el producto vectorial (apartado anterior) da un vector perpendicular a los dos que se multiplican, y esos dos generan el plano. La segunda parte dice que ir de A a cualquier punto del plano es moverse por él, y ese movimiento es siempre perpendicular a $\mathbf{n}$.

Ecuación cartesiana

Sea $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vector normal y $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto del plano. La condición $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = 0$ para $P(x, y, z)$ se escribe

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Al operar y agrupar las constantes queda la **ecuación cartesiana**.

TEOREMA · ECUACIÓN CARTESIANA DEL PLANO

Un plano con vector normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ que pasa por A tiene ecuación

$$ax + by + cz = d, \quad d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$$

Dicho en forma vectorial, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$. Recíprocamente, en $ax + by + cz = d$ los coeficientes (a, b, c) forman un vector normal del plano.

Las dos formas, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ y $ax + by + cz = d$, dicen lo mismo: la segunda es la primera con las componentes escritas, y d es el número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ (el mismo para todos los puntos del plano).

Una consecuencia útil: dos planos con vectores normales proporcionales son **paralelos**, y los planos $ax + by + cz = d$ y $ax + by + cz = d'$ lo son siempre.

Pasar de una forma a otra

MÉTODO · PLANO POR TRES PUNTOS, A ECUACIÓN CARTESIANA

1. Calcula $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$.
2. Calcula el vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (puedes dividirlo por un factor común).
3. Escribe $ax + by + cz = d$ con $(a, b, c) = \mathbf{n}$.
4. Obtén d sustituyendo las coordenadas de A .
5. Comprueba con B y con C .

MÉTODO · OTROS CAMBIOS DE FORMA

1. **De cartesiana a paramétricas:** da a dos de las variables los valores λ y μ y despeja la tercera. Por ejemplo, de $x + 2y - z = 3$ con $y = \lambda$, $z = \mu$ sale $x = 3 - 2\lambda + \mu$.
2. **De paramétricas (o vectorial) a cartesiana:** calcula $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, pon $ax + by + cz = d$ y halla d con el punto A . (Alternativa: eliminar λ y μ del sistema, más largo.)
3. **De un punto y un normal a vectorial:** busca dos vectores no paralelos perpendiculares a $\mathbf{n}$ (cumplen $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = 0$) o, más corto, dos puntos más del plano.

NOTA · QUÉ FORMA SE PIDE Y CÓMO SE ESCRIBE

Si el enunciado pide «una ecuación vectorial», hay infinitas respuestas válidas. Si pide la ecuación cartesiana, ofrece $ax + by + cz = d$ con a, b, c y d enteros y sin factor común. Para comprobar tu resultado, sustituye los puntos que has usado y mira que el vector normal sea perpendicular a los vectores directores (producto escalar nulo). En la Prueba 2, la CPG puede calcular el producto vectorial o resolver el sistema que da el plano, pero escribe siempre el planteamiento.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Una recta por dos puntos

Se consideran los puntos $A(2, -1, 3)$ y $B(4, 1, 0)$.

- Halla un vector director de la recta AB de componentes enteras primas entre sí.
- Indica si el punto $P(8, 5, -6)$ pertenece a la recta AB .
- El punto $Q(6, m, k)$ está en la recta AB . Halla m y k .

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, y sus componentes ya no tienen factor común. Las ecuaciones de la recta, con punto A , son

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

- Se sustituye P : $2 + 2\lambda = 8$ da $\lambda = 3$; $-1 + 2\lambda = 5$ da $\lambda = 3$; $3 - 3\lambda = -6$ da $\lambda = 3$. El mismo valor cumple las tres ecuaciones, así que P pertenece a la recta.
- De $x = 6$: $2 + 2\lambda = 6$, luego $\lambda = 2$. Entonces $m = -1 + 2 \cdot 2 = 3$ y $k = 3 - 3 \cdot 2 = -3$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Plano por tres puntos

Se consideran los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(3, 1, 1)$ y $C(2, 3, 0)$.

- Halla un vector normal al plano π que pasa por A , B y C .
- Halla la ecuación cartesiana de π en la forma $ax + by + cz - d = 0$, con a, b, c, d enteros primos entre sí y $a > 0$.
- El punto $D(k, 1, 1)$ pertenece a π . Halla k .
- Halla el punto en el que π corta al eje OX .

a) Dos vectores directores son $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -2)$. No son paralelos, porque no son proporcionales. Un vector normal es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- La ecuación es $x + 3y + 5z = d$. Con A : $d = 1 + 0 + 10 = 11$, así que

$$x + 3y + 5z - 11 = 0$$

Comprobación con B : $3 + 3 + 5 = 11$. Con C : $2 + 9 + 0 = 11$. Los dos cumplen la ecuación.

- c) Se sustituye D : $k + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 11$, luego $k = 3$.
d) El eje OX son los puntos $(x, 0, 0)$. Sustituyendo: $x = 11$, así que el punto de corte es $(11, 0, 0)$.

EJEMPLO 3 ★★★ Dificil

De paramétricas a cartesiana, un plano paralelo y el pie de la perpendicular

El plano Π_1 tiene ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

- a) Halla la ecuación cartesiana de Π_1 en la forma $ax + by + cz - d = 0$, con a, b, c, d enteros primos entre sí y $a > 0$.
b) El plano Π_2 es paralelo a Π_1 y pasa por $P(8, -2, 0)$. Halla d en su ecuación $6x - 3y + z = d$, escribiéndola antes en la forma $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$.
c) La recta que pasa por P y es perpendicular a Π_1 corta a Π_1 en el punto Q . Halla las coordenadas de Q .

- a) Los vectores directores son $\mathbf{u} = (1, 2, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$. El vector normal es

$$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $6x - 3y + z = d$, y con el punto $(1, 0, 2)$: $d = 6 + 0 + 2 = 8$.

$$6x - 3y + z - 8 = 0$$

Comprobación con otro punto del plano, $A + \mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 3, 5)$: $12 - 9 + 5 = 8$.

- b) Dos planos paralelos comparten vector normal, así que $\mathbf{n} = (6, -3, 1)$ también vale para Π_2 . Con $\mathbf{a} = (8, -2, 0)$:

$$\mathbf{r} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 48 + 6 + 0 = 54$$

Por tanto Π_2 : $6x - 3y + z = 54$ y $d = 54$.

- c) La recta perpendicular a Π_1 por P tiene como vector director $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \implies x = 8 + 6\lambda, y = -2 - 3\lambda, z = \lambda$$

Se sustituye en $6x - 3y + z = 8$:

$$6(8 + 6\lambda) - 3(-2 - 3\lambda) + \lambda = 8 \implies 54 + 46\lambda = 8 \implies \lambda = -1$$

Entonces $Q = (8 - 6, -2 + 3, -1) = (2, 1, -1)$. Comprobación en Π_1 : $12 - 3 - 1 = 8$.

En el examen: en un cambio de forma puntúa el planteamiento: el vector normal bien calculado (producto vectorial o dos productos escalares nulos) y la sustitución del punto para hallar d . En el apartado c) escribe la recta con su parámetro y sustitúyela en la ecuación del plano; el resultado debe comprobarse en el plano.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • USAR UN PUNTO COMO VECTOR NORMAL, O LOS VECTORES DIRECTORES COMO NORMAL

En $ax + by + cz = d$, el vector (a, b, c) es el **normal**, no el que va dentro del plano. Y los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de la ecuación vectorial son directores: para obtener el normal hay que hacer $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Un fallo muy habitual es copiar los coeficientes de un director como si fueran los de la cartesiana. Se detecta con una sola comprobación: el normal debe tener producto escalar nulo con $\mathbf{u}$ y con $\mathbf{v}$.

ERROR TÍPICO • CREER QUE $ax + by + cz = d$ DESCRIBE UNA RECTA EN EL ESPACIO

En el plano, una ecuación lineal con x e y es una recta. En el espacio, **una** ecuación lineal con tres variables es un plano. Para una recta hacen falta dos ecuaciones a la vez, o su forma vectorial, paramétrica o continua. Si en una pregunta aparece una recta como $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{-1}$, no la conviertas en una sola ecuación.

ERROR TÍPICO • OLVIDAR EL SIGNO O EL TÉRMINO INDEPENDIENTE AL CALCULAR d

La constante $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ se obtiene con las coordenadas de un punto **del plano**, con sus signos. En $A(1, 0, 2)$ y $\mathbf{n} = (1, 3, 5)$ sale $d = 11$, no $1 + 3 + 5$. Para pasar a la forma $ax + by + cz - d = 0$ cambia el signo de d al pasarlo al otro lado. Conviene comprobar con otro punto del plano antes de dar el resultado.

Resumen

- Recta en $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}$; paramétricas $x = x_0 + \lambda d_1$, $y = y_0 + \lambda d_2$, $z = z_0 + \lambda d_3$; continua $\frac{x-x_0}{d_1} = \frac{y-y_0}{d_2} = \frac{z-z_0}{d_3}$. Por dos puntos: director $\overrightarrow{AB} = B - A$.
- Un punto está en la recta si el mismo λ cumple las tres componentes.
- Plano: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}$ con dos directores no paralelos (dos parámetros). Por tres puntos: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
- Vector normal: $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$; P está en el plano si $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = 0$.
- Cartesiana: $ax + by + cz = d$ con $\mathbf{n} = (a, b, c)$ y $d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$; es lo mismo que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$. Planos con normales proporcionales son paralelos.
- Una recta en el espacio no tiene una sola ecuación cartesiana: son dos planos.

APARTADO 5

Ángulos y distancias en el espacio

IDEA CLAVE

Con el producto escalar se miden ángulos entre rectas y planos, y con el vector normal, o con el producto vectorial, se miden distancias. Cada cálculo parte de un vector director o de un vector normal y acaba en una fórmula corta. En el examen del IB aparecen sueltos en la Prueba 1 y encadenados en los problemas largos de la Prueba 2.

Ángulo entre dos rectas

Dos rectas que se cortan forman cuatro ángulos, iguales de dos en dos: uno agudo (o recto) y otro obtuso. Como **ángulo entre las rectas** se toma siempre el agudo, es decir, un valor entre 0° y 90° . Si las rectas son paralelas, el ángulo es 0° .

Dos rectas que se cruzan sin cortarse (se llaman **alabeadas**) no forman ángulo en sentido estricto, pero se les asigna el de sus direcciones: es el que forman dos rectas que se cortan y tienen los mismos vectores directores.

Un vector director marca el sentido de recorrido y su opuesto describe la misma recta; por eso al aplicar el producto escalar se toma el valor absoluto, que descarta el ángulo obtuso.

TEOREMA · ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Si $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son vectores directores de dos rectas, el ángulo θ que forman cumple

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2|}{|\mathbf{d}_1| |\mathbf{d}_2|}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

Sale directamente de la fórmula del ángulo entre vectores del apartado de producto escalar, con el valor absoluto añadido. Si no pones el valor absoluto y el producto escalar sale negativo, obtienes el ángulo obtuso: $180^\circ - \theta$.

Ángulo entre dos planos y entre recta y plano

Un plano queda orientado por su **vector normal** $\mathbf{n}$, el que es perpendicular a él (en $ax + by + cz = d$ es $\mathbf{n} = (a, b, c)$; si no lo recuerdas, repasa el apartado de rectas y planos). Dos planos que se cortan forman un ángulo igual al de sus normales, porque girar un plano gira su normal en el mismo ángulo.

TEOREMA · ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

Si $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son vectores normales de dos planos, el ángulo θ entre los planos cumple

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

Para una recta y un plano la situación cambia. El ángulo entre la recta y el plano es el que forma la recta con su proyección sobre el plano (la «sombra» de la recta). Si φ es el ángulo entre la recta y el plano, el ángulo entre la recta y la normal vale $90^\circ - \varphi$, y como $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$, aparece el **seno**.

TEOREMA · ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Si $\mathbf{d}$ es un vector director de la recta y $\mathbf{n}$ un vector normal del plano, el ángulo φ entre la recta y el plano cumple

$$\sin \varphi = \frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{d}| |\mathbf{n}|}, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$$

Casos extremos: si $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$, la recta es paralela al plano (o está contenida en él) y $\varphi = 0^\circ$; si $\mathbf{d}$ es proporcional a $\mathbf{n}$, la recta es perpendicular al plano y $\varphi = 90^\circ$.

NOTA · PRUEBA 2: GRADOS Y FUNCIONES INVERSAS

Para pasar de $\cos \theta$ o de $\sin \varphi$ al ángulo, usa $\cos^{-1}$ o $\sin^{-1}$ con la calculadora de pantalla gráfica (CPG) en modo **grados**. En la Prueba 1 se deja el resultado exacto, por ejemplo $\theta = \arccos \frac{4}{9}$, salvo que salga un ángulo conocido (30° , 45° , 60° ...). Escribe siempre la fórmula con los números sustituidos antes del resultado.

Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto P a una recta ℓ es la menor distancia de P a un punto de ℓ . Se alcanza en el punto Q de la recta tal que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a ella. Hay dos caminos y conviene dominar los dos.

MÉTODO · DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA: PERPENDICULAR DESDE EL PUNTO

1. Escribe un punto genérico de la recta, $Q = A + \lambda \mathbf{d}$, con A un punto de la recta y $\mathbf{d}$ su vector director.
2. Calcula $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, que depende de λ .
3. Impón $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{d} = 0$: queda una ecuación lineal en λ . Resuélvela y sustituye para obtener el **pie de la perpendicular** Q .
4. La distancia es $|\overrightarrow{PQ}|$.

Este método da además el pie Q , que a menudo se pide aparte (para hallar el simétrico de P respecto de la recta, por ejemplo).

TEOREMA · DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA CON EL PRODUCTO VECTORIAL

Si A es un punto de la recta y $\mathbf{d}$ su vector director, la distancia de P a la recta es

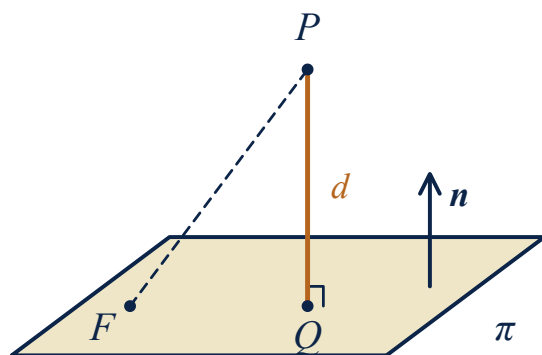
$$\text{dist}(P, \ell) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{d}|}{|\mathbf{d}|}$$

La razón: $|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{d}|$ es el área del paralelogramo que tiene como lados $\overrightarrow{AP}$ y $\mathbf{d}$. Su base mide $|\mathbf{d}|$ y su altura es justo la distancia buscada, así que dividiendo el área entre la base sale la altura.

Para dos **rectas paralelas**, la distancia entre ellas es la de cualquier punto de una a la otra. Para una **recta paralela a un plano**, es la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

Distancia de un punto a un plano

La distancia de P a un plano π es la longitud del segmento perpendicular a π que sale de P . Si Q es su pie en el plano, $d = |\overrightarrow{PQ}|$.



Para obtener una fórmula, toma un punto cualquiera F del plano. La distancia d es la longitud de la **proyección** de $\overrightarrow{FP}$ sobre la dirección de la normal $\mathbf{n}$ (en el dibujo, el segmento discontinuo FP y la perpendicular PQ). Esa longitud es $\frac{|\overrightarrow{FP} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$, y en el numerador, con F en el plano, queda $\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - d_0$.

TEOREMA · DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

La distancia del punto $P(x_0, y_0, z_0)$ al plano $ax + by + cz = d$ es

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Fíjate en que el plano está escrito con el término independiente en el segundo miembro, así que en el numerador se **resta** d . Si la ecuación viene como $ax + by + cz + k = 0$, el numerador es $|ax_0 + by_0 + cz_0 + k|$.

MÉTODO · PIE DE LA PERPENDICULAR A UN PLANO

1. La recta por P perpendicular al plano es $\mathbf{r} = P + \lambda \mathbf{n}$.
2. Sustituye sus puntos en la ecuación del plano y despeja λ .
3. Con ese λ se obtiene el punto Q del plano más cercano a P . El simétrico de P respecto del plano es $P + 2\lambda \mathbf{n}$.

Con la misma idea se calcula la distancia entre dos **planos paralelos** (un punto de uno a la ecuación del otro).

Distancia entre dos rectas que se cruzan

Si dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 no son paralelas y no se cortan, la distancia entre ellas se mide a lo largo de la **perpendicular común**: el único segmento que une las dos rectas y es perpendicular a ambas. Su dirección es la de un vector perpendicular a $\mathbf{d}_1$ y a $\mathbf{d}_2$, es decir, $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$.

TEOREMA · DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Sean A_1 un punto de ℓ_1 y A_2 un punto de ℓ_2 , con vectores directores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$. La distancia entre las rectas es

$$\text{dist}(\ell_1, \ell_2) = \frac{|\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)|}{|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2|}$$

Es la proyección del vector $\overrightarrow{A_1 A_2}$ (que une las dos rectas) sobre la dirección perpendicular común. Si $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$, las rectas son paralelas y la fórmula no sirve: se usa la distancia de un punto a una recta. Si el numerador sale 0, las rectas se cortan.

MÉTODO · DISTANCIA ENTRE RECTAS QUE SE CRUZAN POR EL PLANO PARALELO

1. Calcula $\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$.
2. Escribe el plano π que contiene a ℓ_1 y tiene normal $\mathbf{n}$: pasa por A_1 y es paralelo a ℓ_2 .
3. La distancia entre las rectas es la distancia de A_2 (o de cualquier punto de ℓ_2) al plano π .

Es la misma cuenta que la fórmula, pero paso a paso, y sirve de comprobación.

NOTA · QUÉ MÉTODO ESCOGER

En la Prueba 1 conviene el método con el que menos operaciones haces con los datos del enunciado: la fórmula del producto vectorial para punto-recta y para rectas que se cruzan, y la fórmula directa para punto-plano. Si el enunciado pide además el pie de la perpendicular, usa el método del punto genérico. En la Prueba 2, la CPG resuelve sistemas y calcula módulos y productos vectoriales, pero el planteamiento hay que escribirlo.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Ángulos entre rectas y planos

Se consideran las rectas $\ell_1 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\ell_2 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, y los planos $\pi_1 : 2x + 3y + 6z = 12$ y $\pi_2 : x - 2y + 2z = 4$.

- a) Halla el ángulo entre ℓ_1 y ℓ_2 .
- b) Halla el ángulo entre ℓ_1 y π_1 .
- c) Halla el ángulo entre π_1 y π_2 .

Da cada ángulo en grados, con un decimal.

- a) Los vectores directores son $\mathbf{d}_1 = (1, 2, 2)$ y $\mathbf{d}_2 = (2, -1, 2)$, con $|\mathbf{d}_1| = 3$ y $|\mathbf{d}_2| = 3$. El producto escalar es $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 2 - 2 + 4 = 4$:

$$\cos \theta = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \implies \theta \approx 63,6^\circ$$

- b) Con $\mathbf{n}_1 = (2, 3, 6)$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, y $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 2 + 6 + 12 = 20$. Al tratarse de recta y plano se usa el seno:

$$\sin \varphi = \frac{20}{3 \cdot 7} = \frac{20}{21} \implies \varphi \approx 72,2^\circ$$

- c) Con $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 2)$, $|\mathbf{n}_2| = 3$, y $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 2 - 6 + 12 = 8$:

$$\cos \theta = \frac{8}{7 \cdot 3} = \frac{8}{21} \implies \theta \approx 67,6^\circ$$

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Distancias desde un punto: a una recta y a un plano

Se consideran el punto $P(4, 3, -1)$, la recta $\ell: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y el plano $\pi: x + 2y - 2z = 3$.

- Halla el pie Q de la perpendicular trazada desde P a la recta ℓ .
- Calcula la distancia de P a ℓ .
- Calcula la distancia de P al plano π .
- Halla el punto de π más cercano a P .

- a) Un punto genérico de ℓ es $Q(1 + 2\lambda, 2 + \lambda, -2\lambda)$. Entonces

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2\lambda - 3 \\ \lambda - 1 \\ 1 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

y se impone $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{d} = 0$ con $\mathbf{d} = (2, 1, -2)$:

$$2(2\lambda - 3) + (\lambda - 1) - 2(1 - 2\lambda) = 9\lambda - 9 = 0 \implies \lambda = 1$$

Por tanto $Q(3, 3, -2)$.

- b) $\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, -1)$, luego $\text{dist}(P, \ell) = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.

Comprobación con el producto vectorial: con $A(1, 2, 0)$ es $\overrightarrow{AP} = (3, 1, -1)$ y $\overrightarrow{AP} \times \mathbf{d} = (-1, 4, 1)$, de módulo $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Dividiendo entre $|\mathbf{d}| = 3$ se obtiene $\sqrt{2}$.

- c) Con $\mathbf{n} = (1, 2, -2)$, $|\mathbf{n}| = 3$:

$$\text{dist}(P, \pi) = \frac{|4 + 6 + 2 - 3|}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

- d) La recta por P perpendicular a π es $(4 + t, 3 + 2t, -1 - 2t)$. Al sustituir en el plano: $(4 + t) + 2(3 + 2t) - 2(-1 - 2t) = 3$, es decir, $12 + 9t = 3$ y $t = -1$. El punto más cercano es

$$(3, 1, 1)$$

Comprobación: $3 + 2 - 2 = 3$, y $|\overrightarrow{PM}| = |(-1, -2, 2)| = 3$, que coincide con la distancia del apartado c).

EJEMPLO 3

★★★ Dificil

Dos rectas que se cruzan: perpendicular común y distancia

Se consideran las rectas $\ell_1: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\ell_2: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Demuestra que las rectas se cruzan y halla un vector perpendicular a las dos, con componentes enteras primas entre sí y primera componente positiva.
- Halla el ángulo entre las dos rectas, en grados.
- Calcula la distancia entre ℓ_1 y ℓ_2 .
- Halla la ecuación cartesiana del plano que contiene a ℓ_1 y es paralelo a ℓ_2 , en la forma $ax + by + cz + k = 0$ con $a = 2$, y comprueba el resultado del apartado c) con la distancia de un punto de ℓ_2 a ese plano.

- a) Los vectores directores $(1, 2, 2)$ y $(1, 1, 0)$ no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. Para ver si se cortan se usan parámetros distintos:

$$\begin{cases} 1 + \lambda = \mu \\ -1 + 2\lambda = 2 + \mu \\ 2 + 2\lambda = 1 \end{cases}$$

La tercera da $\lambda = -\frac{1}{2}$, la primera entonces $\mu = \frac{1}{2}$, y la segunda queda $-2 = \frac{5}{2}$, que es falso. El sistema no tiene solución: las rectas **no se cortan** y, al no ser paralelas, se cruzan.

Un vector perpendicular a las dos es

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Cambiando el signo se cumple la condición pedida: $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$. Comprobación: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_1 = 2 - 4 + 2 = 0$ y $\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_2 = 2 - 2 + 0 = 0$.

b) $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 1 + 2 + 0 = 3$, $|\mathbf{d}_1| = 3$ y $|\mathbf{d}_2| = \sqrt{2}$:

$$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \theta = 45^\circ$$

c) Con $A_1(1, -1, 2)$ y $A_2(0, 2, 1)$, es $\overrightarrow{A_1A_2} = (-1, 3, -1)$. Entonces

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \mathbf{n} = -2 - 6 - 1 = -9, \quad |\mathbf{n}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

$$\text{dist}(\ell_1, \ell_2) = \frac{|-9|}{3} = 3$$

d) El plano pasa por $A_1(1, -1, 2)$ con normal $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$: $2x - 2y + z = 2 + 2 + 2 = 6$, es decir,

$$2x - 2y + z - 6 = 0$$

El plano contiene a ℓ_1 (pasa por A_1 y su normal es perpendicular a $\mathbf{d}_1$) y es paralelo a ℓ_2 (su normal es perpendicular a $\mathbf{d}_2$). La distancia de $A_2(0, 2, 1)$ al plano es

$$\frac{|0 - 4 + 1 - 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{9}{3} = 3$$

igual que en el apartado c).

En el examen: en un apartado «demuestre que se cruzan» hay que probar las dos cosas, que no son paralelas y que el sistema no tiene solución; con una sola no basta. Para la distancia, escribe qué vector usas como perpendicular común y qué vector une los puntos; el valor absoluto del producto escalar es lo que impide que una distancia salga negativa.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • OLVIDAR EL VALOR ABSOLUTO O CONFUNDIR SENO Y COSENO

Con el valor absoluto, el ángulo entre rectas o planos es siempre menor o igual que 90° . Si omites las barras y el producto escalar sale negativo, das el ángulo obtuso, que no es el que se pide. Y en recta-plano la fórmula lleva **seno**, no coseno: usar el coseno da el ángulo que forma la recta con la normal, el complementario del buscado. Una comprobación rápida: una recta casi perpendicular al plano debe dar un ángulo cercano a 90° .

ERROR TÍPICO • FALLAR CON EL SIGNO DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE DEL PLANO

En $ax + by + cz = d$, el numerador de la distancia es $|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|$, con la d **restando**. Con la ecuación en la forma $ax + by + cz + k = 0$, en cambio, se suma k . Mezclar las dos formas es la causa más frecuente de una distancia equivocada. Antes de sustituir, escribe el plano de una de las dos formas y mantén ese criterio.

ERROR TÍPICO • APLICAR LA FÓRMULA DE RECTAS QUE SE CRUZAN A RECTAS QUE NO SE CRUZAN

Si $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$, las rectas son paralelas y la fórmula divide entre cero: la distancia es la de un punto de una a la otra recta. Si el numerador $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)$ da 0, las rectas se cortan y la distancia es 0. Mira primero el producto vectorial y después sustituye.

Resumen

- Ángulo entre rectas: $\cos \theta = \frac{|\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2|}{|\mathbf{d}_1||\mathbf{d}_2|}$; entre planos: igual con los vectores normales. Siempre entre 0° y 90° .
- Ángulo recta-plano: $\sin \varphi = \frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{d}||\mathbf{n}|}$ (seno, no coseno).
- Punto a recta: pie de la perpendicular ($\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{d} = 0$ con $Q = A + \lambda \mathbf{d}$) o $\frac{|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{d}|}{|\mathbf{d}|}$.
- Punto a plano $ax + by + cz = d$: $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. El pie se halla con la recta por P de dirección $\mathbf{n}$.
- Rectas que se cruzan: $\frac{|\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot (\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2)|}{|\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2|}$, o distancia de A_2 al plano que contiene a ℓ_1 y es paralelo a ℓ_2 .
- Paralelas (rectas o planos): distancia de un punto de una a la otra; recta paralela a plano: de un punto de la recta al plano.

APARTADO 6

Posiciones relativas e intersecciones de rectas y planos

IDEA CLAVE

En el espacio, dos rectas pueden cruzarse sin cortarse, y tres planos pueden dejar sin solución un sistema aunque no haya dos paralelos. Para decidir cada caso basta mirar los vectores directores o normales y resolver un sistema pequeño; el resultado es un punto, una recta, un plano o el conjunto vacío. Es material habitual de la Prueba 1 y, con parámetros, de las preguntas largas de la Prueba 2.

Dos rectas en el espacio

Sean $r: \mathbf{r} = \mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{d}_1$ y $s: \mathbf{r} = \mathbf{a}_2 + \mu \mathbf{d}_2$. A diferencia del plano, aquí hay **cuatro** posibilidades, porque dos rectas no paralelas pueden no tener ningún punto común.

Vectores directores	Punto común	Posición
proporcionales	todos los puntos	coincidentes (la misma recta)
proporcionales	ninguno	paralelas distintas
no proporcionales	uno	secantes (se cortan en un punto)
no proporcionales	ninguno	se cruzan (rectas alabeadas)

Dos rectas que se cruzan no son paralelas ni se tocan: no están en un mismo plano. Esto no ocurre en $\mathbb{R}^2$.

MÉTODO · POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

1. Compara $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$. Si uno es múltiplo del otro, las rectas son paralelas o coincidentes: comprueba si el punto $\mathbf{a}_2$ cumple la ecuación de r (si es así, coincidentes; si no, paralelas).
2. Si no son proporcionales, iguala las dos ecuaciones con **parámetros distintos**, $\mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_2 + \mu \mathbf{d}_2$. Salen **tres ecuaciones con dos incógnitas** (λ y μ).
3. Resuelve dos de ellas y **sustituye en la tercera**. Si se cumple, hay un único punto de corte (se obtiene sustituyendo λ en r). Si no se cumple, las rectas se cruzan.

La tercera ecuación es la que marca la diferencia respecto al plano: en $\mathbb{R}^2$ siempre hay dos ecuaciones para dos incógnitas y, si los directores no son proporcionales, el corte está garantizado. En $\mathbb{R}^3$ hay que verificarlo.

NOTA · SI LAS RECTAS NO VIENEN EN FORMA VECTORIAL

Si una recta está dada como intersección de dos planos, o en forma continua, pásala primero a forma paramétrica (un punto y un vector director). Con la forma continua $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$, el punto es (x_0, y_0, z_0) y el director es (u_1, u_2, u_3) .

Recta y plano

Una recta $r: \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{d}$ y un plano $\pi: ax + by + cz = e$ tienen tres posiciones posibles: la recta **corta** al plano en un punto, es **paralela** a él (sin puntos comunes) o está **contenida** en él.

El método más rápido es sustituir las coordenadas paramétricas de la recta en la ecuación del plano. Queda una ecuación en λ de la forma $p\lambda = q$:

PROPIEDAD · RECTA Y PLANO: LA ECUACIÓN EN EL PARÁMETRO

- Si $p \neq 0$, hay un **único valor** de λ : la recta corta al plano en ese punto.
- Si $p = 0$ y $q \neq 0$ (queda algo como $0 = 5$): **ninguna solución**, la recta es paralela al plano y no lo toca.
- Si $p = 0$ y $q = 0$ (queda $0 = 0$): **todo λ sirve**, la recta está contenida en el plano.

La intuición: $p = \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}$ con $\mathbf{n} = (a, b, c)$ el vector normal del plano. Si $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$, la dirección de la recta es perpendicular a la normal, es decir, **paralela al plano**; entonces solo queda saber si empieza dentro o fuera. Basta, en ese caso, mirar si el punto $\mathbf{a}$ cumple la ecuación del plano.

Dos planos

Dos planos $\pi_1 : \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} = e_1$ y $\pi_2 : \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} = e_2$ se comparan por sus vectores normales:

- $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ **no proporcionales**: los planos se **cortan en una recta**.
- $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ **proporcionales**: los planos son **paralelos** o **coincidentes**. Si la proporcionalidad se extiende al término independiente ($e_2 = k e_1$ con la misma constante k), son coincidentes; si no, paralelos distintos.

Dos planos no pueden cortarse en un solo punto: o comparten una recta entera, o un plano entero, o nada.

Recta de intersección de dos planos

Cuando los planos se cortan en una recta, esa recta tiene que escribirse con un punto y un vector director. Hay dos caminos.

MÉTODO · RECTA DE INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS

1. **Resolviendo el sistema** de las dos ecuaciones (dos ecuaciones, tres incógnitas): elige una variable como parámetro t y despeja las otras dos en función de t . La solución $(x(t), y(t), z(t))$ ya son las ecuaciones paramétricas de la recta.
2. **Con el producto vectorial**: un vector director es $\mathbf{d} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, que es perpendicular a las dos normales y por tanto paralelo a los dos planos. Para el punto, busca una solución del sistema dando un valor fijo a una variable (por ejemplo $z = 0$).
3. Comprueba que el punto y el vector cumplen las dos ecuaciones (el vector con la parte homogénea: $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{d} = 0$).

NOTA · PRUEBA 2

La CPG resuelve sistemas lineales, pero una solución con parámetro, como la recta de intersección, hay que escribirla tú: el aparato da un punto concreto o el mensaje de que hay infinitas soluciones. Si te piden la recta, conviene combinar las ecuaciones a mano y usar la calculadora solo para comprobar.

Tres planos y los sistemas lineales

Tres planos $\pi_i : a_i x + b_i y + c_i z = e_i$ forman un sistema de **tres ecuaciones con tres incógnitas**, exactamente el que se estudia en ecuaciones y sistemas lineales del tema 7. Resolverlo por eliminación gaussiana da la posición relativa: un punto común (sistema compatible determinado), una recta o un plano común (compatible indeterminado) o ningún punto común (incompatible).

En términos de la matriz de coeficientes M (las normales por filas) y de la matriz ampliada M^* (con una columna más de términos independientes), los casos son:

Rango de M	Rango de M^*	Sistema	Posición de los tres planos
3	3	compatible determinado	se cortan en un punto
2	2	compatible indeterminado, una variable libre	comparten una recta (tres planos distintos por una recta, o dos coincidentes y el tercero los corta)
2	3	incompatible	sin punto común : forman un «prisma» (se cortan dos a dos en rectas paralelas), o dos son paralelos y el tercero los corta
1	1	compatible indeterminado, dos variables libres	los tres planos coinciden
1	2	incompatible	planos paralelos (o dos coincidentes y uno paralelo a ellos)

Dentro de los casos con rango 2, qué situación concreta es depende de si hay normales proporcionales entre sí. Si ninguna pareja de normales es proporcional y el sistema es incompatible, estás ante el prisma triangular; si hay una pareja proporcional, son dos planos paralelos cortados por un tercero.

NOTA · QUÉ PREGUNTA EL EXAMEN

Lo habitual es un sistema con uno o dos **parámetros**: «halle los valores para los que los tres planos no tienen punto común» o «para los que se cortan en una recta». Se triangula la matriz ampliada, se mira cuándo se anula el coeficiente de la última ecuación y se estudia cada caso por separado. Fuera de esos valores especiales, el sistema es compatible determinado.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Una recta frente a tres planos

Se considera la recta $r : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y los planos

$$\pi_1 : 2x - y + 3z = 0, \pi_2 : 2x - y + 3z = 5, \pi_3 : x + 2y - z = 7.$$

- Estudia la posición de r respecto de π_1 (responde «contenida», «paralela» o «corta»).
- Estudia la posición de r respecto de π_2 (con las mismas tres palabras).
- Halla el punto en el que r corta a π_3 .

Las coordenadas de un punto de la recta son $(1 + 2t, 2 + t, -t)$.

- Al sustituir en π_1 :

$$2(1 + 2t) - (2 + t) + 3(-t) = 0 \implies 2 + 4t - 2 - t - 3t = 0 \implies 0 = 0$$

Todo t sirve: la recta está **contenida** en π_1 .

- En π_2 se obtiene el mismo primer miembro, que vale 0 para todo t , y el segundo es 5: queda $0 = 5$. No hay solución: la recta es **paralela** a π_2 .
- Sustituyendo en π_3 :

$$(1 + 2t) + 2(2 + t) - (-t) = 7 \implies 5 + 5t = 7 \implies t = \frac{2}{5}$$

El punto es $(1 + \frac{4}{5}, 2 + \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}) = (\frac{9}{5}, \frac{12}{5}, -\frac{2}{5})$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Rectas que se cortan o se cruzan según un parámetro

Se consideran las rectas

$$r: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } s_k: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ k \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } k \in \mathbb{R}.$$

- Halla el valor de k para el que r y s_k se cortan.
- Para ese valor de k , halla el punto de corte.
- Para $k = 3$, indica la posición relativa de las rectas (responde «secantes», «paralelas», «coincidentes» o «se cruzan»).

Los directores $(1, 2, -1)$ y $(2, -1, 1)$ no son proporcionales (los cocientes de las primeras componentes y de las segundas son $\frac{1}{2}$ y -2 , distintos), así que las rectas nunca son paralelas ni coincidentes: o se cortan o se cruzan.

- Se iguala con parámetros distintos:

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 2\mu \\ 2\lambda = 3 - \mu \\ 2 - \lambda = k + \mu \end{cases}$$

De las dos primeras: $\lambda = 2\mu - 1$, y sustituyendo en la segunda, $4\mu - 2 = 3 - \mu$, luego $\mu = 1$ y $\lambda = 1$. La tercera exige $2 - 1 = k + 1$, es decir, $k = 0$.

- Con $\lambda = 1$ en r : $(1 + 1, 2, 2 - 1) = (2, 2, 1)$. Comprobación con s_0 y $\mu = 1$: $(2, 3 - 1, 0 + 1) = (2, 2, 1)$.
- Para $k = 3$, los valores $\lambda = 1$ y $\mu = 1$ (que no dependen de k , porque salen de las dos primeras ecuaciones) hacen que la tercera sea $1 = 3 + 1 = 4$, que es falso. No hay punto común y los directores no son proporcionales: las rectas **se cruzan**.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Tres planos con parámetros y su recta común

Se consideran los planos

$$\pi_1: x + y + z = 1, \pi_2: x + 2y + 3z = 2, \pi_3: 2x + 3y + az = b, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}.$$

- Halla una ecuación paramétrica de la recta de intersección de π_1 y π_2 , usando el parámetro t de forma que la coordenada x valga t . Expresa la respuesta como tupla (x, y, z) en función de t .
- Discute, según los valores de a y b , la posición de los tres planos. Responde con las claves «a=4 y b=3», «a=4 y b distinto de 3» y «a distinto de 4», con valores «recta» (los tres comparten una recta), «sin punto común» o «punto» (se cortan en un único punto).
- Para $a = 1$ y $b = 0$, halla el punto común de los tres planos.

- Restando π_1 de π_2 : $y + 2z = 1$, luego $y = 1 - 2z$. En π_1 : $x = 1 - y - z = 1 - (1 - 2z) - z = z$. Los planos no tienen normales proporcionales, $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$, así que se cortan en una recta. Con $x = t$ se tiene $z = t$ e $y = 1 - 2t$:

$$(x, y, z) = (t, 1 - 2t, t)$$

Comprobación con el producto vectorial: $(1, 1, 1) \times (1, 2, 3) = (1, -2, 1)$, que es el vector director obtenido.

- b) Los puntos comunes a los tres planos son los puntos de esa recta que además cumplen π_3 . Se sustituye $(t, 1 - 2t, t)$ en $2x + 3y + az = b$:

$$2t + 3(1 - 2t) + at = b \implies (a - 4)t = b - 3$$

- Si $a \neq 4$: hay un único t , y los tres planos se cortan en **un punto**.
- Si $a = 4$ y $b = 3$: queda $0 = 0$, vale cualquier t . Los tres planos comparten **la recta**.
- Si $a = 4$ y $b \neq 3$: queda $0 = b - 3 \neq 0$, sin solución. **Sin punto común**: como las normales no son proporcionales dos a dos, los planos forman un prisma.

- c) Con $a = 1$ y $b = 0$: $-3t = -3$, luego $t = 1$ y el punto es $(1, 1 - 2, 1) = (1, -1, 1)$. Se comprueba en π_3 : $2 - 3 + 1 = 0$.

En el examen: puntúa tanto el planteamiento (eliminar o usar la recta de intersección) como separar los casos con las condiciones exactas sobre a y b . No olvides dar una descripción geométrica de cada caso (punto, recta, prisma) y comprobar el resultado numérico en la tercera ecuación.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • CONCLUIR QUE SE CORTAN SIN COMPROBAR LA TERCERA ECUACIÓN

Al igualar dos rectas del espacio salen tres ecuaciones y solo dos incógnitas. Resolver dos y dar el resultado como punto de corte es el fallo más frecuente: la tercera ecuación puede no cumplirse, y entonces las rectas se cruzan. Sustituye siempre los valores de λ y μ en la ecuación que has dejado sin usar.

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR RECTA PARALELA AL PLANO CON RECTA CONTENIDA

Si al sustituir la recta en el plano desaparece el parámetro, hay dos posibilidades: $0 = 0$ (contenida) o $0 = q$ con $q \neq 0$ (paralela). No basta con decir «el producto escalar es cero»; hay que decir cuál de las dos es, comprobando si un punto de la recta está en el plano.

ERROR TÍPICO • CREER QUE DOS PLANOS PUEDEN CORTARSE EN UN PUNTO

Dos planos no paralelos siempre se cortan en una **recta**, nunca en un punto. Un punto aparece solo al añadir un tercer plano. Y, al revés, tres planos sin punto común no son necesariamente paralelos: pueden formar un prisma, con cada pareja cortándose en una recta distinta.

Resumen

- Dos rectas: directores proporcionales (paralelas o coincidentes) o no (secantes o que se cruzan). Con directores no proporcionales, se igualan con λ y μ y la tercera ecuación decide entre corte y cruce.
- Recta y plano: se sustituye la recta en el plano. Un valor de t = punto de corte; $0 = q \neq 0$ = paralela; $0 = 0$ = contenida.
- Dos planos: normales no proporcionales = recta de intersección (director $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$); proporcionales = paralelos o coincidentes.
- Tres planos = sistema 3×3 : $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 3$ punto; $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2$ recta; $\text{rg}(M) < \text{rg}(M^*)$ sin punto común (prisma, o paralelos).
- Con parámetros: se escalona, se localizan los valores en los que se anula el último coeficiente y se estudia cada caso, comprobando el resultado en la ecuación sobrante.

APARTADO 7

Volúmenes y áreas de sólidos

IDEA CLAVE

Los problemas de sólidos piden dos cosas: **cuánto cabe** (volumen) y **cuánta superficie tiene** (área), y a menudo también una longitud o un ángulo escondidos dentro del cuerpo. Con unas pocas fórmulas, el teorema de Pitágoras, la trigonometría y los vectores del tema se resuelve casi todo. En el examen se dispone de un cuadernillo de fórmulas, así que lo importante es saber qué mide cada letra y reconocer el triángulo rectángulo que hay que dibujar.

Prismas y cilindros

Un **prisma** tiene dos bases iguales y paralelas, unidas por caras laterales que son paralelogramos. El **cilindro** es lo mismo con una base circular. Cuando las caras laterales son perpendiculares a las bases se habla de prisma o cilindro **recto**, y entonces la altura h es la longitud de una arista lateral.

PROPIEDAD · PRISMA Y CILINDRO

Sea A el área de una base, P su perímetro y h la altura.

- Volumen: $V = Ah$.
- Área total: $S = 2A + Ph$ (las dos bases más la superficie lateral).

Para un cilindro de radio r : $A = \pi r^2$ y $P = 2\pi r$, de modo que

$$V = \pi r^2 h, \quad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

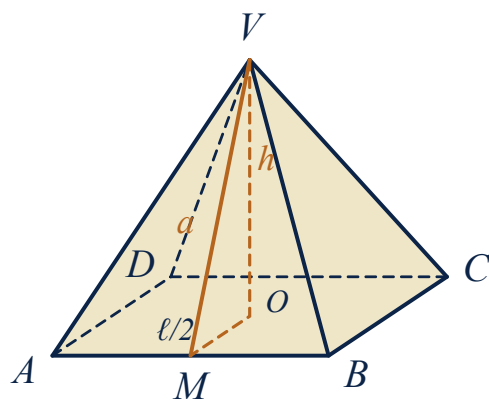
Para un ortoedro de aristas a, b, c : $V = abc$ y $S = 2(ab + bc + ca)$.

La idea del volumen es sencilla: el prisma está formado por capas idénticas a la base apiladas hasta la altura h . El área lateral del cilindro es un rectángulo enrollado, de ancho $2\pi r$ y alto h .

Pirámides y conos

Una **pirámide** tiene una base poligonal y un vértice (la **cúspide**) al que llegan todas las caras laterales, que son triángulos. El **cono** es la versión con base circular. Aquí hay que distinguir tres longitudes que se confunden con facilidad:

- la **altura** h , que es perpendicular a la base y llega a la cúspide;
- la **apotema** de una pirámide regular, que es la altura de una cara lateral (va de la cúspide al punto medio de una arista de la base);
- la **generatriz** ℓ de un cono, que va de la cúspide a un punto del borde de la base.



El triángulo VOM de la figura es rectángulo en O , y de él sale la relación entre altura, apotema y lado: $a^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$ para una base cuadrada de lado ℓ . En un cono, la altura, el radio y la generatriz cumplen $\ell^2 = h^2 + r^2$.

PROPIEDAD · PIRÁMIDE Y CONO

Sea A el área de la base y h la altura.

- Volumen: $V = \frac{1}{3} A h$ (un tercio del prisma con la misma base y altura).
- Pirámide regular: superficie lateral $= \frac{1}{2} P a$, con P el perímetro de la base y a la apotema; área total $S = A + \frac{1}{2} P a$.
- Cono de radio r y generatriz ℓ : $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ y $S = \pi r^2 + \pi r \ell$.

Si se despliega la superficie lateral de un cono sobre un plano, queda un sector circular de radio ℓ y longitud de arco $2\pi r$; su área es $\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot 2\pi r = \pi r \ell$. Es la misma fórmula que la de la pirámide, tomando como «perímetro» la circunferencia de la base.

Esfera

DEFINICIÓN · ESFERA

La **esfera** de centro C y radio r es el conjunto de puntos del espacio cuya distancia a C vale r . Su superficie y el sólido que encierra miden

$$S = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Una **semiesfera** tiene la mitad de cada cosa: $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ y, si se incluye la cara plana, $S = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$.

Sólidos compuestos y semejanza

Un **sólido compuesto** se obtiene pegando o quitando piezas simples: un silo (cilindro con una semiesfera encima), un lápiz (prisma y cono), una pieza con un agujero.

MÉTODO · SÓLIDOS COMPUESTOS

1. Descompón el cuerpo en piezas cuya fórmula conozcas y anota las medidas de cada una (ojo: un radio puede aparecer como diámetro en el enunciado).
2. **Volumen:** suma los volúmenes de las piezas añadidas y resta los de las piezas retiradas.
3. **Área de la superficie exterior:** suma solo las caras que se ven por fuera. La cara circular donde se pega una semiesfera a un cilindro desaparece de las dos piezas; no se cuenta ni en una ni en otra.
4. Escribe las unidades: longitudes en cm o m, áreas en cm^2 o m^2 , volúmenes en cm^3 o m^3 .

Hay además una regla útil cuando dos cuerpos son **semejantes** (uno es una ampliación o reducción del otro). Si las longitudes se multiplican por k , las áreas se multiplican por k^2 y los volúmenes por k^3 . Sirve, por ejemplo, para el cono pequeño que se corta de la punta de un cono grande, o para saber qué pasa con el volumen de un globo cuando se duplica su radio (queda multiplicado por 8).

NOTA · UNIDADES Y CAPACIDAD

Un litro es 1000 cm^3 , es decir, 1 dm^3 . Si el enunciado da una capacidad en litros y las medidas en centímetros, convierte antes de sustituir.

NOTA · PRUEBA 1 Y PRUEBA 2

En la Prueba 1 deja los resultados en forma exacta (con π y con raíces). En la Prueba 2 puedes pedir a la CPG que resuelva ecuaciones como $\frac{4}{3}\pi r^3 = 900$ para despejar el radio; escribe antes la ecuación planteada y redondea al final a tres cifras significativas, salvo que se indique otra precisión.

Longitudes y ángulos dentro de un sólido

Casi todo lo que se pide en el interior de un cuerpo (una arista inclinada, una diagonal, un ángulo) sale de **triángulos rectángulos**. La clave es elegir el triángulo y calcular sus lados con Pitágoras.

Diagonal de un ortoedro. En un ortoedro de aristas a , b , c , la diagonal de la base mide $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esa diagonal y la arista vertical c forman un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la diagonal del sólido:

PROPIEDAD · DIAGONAL DE UN ORTOEDRO

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

En un cubo de arista a se queda en $d = a\sqrt{3}$. Si se colocan los vértices en coordenadas, es el módulo del vector que une dos vértices opuestos, por ejemplo $\overrightarrow{OF} = (a, b, c)$.

Ángulo entre una recta y un plano. El ángulo que forma una arista (o una diagonal) con la base es el que forma con su **proyección ortogonal** sobre la base: el triángulo rectángulo tiene como cateto la altura del extremo y como otro cateto la proyección. En el cubo de arista 2, la diagonal del sólido mide $2\sqrt{3}$, su proyección es la diagonal de la base, $2\sqrt{2}$, y la altura es 2, así que el ángulo con la base cumple $\tan \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, es decir, $\theta \approx 35,3^\circ$.

Altura de una pirámide. En una pirámide regular, el pie de la altura es el centro de la base. Con eso, la altura sale de un triángulo rectángulo: cúspide, centro de la base y vértice (para la arista lateral) o punto medio de una arista (para la apotema).

MÉTODO · LONGITUD O ÁNGULO DENTRO DE UN SÓLIDO

1. Dibuja el sólido y marca el segmento o el ángulo que piden.
2. Localiza un triángulo rectángulo que lo contenga, usando el pie de la altura, la mitad de una diagonal o la proyección de una arista sobre la base.
3. Calcula los lados que faltan con Pitágoras (de dentro hacia fuera: primero lo de la base, luego lo vertical).
4. Aplica $\sin$, $\cos$ o $\tan$ para el ángulo, indicando cuál es el cateto opuesto y cuál el adyacente.

Con ayuda de los vectores

Cuando el sólido viene dado por las **coordenadas de sus vértices**, los vectores sustituyen a los triángulos del dibujo:

- una longitud es el módulo $|\vec{AB}|$;
- el ángulo entre dos aristas sale del producto escalar, $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$;
- el área de una cara triangular ABC es $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$ y el volumen del tetraedro (pirámide de base triangular) es $\frac{1}{6}|\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}|$, como en el producto vectorial;
- la **altura** desde un vértice hasta la cara opuesta es la distancia de un punto a un plano (véase ángulos y distancias); también se despeja de $V = \frac{1}{3}Ah$ si ya se conocen el volumen y el área de esa cara.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Un silo con tapa semiesférica

Un silo tiene forma de cilindro recto de radio 3 m y altura 8 m, coronado por una semiesfera del mismo radio. La base inferior es plana y se cierra con una losa.

- a) Halla el volumen del silo, en forma exacta.
- b) Halla el área de la superficie exterior del silo (incluida la base inferior), en forma exacta.

- a) Se suman los volúmenes de las dos piezas:

$$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi \cdot 9 \cdot 8 + \frac{2}{3}\pi \cdot 27 = 72\pi + 18\pi = 90\pi \text{ m}^3$$

- b) La superficie exterior está formada por la base inferior, la pared lateral del cilindro y la cúpula semiesférica. La cara circular de unión no cuenta.

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2 = 9\pi + 48\pi + 18\pi = 75\pi \text{ m}^2$$

EJEMPLO 2

★★ Medio

Pirámide regular: volumen, área y ángulos

Una pirámide regular tiene como base un cuadrado de lado 8 cm y su altura es 3 cm.

- Halla el volumen.
- Halla el área total.
- Halla el ángulo, en grados, que forma una arista lateral con la base.
- Halla el ángulo, en grados, que forma una cara lateral con la base.

- El área de la base es 64 y

$$V = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 3 = 64 \text{ cm}^3$$

- Se necesita la apotema a . El triángulo que forman la altura, la mitad del lado y la apotema es rectángulo:

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$$

Cada cara lateral tiene área $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$, así que

$$S = 64 + 4 \cdot 20 = 144 \text{ cm}^2$$

- La proyección de una arista lateral sobre la base es la mitad de la diagonal de la base: $\frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$. En el triángulo rectángulo de altura 3:

$$\tan \theta = \frac{3}{4\sqrt{2}} \implies \theta = \arctan \frac{3\sqrt{2}}{8} \approx 27,9^\circ$$

- El ángulo entre una cara y la base se mide en el triángulo de la altura, la mitad del lado y la apotema (los dos segmentos OM y VM son perpendiculares a la arista de la base):

$$\tan \varphi = \frac{3}{4} \implies \varphi = \arctan \frac{3}{4} \approx 36,9^\circ$$

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Una pirámide dada por coordenadas

Una pirámide de base triangular tiene como vértices $A(0, 0, 0)$, $B(4, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$ y $V(0, 0, 6)$ (unidades en metros).

- Calcula su volumen.
- Halla el área de la cara VBC .
- Halla el área total de la pirámide.
- Halla la distancia del vértice A al plano de la cara VBC .

- La base ABC es un triángulo rectángulo con catetos 4 y 3, de área 6, y la arista AV es perpendicular a ella, así que la altura es 6:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 = 12 \text{ m}^3$$

(Con el producto mixto: $\overrightarrow{AB} = (4, 0, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 3, 0)$, $\overrightarrow{AV} = (0, 0, 6)$, determinante 72, y $\frac{1}{6} \cdot 72 = 12$.)

- Se toman $\overrightarrow{VB} = (4, 0, -6)$ y $\overrightarrow{VC} = (0, 3, -6)$:

$$\overrightarrow{VB} \times \overrightarrow{VC} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-6) - (-6) \cdot 3 \\ (-6) \cdot 0 - 4 \cdot (-6) \\ 4 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 12 \end{pmatrix}$$

El módulo es $\sqrt{324 + 576 + 144} = \sqrt{1044} = 6\sqrt{29}$, así que el área es

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{29} = 3\sqrt{29} \text{ m}^2$$

- c) Las otras tres caras son triángulos rectángulos: ABC' con área 6, VAB con $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$ y VAC con $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$. Por tanto

$$S = 6 + 12 + 9 + 3\sqrt{29} = 27 + 3\sqrt{29} \text{ m}^2$$

- d) La distancia de A a la cara VBC es la altura de la pirámide si se toma VBC como base. Como $V = \frac{1}{3} A_{VBC} h$:

$$h = \frac{3V}{A_{VBC}} = \frac{36}{3\sqrt{29}} = \frac{12}{\sqrt{29}} = \frac{12\sqrt{29}}{29} \text{ m}$$

Comprobación con el plano: el vector $(18, 24, 12)$ es proporcional a $(3, 4, 2)$, y el plano que pasa por B es $3x + 4y + 2z = 12$ (también lo cumplen C y V). La distancia desde el origen es $\frac{|-12|}{\sqrt{9+16+4}} = \frac{12}{\sqrt{29}}$, que coincide.

En el examen: al calcular un área con el producto vectorial, escribe los dos vectores que usas y no olvides el factor $\frac{1}{2}$; para la altura, deja claro el método (despejar h de $V = \frac{1}{3} A h$ con la cara elegida como base, o la fórmula punto-plano), porque es lo que se puntúa además del valor.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • CONFUNDIR ALTURA, APOTEMA Y GENERATRIZ

La altura es perpendicular a la base; la apotema (pirámide) y la generatriz (cono) son **inclinadas**. Usar la apotema en el volumen, o la altura en el área lateral, es el fallo más frecuente. Antes de sustituir, comprueba cuál de las tres longitudes te dan y cuál te piden, y ten a mano el triángulo rectángulo que las relaciona.

ERROR TÍPICO • OLVIDAR EL FACTOR 1/3, O CONTAR CARAS QUE YA NO ESTÁN

El volumen de la pirámide y del cono es **un tercio** de $A h$, no $A h$. Y en un sólido compuesto, las caras por las que se pegan las piezas no forman parte de la superficie exterior: sumar el área total de cada pieza sin quitar la cara de unión da un resultado demasiado grande.

ERROR TÍPICO • MEZCLAR RADIO Y DIÁMETRO, O UNIDADES

Si el enunciado da el diámetro, el radio es la mitad antes de elevar al cuadrado. Y los resultados de áreas y volúmenes llevan unidades al cuadrado y al cubo; con una capacidad en litros hay que pasar a cm^3 (o a dm^3) antes de comparar.

Resumen

- Prisma y cilindro: $V = A h$; área total $2A + P h$. Cilindro: $V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.
- Pirámide y cono: $V = \frac{1}{3} A h$. Pirámide regular: $S = A + \frac{1}{2} P a$. Cono: $S = \pi r^2 + \pi r \ell$, con $\ell^2 = h^2 + r^2$.
- Esfera: $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. En el examen se dispone de un cuadernillo de fórmulas; lo que hay que saber es qué mide cada letra.
- Sólidos compuestos: suma y resta de volúmenes; en la superficie, solo las caras exteriores. Cuerpos semejantes con razón k : áreas $\times k^2$, volúmenes $\times k^3$.
- Diagonal de un ortoedro $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; el ángulo de una arista con la base se mide con su proyección sobre la base.
- Con coordenadas: módulo para longitudes, producto escalar para ángulos, producto vectorial para áreas, producto mixto para el volumen y distancia punto-plano para la altura.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 8

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Vectores: componentes, módulo y operaciones

EJERCICIO 1

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2010

Los tres vectores **a**, **b** y **c** vienen dados por

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2y \\ -3x \\ 2x \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4x \\ y \\ 3-x \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ donde } x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Si $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$, halle el valor de x y de y .
b) Halle el valor exacto de $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}|$.

- a) 1. Calculamos $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$ componente a componente e igualamos a $\mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} 2y + 8x - 4 \\ -3x + 2y + 7 \\ 2x + 2(3-x) - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. La tercera componente es $2x + 6 - 2x - 6 = 0$ y se cumple siempre. Quedan dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 8x + 2y = 4 \\ -3x + 2y = -7 \end{cases}$$

3. Restando la segunda a la primera: $11x = 11$, luego $x = 1$. 4. Sustituimos en $8x + 2y = 4$: $8 + 2y = 4$, de donde $y = -2$.

- b) 1. Como $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$, se tiene $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = \mathbf{c}$. 2. Entonces $|\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 49 + 36} = \sqrt{101}$.

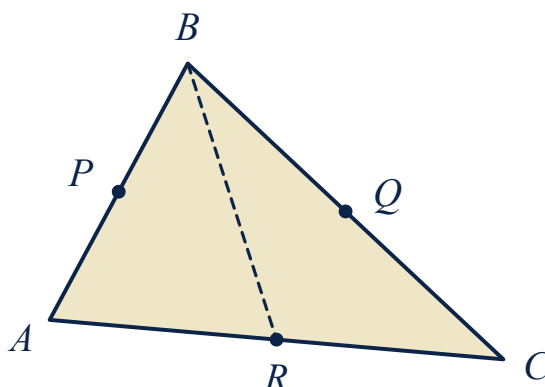
Resultado: a) $x = 1$, $y = -2$; b) $\sqrt{101}$

EJERCICIO 2

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2015

Considere el triángulo ABC. Los puntos P, Q y R son los puntos medios de los segmentos de recta [AB], [BC] y [AC] respectivamente.



Sean $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ y $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$.

- Halle $\overrightarrow{BR}$ en función de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.
 - Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por B y por R en función de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ y de un parámetro λ .
 - Halle una ecuación vectorial de la recta que pasa por A y por Q en función de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ y de un parámetro μ .
 - A partir de lo anterior, muestre que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$, sabiendo que G es el punto en el que se cortan [BR] y [AQ].
 - Muestre que el segmento de recta [CP] también incluye al punto G.
- Las coordenadas de los puntos A, B y C son (1, 3, 1), (3, 7, -5) y (2, 2, 1) respectivamente. Un punto X es tal que [GX] es perpendicular al plano ABC.
- Sabiendo que el tetraedro ABCX tiene un volumen de 12 unidades³, halle las posibles coordenadas de X.

a) 1. R es el punto medio de [AC]: $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$. 2. $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

b) (i) La recta pasa por B con dirección $\overrightarrow{BR}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \lambda\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}\right) = \frac{\lambda}{2}\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{c}.$$

(ii) 1. Q es el punto medio de [BC]: $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, y $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c} - \mathbf{a}$. 2. $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mu\overrightarrow{AQ} = (1 - \mu)\mathbf{a} + \frac{\mu}{2}\mathbf{b} + \frac{\mu}{2}\mathbf{c}$.

(iii) 1. En el punto G las dos expresiones coinciden. Igualamos los coeficientes de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$:

$$\frac{\lambda}{2} = 1 - \mu, \quad 1 - \lambda = \frac{\mu}{2}, \quad \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{2}.$$

2. De la tercera, $\lambda = \mu$. En la primera: $\frac{\lambda}{2} = 1 - \lambda$, luego $\lambda = \frac{2}{3}$. La segunda también se cumple: $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = \frac{2/3}{2}$. 3. Con $\lambda = \frac{2}{3}$: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.

c) 1. P es el punto medio de [AB]: $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, así que $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{c}$. 2. $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) - \mathbf{c} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c})$. 3. Entonces $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c})$, y por tanto $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$. Como $0 < \frac{2}{3} < 1$, el punto G está en el segmento [CP].

- d) 1. $G = \frac{1}{3}(A + B + C) = \frac{1}{3}(6, 12, -3) = (2, 4, -1)$. 2. $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 0)$ y $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - (-6)(-1) \\ (-6) \cdot 1 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$. 3. Esa dirección es $(1, 1, 1)$, normal al plano ABC , y el área del triángulo es $\frac{1}{2}\sqrt{108} = 3\sqrt{3}$. 4. Volumen del tetraedro: $\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot h = 12$, luego $h = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$, y $h = |GX|$. 5. $X = G \pm 4\sqrt{3} \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = (2, 4, -1) \pm (4, 4, 4)$. 6. $X = (6, 8, 3)$ o $X = (-2, 0, -5)$.

Resultado: a) $\overrightarrow{BR} = \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$; b) (i) $\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2}\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{c}$; (ii) $\mathbf{r} = (1 - \mu)\mathbf{a} + \frac{\mu}{2}\mathbf{b} + \frac{\mu}{2}\mathbf{c}$; d) $X(6, 8, 3)$ o $X(-2, 0, -5)$. Los apartados b) (iii) y c) quedan demostrados.

Producto escalar, ángulos y perpendicularidad

EJERCICIO 3 ★ Básico IB · P1 Mayo 2002

Halle el ángulo entre los vectores $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Indique su respuesta en radianes.

- Producto escalar: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2 + 3 + 2 = 7$.
- Módulos: $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$ y $|\mathbf{w}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$.
- $\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{84}} = \frac{\sqrt{21}}{6} \approx 0,764$.
- Con la calculadora en modo radianes: $\theta = \arccos \frac{\sqrt{21}}{6} \approx 0,702$ rad.

Resultado: $\theta \approx 0,702$ rad

EJERCICIO 4 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2019

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ k+2 \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

Sabiendo que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares, halle los valores posibles de k .

- Perpendiculares: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, es decir, $-6 + k(k+2) - k = 0$.
- Simplificamos: $k^2 + k - 6 = 0$.
- Factorizamos: $(k-2)(k+3) = 0$.

Resultado: $k = 2$ y $k = -3$

EJERCICIO 5 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2018

El ángulo agudo que forman los vectores $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ se denomina θ . Halle $\cos \theta$.

- Producto escalar: $15 + 16 - 15 = 16$.
- Módulos: $\sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$ y $\sqrt{25 + 16 + 9} = \sqrt{50}$.
- $\cos \theta = \frac{16}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$. Es positivo, de acuerdo con que el ángulo sea agudo.

Resultado: $\cos \theta = \frac{8}{25}$

EJERCICIO 6

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2010

Demostración

Consideremos los vectores $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ y $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Demuestre que si $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ entonces $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$. Comente lo que nos indica sobre el paralelogramo OACB.

1. Desarrollamos el producto escalar (es distributivo y conmutativo):

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2.$$

2. Si $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, entonces $|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$, luego $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$.

3. Interpretación: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OC}$ es una diagonal del paralelogramo OACB y $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$ es la otra. Su producto escalar es cero, así que las dos diagonales son perpendiculares. Además $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ significa que dos lados contiguos son iguales, es decir, el paralelogramo es un rombo (y las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto).

Queda demostrado.

EJERCICIO 7

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2008

El ángulo entre el vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y el vector $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + m\mathbf{k}$ es de 30° . Halle los valores de m .

1. Usamos $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ con $\theta = 30^\circ$.

2. Calculamos: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 + 4 + 3m = 7 + 3m$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$ y $|\mathbf{b}| = \sqrt{13 + m^2}$.

3. Planteamos

$$\frac{7 + 3m}{\sqrt{14}\sqrt{13 + m^2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Elevamos al cuadrado (después comprobaremos que $7 + 3m > 0$): $4(7 + 3m)^2 = 3 \cdot 14(13 + m^2)$, es decir, $196 + 168m + 36m^2 = 546 + 42m^2$.

5. Ordenando: $6m^2 - 168m + 350 = 0$, o sea $3m^2 - 84m + 175 = 0$.

6. Resolvemos (a mano con la fórmula o con la CPG): $m = \frac{84 \pm \sqrt{4956}}{6} = 14 \pm \frac{\sqrt{1239}}{3}$, es decir, $m \approx 25,7$ y $m \approx 2,27$.

7. Comprobación: para ambos valores $7 + 3m > 0$, así que el ángulo es agudo y las dos soluciones sirven.

Resultado: $m \approx 25,7$ y $m \approx 2,27$

EJERCICIO 8

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2005

Los vectores de posición de los puntos P y Q son $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ respectivamente. El origen está en O.

Halle:

- a) el ángulo $\widehat{POQ}$.
- b) el área del triángulo OPQ.

a) 1. Los vectores son $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. 2. Producto escalar: $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 4 - 6 - 4 = -6$. 3.

Módulos: $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$ y $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24}$. 4. $\cos \widehat{POQ} = \frac{-6}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = -\frac{\sqrt{21}}{14} \approx -0,327$,
y por tanto $\widehat{POQ} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{21}}{14}\right) \approx 109,1^\circ$.

b) 1. El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} (-3)(-4) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

2. $|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = 10\sqrt{3}$, luego el área es $\frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$.

Resultado: a) $\widehat{POQ} \approx 109,1^\circ$; b) $5\sqrt{3} \approx 8,66$

EJERCICIO 9

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

Sea α el ángulo que forman los vectores unitarios $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, donde $0 \leq \alpha \leq \pi$.

- a) Expresa $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ y $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ en función de α .
- b) A partir de lo anterior, determine para qué valores de $\cos \alpha$ se cumple que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

a) 1. Como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son unitarios, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \cos \alpha$. 2. Desarrollamos el cuadrado del módulo con el producto escalar:

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = 2 - 2\cos \alpha, \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 2 + 2\cos \alpha.$$

3. Como $0 \leq \alpha \leq \pi$, ambas cantidades son no negativas, y

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{2 - 2\cos \alpha}, \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{2 + 2\cos \alpha}.$$

b) 1. Elevamos al cuadrado la condición $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 9|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2$. 2. Sustituimos: $2 + 2\cos \alpha = 9(2 - 2\cos \alpha) = 18 - 18\cos \alpha$. 3. Agrupamos: $20\cos \alpha = 16$, luego $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

Resultado: a) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{2 - 2\cos \alpha}$ y $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{2 + 2\cos \alpha}$; b) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

EJERCICIO 10

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2015

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda \\ 10 \end{pmatrix}$.

- Halle el valor de λ para que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean paralelos.
- Calcule el valor de λ para que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean perpendiculares.
- Halle los dos valores de λ si el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es 10° .

a) 1. Paralelos significa $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$. Como $4 = 2k$, $k = 2$ (y la tercera componente lo confirma: $10 = 2 \cdot 5$). 2. Entonces $\lambda = 2 \cdot 3 = 6$.

b) 1. Perpendiculares significa $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$: $8 + 3\lambda + 50 = 0$. 2. Luego $3\lambda = -58$ y $\lambda = -\frac{58}{3}$.

c) 1. Usamos $\cos 10^\circ = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$, con $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 58 + 3\lambda$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{38}$ y $|\mathbf{w}| = \sqrt{116 + \lambda^2}$:

$$\frac{58 + 3\lambda}{\sqrt{38}\sqrt{116 + \lambda^2}} = \cos 10^\circ.$$

2. Esta ecuación se resuelve con la CPG (por ejemplo, buscando las intersecciones de la gráfica del primer miembro con la recta $y = \cos 10^\circ$) o elevando al cuadrado, lo que da una ecuación de segundo grado en λ :

$$(58 + 3\lambda)^2 = 38 \cos^2 10^\circ (116 + \lambda^2).$$

3. Las soluciones son $\lambda \approx 3,73$ y $\lambda \approx 8,76$. 4. Comprobación: en ambos casos $58 + 3\lambda > 0$, así que el ángulo es agudo y las dos soluciones valen.

Resultado: a) $\lambda = 6$; b) $\lambda = -\frac{58}{3}$; c) $\lambda \approx 3,73$ y $\lambda \approx 8,76$

EJERCICIO 11

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2012

a) Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ k \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Si $\mathbf{b}$ es perpendicular a $\mathbf{c} - 2\mathbf{a}$, calcule el valor de k .

b) Halle los valores de x para los cuales los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cos x \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \sin x \\ 1 \end{pmatrix}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ son perpendiculares.

a) 1. $\mathbf{c} - 2\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 2 - 6 \\ 3 - 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 - 2k \end{pmatrix}$. 2. Perpendiculares: $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} - 2\mathbf{a}) = 0$, es decir, $-6 + 0 - (3 - 2k) = 0$. 3. Entonces $-9 + 2k = 0$ y $k = \frac{9}{2}$.

b) 1. El producto escalar debe ser cero: $-1 + 4 \sin x \cos x = 0$. 2. Como $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, queda $-1 + 2 \sin 2x = 0$, luego $\sin 2x = \frac{1}{2}$. 3. Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $0 \leq 2x \leq \pi$, y en ese intervalo $\sin 2x = \frac{1}{2}$ para $2x = \frac{\pi}{6}$ o $2x = \frac{5\pi}{6}$. 4. Por tanto $x = \frac{\pi}{12}$ o $x = \frac{5\pi}{12}$.

Resultado: a) $k = \frac{9}{2}$; b) $x = \frac{\pi}{12}$ y $x = \frac{5\pi}{12}$

EJERCICIO 12

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

Los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están definidos por $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 4t \end{pmatrix}$, donde $t \in \mathbb{R}$.

- a) Halle $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ en función de t y luego simplifique dicha expresión.
b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle todos los valores de t para los cuales el ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es obtuso.

a) 1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-t) + t \cdot 4t = -t + 4t^2$.

- b) 1. El ángulo es obtuso si $\cos \theta < 0$, es decir, si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ (con ambos vectores no nulos). 2. Resolvemos $4t^2 - t < 0$, es decir, $t(4t - 1) < 0$. La parábola $y = 4t^2 - t$ corta al eje en $t = 0$ y $t = \frac{1}{4}$ y es negativa entre las dos raíces. 3. Luego $0 < t < \frac{1}{4}$. Para esos valores $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (y $\mathbf{a}$ nunca es nulo), así que son válidos.

Resultado: a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4t^2 - t$; b) $0 < t < \frac{1}{4}$

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1998

Dados los vectores $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + p\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3(p+4)\mathbf{j} + (2p-5)\mathbf{k}$, calcule los valores de p para que $\mathbf{a}$ sea perpendicular a $\mathbf{b}$.

1. Perpendiculares: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$:

$$-2 \cdot 1 + p \cdot 3(p+4) + (-1)(2p-5) = 0.$$

2. Desarrollamos: $-2 + 3p^2 + 12p - 2p + 5 = 0$, es decir, $3p^2 + 10p + 3 = 0$.

3. Resolvemos: $p = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6}$, luego $p = -\frac{1}{3}$ o $p = -3$.

Resultado: $p = -\frac{1}{3}$ y $p = -3$

EJERCICIO 14

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2005

Los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ están definidos por $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 3 \end{pmatrix}$.

Sabiendo que $\mathbf{c}$ es perpendicular a $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, encuentre el valor de y .

1. $2\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 4-5 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2. Perpendiculares: $\mathbf{c} \cdot (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$, es decir, $10 - y - 12 = 0$.

3. Luego $y = -2$.

Resultado: $y = -2$

EJERCICIO 15

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2007

Consideremos los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mu \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbf{s} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + \mathbf{d}$, donde $\mathbf{s}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$.

Halle una expresión para λ en función de μ .

1. Calculamos el escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 = 2 + 6 - 5 = 3$.

2. Entonces

$$\mathbf{s} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 + \mu \\ 1 \\ 3\lambda + 1 \end{pmatrix}.$$

3. Como $\mathbf{s} \perp \mathbf{a}$, su producto escalar es cero: $2(9 + \mu) + 3 \cdot 1 - (3\lambda + 1) = 0$.

4. Simplificamos: $18 + 2\mu + 3 - 3\lambda - 1 = 0$, es decir, $20 + 2\mu - 3\lambda = 0$.

5. Despejamos λ .

Resultado: $\lambda = \frac{20 + 2\mu}{3}$

EJERCICIO 16

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2010

Considere los vectores $\mathbf{a} = \sin(2\alpha)\mathbf{i} - \cos(2\alpha)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \cos \alpha \mathbf{i} - \sin \alpha \mathbf{j} - \mathbf{k}$, donde $0 < \alpha < 2\pi$.

Sea θ el ángulo que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

a) Exprese $\cos \theta$ en función de α .

b) Halle el ángulo **agudo** α para el cual los dos vectores son perpendiculares.

c) Para $\alpha = \frac{7\pi}{6}$, determine el producto vectorial de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

a) 1. Producto escalar:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha - 1 = \sin(2\alpha + \alpha) - 1 = \sin 3\alpha - 1.$$

2. Módulos: $|\mathbf{a}|^2 = \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + 1 = 2$ y $|\mathbf{b}|^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 1 = 2$. Entonces $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = 2$. 3. Por tanto $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\sin 3\alpha - 1}{2}$.

b) 1. Perpendiculares equivale a $\cos \theta = 0$, es decir, $\sin 3\alpha = 1$. 2. Si α es agudo, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces $0 < 3\alpha < \frac{3\pi}{2}$, y en ese intervalo $\sin 3\alpha = 1$ solo para $3\alpha = \frac{\pi}{2}$. 3. Luego $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

c) 1. Para $\alpha = \frac{7\pi}{6}$: $2\alpha = \frac{7\pi}{3}$, con $\sin \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$; además $\cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$. 2.

Entonces $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{a}$. 3. (También: $\sin \frac{7\pi}{2} = -1$, así que $\cos \theta = -1$ y los vectores son opuestos.) Dos vectores paralelos tienen producto vectorial nulo:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (-\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resultado: a) $\cos \theta = \frac{\sin 3\alpha - 1}{2}$; b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; c) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Producto vectorial, áreas y volúmenes

EJERCICIO 17 ★ Básico IB · P1 Mayo 1999

- a) Calcule un vector perpendicular a los dos vectores $\overrightarrow{OP} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{OQ} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
- b) Si $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ son vectores de posición para el punto P y Q, utilice su respuesta de la parte (a) o de otra manera, para encontrar el área del triángulo OPQ.

- a) 1. El producto vectorial es perpendicular a los dos vectores:

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)(-1) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - (-3)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- b) 1. El área del triángulo es $\frac{1}{2}|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}|$. 2. $|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$, así que el área es $\frac{\sqrt{35}}{2}$.

Resultado: a) $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ (o cualquier múltiplo suyo); b) área = $\frac{\sqrt{35}}{2}$

EJERCICIO 18 ★ Básico IB · P1 Noviembre 2003

Considere los puntos A(1, 2, -4), B(1, 5, 0) y C(6, 5, -12). Halle el área de $\triangle ABC$.

1. Calculamos dos lados desde A: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

2. Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3(-8) - 4 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 - 0 \cdot (-8) \\ 0 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 20 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

3. Su módulo es $\sqrt{1296 + 400 + 225} = \sqrt{1921}$.

4. El área del triángulo es la mitad: $\frac{\sqrt{1921}}{2} \approx 21,9$.

Resultado: área $\triangle ABC = \frac{\sqrt{1921}}{2} \approx 21,9$

EJERCICIO 19 ★ Básico IB · P1 Mayo 2003

Dados $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, halle $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

1. Producto vectorial:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \\ (-1)(-3) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

2. Producto escalar con $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 12 - 3 + 32 = 41$.

Resultado: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 41$

EJERCICIO 20

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2004

Sabiendo que $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, calcule $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

1. Diferencia: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Producto vectorial:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} (-3)(-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3. Producto escalar: $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 = 30 - 7 = 23$.

Resultado: $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 23$

EJERCICIO 21

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2013

Consideremos los puntos A(1, 2, 3), B(1, 0, 5) y C(2, -1, 4).

a) Calcule $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Usando lo anterior, halle el área del triángulo ABC.

a) 1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2. Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) 1. Área = $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 4 + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{24} = \sqrt{6}$.

Resultado: a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; b) área = $\sqrt{6}$

EJERCICIO 22

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2019

Tres puntos del espacio tridimensional tienen por coordenadas A(0, 0, 2), B(0, 2, 0) y C(3, 1, 0).

a) Halle el vector (i) $\overrightarrow{AB}$; (ii) $\overrightarrow{AC}$.

b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el área del triángulo ABC.

a) 1. $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. 2. $\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) 1. Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 - 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

2. Su módulo: $\sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$. 3. Área = $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{19} = \sqrt{19}$.

Resultado: a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) área = $\sqrt{19}$

EJERCICIO 23

★ Básico

IB · P1 Mayo 1996

Calcule el área del paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

1. El área del paralelogramo es $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

2. Producto vectorial:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} (-1)(-4) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Módulo: $\sqrt{4 + 256 + 25} = \sqrt{285} \approx 16,9$.

Resultado: área = $\sqrt{285} \approx 16,9$

EJERCICIO 24

★ Básico

IB · P2 TZ1 Mayo 2016

Los puntos A y B tienen vectores de posición $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule $\vec{OA} \times \vec{OB}$.

b) Usando lo anterior encuentre el área del triángulo OAB.

a) 1. Producto vectorial:

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - (-2) \cdot 0 \\ (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) 1. Área = $\frac{1}{2}|\vec{OA} \times \vec{OB}| = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 16 + 4} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

Resultado: a) $\vec{OA} \times \vec{OB} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$; b) área = 3

EJERCICIO 25

★ Básico

IB · P1 Mayo 1997

Las coordenadas de los puntos P y Q son $(-1, 5, 7)$ y $(1, 2, 3)$ respectivamente, y O es el origen.

a) Calcule los vectores $\vec{OP}$ y $\vec{OQ}$.

b) Calcule el área del paralelogramo que tiene lados adyacentes $\vec{OP}$ y $\vec{OQ}$.

a) 1. Como O es el origen, los vectores coinciden con las coordenadas: $\vec{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) 1. El área del paralelogramo es $|\vec{OP} \times \vec{OQ}|$. 2. Producto vectorial:

$$\vec{OP} \times \vec{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot 2 - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

3. Módulo: $\sqrt{1 + 100 + 49} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$.

Resultado: a) $\vec{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; b) área = $5\sqrt{6}$

EJERCICIO 26

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

El paralelogramo ABCD tiene vértices A(3, 2, 0), B(7, -1, -1), C(10, -3, 0) y D(6, 0, 1).

Calcule el área del paralelogramo.

1. Dos lados contiguos desde A: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 1 - (-1)(-2) \\ (-1) \cdot 3 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-2) - (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. El área es el módulo: $\sqrt{25 + 49 + 1} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

Resultado: área = $5\sqrt{3}$

EJERCICIO 27

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2008

Demostración

Dados dos vectores cualesquiera $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, distintos de $\mathbf{0}$, compruebe que:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

1. Sea θ el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Sabemos que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$ y que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$.

2. Elevamos al cuadrado el producto vectorial y usamos $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta.$$

3. El último sumando es $(|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta)^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$. Por tanto

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

4. (Otra vía: con $\mathbf{a} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{b} = (v_1, v_2, v_3)$, desarrollar los dos miembros en componentes da la misma expresión, aunque es más laborioso.)

Queda demostrado.

EJERCICIO 28

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2004

Suponiendo que $\mathbf{a} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{k})$

a) halle $\mathbf{a}$.

b) halle la proyección vectorial de $\mathbf{a}$ sobre el vector $-2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

a) 1. Calculamos el producto vectorial:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

b) 1. Sea $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La proyección vectorial de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{d}$ es $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2} \mathbf{d}$. 2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = 0 + 10 + 4 = 14$ y $|\mathbf{d}|^2 = 0 + 4 + 1 = 5$. 3. Por tanto la proyección es $\frac{14}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{28}{5} \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$.

Resultado: a) $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; b) $-\frac{28}{5}\mathbf{j} + \frac{14}{5}\mathbf{k}$

EJERCICIO 29

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2017

ABCD es un paralelogramo, donde $\overrightarrow{AB} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{AD} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

- a) Calcule el área del paralelogramo ABCD.
b) Usando un producto escalar adecuado de dos vectores, determine si $\widehat{ABC}$ es ángulo agudo u obtuso.

- a) 1. El área es $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$. 2. Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 - (-1)(-2) \\ (-1)(-1) - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

3. Módulo: $\sqrt{1 + 100 + 49} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$.

- b) 1. El ángulo $\widehat{ABC}$ es el que forman $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$. En un paralelogramo $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, y $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. 2. Entonces $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 3. Producto escalar: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 + 2 + 6 = 12 > 0$. 4. Como el producto escalar es positivo, $\cos \widehat{ABC} > 0$ y el ángulo es agudo.

Resultado: a) área = $5\sqrt{6}$; b) $\widehat{ABC}$ es agudo

EJERCICIO 30

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2017

Demostración

Sabiendo que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, demuestre que $\mathbf{a} + \mathbf{c} = s\mathbf{b}$, donde s es un escalar.

1. Pasamos todo a un miembro: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$.
2. Como $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{b}$, queda $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
3. El producto vectorial es distributivo: $(\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
4. Un producto vectorial es nulo cuando alguno de los dos vectores es nulo o cuando son paralelos. Aquí $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, porque $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Si $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, basta tomar $s = 0$.
5. En otro caso, $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ y $\mathbf{b}$ son no nulos y paralelos, es decir, existe un escalar s con $\mathbf{a} + \mathbf{c} = s\mathbf{b}$.

Queda demostrado.

EJERCICIO 31

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1998

Sean los vectores $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}$.

Calcule el parámetro t para que los tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean coplanarios.

1. Tres vectores son coplanarios si su producto mixto es cero, es decir, si el determinante de sus componentes es 0.
2. Calculamos el determinante (desarrollando por la primera fila):

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2-t & t+1 \end{vmatrix} = 2[2(t+1) + 3(2-t)] - 2[(t+1) + 3] + 3[(2-t) - 2].$$

3. Simplificamos: $2(8 - t) - 2(t + 4) + 3(-t) = 16 - 2t - 2t - 8 - 3t = 8 - 7t$.

4. Igualamos a cero: $8 - 7t = 0$, luego $t = \frac{8}{7}$.

Resultado: $t = \frac{8}{7}$

EJERCICIO 32

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Mayo 2006

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ p \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- a) Halle $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
b) Halle el valor de p , sabiendo que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es paralelo a $\mathbf{c}$.

- a) 1. Aplicamos la fórmula del producto vectorial:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 - 0 \cdot p \\ 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot p - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 2p + 1 \end{pmatrix}.$$

- b) 1. Dos vectores son paralelos si uno es múltiplo del otro: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = k\mathbf{c}$. 2. Comparando la primera componente, $6 = 2k$, luego $k = 3$. La segunda da $-12 = -4k$, que también se cumple con $k = 3$. 3. La tercera componente debe cumplir $2p + 1 = 3k = 9$, de donde $p = 4$.

Resultado: a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + (2p + 1)\mathbf{k}$; b) $p = 4$

EJERCICIO 33

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2007

Sabiendo que $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ son los vectores de posición de los puntos A , B y C respectivamente, calcule el área del triángulo ABC .

1. Los puntos son $A(2, -1, -1)$, $B(2, 1, -2)$ y $C(-1, 1, -1)$.
2. Calculamos dos lados desde A :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Su producto vectorial es

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 \\ (-1)(-3) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

4. Su módulo es $\sqrt{4 + 9 + 36} = 7$.

5. El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo: $\frac{1}{2} \cdot 7$.

Resultado: Área = $\frac{7}{2}$

EJERCICIO 34

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2009

Un triángulo tiene vértices $A(1, -1, 1)$, $B(1, 1, 0)$ y $C(-1, 1, -1)$. Demuestre que el área del triángulo es $\sqrt{6}$.

1. Calculamos dos lados desde A :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2 \\ (-1)(-2) - 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Su módulo es $\sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

4. El área del triángulo es $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$.

Resultado: Área = $\sqrt{6}$. Queda demostrado.

EJERCICIO 35

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2015

Considere los vectores dados por $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, donde a y b son constantes.

Se sabe que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, donde c es una constante.

- Halle el valor de cada una de las constantes a , b y c .
- A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

1. Calculamos el producto vectorial con $\mathbf{v} = (a, b, 0)$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - (-2) \cdot b \\ (-2) \cdot a - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot b - 2 \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ -2a \\ b - 2a \end{pmatrix}.$$

2. Igualamos a $(4, b, c)$: $2b = 4$, luego $b = 2$. 3. $-2a = b = 2$, luego $a = -1$. 4. $c = b - 2a = 2 + 2 = 4$.

1. El producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (4, 2, 4)$ es normal al plano, y también lo es $(2, 1, 2)$. 2. El plano pasa por el origen, así que $d = 0$: $2x + y + 2z = 0$.

Resultado: a) $a = -1$, $b = 2$, $c = 4$; b) $2x + y + 2z = 0$

EJERCICIO 36

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2021

Demostración

Dados dos vectores no nulos, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, muestre que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

- Sea θ el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. El módulo del producto vectorial es $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$. Elevando al cuadrado:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta.$$

- Usamos la identidad $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta.$$

- Por la definición del producto escalar, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$, así que $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta$.

- Sustituyendo en el paso 2:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

Queda demostrado.

EJERCICIO 37

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2011

Demostración

- a) Compruebe que, para dos vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$,
- (i) si $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, entonces $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares.
- (ii) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$
- b) Los puntos A , B y C tienen vectores de posición $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.
- (i) Compruebe que el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}|$
- (ii) A partir de lo anterior, compruebe que la distancia más corta entre B y AC es

$$\frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{c} - \mathbf{a}|}$$

- a) i) 1. Elevamos al cuadrado la igualdad y usamos $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$:
- $$(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$
2. Desarrollando: $|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$. 3. Simplificando queda $-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, es decir, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Como ambos son no nulos, son perpendiculares.
- (ii) 1. Si θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, sabemos que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$. 2. Entonces
- $$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$
- b) i) 1. El área del triángulo es $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$, con $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$. 2. Desarrollamos usando que el producto vectorial es distributivo:
- $$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{a}.$$
3. Como $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, $-\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y $-\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, resulta
- $$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$
4. Por tanto el área es $\frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}|$.
- (ii) 1. Tomamos $[AC]$ como base del triángulo. Su longitud es $|\overrightarrow{AC}| = |\mathbf{c} - \mathbf{a}|$ y la altura es la distancia d de B a la recta AC . 2. El área es también $\frac{1}{2} |\mathbf{c} - \mathbf{a}| d$. 3. Igualando con el resultado de b) i): $\frac{1}{2} |\mathbf{c} - \mathbf{a}| d = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}|$. 4. Despejando d se obtiene la expresión pedida.

Queda demostrado.

EJERCICIO 38

★★★ Difícil

IB · P2 Noviembre 1999

Considere los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(0, -1, 2)$, $C(1, 0, 2)$ y $D(2, -1, -6)$.

- Calcule los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$.
- Calcule $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$.
- Usando lo anterior o de cualquier otra manera, calcule el área del triángulo ABC .
- Calcule la ecuación del plano P que contiene a los puntos A , B y C .
- Encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto D y es perpendicular al plano P .
- Calcule la distancia desde el punto D hasta el plano P .
- Calcule un vector unitario perpendicular al plano P .
- El punto E es una reflexión del punto D en el plano P . Calcule las coordenadas de E .

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b)

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 - (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

c) 1. El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial: $\text{Área} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 1 + 4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) 1. El vector $(-1, 1, 2)$ es normal al plano, así que el plano es $-x + y + 2z = d$. 2. Con $A(1, 2, 1)$: $d = -1 + 2 + 2 = 3$. Comprobamos con B : $0 - 1 + 4 = 3$ y con C : $-1 + 0 + 4 = 3$. 3. El plano P es $-x + y + 2z = 3$, o bien $x - y - 2z + 3 = 0$.

e) 1. La recta tiene como vector director el normal $(-1, 1, 2)$ y pasa por $D(2, -1, -6)$:

$$x = 2 - t, \quad y = -1 + t, \quad z = -6 + 2t.$$

f) 1. Con la fórmula de la distancia de un punto a un plano, usando $-x + y + 2z - 3 = 0$:

$$d(D, P) = \frac{|-2 + (-1) + 2(-6) - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{18}{\sqrt{6}} = 3\sqrt{6}.$$

g) 1. Dividimos el normal entre su módulo $\sqrt{6}$: $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

h) 1. Hallamos el pie de la perpendicular, es decir, el punto de la recta de (e) que está en P : $-(2 - t) + (-1 + t) + 2(-6 + 2t) = 3$, es decir, $6t - 15 = 3$, luego $t = 3$. El pie es $(-1, 2, 0)$. 2. El pie es el punto medio entre D y E , así que $E = 2(-1, 2, 0) - (2, -1, -6) = (-4, 5, 6)$.

Resultado: a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; b) $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; d) $-x + y + 2z - 3 = 0$; e) $x = 2 - t$, $y = -1 + t$, $z = -6 + 2t$; f) $3\sqrt{6}$; g) $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; h) $E(-4, 5, 6)$

EJERCICIO 39

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2010

- a) Considere los vectores $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
- (i) Halle el coseno del ángulo que forman los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.
- (ii) Halle $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
- (iii) A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano π que contiene a los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ y pasa por el punto $(1, 1, -1)$.
- (iv) El plano π corta al plano xy en la recta L . Halle el área de la región triangular finita delimitada por la recta L , el eje x y el eje y .
- b) Dados los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$,
- (i) Compruebe que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{p}|^2$.
- (ii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, compruebe $|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}|^2 + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{q}|^2$.
- (iii) Deduzca que $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| \leq |\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$.

- a) i) 1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = -1$. 2. $|\mathbf{a}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$ y $|\mathbf{b}| = \sqrt{9 + 16} = 5$. 3. $\cos \theta = \frac{-1}{7 \cdot 5} = -\frac{1}{35}$.

a) ii)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 0 - 6 \cdot 4 \\ 6 \cdot (-3) - 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -24 \\ -18 \end{pmatrix} = 18\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 18\mathbf{k}.$$

- a) iii) 1. El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es normal al plano, y también lo es $(3, -4, -3)$ (dividido entre 6). 2. El plano es $3x - 4y - 3z = d$. Con el punto $(1, 1, -1)$: $d = 3 - 4 + 3 = 2$.

- a) iv) 1. La recta L es la intersección con $z = 0$: $3x - 4y = 2$. 2. Corta al eje x ($y = 0$) en $x = \frac{2}{3}$ y al eje y ($x = 0$) en $y = -\frac{1}{2}$. 3. El triángulo tiene catetos $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$, luego el área es $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

- b) i) 1. Por definición, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = |\mathbf{p}||\mathbf{p}| \cos 0^\circ = |\mathbf{p}|^2$.

- b) ii) 1. Usamos la propiedad distributiva y la conmutatividad del producto escalar:

$$|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = |\mathbf{p}|^2 + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{q}|^2.$$

- b) iii) 1. Como $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = |\mathbf{p}||\mathbf{q}| \cos \theta \leq |\mathbf{p}||\mathbf{q}|$ (porque $\cos \theta \leq 1$), de b) ii) resulta

$$|\mathbf{p} + \mathbf{q}|^2 \leq |\mathbf{p}|^2 + 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}| + |\mathbf{q}|^2 = (|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|)^2.$$

2. Ambos miembros son no negativos, así que podemos tomar la raíz cuadrada: $|\mathbf{p} + \mathbf{q}| \leq |\mathbf{p}| + |\mathbf{q}|$.

Resultado: a) i) $-\frac{1}{35}$; ii) $18\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$; iii) $3x - 4y - 3z - 2 = 0$; iv) $\frac{1}{6}$. Queda demostrado el apartado b).

EJERCICIO 40

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2011

Los puntos $P(-1, 2, -3)$, $Q(-2, 1, 0)$, $R(0, 5, 1)$ y S forman un paralelogramo, siendo S diagonalmente opuesto a Q .

- Halle las coordenadas de S .
- El producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ m \end{pmatrix}$. Halle el valor de m .
- A partir de lo anterior, calcule el área del paralelogramo $PQRS$.
- Halle la ecuación cartesiana del plano π_1 , que contiene al paralelogramo $PQRS$.
- Escriba la ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen $(0, 0, 0)$ y que es perpendicular al plano π_1 .
- A partir de lo anterior, halle el punto del plano que está más cerca del origen.
- Un segundo plano, π_2 , tiene por ecuación $x - 2y + z = 3$. Calcule el ángulo entre los dos planos.

1. En un paralelogramo $PQRS$ las diagonales son PR y QS y se cortan en su punto medio común, así que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ y $S = P + R - Q$. 2. $S = (-1 + 0 + 2, 2 + 5 - 1, -3 + 1 - 0) = (1, 6, -2)$.
1. $\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, 3)$ y $\overrightarrow{PS} = (2, 4, 1)$. 2. La tercera componente del producto vectorial es $(-1) \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = -2$. Se comprueba el resto: $(-1) \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -13$ y $3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 7$. Por tanto $m = -2$.
1. El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial: $\sqrt{(-13)^2 + 7^2 + (-2)^2} = \sqrt{169 + 49 + 4} = \sqrt{222}$.
1. El producto vectorial $(-13, 7, -2)$ es normal al plano: $13x - 7y + 2z = d$. 2. Con $P(-1, 2, -3)$: $d = -13 - 14 - 6 = -33$.

1. La recta tiene como vector director el normal del plano:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. El punto del plano más cercano al origen es el pie de la perpendicular de e): el punto de la recta que está en π_1 . 2. Sustituimos $(13t, -7t, 2t)$ en $13x - 7y + 2z = -33$: $169t + 49t + 4t = -33$, luego $222t = -33$ y $t = -\frac{11}{74}$. 3. El punto es $\left(-\frac{143}{74}, \frac{77}{74}, -\frac{22}{74}\right)$, es decir, $\left(-\frac{143}{74}, \frac{77}{74}, -\frac{11}{37}\right)$.
1. El ángulo entre dos planos es el ángulo agudo entre sus normales, $\mathbf{n}_1 = (13, -7, 2)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 1)$. 2. $\cos \theta = \frac{|13 + 14 + 2|}{\sqrt{222}\sqrt{6}} = \frac{29}{\sqrt{1332}}$. 3. $\theta = \arccos \frac{29}{\sqrt{1332}} \approx 37,4^\circ$.

Resultado: a) $S(1, 6, -2)$; b) $m = -2$; c) $\sqrt{222}$; d) $13x - 7y + 2z + 33 = 0$; e) $\mathbf{r} = t \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$; f) $\left(-\frac{143}{74}, \frac{77}{74}, -\frac{11}{37}\right)$; g) $37,4^\circ$

EJERCICIO 41

★★★ Dificil

IB · P1 TZ2 Mayo 2013

Los vértices de un triángulo ABC tienen las siguientes coordenadas: A(-1, 2, 3), B(4, 1, 1) y C(3, -2, 2).

- a) (i) Halle la longitud de los lados del triángulo.
(ii) Halle $\cos \widehat{BAC}$.
b) (i) Compruebe que $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$.
(ii) A partir de lo anterior, compruebe que el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}\sqrt{314}$.
c) Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene al triángulo ABC.
d) Halle una ecuación vectorial de (AB).

El punto D pertenece a (AB), de modo tal que $\overrightarrow{OD}$ es perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, donde O es el origen.

- e) (i) Halle las coordenadas de D.
(ii) Compruebe que D no se encuentra entre A y B.

a) (i) 1. $\overrightarrow{AB} = (5, -1, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (4, -4, -1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1, -3, 1)$. 2. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 16 + 1} = \sqrt{33}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$.

(ii) 1. $\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}$ con $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20 + 4 + 2 = 26$. 2. $\cos \widehat{BAC} = \frac{26}{\sqrt{30}\sqrt{33}} = \frac{26}{\sqrt{990}} = \frac{26}{3\sqrt{110}}$.

b) (i) Con $\overrightarrow{CA} = A - C = (-4, 4, 1)$:

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3) \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-4) - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 4 - (-3) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ -16 \end{pmatrix} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 16\mathbf{k}.$$

(ii) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial: $\frac{1}{2}\sqrt{49 + 9 + 256} = \frac{1}{2}\sqrt{314}$.

c) 1. El vector $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = (-7, -3, -16)$ es normal al plano; usamos $\mathbf{n} = (7, 3, 16)$. 2. Plano: $7x + 3y + 16z = d$. Con A(-1, 2, 3): $d = -7 + 6 + 48 = 47$. 3. $7x + 3y + 16z - 47 = 0$ (equivalente a $-7x - 3y - 16z + 47 = 0$).

d) La recta pasa por A con dirección $\overrightarrow{AB} = (5, -1, -2)$:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

e) (i) 1. $D = (-1 + 5t, 2 - t, 3 - 2t)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1, -3, 1)$. 2. $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$: $-(-1 + 5t) - 3(2 - t) + (3 - 2t) = 0 \Rightarrow 1 - 5t - 6 + 3t + 3 - 2t = 0 \Rightarrow -2 - 4t = 0$. 3. $t = -\frac{1}{2}$ y $D = \left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 4\right)$.

(ii) 1. A corresponde a $t = 0$ y B a $t = 1$; los puntos situados entre A y B son los de $0 \leq t \leq 1$. 2. D tiene $t = -\frac{1}{2} < 0$, así que no está entre A y B. Además $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ tienen el mismo sentido.

Resultado: a) (i) $|AB| = \sqrt{30}$, $|AC| = \sqrt{33}$, $|BC| = \sqrt{11}$; (ii) $\cos \widehat{BAC} = \frac{26}{3\sqrt{110}}$; c) $7x + 3y + 16z - 47 = 0$; d) $\mathbf{r} =$

$(-1, 2, 3) + t(5, -1, -2)$; e) (i) $D\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 4\right)$; (ii) $t = -\frac{1}{2} < 0$. Los apartados b) y e) (ii) quedan comprobados.

EJERCICIO 42

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2018

Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ los vectores de posición con respecto al origen de coordenadas O de los puntos A, B, C y D, respectivamente. Se sabe que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

- a) i) Explique por qué ABCD es un paralelogramo.
(ii) Utilizando el álgebra de vectores, muestre que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Los vectores de posición $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ vienen dados por

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + p\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = q\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{d} = -\mathbf{i} + r\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

donde p , q y r son constantes.

- b) Muestre que $p = 1$, $q = 1$ y $r = 4$.
c) Halle el área del paralelogramo ABCD.

El punto en el que se cortan las diagonales de ABCD se denomina M.

- d) Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por M y es normal al plano π que contiene a ABCD.
e) Halle la ecuación cartesiana de π .

El plano π corta a los ejes x , y y z en X, Y y Z, respectivamente.

- f) i) Halle las coordenadas de X, Y y Z.
(ii) Halle YZ.

- a) i) 1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ significa que los segmentos $[AB]$ y $[DC]$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Dos lados opuestos paralelos e iguales bastan para que el cuadrilátero sea un paralelogramo.

- (ii) 1. Recorremos el camino de A a D pasando por B y C: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. 2. Como $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB}$, queda $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

- b) 1. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ p+3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{DC} = \mathbf{c} - \mathbf{d} = \begin{pmatrix} q+1 \\ 1-r \\ 4 \end{pmatrix}$. 2. Igualamos componente a componente: $q+1=2$, $1-r=-3$ y $p+3=4$. 3. De ahí $q=1$, $r=4$ y $p=1$.

- c) 1. El área del paralelogramo es $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$, con $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} (-3)(1) - (4)(2) \\ (4)(-2) - (2)(1) \\ (2)(2) - (-3)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{Área} = \sqrt{121 + 100 + 4} = \sqrt{225} = 15.$$

- d) 1. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio, así que M es el punto medio de $[AC]$: $M = \frac{A+C}{2} = \frac{(1, 2, -3) + (1, 1, 2)}{2} = \left(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. 2. Un vector normal a π es $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-11, -10, -2)$, que es el vector director de la recta pedida. 3.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- e) 1. Con normal $(11, 10, 2)$ (opuesto al anterior) el plano es $11x + 10y + 2z = d$. 2. Por $A(1, 2, -3)$: $d = 11 + 20 - 6 = 25$. 3. $\pi: 11x + 10y + 2z = 25$, es decir, $-11x - 10y - 2z + 25 = 0$.

f) i) 1. Eje x ($y = z = 0$): $11x = 25$, $X\left(\frac{25}{11}, 0, 0\right)$. 2. Eje y ($x = z = 0$): $10y = 25$, $Y\left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$. 3. Eje z ($x = y = 0$): $2z = 25$, $Z\left(0, 0, \frac{25}{2}\right)$.

(ii) 1. $\overrightarrow{YZ} = Z - Y = \left(0, -\frac{5}{2}, \frac{25}{2}\right)$. 2. $YZ = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{625}{4}} = \sqrt{\frac{650}{4}} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$.

Resultado: b) $p = 1$, $q = 1$, $r = 4$; c) 15; d) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$; e) $11x + 10y + 2z = 25$; f) i) $X\left(\frac{25}{11}, 0, 0\right)$, $Y\left(0, \frac{5}{2}, 0\right)$, $Z\left(0, 0, \frac{25}{2}\right)$; ii) $YZ = \frac{5\sqrt{26}}{2}$. Los apartados a) son de explicación y demostración.

EJERCICIO 43

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Mayo 2006

Sea A el punto $(2, -1, 0)$, B el punto $(3, 0, 1)$ y C el punto $(1, m, 2)$, donde $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$.

a) i) Halle el producto $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

(ii) A partir de lo anterior, dado que $\widehat{ABC} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$, compruebe que $m = -1$.

b) Determine la ecuación cartesiana del plano ABC .

c) Halle el área del triángulo ABC .

d) i) La recta L es perpendicular al plano ABC y pasa por A . Halle una ecuación vectorial de L .

(ii) El punto $D(6, -7, 2)$ pertenece a L . Halle el volumen de la pirámide $ABCD$.

a) i) 1. $\overrightarrow{BA} = A - B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} -2 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$. 2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-1)(-2) + (-1)m + (-1)(1) = 2 - m - 1 = 1 - m$.

(ii) 1. Los módulos son $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3}$ y $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5 + m^2}$. Entonces

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{1 - m}{\sqrt{3} \sqrt{5 + m^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

2. Elevamos al cuadrado: $\frac{(1 - m)^2}{3(5 + m^2)} = \frac{2}{9} \Rightarrow 9(1 - 2m + m^2) = 6(5 + m^2) \Rightarrow 3m^2 - 18m - 21 = 0 \Rightarrow m^2 - 6m - 7 = 0$. 3. Las soluciones son $m = 7$ y $m = -1$. Como $m < 0$, $m = -1$. (Además, para $m = -1$ el producto escalar $1 - m = 2$ es positivo, igual que $\cos \widehat{ABC}$.)

b) 1. Con $m = -1$: $C(1, -1, 2)$. Dos vectores del plano son $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$. 2. Su producto vectorial da la normal:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. El plano es $2x - 3y + z = d$; con $A(2, -1, 0)$: $d = 4 + 3 + 0 = 7$. 4. ABC : $2x - 3y + z = 7$.

c) 1. El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 9 + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

d) i) 1. La recta perpendicular al plano ABC tiene como dirección su normal $(2, -3, 1)$ y pasa por A :

$$L: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) 1. $\overrightarrow{AD} = (4, -6, 2) = 2(2, -3, 1)$, así que $D \in L$ (con $t = 2$) y AD es perpendicular al plano ABC : la altura de la pirámide es $h = |\overrightarrow{AD}| = 2\sqrt{14}$. 2. El volumen es un tercio del área de la base por la altura:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} \cdot 2\sqrt{14} = \frac{14}{3}.$$

Resultado: a) i) $1 - m$, ii) $m = -1$; b) $2x - 3y + z = 7$ (es decir, $-2x + 3y - z + 7 = 0$); c) $\frac{\sqrt{14}}{2}$; d) i) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ii) $V = \frac{14}{3}$

EJERCICIO 44

★★★ Dificil

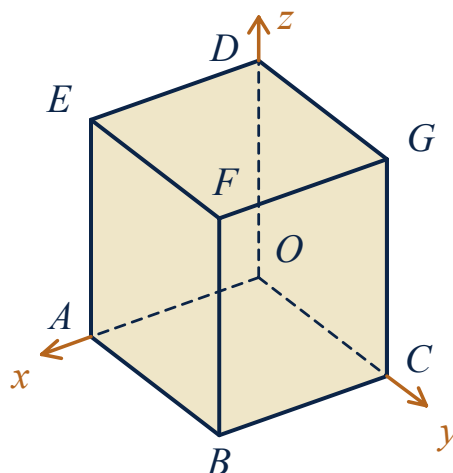
IB · P2 TZ0 Noviembre 2010

La siguiente figura muestra un cubo $OABCDEFG$.

Sea O el origen, (OA) el eje x , (OC) el eje y , (OD) el eje z .

Sean M , N y P los puntos medios de $[FG]$, $[DG]$ y $[CG]$, respectivamente.

Las coordenadas de F son $(2, 2, 2)$.



- Halle los vectores de posición $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OP}$ en función de sus componentes.
- Halle $\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN}$.
- A partir de lo anterior,**
 - calcule el área del triángulo MNP .
 - compruebe que la recta (AG) es perpendicular al plano MNP .
 - halle la ecuación del plano MNP .
- Determine las coordenadas del punto donde la recta (AG) corta al plano MNP .

- a) 1. Las coordenadas de los vértices del cubo son $A(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, 2)$ y $G(0, 2, 2)$ (de O y F se deduce la arista 2). 2. M es el punto medio de $F(2, 2, 2)$ y $G(0, 2, 2)$: $M = (1, 2, 2)$. 3. N es el punto medio de $D(0, 0, 2)$ y $G(0, 2, 2)$: $N = (0, 1, 2)$. 4. P es el punto medio de $C(0, 2, 0)$ y $G(0, 2, 2)$: $P = (0, 2, 1)$.

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) 1. $\overrightarrow{MP} = P - M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{MN} = N - M = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 2. Su producto vectorial es

$$\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - (-1)(-1) \\ (-1)(-1) - (-1) \cdot 0 \\ (-1)(-1) - 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

c) (i) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial: $\frac{1}{2}\sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(ii) 1. $\overrightarrow{AG} = G - A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN})$. 2. El producto vectorial es perpendicular al plano MNP y $\overrightarrow{AG}$ es paralelo a él. Por tanto (AG) es perpendicular al plano MNP .

(iii) 1. Una normal al plano es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, luego $-x + y + z = d$. 2. Con $M(1, 2, 2)$: $d = -1 + 2 + 2 = 3$. 3. Plano MNP : $-x + y + z = 3$, es decir, $-x + y + z - 3 = 0$.

d) 1. La recta (AG) es $(x, y, z) = (2 - 2s, 2s, 2s)$. 2. Sustituimos en el plano: $-(2 - 2s) + 2s + 2s = 3$, es decir, $-2 + 6s = 3$, y $s = \frac{5}{6}$. 3. El punto es $(2 - \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.

Resultado: a) $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. b) $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. c) (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (ii) $\overrightarrow{AG} = 2(\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MN})$; (iii) $-x + y + z - 3 = 0$. d) $(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.

EJERCICIO 45

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2013

Considere los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(0, 2, 1)$.

a) Halle el vector $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$.

b) Halle un valor exacto para el área del triángulo ABC .

c) Compruebe que la ecuación cartesiana de Π_1 , el plano que contiene al triángulo ABC , es $2x + 3y - 4z = 2$.

Un segundo plano Π_2 viene definido por la ecuación cartesiana $\Pi_2: 4x - y - z = 4$.

L_1 es la recta de intersección de los planos Π_1 y Π_2 .

d) Halle una ecuación vectorial de L_1 .

Un tercer plano Π_3 viene definido por la ecuación cartesiana $16x + \alpha y - 3z = \beta$.

e) Halle el valor de α para el cual los tres planos contienen a la recta L_1 .

f) Halle las condiciones que han de cumplir α y β para que el plano Π_3 no se corte con L_1 .

a) 1. Calculamos los dos vectores con origen en C : $\overrightarrow{CA} = A - C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{CB} = B - C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2.

Producto vectorial:

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} (-2)(1) - (-1)(0) \\ (-1)(2) - (1)(1) \\ (1)(0) - (-2)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

b) 1. El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial: $\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}|$. 2. $|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$, luego el área es $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

c) 1. Un vector normal al plano es $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}$, paralelo a $(2, 3, -4)$. Por tanto el plano es de la forma $2x + 3y - 4z = d$. 2. Sustituimos los tres puntos: $A: 2 \cdot 1 = 2$; $B: 4 + 6 - 8 = 2$; $C: 0 + 6 - 4 = 2$. Los tres cumplen $2x + 3y - 4z = 2$ y no están alineados (el producto vectorial no es nulo), así que esa es la ecuación del plano Π_1 .

- d) 1. La dirección de la recta es perpendicular a los dos vectores normales, $\mathbf{n}_1 = (2, 3, -4)$ y $\mathbf{n}_2 = (4, -1, -1)$:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 3(-1) - (-4)(-1) \\ (-4)(4) - 2(-1) \\ 2(-1) - 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ -14 \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Buscamos un punto común haciendo $x = 0$ en el sistema: $3y - 4z = 2$ y $-y - z = 4$. De la segunda, $y = -4 - z$; entonces $-12 - 3z - 4z = 2$, de donde $z = -2$ e $y = -2$. El punto es $(0, -2, -2)$. 3. Una ecuación vectorial es

$$L_1: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- e) 1. Para que Π_3 contenga a L_1 , el vector director de la recta debe ser perpendicular a la normal de Π_3 , $\mathbf{n}_3 = (16, \alpha, -3)$:

$$(1, 2, 2) \cdot (16, \alpha, -3) = 16 + 2\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = -5.$$

2. Además, el punto $(0, -2, -2)$ de la recta debe estar en el plano: $-5(-2) - 3(-2) = 16 = \beta$. Con $\alpha = -5$ y $\beta = 16$ los tres planos contienen a L_1 .

- f) 1. La recta y el plano no se cortan si son paralelos y la recta no está contenida en el plano. 2. Paralelos: $\alpha = -5$ (misma condición que en e). Si $\alpha \neq -5$ la recta corta al plano en un punto. 3. No contenida: el punto $(0, -2, -2)$ no cumple la ecuación, es decir $\beta \neq 16$.

Resultado: a) $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; b) $\frac{\sqrt{29}}{2}$; d) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; e) $\alpha = -5$; f) $\alpha = -5$ y $\beta \neq 16$.

Ecuaciones de la recta

EJERCICIO 46

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 2001

El punto $A(3, 0, -2)$ pertenece a la recta $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k} + \lambda(2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, donde λ es un parámetro real. Calcule las coordenadas de un punto de la recta que diste 6 unidades de A .

1. A corresponde a $\lambda = 0$. Un punto de la recta es $X(3 + 2\lambda, -2\lambda, -2 + \lambda)$, y $\overrightarrow{AX} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Su módulo es $|\lambda|\sqrt{4 + 4 + 1} = 3|\lambda|$.
3. Imponemos $3|\lambda| = 6$, luego $\lambda = 2$ o $\lambda = -2$.
4. Con $\lambda = 2$: $(7, -4, 0)$. Con $\lambda = -2$: $(-1, 4, -4)$.

Resultado: $(7, -4, 0)$ o $(-1, 4, -4)$

EJERCICIO 47

★★ Medio

IB · P2 Noviembre 2002

Sean los puntos $A(1, 3, -17)$ y $B(6, -7, 8)$ que yacen sobre la recta L .

- a) Halle una ecuación de la recta L , dando su respuesta en forma paramétrica.
- b) El punto P está sobre L y es tal que $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a L . Halle las coordenadas de P .

- a) 1. Vector director: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix}$, proporcional a $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. 2. Paramétricas desde A : $x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = -17 + 5t$.

- b) 1. Un punto de L es $P(1+t, 3-2t, -17+5t)$ y $\overrightarrow{OP}$ es su vector de posición. 2. $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{d} = 0: (1+t) - 2(3-2t) + 5(-17+5t) = 0$. 3. Desarrollamos: $1+t-6+4t-85+25t = 30t-90 = 0$, luego $t = 3$. 4. $P(4, -3, -2)$.

Resultado: a) $x = 1+t, y = 3-2t, z = -17+5t$; b) $P(4, -3, -2)$

EJERCICIO 48

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2008

Considere los puntos $A(1, -1, 4)$, $B(2, -2, 5)$ y $O(0, 0, 0)$.

- a) Calcule el coseno del ángulo que forman $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$.
b) Halle una ecuación vectorial de la recta L_1 que pasa por A y B .

La recta L_2 tiene por ecuación $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$, donde $t \in \mathbb{R}$.

- c) Compruebe que las rectas L_1 y L_2 se cortan, y halle las coordenadas del punto de intersección.
d) Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene tanto a la línea L_2 como al punto A .

- a) 1. $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2. Producto escalar: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 + 1 + 4 = 6$. Módulos: $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$. 3. $\cos \theta = \frac{6}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

- b) 1. Tomamos A como punto y $\overrightarrow{AB}$ como vector director:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- c) 1. Igualamos las coordenadas de L_1 y de L_2 :

$$1 + s = 2 + 2t, \quad -1 - s = 4 + t, \quad 4 + s = 7 + 3t.$$

2. Sumando las dos primeras: $0 = 6 + 3t$, luego $t = -2$. De la primera, $s = 1 + 2t = -3$. 3. Comprobamos con la tercera ecuación: $4 + (-3) = 1$ y $7 + 3(-2) = 1$. Se cumple, así que las rectas se cortan. 4. El punto se obtiene con $t = -2$ en L_2 : $(2-4, 4-2, 7-6) = (-2, 2, 1)$.

- d) 1. El plano contiene a L_2 , de vector director $\mathbf{d} = (2, 1, 3)$, y pasa por $(2, 4, 7)$. Un segundo vector del plano es el que va de $(2, 4, 7)$ a A : $\mathbf{w} = (-1, -5, -3)$. 2. Un vector normal es

$$\mathbf{d} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) - 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot (-5) - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

3. El plano es $4x + y - 3z = d$. Con $A(1, -1, 4)$: $d = 4 - 1 - 12 = -9$.

Resultado: a) $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$; b) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; c) $(-2, 2, 1)$; d) $4x + y - 3z + 9 = 0$

EJERCICIO 49

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

Los puntos A y B vienen dados por $A(0, 3, -6)$ y $B(6, -5, 11)$. El plano π está definido por la ecuación $4x - 3y + 2z = 20$.

- a) Calcule la ecuación vectorial de la recta L que pasa por los puntos A y B.
b) Calcule las coordenadas del punto de intersección de la recta L y el plano π .

- a) 1. Un vector director de L es $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}$. 2. Tomamos A como punto de la recta:

$$L: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- b) 1. Un punto de L tiene coordenadas $(6t, 3 - 8t, -6 + 17t)$. 2. Para que esté en π se debe cumplir su ecuación:

$$4(6t) - 3(3 - 8t) + 2(-6 + 17t) = 20.$$

3. Desarrollamos: $24t - 9 + 24t - 12 + 34t = 20$, es decir, $82t - 21 = 20$, de donde $t = \frac{1}{2}$. 4. Sustituimos $t = \frac{1}{2}$ en la recta: $x = 3, y = 3 - 4 = -1, z = -6 + \frac{17}{2} = \frac{5}{2}$.

Resultado: a) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix}$; b) $\left(3, -1, \frac{5}{2}\right)$

EJERCICIO 50

★★★ Difícil

IB · P2 Noviembre 2001

- a) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$x + 3y - 2z = -6$$

$$2x + y + 3z = 7$$

$$3x - y + z = 6$$

- b) Calcule el vector $\mathbf{v} = (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$
c) Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{u} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ donde m, n son escalares, y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, muestre que $\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$ para todo m y n .
d) La recta L está en el plano $3x - y + z = 6$, pasa por el punto $(1, -1, 2)$ y es perpendicular a $\mathbf{v}$. Calcule la ecuación de L .

- a) 1. Sumamos la segunda y la tercera: $5x + 4z = 13$. 2. Multiplicamos la tercera por 3 y la sumamos a la primera: $10x + z = 12$, luego $z = 12 - 10x$. 3. Sustituimos en $5x + 4z = 13$: $5x + 48 - 40x = 13$, luego $-35x = -35$ y $x = 1$. Entonces $z = 2$. 4. De la tercera ecuación: $3 - y + 2 = 6$, luego $y = -1$. 5. Comprobación en la primera: $1 - 3 - 4 = -6$. Correcto. (En la Prueba 2 también se resuelve con la CPG.)

- b)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

- c) 1. $\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$ y a $\mathbf{b}$, así que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b} = 0$. 2. Entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) + n(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) = 0 + 0 = 0$ para cualesquiera m y n . 3. Por tanto $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$.

- d) 1. El vector director $\mathbf{d}$ de L debe ser perpendicular a $\mathbf{v}$ y estar en el plano, es decir, perpendicular al normal del plano $\mathbf{n} = (3, -1, 1)$. 2. Por tanto $\mathbf{d} = \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} (-7) \cdot 1 - (-5)(-1) \\ (-5) \cdot 3 - 11 \cdot 1 \\ 11 \cdot (-1) - (-7) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -26 \\ 10 \end{pmatrix}$, proporcional a $\begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$.
3. L pasa por $(1, -1, 2)$, que cumple $3 + 1 + 2 = 6$ (está en el plano). 4. $L: \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{13} = \frac{z-2}{-5}$.

Resultado: a) $x = 1, y = -1, z = 2$; b) $\mathbf{v} = 11\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$; d) $L: \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{13} = \frac{z-2}{-5}$

EJERCICIO 51

★★★ Dificil

IB · P2 Noviembre 2003

La recta L pasa por el punto $A(2, 5, -1)$ y es perpendicular al plano de ecuación $x + y + z - 1 = 0$.

- Halle la ecuación cartesiana de la recta L .
- Halle el punto de intersección de la recta L y el plano.
- Halle las coordenadas del punto simétrico de A respecto al plano.
- Calcule la distancia del punto $B(2, 0, 6)$ a la recta L .

- a) 1. El vector director de L es el normal del plano, $\mathbf{d} = (1, 1, 1)$. 2. $L: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{1}$.
b) 1. Puntos de $L: (2+t, 5+t, -1+t)$. 2. Sustituimos en el plano: $(2+t) + (5+t) + (-1+t) - 1 = 0$, es decir, $5+3t=0$, luego $t = -\frac{5}{3}$. 3. El punto es $M\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

- c) 1. El punto simétrico A' cumple que M es el punto medio de $[AA']$, así que $A' = 2M - A$. 2. $A' = \left(\frac{2}{3} - 2, \frac{20}{3} - 5, -\frac{16}{3} + 1\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{13}{3}\right)$.

- d) 1. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d} = (1, 1, 1)$ con $|\mathbf{d}| = \sqrt{3}$. 2.

$$\overrightarrow{BA} \times \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 - (-7) \cdot 1 \\ (-7) \cdot 1 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{BA} \times \mathbf{d}| = \sqrt{144 + 49 + 25} = \sqrt{218}.$$

$$3. d(B, L) = \frac{\sqrt{218}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{218}{3}} = \frac{\sqrt{654}}{3} \approx 8,52.$$

Resultado: a) $L: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{1}$; b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{8}{3}\right)$; c) $\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{13}{3}\right)$; d) $\frac{\sqrt{654}}{3} \approx 8,52$

EJERCICIO 52

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2013

Consideremos los puntos $P(-3, -1, 2)$ y $Q(5, 5, 6)$.

a) Halle una ecuación vectorial para la recta L_1 , que pasa por los puntos P y Q .

La recta L_2 tiene la ecuación $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Muestre que L_1 y L_2 se cortan en el punto $R(1, 2, 4)$.

c) Encuentre el ángulo agudo entre L_1 y L_2 .

Sea S un punto sobre L_2 tal que $|\overrightarrow{RP}| = |\overrightarrow{RS}|$.

d) Demuestre que una de las posiciones posibles para S es $S_1(-4, 0, 4)$ y encuentre las coordenadas de la otra posición posible S_2 .

e) Hallar una ecuación vectorial de la recta que pasa por R y biseciona a $\overline{PRS_1}$.

a) 1. Vector director: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. 2. $L_1 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) 1. En L_1 : con $t = \frac{1}{2}$ se obtiene $(-3 + 4, -1 + 3, 2 + 2) = (1, 2, 4)$. 2. En L_2 : con $s = 1$ se obtiene $(-4 + 5, 0 + 2, 4 + 0) = (1, 2, 4)$. 3. R pertenece a las dos rectas y, al no ser paralelas, se cortan solo en R .

c) 1. $\mathbf{d}_1 = (8, 6, 4)$, $\mathbf{d}_2 = (5, 2, 0)$; $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 40 + 12 = 52$. 2. $|\mathbf{d}_1| = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$, $|\mathbf{d}_2| = \sqrt{29}$. 3. $\cos \theta = \frac{52}{2\sqrt{29}\sqrt{29}} = \frac{26}{29}$, luego $\theta \approx 26,3^\circ$.

d) 1. $\overrightarrow{RP} = P - R = (-4, -3, -2)$, de módulo $\sqrt{29}$. 2. Un punto de L_2 es $S = (-4 + 5s, 2s, 4)$, y $\overrightarrow{RS} = (5s - 5, 2s - 2, 0) = (s - 1)(5, 2, 0)$. 3. $|\overrightarrow{RS}| = |s - 1|\sqrt{29}$. Igualando a $\sqrt{29}$: $|s - 1| = 1$, es decir $s = 0$ o $s = 2$. 4. Con $s = 0$ se obtiene $S_1(-4, 0, 4)$, como se quería demostrar. Con $s = 2$ se obtiene $S_2(6, 4, 4)$.

e) 1. El triángulo PRS_1 es isósceles con $|\overrightarrow{RP}| = |\overrightarrow{RS_1}| = \sqrt{29}$; la bisectriz del ángulo en R tiene la dirección de $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RS_1}$ (diagonal del rombo que forman). 2. $\overrightarrow{RS_1} = (-5, -2, 0)$, luego $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RS_1} = (-9, -5, -2)$. 3. $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Resultado: a) $\mathbf{r} = (-3, -1, 2) + t(8, 6, 4)$; c) $26,3^\circ$; d) $S_2(6, 4, 4)$; e) $\mathbf{r} = (1, 2, 4) + \lambda(-9, -5, -2)$. Los apartados b) y la primera parte de d) quedan demostrados.

EJERCICIO 53

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2014

Dados los puntos $A(1, 0, 4)$, $B(2, 3, -1)$ y $C(0, 1, -2)$,

a) Halle la ecuación vectorial de la recta L_1 que pasa por los puntos A y B.

La recta L_2 tiene por ecuación cartesiana $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

b) Muestre que L_1 y L_2 son rectas alabeadas.

Considere el plano Π_1 , paralelo a L_1 y también a L_2 . El punto C pertenece al plano Π_1 .

c) Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1 .

La recta L_3 tiene por ecuación vectorial $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

El plano Π_2 tiene por ecuación cartesiana $x + y = 12$.

El ángulo entre la recta L_3 y el plano Π_2 es igual a 60° .

d) (i) Halle el valor de k .

(ii) Halle el punto de intersección P de la recta L_3 y el plano Π_2 .

a) 1. $\overrightarrow{AB} = (1, 3, -5)$. 2. $L_1 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

b) 1. Direcciones $\mathbf{d}_1 = (1, 3, -5)$ y $\mathbf{d}_2 = (3, 1, -2)$: no son proporcionales, luego las rectas no son paralelas. 2. L_2 pasa por $(1, -2, 1)$: $(x, y, z) = (1 + 3s, -2 + s, 1 - 2s)$. Igualamos con L_1 :

$$1 + t = 1 + 3s, \quad 3t = -2 + s, \quad 4 - 5t = 1 - 2s.$$

3. De la primera, $t = 3s$; en la segunda, $9s = -2 + s$, luego $s = -\frac{1}{4}$ y $t = -\frac{3}{4}$. 4. En la tercera: $4 + \frac{15}{4} = \frac{31}{4}$ frente a $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. No coinciden, así que no hay punto común. 5. Ni paralelas ni secantes: son alabeadas.

c) 1. Normal: $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) - (-5) \cdot 1 \\ (-5) \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ -8 \end{pmatrix}$; usamos $(1, 13, 8)$. 2. $\Pi_1 : x + 13y + 8z = d$ con

$C(0, 1, -2)$: $d = 13 - 16 = -3$. 3. $\Pi_1 : x + 13y + 8z + 3 = 0$.

d) (i) 1. Dirección de L_3 : $\mathbf{d} = (k, 1, -1)$. Normal de Π_2 : $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$. 2. El ángulo θ entre una recta y un plano cumple $\sin \theta = \frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{d}||\mathbf{n}|}$, con $\theta = 60^\circ$:

$$\frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Elevamos al cuadrado: $\frac{(k+1)^2}{2(k^2+2)} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(k+1)^2 = 6(k^2+2) \Rightarrow 2k^2 - 8k + 8 = 0 \Rightarrow (k-2)^2 = 0$. 4. $k = 2$.

(ii) 1. $L_3 : (3 + 2\lambda, \lambda, 1 - \lambda)$. 2. Imponemos $x + y = 12$: $3 + 3\lambda = 12$, luego $\lambda = 3$. 3. $P = (9, 3, -2)$.

Resultado: a) $\mathbf{r} = (1, 0, 4) + t(1, 3, -5)$; c) $x + 13y + 8z + 3 = 0$; d) (i) $k = 2$; (ii) $P(9, 3, -2)$. El apartado b) queda demostrado.

EJERCICIO 54

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2004

- a) Considere los vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en un espacio tridimensional. Demuestre que el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ biseca el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Considere los puntos $A(2, 5, 4)$, $B(1, 3, 2)$, $C(5, 5, 6)$. La recta L pasa por B y biseca al ángulo ABC .

- b) Halle la ecuación de L .
c) La recta L corta a $[AC]$ en el punto D . Halle las coordenadas de D .

- a) 1. Llamamos φ al ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, y ψ al ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Como $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 = 1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

2. Entonces

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})}{|\mathbf{u}| |\mathbf{u} + \mathbf{v}|} = \frac{1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})}{|\mathbf{v}| |\mathbf{u} + \mathbf{v}|} = \cos \psi.$$

3. Como $\varphi, \psi \in [0, \pi]$ y el coseno es inyectivo en ese intervalo, $\varphi = \psi$: el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ forma ángulos iguales con $\mathbf{u}$ y con $\mathbf{v}$, es decir, biseca el ángulo entre ellos.

- b) 1. Los vectores que salen de B hacia A y hacia C son

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{BA}| = 3, \quad |\overrightarrow{BC}| = 6.$$

2. Sus vectores unitarios son

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Por el apartado a), la bisectriz tiene la dirección de $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$, que es proporcional a $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. 4. La recta pasa por $B(1, 3, 2)$:

$$L: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \quad \text{o sea } x = 1 + t, \quad y = 3 + t, \quad z = 2 + \frac{4}{3}t.$$

- c) 1. Un punto de $[AC]$ es $A + s\overrightarrow{AC}$ con $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $0 \leq s \leq 1$: $(2 + 3s, 5, 4 + 2s)$. 2. Igualamos con L : $1 + t = 2 + 3s$, $3 + t = 5$, $2 + \frac{4}{3}t = 4 + 2s$. 3. De la segunda, $t = 2$. De la primera, $3 = 2 + 3s$, luego $s = \frac{1}{3}$. Comprobamos la tercera: $2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}$ y $4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$. Se cumple. 4. Sustituimos $s = \frac{1}{3}$: $D = (3, 5, \frac{14}{3})$.

Resultado: b) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$; c) $D(3, 5, \frac{14}{3})$. El apartado a) queda demostrado.

EJERCICIO 55

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2021

Considere la recta L_1 definida por la ecuación cartesiana $\frac{x+1}{2} = y = 3-z$.

a) i) Muestre que el punto $(-1, 0, 3)$ pertenece a L_1 .

(ii) Calcule la ecuación vectorial de L_1 .

Considere una segunda recta L_2 definida por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donde } t \in \mathbb{R} \text{ y } a \in \mathbb{R}.$$

b) Calcule los posibles valores de a cuando el ángulo agudo entre L_1 y L_2 es de 45° .

Se sabe que las rectas L_1 y L_2 tienen un único punto de intersección, A , cuando $a \neq k$.

c) Calcule el valor de k y calcule las coordenadas del punto A en función de a .

a) i) Sustituimos $(x, y, z) = (-1, 0, 3)$: $\frac{-1+1}{2} = 0$, $y = 0$ y $3-z = 0$. Las tres expresiones valen 0, así que el punto pertenece a L_1 .

(ii) 1. Llamamos λ al valor común de las tres expresiones: $\frac{x+1}{2} = \lambda$, $y = \lambda$, $3-z = \lambda$. Entonces $x = -1 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = 3 - \lambda$. 2. En forma vectorial:

$$L_1 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) 1. Los vectores directores son $\mathbf{d}_1 = (2, 1, -1)$ y $\mathbf{d}_2 = (a, 1, -1)$. El ángulo agudo θ cumple $\cos \theta = \frac{|\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2|}{|\mathbf{d}_1||\mathbf{d}_2|}$. 2. $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 2a + 1 + 1 = 2a + 2$, $|\mathbf{d}_1| = \sqrt{6}$ y $|\mathbf{d}_2| = \sqrt{a^2 + 2}$. 3. Con $\theta = 45^\circ$:

$$\frac{|2a+2|}{\sqrt{6}\sqrt{a^2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{4(a+1)^2}{6(a^2+2)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4(a+1)^2 = 3(a^2+2).$$

4. Desarrollando: $4a^2 + 8a + 4 = 3a^2 + 6$, o sea $a^2 + 8a - 2 = 0$. 5. $a = \frac{-8 \pm \sqrt{64+8}}{2} = -4 \pm 3\sqrt{2}$.

c) 1. Un punto común cumple: $-1 + 2\lambda = at$, $\lambda = 1 + t$, $3 - \lambda = 2 - t$. 2. Las dos últimas ecuaciones son equivalentes ($\lambda = 1 + t$). Sustituyendo en la primera: $-1 + 2(1+t) = at$, es decir $1 + 2t = at$ y $(a-2)t = 1$. 3. Esta ecuación tiene solución única $t = \frac{1}{a-2}$ si y solo si $a \neq 2$. Por tanto $k = 2$ (para $a = 2$ las rectas son paralelas y no se cortan). 4. Coordenadas de A sustituyendo $t = \frac{1}{a-2}$ en L_2 :

$$x = at = \frac{a}{a-2}, \quad y = 1 + t = \frac{a-1}{a-2}, \quad z = 2 - t = \frac{2a-5}{a-2}.$$

Resultado: a) ii) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $a = -4 \pm 3\sqrt{2}$; c) $k = 2$ y $A \left(\frac{a}{a-2}, \frac{a-1}{a-2}, \frac{2a-5}{a-2} \right)$.

EJERCICIO 56

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2022

Considere los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(k, -2, 1)$ y $C(5, 0, 2)$, donde $k \in \mathbb{R}$.

- Escriba $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
- Sabiendo que los puntos A , B y C forman una línea recta, muestre que $k = 9$.
- Para $k = 9$, sea L_1 , la recta que pasa por A , B y C .
- Halle la ecuación vectorial de la recta L_1 .
- La recta L_2 tiene por ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1-z$.
Muestre que las rectas L_1 y L_2 son alabeadas.
- Para $k \neq 9$, sea Π el plano que contiene a A , B y C .
- Halle la ecuación cartesiana del plano Π .
- Halle las coordenadas del punto del plano Π que está más cerca del origen $(0, 0, 0)$.

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} k-1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- b) 1. Tres puntos están alineados cuando $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son paralelos: $\overrightarrow{AB} = m \overrightarrow{AC}$. 2. Con la segunda componente: $-4 = -2m$, luego $m = 2$. La tercera componente lo confirma: $-2 = 2 \cdot (-1)$. 3. Primera componente: $k-1 = 2 \cdot 4 = 8$, luego $k = 9$.

- c) (i) 1. Con $k = 9$ la recta pasa por $A(1, 2, 3)$ y tiene como dirección $\overrightarrow{AC} = (4, -2, -1)$:

$$L_1: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (ii) 1. Escribimos L_2 en forma paramétrica con $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 1-z = \mu$: $x = 1 + 2\mu$, $y = 3\mu$, $z = 1 - \mu$. Pasa por $(1, 0, 1)$ con dirección $(2, 3, -1)$. 2. Las direcciones $(4, -2, -1)$ y $(2, 3, -1)$ no son paralelas (no son proporcionales), así que las rectas no son paralelas ni coincidentes. 3. Veamos si se cortan: $1 + 4\lambda = 1 + 2\mu$, $2 - 2\lambda = 3\mu$ y $3 - \lambda = 1 - \mu$. De la primera, $\mu = 2\lambda$. En la segunda: $2 - 2\lambda = 6\lambda$, luego $\lambda = \frac{1}{4}$ y $\mu = \frac{1}{2}$. 4. Tercera ecuación: $3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$ frente a $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. No se cumple, no hay punto común. 5. No son paralelas y no se cortan: las rectas son alabeadas (se cruzan).

- d) (i) 1. Una normal al plano es

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (-4)(-1) - (-2)(-2) \\ (-2)(4) - (k-1)(-1) \\ (k-1)(-2) - (-4)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k-9 \\ 18-2k \end{pmatrix} = (k-9) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

que no es nulo porque $k \neq 9$. Una normal sencilla es $(0, 1, -2)$. 2. El plano es $y - 2z = d$; con A : $d = 2 - 6 = -4$. 3. Π : $y - 2z = -4$. Comprobación: B : $-2 - 2 = -4$ y C : $0 - 4 = -4$.

- (ii) 1. El punto de Π más cercano al origen es el pie de la perpendicular desde el origen: la recta $(0, s, -2s)$ (dirección de la normal). 2. Sustituimos en el plano: $s - 2(-2s) = 5s = -4$, luego $s = -\frac{4}{5}$. 3. El punto es $\left(0, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ (a distancia $\frac{4}{\sqrt{5}}$ del origen).

Resultado: a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} k-1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; c) i) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; d) i) Π : $y - 2z = -4$; ii) $\left(0, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Quedan demostrados b) y c) ii).

Ecuaciones del plano

EJERCICIO 57

★ Básico

IB · P1 Noviembre 1999

El vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ es normal al plano que pasa por el punto $(2, 1, 2)$.

- Calcule una ecuación del plano.
- Calcule a si el punto $(a, a - 1, a - 2)$ está en el plano.

1. Un plano con vector normal $(2, -1, 3)$ tiene ecuación $2x - y + 3z = d$. 2. Sustituimos $(2, 1, 2)$: $d = 4 - 1 + 6 = 9$, es decir, $2x - y + 3z - 9 = 0$.
1. Sustituimos $(a, a - 1, a - 2)$ en la ecuación: $2a - (a - 1) + 3(a - 2) = 9$. 2. Desarrollamos: $2a - a + 1 + 3a - 6 = 9$, es decir, $4a - 5 = 9$, luego $a = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

Resultado: a) $2x - y + 3z - 9 = 0$; b) $a = \frac{7}{2}$

EJERCICIO 58

★ Básico

IB · P1 Mayo 2000

Calcule un vector normal al plano que contiene a las rectas L_1 y L_2 , cuyas ecuaciones son:

$$L_1: \mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{k} + \lambda(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$L_2: \mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} + \mu(\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

- Los vectores directores de las rectas están contenidos en el plano: $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Un vector normal es perpendicular a ambos, así que lo obtenemos con el producto vectorial:

$$\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Resultado: $\mathbf{n} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (o cualquier múltiplo suyo)

EJERCICIO 59

★ Básico

IB · P1 Mayo 2000

El plano $6x - 2y + z = 11$ contiene a la recta $x - 1 = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 3}{l}$. Calcule l .

- La recta pasa por $(1, -1, 3)$ y tiene vector director $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ l \end{pmatrix}$.
- Si la recta está contenida en el plano, su vector director es perpendicular al vector normal del plano $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$.
- $6 - 4 + l = 0$, luego $l = -2$.
- Comprobamos que el punto $(1, -1, 3)$ está en el plano: $6 + 2 + 3 = 11$. Correcto.

Resultado: $l = -2$

EJERCICIO 60

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2009

La ecuación vectorial de la recta L viene dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta L y al punto $A(4, -2, 5)$.

1. Un punto de L es $P(1, 3, 6)$ y su vector director es $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Un segundo vector del plano es $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Un vector normal al plano es

$$\mathbf{n} = \mathbf{d} \times \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - (-1)(-5) \\ (-1) \cdot 3 - (-1)(-1) \\ (-1)(-5) - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Usamos el vector opuesto $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, que también es normal.

4. El plano es $7x + 4y + z = d$. Sustituimos $A(4, -2, 5)$: $d = 28 - 8 + 5 = 25$.

5. Comprobación con P : $7 + 12 + 6 = 25$.

Resultado: $7x + 4y + z = 25$

EJERCICIO 61

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2001

Encuentre una ecuación del plano que contiene a las dos rectas

$$x - 1 = \frac{1 - y}{2} = z - 2 \quad \text{y} \quad \frac{x + 1}{3} = \frac{2 - y}{3} = \frac{z + 2}{5}.$$

1. Primera recta: llamando t al valor común, $x = 1 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = 2 + t$. Pasa por $A(1, 1, 2)$ con $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Segunda recta: $x = -1 + 3s$, $y = 2 - 3s$, $z = -2 + 5s$. Pasa por $B(-1, 2, -2)$ con $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3. Un vector normal al plano:

$$\mathbf{n} = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-3) - (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4. El plano es $-7x - 2y + 3z = d$. Con $A(1, 1, 2)$: $d = -7 - 2 + 6 = -3$.

5. Comprobamos con $B(-1, 2, -2)$: $7 - 4 - 6 = -3$. Correcto, así que las rectas están en el mismo plano.

Resultado: $-7x - 2y + 3z = -3$, es decir, $7x + 2y - 3z = 3$

EJERCICIO 62

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1998

Considere los planos P y Q con ecuaciones: $P: 6x - 2y + 3z + 8 = 0$, $Q: x - 3y + 5z = 0$. Calcule la ecuación de un tercer plano R , que es perpendicular a P y Q y contiene al punto $(2, 2, 3)$.

1. Los vectores normales son $\mathbf{n}_P = (6, -2, 3)$ y $\mathbf{n}_Q = (1, -3, 5)$.
2. Un plano perpendicular a P y a Q tiene un normal que es perpendicular a $\mathbf{n}_P$ y a $\mathbf{n}_Q$, es decir, paralelo a su producto vectorial:

$$\mathbf{n}_P \times \mathbf{n}_Q = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 5 - 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 - 6 \cdot 5 \\ 6 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -27 \\ -16 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 27 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

3. El plano es $x + 27y + 16z = d$. Con $(2, 2, 3)$: $d = 2 + 54 + 48 = 104$.

Resultado: $R: x + 27y + 16z - 104 = 0$

EJERCICIO 63

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2014

Las rectas L_1 y L_2 vienen dadas por $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-12}{-2}$, $L_2: \frac{x-1}{8} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-12}{6}$.

El plano π contiene a L_1 y también a L_2 .

- a) Halle la ecuación cartesiana de π .

La recta L_3 pasa por el punto $(4, 0, 8)$ y es perpendicular a π .

- b) Halle las coordenadas del punto en el que L_3 corta a π .

- a) 1. Ambas rectas pasan por $(1, 5, 12)$ y tienen vectores directores $(3, 2, -2)$ y $(8, 11, 6)$. 2. Un vector normal al plano es

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - (-2) \cdot 11 \\ (-2) \cdot 8 - 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 11 - 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ -34 \\ 17 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. El plano es $2x - 2y + z = d$. Con $(1, 5, 12)$: $d = 2 - 10 + 12 = 4$.

- b) 1. La recta L_3 tiene como vector director el normal $(2, -2, 1)$: $(4 + 2t, -2t, 8 + t)$. 2. Sustituimos en el plano: $2(4 + 2t) - 2(-2t) + (8 + t) = 4$, es decir, $9t + 16 = 4$, luego $t = -\frac{4}{3}$. 3. El punto es $\left(4 - \frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 8 - \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{20}{3}\right)$.

Resultado: a) $2x - 2y + z - 4 = 0$; b) $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{20}{3}\right)$

EJERCICIO 64

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2017

Encuentre la ecuación cartesiana del plano Π que contiene los puntos $A(6, 2, 1)$ y $B(3, -1, 1)$ y es perpendicular al plano $x + 2y - z - 6 = 0$.

1. El plano buscado contiene la dirección $\overrightarrow{AB} = (-3, -3, 0)$.
2. Si es perpendicular al plano dado, su normal es perpendicular a la normal $\mathbf{n}_0 = (1, 2, -1)$ de ese plano; es decir, $\mathbf{n}_0$ es paralelo al plano buscado.
3. Normal del plano buscado: $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} (-3)(-1) - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - (-3)(-1) \\ (-3) \cdot 2 - (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; usamos $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$.
4. $x - y - z = d$ con $A(6, 2, 1)$: $d = 6 - 2 - 1 = 3$. Comprobamos con B : $3 + 1 - 1 = 3$.

Resultado: II : $x - y - z - 3 = 0$

EJERCICIO 65

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

Considere los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

- a) Halle $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
- b) A partir de lo anterior, halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y pasa por el punto $(1, 0, -1)$.

- a) 1. Con las componentes $\mathbf{a} = (1, -3, -2)$ y $\mathbf{b} = (0, -3, 2)$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} (-3)(2) - (-2)(-3) \\ (-2)(0) - (1)(2) \\ (1)(-3) - (-3)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -12\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

- b) 1. El producto vectorial es perpendicular a $\mathbf{a}$ y a $\mathbf{b}$, así que es un vector normal del plano: $\mathbf{n} = (-12, -2, -3)$ (o su opuesto $(12, 2, 3)$). 2. La ecuación es $12x + 2y + 3z = d$. Imponemos que pase por $(1, 0, -1)$: $d = 12 + 0 - 3 = 9$. 3. El plano es $12x + 2y + 3z = 9$, o lo que es lo mismo, $-12x - 2y - 3z + 9 = 0$.

Resultado: a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -12\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; b) $12x + 2y + 3z = 9$ (equivalente a $-12x - 2y - 3z + 9 = 0$)

EJERCICIO 66

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1998

Considere los dos planos P y Q , donde $P: 6x - 2y + 3z + 8 = 0$ y $Q: x - 3y + 5 = 0$.

Calcule la ecuación de un tercer plano R que es perpendicular a P y Q y contiene al punto $(2, 2, 3)$.

1. Las normales de P y Q son $\mathbf{n}_P = (6, -2, 3)$ y $\mathbf{n}_Q = (1, -3, 0)$.
2. Un plano es perpendicular a P y a Q cuando su normal es perpendicular a $\mathbf{n}_P$ y a $\mathbf{n}_Q$. Tomamos

$$\mathbf{n}_R = \mathbf{n}_P \times \mathbf{n}_Q = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 0 - 3(-3) \\ 3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 \\ 6(-3) - (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

3. El plano es $9x + 3y - 16z = d$. Como contiene a $(2, 2, 3)$: $d = 9 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 16 \cdot 3 = 18 + 6 - 48 = -24$.
4. Así, $R: 9x + 3y - 16z = -24$.

Resultado: $R: 9x + 3y - 16z + 24 = 0$

EJERCICIO 67

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2010

- a) Muestre que los dos planos $\pi_1: x + 2y - z = 1$ y $\pi_2: x + z = -2$ son perpendiculares.
- b) Encuentre la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a π_1 y π_2 .

- a) 1. Los vectores normales son $\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2. Dos planos son perpendiculares si sus normales lo son, es decir, si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0.$$

3. Por tanto $\pi_1 \perp \pi_2$.

- b) 1. Un plano perpendicular a π_1 y a π_2 tiene un vector normal perpendicular a $\mathbf{n}_1$ y a $\mathbf{n}_2$. Sirve el producto vectorial:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Podemos usar el vector proporcional $\mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, así que $\pi_3 : x - y - z = d$. 3. Pasa por el origen, luego $d = 0$ y $\pi_3 : x - y - z = 0$.

Resultado: a) $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, luego son perpendiculares. b) $\pi_3 : x - y - z = 0$. Queda demostrado el apartado a).

EJERCICIO 68

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2021

Consideremos los planos Π_1 y Π_2 con las siguientes ecuaciones:

$$\Pi_1 : 3x + 2y + z = 6$$

$$\Pi_2 : x - 2y + z = 4$$

- a) Calcular la ecuación cartesiana del plano Π_3 que es perpendicular a Π_1 y Π_2 y que pasa por el origen $(0, 0, 0)$.
b) Calcular las coordenadas del punto donde se cortan Π_1 , Π_2 y Π_3 .

- a) 1. Un plano perpendicular a Π_1 y a Π_2 tiene como normal un vector perpendicular a las normales $\mathbf{n}_1 = (3, 2, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 1)$ (equivale a que su normal sea paralela a la recta de intersección de ambos):

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \\ 3(-2) - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. El plano es $2x - y - 4z = d$ y pasa por el origen, así que $d = 0$:

$$\Pi_3 : 2x - y - 4z = 0.$$

- b) 1. Sumando las ecuaciones de Π_1 y Π_2 : $4x + 2z = 10$, luego $z = 5 - 2x$. 2. Restándolas: $2x + 4y = 2$, luego $y = \frac{1-x}{2}$. 3. Sustituimos en Π_3 : $2x - \frac{1-x}{2} - 4(5-2x) = 0$. Multiplicando por 2: $4x - 1 + x - 40 + 16x = 0$, o sea $21x = 41$ y $x = \frac{41}{21}$. 4. Entonces $y = \frac{1 - \frac{41}{21}}{2} = -\frac{10}{21}$ y $z = 5 - \frac{82}{21} = \frac{23}{21}$.

Resultado: a) $\Pi_3 : 2x - y - 4z = 0$; b) $\left(\frac{41}{21}, -\frac{10}{21}, \frac{23}{21}\right) \approx (1,95; -0,476; 1,10)$.

EJERCICIO 69

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 1999

Las coordenadas de los puntos P , Q , R y S son $(4, 1, -1)$, $(3, 3, 5)$, $(1, 0, 2c)$ y $(1, 1, 2)$, respectivamente.

a) Calcule el valor de c para que los vectores $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{PR}$ sean perpendiculares.

Para el resto de la pregunta, use el valor de c encontrado en el apartado (a) para la coordenada del punto R .

b) Encuentre $\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PR}$.

c) Calcule la ecuación de la recta l que pasa por el punto Q y es paralela al vector $\overrightarrow{PR}$.

d) Calcule la ecuación del plano π que contiene a la recta l y pasa por el punto S .

e) Calcule la distancia más corta del punto P al plano π .

a) 1. $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2c-5 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2c+1 \end{pmatrix}$. 2. Perpendiculares si el producto escalar es cero: $6 + 3 + (2c - 5)(2c + 1) = 0$. 3. Desarrollamos: $9 + 4c^2 - 8c - 5 = 0$, es decir, $4c^2 - 8c + 4 = 4(c - 1)^2 = 0$, luego $c = 1$.

Con $c = 1$: $R(1, 0, 2)$, $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) 1. $\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. 2.

$$\overrightarrow{PS} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-3) - (-3) \cdot 3 \\ (-3)(-1) - 0 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) 1. La recta pasa por $Q(3, 3, 5)$ con vector director $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. 2. En forma continua: $l: \frac{x-3}{-3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{3}$.

d) 1. El plano contiene a l , así que contiene al vector $\overrightarrow{PR}$ (director de l). También contiene a $\overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, que une $Q \in l$ con S . 2. Un vector normal es

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} (-1)(-3) - 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-2) - (-3)(-3) \\ (-3)(-2) - (-1)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. El plano es $9x - 15y + 4z = d$. Con $Q(3, 3, 5)$: $d = 27 - 45 + 20 = 2$. Con $S(1, 1, 2)$ también: $9 - 15 + 8 = 2$.

e) 1. Distancia de $P(4, 1, -1)$ al plano $9x - 15y + 4z - 2 = 0$:

$$d = \frac{|9 \cdot 4 - 15 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{9^2 + 15^2 + 4^2}} = \frac{|36 - 15 - 4 - 2|}{\sqrt{322}} = \frac{15}{\sqrt{322}} \approx 0,836.$$

Resultado: a) $c = 1$; b) $3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$; c) $l: \frac{x-3}{-3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{3}$; d) $\pi: 9x - 15y + 4z = 2$; e) $\frac{15}{\sqrt{322}} \approx 0,836$

EJERCICIO 70

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 2002

Los puntos A, B, C y D tienen las siguientes coordenadas:

$$A(1, 3, 1), B(1, 2, 4), C(2, 3, 6), D(5, -2, 1)$$

a) i) Calcule el producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, expresando su respuesta en función de los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

(ii) Halle el área del triángulo ABC .

Llamamos Π al plano que contiene los puntos A, B y C , y L a la recta que pasa por D y es perpendicular a Π .

El punto de intersección de L y Π es P .

b) i) Halle la ecuación cartesiana de Π .

(ii) Halle la ecuación cartesiana de L .

c) Halle las coordenadas de P .

d) Halle la distancia perpendicular de D a Π .

a) i) 1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. 2.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 5 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 - 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

(ii) El área es $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 9 + 1} = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

b) i) 1. El vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-5, 3, 1)$ es normal a Π , que es de la forma $-5x + 3y + z = d$. 2. Con $A(1, 3, 1)$: $d = -5 + 9 + 1 = 5$. Comprobamos con B : $-5 + 6 + 4 = 5$ y con C : $-10 + 9 + 6 = 5$. 3. Π : $-5x + 3y + z - 5 = 0$.

(ii) 1. L pasa por $D(5, -2, 1)$ y tiene como director el normal de Π , $(-5, 3, 1)$. 2. L : $\frac{x-5}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$.

c) 1. Puntos de L : $(5 - 5t, -2 + 3t, 1 + t)$. 2. Sustituimos en Π : $-5(5 - 5t) + 3(-2 + 3t) + (1 + t) = 5$, es decir, $-25 + 25t - 6 + 9t + 1 + t = 5$, luego $35t = 35$ y $t = 1$. 3. $P(0, 1, 2)$.

d) La distancia de D a Π es $|\overrightarrow{DP}|$ con $\overrightarrow{DP} = (-5, 3, 1)$: $\sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}$. (Con la fórmula: $\frac{|-25 - 6 + 1 - 5|}{\sqrt{35}} = \frac{35}{\sqrt{35}} = \sqrt{35}$.)

Resultado: a) i) $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$; ii) $\frac{\sqrt{35}}{2}$; b) i) Π : $-5x + 3y + z - 5 = 0$; ii) L : $\frac{x-5}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{1}$; c) $P(0, 1, 2)$; d) $\sqrt{35}$

EJERCICIO 71

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2009

a) Compruebe que una ecuación cartesiana de la recta, L_1 , a la que pertenecen los puntos $A(1, -1, 2)$ y $B(3, 0, 3)$, es de la forma $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$.

b) Una ecuación de una segunda recta, L_2 , es de la forma $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$.

Compruebe que las rectas L_1 y L_2 se cortan, y halle las coordenadas del punto de intersección.

c) Sabiendo que $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$ son vectores directores de L_1 y L_2 respectivamente, determine $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$.

d) Compruebe que una ecuación cartesiana del plano π , que contiene a L_1 y L_2 , es $-x - y + 3z = 6$.

e) Halle una ecuación vectorial de la recta L_3 , la cual es perpendicular al plano π y pasa por el punto $T(3, 1, -4)$.

f) i) Halle el punto de intersección de la recta L_3 y el plano π .

ii) Halle las coordenadas de T' , el punto simétrico de T respecto del plano π .

iii) A partir de lo anterior, halle el módulo del vector $\overrightarrow{TT'}$.

a) 1. $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1)$ es un vector director de L_1 , que pasa por $A(1, -1, 2)$: la ecuación continua es $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. 2. Comprobamos con B : $\frac{3-1}{2} = 1$, $\frac{0+1}{1} = 1$, $\frac{3-2}{1} = 1$. Los tres cocientes valen 1, luego B está en la recta.

b) 1. Paramétricas: $L_1 : (1 + 2s, -1 + s, 2 + s)$ y $L_2 : (1 + \mu, 2 + 2\mu, 3 + \mu)$. 2. De la primera coordenada, $\mu = 2s$. De la segunda: $-1 + s = 2 + 4s$, luego $s = -1$ y $\mu = -2$. 3. Tercera coordenada: $2 + (-1) = 1$ y $3 + (-2) = 1$. Coinciden, así que las rectas se cortan. 4. Punto: $(1 - 2, -1 - 1, 2 - 1) = (-1, -2, 1)$.

c) 1. Con $\mathbf{d}_1 = (2, 1, 1)$ y $\mathbf{d}_2 = (1, 2, 1)$:

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

d) 1. El vector $(-1, -1, 3)$ es normal al plano que contiene a ambas rectas: $-x - y + 3z = d$. 2. Con $A(1, -1, 2)$: $d = -1 + 1 + 6 = 6$. Así que $\pi : -x - y + 3z = 6$.

e) 1. La recta L_3 tiene como vector director el normal $(-1, -1, 3)$ y pasa por T :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

f) i) 1. Sustituimos $(3 - t, 1 - t, -4 + 3t)$ en el plano: $-(3 - t) - (1 - t) + 3(-4 + 3t) = 6$, es decir, $11t - 16 = 6$, luego $t = 2$. 2. El punto de intersección es $(1, -1, 2)$.

ii) 1. El punto de intersección es el punto medio de T y T' : $T' = 2(1, -1, 2) - (3, 1, -4) = (-1, -3, 8)$.

iii) 1. $\overrightarrow{TT'} = (-4, -4, 12)$ y $|\overrightarrow{TT'}| = \sqrt{16 + 16 + 144} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$.

Resultado: b) $(-1, -2, 1)$; c) $-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; e) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; f) i) $(1, -1, 2)$; ii) $T'(-1, -3, 8)$; iii) $|\overrightarrow{TT'}| = 4\sqrt{11}$. Quedan comprobados los apartados a) y d).

EJERCICIO 72

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2014

- a) Demuestre que los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(6, 0, 0)$, $B(6, -\sqrt{24}, \sqrt{12})$, $C(0, -\sqrt{24}, \sqrt{12})$ forman un cuadrado.
- b) Calcule las coordenadas de M , el punto medio de $[OB]$.
- c) Demuestre que una ecuación del plano Π , que contiene al cuadrado $OABC$, es $y + \sqrt{2}z = 0$.
- d) Halle una ecuación vectorial de la recta L , que pasa por M y es perpendicular al plano Π .
- e) Encuentre las coordenadas de D , el punto de intersección de la recta L con el plano de ecuación $y = 0$.
- f) Encuentre las coordenadas de E , la reflexión del punto D en el plano Π .
- g) (i) Calcule el ángulo $\widehat{ODA}$.
- (ii) Indique lo que esto le dice sobre el sólido $OABCDE$.

a) 1. Calculamos los vectores de los lados: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{24} \\ \sqrt{12} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{24} \\ \sqrt{12} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = B - C = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 2. Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA}$, el cuadrilátero $OABC$ es un paralelogramo. 3. Longitudes de dos lados consecutivos: $|\overrightarrow{OA}| = 6$ y $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{24 + 12} = 6$. Son iguales, así que los cuatro lados miden 6. 4. Producto escalar: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 6 \cdot 0 + 0 + 0 = 0$, luego $OA \perp OC$ y hay un ángulo recto. 5. Un paralelogramo con los cuatro lados iguales y un ángulo recto es un cuadrado.

b) $M = \frac{O+B}{2} = \left(3, -\frac{\sqrt{24}}{2}, \frac{\sqrt{12}}{2}\right) = (3, -\sqrt{6}, \sqrt{3})$, ya que $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ y $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

c) 1. Un vector normal al plano es $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{24} \\ \sqrt{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6\sqrt{12} \\ -6\sqrt{24} \end{pmatrix} = -6\sqrt{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, porque $\sqrt{24} = \sqrt{2}\sqrt{12}$. 2. Tomamos $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. El plano pasa por O , así que su ecuación es $y + \sqrt{2}z = 0$. 3. Comprobación: A cumple $0 + 0 = 0$; C : $-\sqrt{24} + \sqrt{2}\sqrt{12} = 0$; B : lo mismo. Queda demostrado.

d) La recta L tiene como vector director el normal $\mathbf{n}$ y pasa por M :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

e) 1. Un punto de L es $(3, -\sqrt{6} + t, \sqrt{3} + \sqrt{2}t)$. 2. Imponemos $y = 0$: $t = \sqrt{6}$. 3. Entonces $z = \sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{6} = \sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Luego $D = (3, 0, 3\sqrt{3})$.

f) 1. M está en Π (es el punto medio de $[OB]$, y O y B están en Π) y L es perpendicular a Π por M . Por tanto M es el punto medio de $[DE]$. 2. $E = 2M - D = (6 - 3, -2\sqrt{6} - 0, 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) = (3, -2\sqrt{6}, -\sqrt{3})$.

g) (i) 1. $\overrightarrow{DO} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$, con $|\overrightarrow{DO}| = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{9 + 27} = 6$. 2. $\cos \widehat{ODA} = \frac{\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DA}}{6 \cdot 6} = \frac{-9 + 27}{36} = \frac{1}{2}$, luego $\widehat{ODA} = 60^\circ$.

(ii) El triángulo ODA tiene $|OD| = |DA| = |OA| = 6$: es equilátero. Del mismo modo $|DB| = |DC| = 6$, y E , simétrico de D respecto de Π , está también a distancia 6 de O , A , B y C . Las doce aristas del sólido $OABCDE$ miden 6 y todas sus caras son triángulos equiláteros: es un octaedro regular.

Resultado: b) $M(3, -\sqrt{6}, \sqrt{3})$; d) $\mathbf{r} = (3, -\sqrt{6}, \sqrt{3}) + t(0, 1, \sqrt{2})$; e) $D(3, 0, 3\sqrt{3})$; f) $E(3, -2\sqrt{6}, -\sqrt{3})$; g) (i) 60° ; (ii) $OABCDE$ es un octaedro regular. Los apartados a) y c) quedan demostrados.

EJERCICIO 73

★★★ Dificil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2018

Considere el triángulo OAB, tal que O tiene por coordenadas (0, 0, 0), A tiene por coordenadas (0, 1, 2) y B tiene por coordenadas (2b, 0, b - 1), donde $b < 0$.

a) Halle, en función de b , la ecuación cartesiana del plano Π que contiene a este triángulo.

Sea M el punto medio del segmento de recta [OB].

b) Halle, en función de b , la ecuación de la recta L que pasa por M y es perpendicular al plano Π .

c) Muestre que L no corta al eje y para ningún valor negativo de b .

a) 1. Vectores del plano: $\overrightarrow{OA} = (0, 1, 2)$ y $\overrightarrow{OB} = (2b, 0, b - 1)$. 2. Normal: $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (b - 1) - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2b - 0 \cdot (b - 1) \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - 1 \\ 4b \\ -2b \end{pmatrix}$. 3. El plano pasa por O, así que $\Pi: (b - 1)x + 4by - 2bz = 0$.

b) 1. $M = \left(b, 0, \frac{b - 1}{2}\right)$. 2. L tiene la dirección del normal $(b - 1, 4b, -2b)$:

$$L: \begin{cases} x = b + (b - 1)t \\ y = 4bt \\ z = \frac{b - 1}{2} - 2bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) 1. El eje y está formado por los puntos con $x = 0$ y $z = 0$. 2. $x = 0$ da $t = \frac{-b}{b - 1}$ (se puede dividir porque $b < 0$ implica $b - 1 \neq 0$). 3. Sustituimos en $z = 0$: $\frac{b - 1}{2} + \frac{2b^2}{b - 1} = 0$. Multiplicando por $2(b - 1)$: $(b - 1)^2 + 4b^2 = 0$, es decir $5b^2 - 2b + 1 = 0$. 4. El discriminante es $4 - 20 = -16 < 0$, así que no tiene soluciones reales. (Otra forma: $(b - 1)^2 + 4b^2$ es una suma de cuadrados que solo sería cero con $b = 1$ y $b = 0$ a la vez, imposible.) 5. No hay ningún valor de b para el que L corte al eje y ; en particular, ninguno negativo.

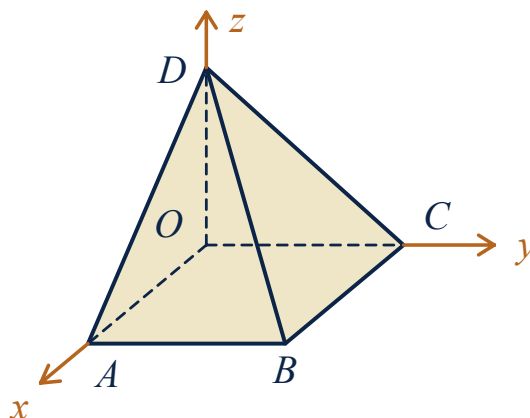
Resultado: a) $\Pi: (b - 1)x + 4by - 2bz = 0$; b) $L: x = b + (b - 1)t, y = 4bt, z = \frac{b - 1}{2} - 2bt$. El apartado c) queda demostrado.

EJERCICIO 74

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2018

La siguiente figura muestra una pirámide de base cuadrada con vértices en $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$ y $D(0, 0, 1)$.



a) Encuentre la ecuación cartesiana del plano Π_1 , que pasa por los puntos A, B y D.

La ecuación cartesiana del plano Π_2 , que pasa por los puntos B, C y D, es $y + z = 1$.

b) Encuentre el ángulo entre las caras ABD y BCD.

El plano Π_3 pasa por O y es normal a la recta BD.

c) Encuentre la ecuación cartesiana de Π_3 .

Π_3 corta AD y BD en los puntos P y Q respectivamente.

d) Muestre que P es el punto medio de AD.

e) Encuentre el área del triángulo OPQ.

a) 1. $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 1)$. 2. Normal: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 3. $x + z = d$ con $A(1, 0, 0)$: $d = 1$. Comprobamos con B y D: $1 + 0 = 1$ y $0 + 1 = 1$. 4. $\Pi_1: x + z = 1$.

b) 1. Normales: $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 1)$ de Π_1 y $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 1)$ de Π_2 . 2. $\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. 3. El ángulo entre los planos es $\theta = 60^\circ$.

c) 1. $\overrightarrow{BD} = D - B = (-1, -1, 1)$ es la normal de Π_3 . 2. Π_3 pasa por O: $-x - y + z = 0$.

d) 1. Un punto de AD es $(1 - s, 0, s)$. 2. Lo imponemos en Π_3 : $-(1 - s) - 0 + s = 0 \Rightarrow 2s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$. 3. $P = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, que es el punto medio de $A(1, 0, 0)$ y $D(0, 0, 1)$.

e) 1. Un punto de BD es $(1 - t, 1 - t, t)$. En Π_3 : $-(1 - t) - (1 - t) + t = 0 \Rightarrow 3t = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$. 2. $Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 3. $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. 4. Área = $\frac{1}{2} |\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Resultado: a) $\Pi_1: x + z = 1$; b) 60° ; c) $\Pi_3: -x - y + z = 0$; d) P $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ es el punto medio de AD y Q $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$;

e) área = $\frac{\sqrt{3}}{12}$

EJERCICIO 75

★★★ Dificil

IB · P2 TZ2 Mayo 2017

Los puntos A, B y C tienen los siguientes vectores de posición con respecto al origen O.

$$\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

- Halle la ecuación vectorial de la recta (BC).
 - Determine si las rectas (OA) y (BC) se cortan o no.
 - Halle la ecuación cartesiana del plano Π_1 , que pasa por C y es perpendicular a $\overrightarrow{OA}$.
 - Muestre que la recta (BC) pertenece al plano Π_1 .
- El plano Π_2 contiene los puntos O, A y B, y el plano Π_3 contiene a los puntos O, A y C.
- Verifique que $2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ es perpendicular al plano Π_2 .
 - Halle un vector que sea perpendicular al plano Π_3 .
 - Halle el ángulo agudo entre los planos Π_2 y Π_3 .

1. $\overrightarrow{BC} = C - B = (1 - 2, 3 + 1, 3 - 2) = (-1, 4, 1)$. 2. Tomando B como punto: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. La recta (OA) es $\mathbf{r} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Sus direcciones $(2, 1, -2)$ y $(-1, 4, 1)$ no son proporcionales, así que no son paralelas. 2. Buscamos un punto común: $2s = 2 - \lambda$, $s = -1 + 4\lambda$, $-2s = 2 + \lambda$. 3. Sustituyendo $s = -1 + 4\lambda$ en la primera: $-2 + 8\lambda = 2 - \lambda$, luego $\lambda = \frac{4}{9}$ y $s = \frac{7}{9}$. 4. Comprobamos en la tercera ecuación: $-2s = -\frac{14}{9}$, pero $2 + \lambda = \frac{22}{9}$. No coinciden. 5. El sistema no tiene solución: las rectas no se cortan (se cruzan).

1. El vector normal es $\overrightarrow{OA} = (2, 1, -2)$, así que $\Pi_1: 2x + y - 2z = d$. 2. Por $C(1, 3, 3)$: $d = 2 + 3 - 6 = -1$. 3. $\Pi_1: 2x + y - 2z + 1 = 0$.

1. $B(2, -1, 2)$ está en Π_1 : $4 - 1 - 4 + 1 = 0$. Y $C(1, 3, 3)$ también: $2 + 3 - 6 + 1 = 0$. 2. Como dos puntos de la recta (BC) están en el plano, toda la recta está contenida en él. (Otra forma: $B \in \Pi_1$ y $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OA} = -2 + 4 - 2 = 0$.)

1. Un normal de Π_2 es $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(2) - (-2)(-1) \\ (-2)(2) - (2)(2) \\ (2)(-1) - (1)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Es proporcional a $2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, que por tanto es perpendicular a Π_2 . (Otra forma: $(2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \overrightarrow{OA} = 2 - 2 = 0$ y $(2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \overrightarrow{OB} = -2 + 2 = 0$.)

1. $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(3) - (-2)(3) \\ (-2)(1) - (2)(3) \\ (2)(3) - (1)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$. 2. Un vector perpendicular a Π_3 es $9\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

1. Normales: $\mathbf{n}_2 = (0, 2, 1)$ y $\mathbf{n}_3 = (9, -8, 5)$. 2. $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = -16 + 5 = -11$, $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{n}_3| = \sqrt{170}$. 3. $\cos \alpha = \frac{11}{\sqrt{5}\sqrt{170}} = \frac{11}{\sqrt{850}}$ (valor absoluto para el ángulo agudo), así que $\alpha \approx 67,8^\circ$.

Resultado: a) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) no se cortan; c) $2x + y - 2z + 1 = 0$; f) $9\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$; g) $\alpha \approx 67,8^\circ$. Los apartados d) y e) son demostraciones.

EJERCICIO 76

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2019

El plano Π_1 contiene a los puntos $P(1, 6, -7)$, $Q(0, 1, 1)$ y $R(2, 0, -4)$.

a) Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene a P, Q y R.

La ecuación cartesiana del plano Π_2 es $x - 3y - z = 3$.

b) Sabiendo que Π_1 y Π_2 se cortan en una recta L , verifique que la ecuación vectorial de L se puede dar

$$\text{mediante } \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ 0 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

La ecuación cartesiana del plano Π_3 es $ax + by + cz = 1$.

c) Sabiendo que Π_3 es paralelo a la recta L , muestre que $a + 2b - 5c = 0$.

Considere el caso en el que Π_3 contiene a L .

d) (i) Muestre que $5a - 7c = 4$.

(ii) Sabiendo que Π_3 está igual de inclinado hacia Π_1 que hacia Π_2 , determine dos ecuaciones cartesianas posibles y distintas para Π_3 .

a) 1. $\overrightarrow{PQ} = (-1, -5, 8)$ y $\overrightarrow{PR} = (1, -6, 3)$. 2. Normal: $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} (-5)(3) - (8)(-6) \\ (8)(1) - (-1)(3) \\ (-1)(-6) - (-5)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = 11 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 3.

El plano es $3x + y + z = d$. Por P : $d = 3 + 6 - 7 = 2$. Comprobamos con Q : $0 + 1 + 1 = 2$ y con R : $6 + 0 - 4 = 2$. 4. Π_1 : $3x + y + z = 2$.

b) 1. El punto $(\frac{5}{4}, 0, -\frac{7}{4})$ está en Π_1 : $\frac{15}{4} + 0 - \frac{7}{4} = 2$; y en Π_2 : $\frac{5}{4} - 0 + \frac{7}{4} = 3$. 2. El vector $(\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{2})$ es paralelo a ambos planos: $3 \cdot \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{2} = 0$ y $\frac{1}{2} - 3 + \frac{5}{2} = 0$. 3. Un punto común y una dirección paralela a los dos planos determinan la recta de intersección: la ecuación dada es correcta.

c) 1. Π_3 es paralelo a L si su normal (a, b, c) es perpendicular a la dirección de L . 2. $(a, b, c) \cdot (\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{2}) = 0$, es decir, $\frac{a}{2} + b - \frac{5c}{2} = 0$. Multiplicando por 2: $a + 2b - 5c = 0$.

d) (i) 1. Si Π_3 contiene a L , el punto $(\frac{5}{4}, 0, -\frac{7}{4})$ de L está en Π_3 : $\frac{5a}{4} - \frac{7c}{4} = 1$. 2. Multiplicando por 4: $5a - 7c = 4$.

(ii) 1. Estar igual de inclinado hacia Π_1 que hacia Π_2 significa que forma el mismo ángulo con ambos: $\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{n}_1|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{n}_2|}$, con $\mathbf{n} = (a, b, c)$, $\mathbf{n}_1 = (3, 1, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, -3, -1)$. 2. Como $|\mathbf{n}_1| = |\mathbf{n}_2| = \sqrt{11}$, queda $|3a + b + c| = |a - 3b - c|$. 3. Primer caso, $3a + b + c = a - 3b - c$: $a + 2b + c = 0$. Junto con $a + 2b - 5c = 0$ (apartado c) se obtiene $6c = 0$, $c = 0$ y $a = -2b$. Entonces $5a = 4$ da $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$. 4. Segundo caso, $3a + b + c = -(a - 3b - c)$: $4a - 2b = 0$, es decir, $b = 2a$. Con $a + 2b - 5c = 0$ se obtiene $5a - 5c = 0$, $c = a$. Entonces $5a - 7a = 4$ da $a = -2$, $b = -4$, $c = -2$. 5. Los dos planos son $\frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y = 1$, es decir, $4x - 2y = 5$, y $-2x - 4y - 2z = 1$.

Resultado: a) $3x + y + z = 2$; d) (ii) Π_3 : $4x - 2y = 5$ y Π_3 : $-2x - 4y - 2z = 1$. Los apartados b), c) y d) (i) son demostraciones.

EJERCICIO 77

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2004

- a) El punto $P(1, 2, 11)$ se encuentra en el plano π_1 . El vector $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ es perpendicular a π_1 . Encuentre la ecuación cartesiana de π_1 .
- b) El plano π_2 tiene una ecuación $x + 3y - z = -4$.
- (i) Demostrar que el punto P también está en el plano π_2 .
- (ii) Encuentre una ecuación vectorial de la recta de intersección de π_1 y π_2 .
- c) Calcule el ángulo agudo entre π_1 y π_2 .

a) 1. La normal es $(3, -4, 1)$, luego $\pi_1: 3x - 4y + z = d$. 2. Como $P(1, 2, 11) \in \pi_1: d = 3 - 8 + 11 = 6$. 3. $\pi_1: 3x - 4y + z = 6$.

b) (i) 1. Sustituimos P en $\pi_2: 1 + 3 \cdot 2 - 11 = -4$. Se cumple, así que $P \in \pi_2$.

(ii) 1. La recta de intersección pasa por P (está en los dos planos) y es perpendicular a las dos normales, $(3, -4, 1)$ y $(1, 3, -1)$. Su dirección es

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)(-1) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 3(-1) \\ 3 \cdot 3 - (-4) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

2. Una ecuación vectorial es

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

c) 1. El ángulo agudo entre los planos es el ángulo agudo entre sus normales:

$$\cos \theta = \frac{|3 \cdot 1 + (-4) \cdot 3 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{26} \sqrt{11}} = \frac{10}{\sqrt{286}} \approx 0,5913.$$

$$2. \theta = \arccos \frac{10}{\sqrt{286}} \approx 53,7^\circ.$$

Resultado: (a) $\pi_1: 3x - 4y + z - 6 = 0$; (b)(ii) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$; (c) $\theta \approx 53,7^\circ$. El apartado (b)(i) queda comprobado.

EJERCICIO 78

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2005

Un plano π_1 tiene la ecuación $\mathbf{r} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 15$.

- a) Un punto $P(p, -p, p)$ se encuentra en el plano π_1 y Q es el punto donde el plano π_1 corta al eje y .
- (i) Calcule las coordenadas de P y de Q .
- (ii) Muestre que $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo al vector $\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
- b) Otro plano π_2 corta a π_1 en la recta (PQ) . El punto $T(1, 0, -1)$ se encuentra en π_2 .
- (i) Encuentre la ecuación de π_2 , dando su respuesta en la forma $Ax + By + Cz + D = 0$.
- (ii) Encuentre el ángulo entre π_1 y π_2 .

La ecuación de π_1 es $6x + 5y + 4z = 15$.

a) (i) 1. Para $P(p, -p, p): 6p - 5p + 4p = 15 \Rightarrow 5p = 15 \Rightarrow p = 3$. Así, $P(3, -3, 3)$. 2. El eje y son los puntos $(0, y, 0)$. En $\pi_1: 5y = 15 \Rightarrow y = 3$. Así, $Q(0, 3, 0)$.

(ii) 1. $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\mathbf{u}$. 2. Es un múltiplo de $\mathbf{u}$, luego $\overrightarrow{PQ} \parallel \mathbf{u}$.

b) (i) 1. El plano π_2 contiene a la recta PQ (dirección $\mathbf{u}$) y al punto T . Con $Q(0, 3, 0)$ y $T(1, 0, -1)$, un segundo vector del plano es $\overrightarrow{QT} = (1, -3, -1)$. 2. La normal de π_2 es

$$\mathbf{u} \times \overrightarrow{QT} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(-1) - 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Entonces $\pi_2: 5x + 2y - z + D = 0$. Como $T(1, 0, -1) \in \pi_2: 5 + 0 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -6$. 4. $\pi_2: 5x + 2y - z - 6 = 0$. Comprobación con $P: 15 - 6 - 3 - 6 = 0$, y con $Q: 0 + 6 - 0 - 6 = 0$.

(ii) 1. El ángulo entre los planos es el que forman sus normales $(6, 5, 4)$ y $(5, 2, -1)$:

$$\cos \theta = \frac{|30 + 10 - 4|}{\sqrt{77} \sqrt{30}} = \frac{36}{\sqrt{2310}} \approx 0,7490.$$

$$2. \theta = \arccos \frac{36}{\sqrt{2310}} \approx 41,5^\circ.$$

Resultado: (a)(i) $P(3, -3, 3)$, $Q(0, 3, 0)$; (b)(i) $\pi_2: 5x + 2y - z - 6 = 0$; (b)(ii) $\theta \approx 41,5^\circ$. El apartado (a)(ii) queda comprobado.

EJERCICIO 79

★★★ Dificil

IB · P2 TZ1 Mayo 2007

Dos planos π_1 y π_2 están representados por las ecuaciones

$$\pi_1: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \pi_2: 2x - y - 2z = 4.$$

a) (i) Calcule $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Muestre que la ecuación de π_1 se puede escribir como $x - 2y + 2z = 11$.

b) Muestre que el plano π_1 es perpendicular a π_2 .

c) La recta l_1 es la recta de intersección de π_1 y π_2 . Encuentre la ecuación de l_1 , dando su respuesta en forma paramétrica.

d) La recta l_2 es paralela a ambos π_1 y π_2 , y pasa por $P(3, -5, -1)$. Encuentre una ecuación para l_2 en forma cartesiana.

e) Sea Q el pie de la perpendicular desde P al plano π_2 .

(i) Encuentre las coordenadas de Q .

(ii) Calcule PQ .

a) (i) 1. Aplicamos la fórmula del producto vectorial:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 0 \\ (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

(ii) 1. Este vector es perpendicular a los dos vectores de dirección del plano, así que es normal a π_1 . Un vector normal más sencillo es $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (dividiendo entre -3). 2. Entonces $\pi_1: x - 2y + 2z = d$. Como pasa por $(3, 1, 5): d = 3 - 2 + 10 = 11$. 3. Por tanto $\pi_1: x - 2y + 2z = 11$.

b) 1. Las normales son $\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 2. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 2 + 2 - 4 = 0$, luego los planos son perpendiculares.

- c) 1. Los puntos de l_1 cumplen las dos ecuaciones a la vez:

$$x - 2y + 2z = 11, \quad 2x - y - 2z = 4.$$

2. Sumándolas se elimina z : $3x - 3y = 15$, es decir, $y = x - 5$. 3. Tomamos $x = t$ como parámetro: $y = -5 + t$. Sustituyendo en la primera: $t - 2(-5 + t) + 2z = 11$, de donde $2z = 1 + t$ y $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$. 4. Ecuaciones paramétricas de l_1 :

$$x = t, \quad y = -5 + t, \quad z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t.$$

- d) 1. Una recta paralela a dos planos tiene como dirección un vector perpendicular a las dos normales:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} (-2)(-2) - 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Pasa por $P(3, -5, -1)$, así que su ecuación cartesiana es

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

- e) (i) 1. La recta que pasa por P y es perpendicular a π_2 tiene dirección $\mathbf{n}_2$: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 2.

Imponemos que el punto esté en π_2 : $2(3+2s) - (-5-s) - 2(-1-2s) = 4$, es decir, $6+4s+5+s+2+4s = 4$, o sea $13+9s = 4$ y $s = -1$. 3. $Q = (3-2, -5+1, -1+2) = (1, -4, 1)$.

- (ii) 1. $\overrightarrow{PQ} = s \mathbf{n}_2$ con $s = -1$, luego $PQ = |-1| \cdot |\mathbf{n}_2| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

Resultado: a) (i) $-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$; (ii) $x - 2y + 2z = 11$. b) $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$. c) $x = t$, $y = -5 + t$, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$. d) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+1}{1}$. e) (i) $Q(1, -4, 1)$; (ii) $PQ = 3$.

EJERCICIO 80

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2007

Considere los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

- a) Sabiendo que $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, halle el valor de m y de n .

- b) Halle un vector unitario $\mathbf{u}$ que sea normal a $\mathbf{a}$ y también a $\mathbf{b}$.

- c) El plano π_1 contiene al punto $A(1, -1, 1)$ y es normal al vector $\mathbf{b}$.

El plano corta a los ejes x , y y z en los puntos L , M y N respectivamente.

- (i) Halle la ecuación cartesiana de π_1 .

- (ii) Escriba las coordenadas de L , M y N .

- d) La recta normal a π_1 y que pasa por el origen corta a π_1 en el punto P .

- (i) Halle las coordenadas de P .

- (ii) A partir de lo anterior halle la distancia de π_1 desde el origen.

- e) El plano π_2 tiene por ecuación $x + 2y + 4z = 4$.

Calcule el ángulo que hay entre π_2 y una recta paralela a $\mathbf{a}$.

- a) 1. Igualamos componente a componente $\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$:

$$m + n = 2, \quad -m + 2n = -5, \quad m + 4n = -1.$$

2. Sumando las dos primeras: $3n = -3$, luego $n = -1$ y $m = 3$. 3. Comprobamos con la tercera: $3 + 4(-1) = -1$. Se cumple.

- b) 1. Un vector perpendicular a $\mathbf{a}$ y a $\mathbf{b}$ es su producto vectorial:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Su módulo es $\sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$. 3. Dividimos entre el módulo:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{54}} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(También vale el vector opuesto.)

- c) (i) 1. Como π_1 es normal a $\mathbf{b}$, su ecuación es $x + 2y + 4z = d$. 2. Pasa por $A(1, -1, 1)$: $d = 1 - 2 + 4 = 3$. 3. $\pi_1: x + 2y + 4z - 3 = 0$.

- (ii) 1. Corte con el eje x ($y = z = 0$): $x = 3$, luego $L(3, 0, 0)$. 2. Corte con el eje y ($x = z = 0$): $2y = 3$, luego $M(0, \frac{3}{2}, 0)$. 3. Corte con el eje z ($x = y = 0$): $4z = 3$, luego $N(0, 0, \frac{3}{4})$.

- d) (i) 1. La recta normal por el origen es $(x, y, z) = (t, 2t, 4t)$. 2. Sustituimos en π_1 : $t + 4t + 16t = 3$, es decir, $21t = 3$ y $t = \frac{1}{7}$. 3. $P = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$.

- (ii) La distancia de π_1 al origen es la longitud del segmento perpendicular OP :

$$|OP| = \sqrt{\frac{1}{49} + \frac{4}{49} + \frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

- e) 1. El ángulo θ entre una recta de dirección $\mathbf{a}$ y el plano de normal $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ cumple $\sin \theta = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{a}| |\mathbf{n}|}$. 2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 1 - 2 + 4 = 3$, $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$ y $|\mathbf{n}| = \sqrt{21}$. 3. $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{63}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$, luego $\theta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 22,2^\circ$.

Resultado: a) $m = 3$, $n = -1$. b) $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{54}} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. c) (i) $x + 2y + 4z - 3 = 0$; (ii) $L(3, 0, 0)$, $M(0, \frac{3}{2}, 0)$, $N(0, 0, \frac{3}{4})$.

- d) (i) $P(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7})$; (ii) $\frac{\sqrt{21}}{7}$. e) $\theta \approx 22,2^\circ$.

EJERCICIO 81

★★★ Dificil

IB · P2 TZ1 Mayo 2010

Un plano π tiene una ecuación vectorial

$$\mathbf{r} = (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + \lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + \mu(6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

- a) Muestre que la ecuación cartesiana del plano π es $3x + 2y - 6z = 12$.

- b) El plano π corta los ejes x , y y z en A , B y C , respectivamente.

Encuentre las coordenadas de A , B y C .

- c) Encuentre el volumen de la pirámide $OABC$.

- d) Encuentre el ángulo entre el plano π y el eje x .

- e) Usando lo anterior, o de otra manera, calcule la distancia desde el origen al plano π .

- f) Utilizando sus respuestas de (c) y (e), encuentre el área del triángulo ABC .

- a) 1. Un vector normal es el producto vectorial de los dos vectores de dirección:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 6 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -24 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

2. Entonces $\pi: 3x + 2y - 6z = d$. El punto $(-2, 3, -2)$ está en el plano: $d = -6 + 6 + 12 = 12$. 3. Luego $\pi: 3x + 2y - 6z = 12$.

- b) 1. Eje x ($y = z = 0$): $3x = 12$, $x = 4$, luego $A(4, 0, 0)$. 2. Eje y ($x = z = 0$): $2y = 12$, $y = 6$, luego $B(0, 6, 0)$. 3. Eje z ($x = y = 0$): $-6z = 12$, $z = -2$, luego $C(0, 0, -2)$.
- c) 1. OA , OB y OC son perpendiculares entre sí, así que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3} \cdot \text{área de la base} \cdot \text{altura}$ con base OAB y altura $|OC|$. 2. Área de OAB : $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$. Altura: $|OC| = 2$. 3. $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2 = 8$.
- d) 1. El ángulo θ entre el plano y el eje x (dirección $\mathbf{i}$) cumple $\sin \theta = \frac{|\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{i}| |\mathbf{n}|}$ con $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. 2. $|\mathbf{n}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = 7$ y $\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} = 3$, luego $\sin \theta = \frac{3}{7}$. 3. $\theta = \arcsin \frac{3}{7} \approx 25,4^\circ$.
- e) 1. Distancia del origen al plano $3x + 2y - 6z - 12 = 0$:

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{12}{7}.$$
- f) 1. Tomamos como base el triángulo ABC y como altura la distancia $d = \frac{12}{7}$ del origen al plano: $V = \frac{1}{3} \cdot \text{Área}(ABC) \cdot d$. 2. Con $V = 8$: $8 = \frac{1}{3} \cdot \text{Área}(ABC) \cdot \frac{12}{7} = \frac{4}{7} \text{Área}(ABC)$. 3. $\text{Área}(ABC) = 8 \cdot \frac{7}{4} = 14$.
- Resultado:** a) $3x + 2y - 6z = 12$. b) $A(4, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 0, -2)$. c) $V = 8$. d) $\theta \approx 25,4^\circ$. e) $\frac{12}{7}$. f) 14.

EJERCICIO 82 ★★★ Difícil IB · P2 TZ0 Noviembre 2021

Tres puntos $A(3, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$ y $C(1, 1, -7)$ están en el plano Π_1 .

- a) i) Calcule el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector $\overrightarrow{AC}$.
(ii) Usando lo anterior, calcule la ecuación de Π_1 expresando su respuesta en la forma $ax + by + cz = d$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

El plano Π_2 tiene de ecuación $3x - y + 2z = 2$.

- b) La recta L es la intersección de Π_1 y Π_2 . Verifique que la ecuación vectorial de L se puede escribir en la forma $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- c) Sea Π_3 el plano $2x - 2z = 3$.

La recta L y el plano Π_3 se cortan en el punto P .

- (i) Muestre que en P , $\lambda = \frac{3}{4}$.
(ii) Usando lo anterior, calcule las coordenadas de P .
d) El punto $B(0, -2, 0)$ pertenece a L .
(i) Calcule la reflexión del punto B en el plano Π_3 .
(ii) Usando lo anterior, calcule la ecuación vectorial de la recta formada cuando L se refleja en Π_3 .

- a) i) $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

- (ii) 1. Normal al plano:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (-2)(-7) - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-2) - (-3)(-7) \\ (-3)(1) - (-2)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -21 \\ -7 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. El plano es $2x - 3y - z = d$; con A : $d = 6$. Comprobación con B : 6 y con C : $2 - 3 + 7 = 6$. 3. Π_1 : $2x - 3y - z = 6$.

b) 1. El punto $B(0, -2, 0)$ está en Π_1 ($6 = 6$) y en Π_2 ($2 = 2$). 2. Un punto genérico de la recta dada es $(\lambda, -2 + \lambda, -\lambda)$. En Π_1 : $2\lambda - 3(-2 + \lambda) - (-\lambda) = 2\lambda + 6 - 3\lambda + \lambda = 6$. Se cumple para todo λ . 3. En Π_2 : $3\lambda - (-2 + \lambda) + 2(-\lambda) = 3\lambda + 2 - \lambda - 2\lambda = 2$. También se cumple para todo λ . 4. Todos los puntos de esa recta están en ambos planos y su dirección no es nula; como la intersección de dos planos no paralelos es una recta, esa recta es L .

c) i) 1. Sustituimos el punto genérico $(\lambda, -2 + \lambda, -\lambda)$ en Π_3 : $2\lambda - 2(-\lambda) = 3$. 2. Queda $4\lambda = 3$, es decir, $\lambda = \frac{3}{4}$.

(ii) Con $\lambda = \frac{3}{4}$: $P = \left(\frac{3}{4}, -2 + \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.

d) i) 1. La normal de Π_3 es $(2, 0, -2)$, paralela a $(1, 0, -1)$. La recta perpendicular a Π_3 por B es $(s, -2, -s)$. 2. Cortamos con Π_3 : $2s - 2(-s) = 3$, luego $s = \frac{3}{4}$. El pie de la perpendicular es $M = \left(\frac{3}{4}, -2, -\frac{3}{4}\right)$. 3. La reflexión B' es el punto simétrico de B respecto de M : $B' = 2M - B = \left(\frac{3}{2}, -2, -\frac{3}{2}\right)$.

(ii) 1. P está en Π_3 , así que no cambia al reflejar. La recta reflejada pasa por P y por B' . 2. $\overrightarrow{PB'} = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}, -2 + \frac{5}{4}, -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 3. Recta reflejada:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Resultado: a) i) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$; ii) $2x - 3y - z = 6$; c) ii) $P\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$; d) i) $B'\left(\frac{3}{2}, -2, -\frac{3}{2}\right)$; ii)

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ángulos entre rectas y planos

EJERCICIO 83 ★ Básico IB · P1 Noviembre 2003

Halle el ángulo formado por el plano $3x - 2y + 4z = 12$ y el eje z . Dé su respuesta al grado más próximo.

1. El vector normal del plano es $\mathbf{n} = (3, -2, 4)$, con $|\mathbf{n}| = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$. El eje z tiene vector director $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

2. El ángulo φ entre una recta y un plano cumple $\sin \varphi = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{k}|} = \frac{4}{\sqrt{29}}$.

3. $\varphi = \arcsin \frac{4}{\sqrt{29}} \approx 47,97^\circ \approx 48^\circ$.

Resultado: 48°

EJERCICIO 84 ★ Básico IB · P2 TZ0 Noviembre 2014

Considere los dos planos

$$\pi_1: 4x + 2y - z = 8$$

$$\pi_2: x + 3y + 3z = 3$$

Halle el ángulo que forman π_1 y π_2 , aproximado al número entero de grados más próximo.

1. Los vectores normales son $\mathbf{n}_1 = (4, 2, -1)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, 3, 3)$.

$$2. \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 4 + 6 - 3 = 7, |\mathbf{n}_1| = \sqrt{21}, |\mathbf{n}_2| = \sqrt{19}.$$

$$3. \cos \theta = \frac{7}{\sqrt{21}\sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{399}} \approx 0,350, \text{ así que } \theta \approx 69,5^\circ \text{ con la calculadora sin redondear; al entero más próximo, } 69^\circ.$$

Resultado: 69°

EJERCICIO 85

★ Básico

IB · P2 TZ0 Noviembre 2016

Halle el ángulo agudo entre los planos cuyas ecuaciones son $x + y + z = 3$ y $2x - z = 2$.

1. El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus vectores normales. Los normales son $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (2, 0, -1)$.

$$2. \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 2 + 0 - 1 = 1, |\mathbf{n}_1| = \sqrt{3} \text{ y } |\mathbf{n}_2| = \sqrt{5}.$$

$$3. \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{15}}, \text{ luego } \theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{15}} \approx 75,0^\circ.$$

Resultado: $\theta \approx 75,0^\circ$

EJERCICIO 86

★ Básico

IB · P1 Mayo 1998

Calcule el ángulo agudo entre los planos $2x + 3y - z = 7$ y $7x - y + 3z = -5$, aproximando el ángulo a las décimas.

1. Vectores normales: $\mathbf{n}_1 = (2, 3, -1)$ y $\mathbf{n}_2 = (7, -1, 3)$.

$$2. \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 14 - 3 - 3 = 8, |\mathbf{n}_1| = \sqrt{14} \text{ y } |\mathbf{n}_2| = \sqrt{59}.$$

$$3. \cos \theta = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{59}} = \frac{8}{\sqrt{826}}, \text{ y por tanto } \theta = \arccos \frac{8}{\sqrt{826}} \approx 73,8^\circ.$$

Resultado: $\theta \approx 73,8^\circ$

EJERCICIO 87

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Las rectas L_1 y L_2 están definidas por las ecuaciones paramétricas

$$L_1: x = 1 + 2\lambda, \quad y = 1 + 3\lambda, \quad z = 1 - \lambda$$

$$L_2: x = 2 - \mu, \quad y = 3 + 4\mu, \quad z = 4 + 2\mu$$

Halle el ángulo entre L_1 y L_2 .

1. Los vectores directores son $\mathbf{d}_1 = (2, 3, -1)$ y $\mathbf{d}_2 = (-1, 4, 2)$.

2. Su producto escalar es $2(-1) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = -2 + 12 - 2 = 8$, y los módulos son $|\mathbf{d}_1| = \sqrt{14}$ y $|\mathbf{d}_2| = \sqrt{21}$.

3. Entonces

$$\cos \theta = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{8}{7\sqrt{6}} \approx 0,4666 \Rightarrow \theta = \arccos \frac{8}{7\sqrt{6}} \approx 62,2^\circ.$$

Como el coseno es positivo, el ángulo ya es agudo, que es el ángulo entre las rectas.

Resultado: $\theta \approx 62,2^\circ$

EJERCICIO 88 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2007

Halle el coseno del ángulo θ que forman los planos π_1 y π_2 donde π_1 tiene por ecuación $-2x + y - z = 2$ y π_2 tiene por ecuación $x + 2y - z = 6$.

1. Las normales son $\mathbf{n}_1 = (-2, 1, -1)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -1)$.
2. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -2 + 2 + 1 = 1$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{6}$ y $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{6}$.
3. $\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{6}$, de donde $\theta = \arccos \frac{1}{6} \approx 80,4^\circ$.

Resultado: $\cos \theta = \frac{1}{6}$ ($\theta \approx 80,4^\circ$)

EJERCICIO 89 ★ Básico IB · P2 TZ1 Mayo 2008

Un rayo de luz procedente del punto $(-1, 3, 2)$ se desplaza en la dirección del vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y corta al plano π : $x + 3y + 2z - 24 = 0$. Calcule el ángulo que el rayo de luz hace con el plano.

1. La dirección del rayo es $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y la normal del plano es $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. El ángulo θ entre una recta y un plano cumple $\sin \theta = \frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{d}||\mathbf{n}|}$ (es el complementario del ángulo entre $\mathbf{d}$ y $\mathbf{n}$).
3. Calculamos: $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 4 + 3 - 4 = 3$, $|\mathbf{d}| = \sqrt{21}$ y $|\mathbf{n}| = \sqrt{14}$.
4. Entonces $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{294}} = \frac{\sqrt{6}}{14} \approx 0,175$.
5. $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{14} \approx 10,1^\circ$.

Resultado: el rayo forma con el plano un ángulo de $\theta \approx 10,1^\circ$.

EJERCICIO 90 ★ Básico IB · P2 TZ1 Mayo 2009

Calcule el ángulo entre las rectas $\frac{x-1}{2} = 1-y = 2z$ y $x = y = 3z$.

1. Primera recta: llamamos s al valor común, $\frac{x-1}{2} = 1-y = 2z = s$. Entonces $x = 1 + 2s$, $y = 1 - s$, $z = \frac{s}{2}$, y un vector director es $\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Segunda recta: $x = y = 3z = u$ da $x = u$, $y = u$, $z = \frac{u}{3}$, con vector director $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. El ángulo entre dos rectas cumple $\cos \theta = \frac{|\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2|}{|\mathbf{d}_1||\mathbf{d}_2|}$:
 $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 12 - 6 + 1 = 7$, $|\mathbf{d}_1| = \sqrt{21}$, $|\mathbf{d}_2| = \sqrt{19}$.
4. $\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{21}\sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{399}} \approx 0,350$, luego $\theta \approx 69,5^\circ$.

Resultado: $\theta = \arccos \frac{7}{\sqrt{399}} \approx 69,5^\circ$

EJERCICIO 91

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2012

Consideremos los planos $\pi_1 : x - 2y - 3z = 2$ y $\pi_2 : 2x - y - z = k$.

a) Calcule el ángulo entre los planos π_1 y π_2 .

b) Los planos π_1 y π_2 se cortan en la recta L_1 . Demuestre que la ecuación vectorial de L_1 es $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 - 3k \\ 2k - 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) La recta L_2 tiene la ecuación cartesiana $5 - x = y + 3 = 2 - 2z$. Las rectas L_1 y L_2 se cortan en un punto X . Calcule las coordenadas de X .

d) Determine una ecuación cartesiana del plano π_3 que contiene las dos rectas L_1 y L_2 .

e) Sea Y un punto en L_1 y Z un punto en L_2 tal que XY sea perpendicular a YZ y el área del triángulo XYZ es 3. Calcule el perímetro del triángulo XYZ .

a) 1. Los vectores normales son $\mathbf{n}_1 = (1, -2, -3)$ y $\mathbf{n}_2 = (2, -1, -1)$. El ángulo entre planos es el ángulo agudo entre sus normales. 2. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 2 + 2 + 3 = 7$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{14}$, $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{6}$. 3. $\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{84}}$, luego $\theta \approx 40,2^\circ$.

b) 1. Punto: $(0, 2 - 3k, 2k - 2)$ está en π_1 porque $-2(2 - 3k) - 3(2k - 2) = -4 + 6k - 6k + 6 = 2$; y en π_2 porque $-(2 - 3k) - (2k - 2) = -2 + 3k - 2k + 2 = k$. 2. Dirección: $\mathbf{d} = (1, 5, -3)$ cumple $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{d} = 1 - 10 + 9 = 0$ y $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{d} = 2 - 5 + 3 = 0$, así que es paralelo a ambos planos. 3. Una recta que tiene un punto común con los dos planos y es paralela a ambos está contenida en los dos; como los planos no son paralelos, esa recta es su intersección. Queda demostrado.

c) 1. Ponemos $5 - x = y + 3 = 2 - 2z = s$. Entonces $x = 5 - s$, $y = s - 3$, $z = 1 - \frac{s}{2}$. 2. Un punto de L_1 es $(t, 2 - 3k + 5t, 2k - 2 - 3t)$. Igualando con el de L_2 :

$$t = 5 - s, \quad 2 - 3k + 5t = s - 3, \quad 2k - 2 - 3t = 1 - \frac{s}{2}.$$

3. Sustituyendo $t = 5 - s$: $2 - 3k + 25 - 5s = s - 3$, es decir $3k = 30 - 6s$, $k = 10 - 2s$. Y la tercera: $2k - 2 - 15 + 3s = 1 - \frac{s}{2}$, es decir $2k = 18 - \frac{7s}{2}$. 4. Con $k = 10 - 2s$: $20 - 4s = 18 - \frac{7s}{2}$, de donde $2 = \frac{s}{2}$ y $s = 4$. Entonces $k = 2$ y $t = 1$. 5. $X = (5 - 4, 4 - 3, 1 - 2) = (1, 1, -1)$.

d) 1. Direcciones: $\mathbf{d}_1 = (1, 5, -3)$ y $\mathbf{d}_2 = (-1, 1, -\frac{1}{2})$, o bien $(-2, 2, -1)$. 2. Normal de π_3 : $\mathbf{d}_1 \times (-2, 2, -1) = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-1) - (-3) \cdot 2 \\ (-3)(-2) - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 - 5 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$. 3. π_3 pasa por $X(1, 1, -1)$: $x + 7y + 12z = 1 + 7 - 12 = -4$, es decir $x + 7y + 12z + 4 = 0$.

e) 1. El triángulo es rectángulo en Y , con Y sobre L_1 y Z sobre L_2 . El ángulo en X es el ángulo agudo θ entre L_1 y L_2 . 2. $\mathbf{d}_1 \cdot (-2, 2, -1) = -2 + 10 + 3 = 11$, $|\mathbf{d}_1| = \sqrt{35}$, $|(-2, 2, -1)| = 3$, luego $\cos \theta = \frac{11}{3\sqrt{35}}$, $\theta \approx 51,7^\circ$, y $\tan \theta = \frac{\sqrt{194}}{11} \approx 1,266$. 3. Sea $a = XY$. Entonces $YZ = a \tan \theta$ y $XZ = \frac{a}{\cos \theta}$. 4. Área: $\frac{1}{2} a \cdot a \tan \theta = 3$, de donde $a^2 = \frac{6}{\tan \theta} = \frac{66}{\sqrt{194}} \approx 4,739$ y $a \approx 2,177$. 5. $YZ \approx 2,177 \cdot 1,266 \approx 2,756$ y $XZ \approx \frac{2,177}{0,6198} \approx 3,512$. 6. Perímetro $= 2,177 + 2,756 + 3,512 \approx 8,45$.

Resultado: a) $40,2^\circ$; c) $X(1, 1, -1)$; d) $x + 7y + 12z + 4 = 0$; e) perímetro $\approx 8,45$. El apartado b) queda demostrado.

EJERCICIO 92

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2016

Dos planos tienen por ecuaciones $\Pi_1 : 4x + y + z = 8$ y $\Pi_2 : 4x + 3y - z = 0$.

- a) Calcule el coseno del ángulo formado por los dos planos en la forma $\sqrt{\frac{p}{q}}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$.

Sea L la recta de intersección de los dos planos.

- b) (i) Muestre que L tiene dirección $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) Muestre que el punto $A(1, 0, 4)$ está en ambos planos.

(iii) Escriba una ecuación vectorial de L .

B es el punto de Π_1 de coordenadas $(a, b, 1)$.

- c) Sabiendo que el vector $\overrightarrow{AB}$ es perpendicular a L calcule el valor de a y el valor de b .

- d) Demuestre que $AB = 3\sqrt{2}$.

El punto P está en L y $\widehat{ABP} = 45^\circ$.

- e) Encuentre las coordenadas de las dos posiciones posibles de P .

- a) 1. Normales: $\mathbf{n}_1 = (4, 1, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (4, 3, -1)$. 2. $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 16 + 3 - 1 = 18$, $|\mathbf{n}_1| = \sqrt{18}$, $|\mathbf{n}_2| = \sqrt{26}$. 3. $\cos \theta = \frac{18}{\sqrt{18}\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{9}{13}}$.

- b) (i) 1. La dirección de L es perpendicular a los dos normales, luego es $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(-1) - (1)(3) \\ (1)(4) - (4)(-1) \\ (4)(3) - (1)(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (ii) 1. En Π_1 : $4(1) + 0 + 4 = 8$. En Π_2 : $4(1) + 3(0) - 4 = 0$. Se cumplen ambas ecuaciones.

- (iii) 1. Con el punto A y la dirección anterior: $L : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

- c) 1. $B \in \Pi_1$: $4a + b + 1 = 8$, es decir, $4a + b = 7$. 2. $\overrightarrow{AB} = (a - 1, b, -3)$ perpendicular a L : $-(a - 1) + 2b - 6 = 0$, es decir, $-a + 2b = 5$. 3. De la segunda, $a = 2b - 5$. En la primera: $4(2b - 5) + b = 7$, $9b = 27$, $b = 3$ y $a = 1$.

- d) 1. Con $a = 1$ y $b = 3$: $\overrightarrow{AB} = (0, 3, -3)$. 2. $AB = \sqrt{0 + 9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

- e) 1. P está en L : $P = A + t(-1, 2, 2)$, luego $\overrightarrow{AP} = t(-1, 2, 2)$ y $AP = 3|t|$. 2. Como $\overrightarrow{AB} \perp L$, el triángulo ABP es rectángulo en A . Con $\widehat{ABP} = 45^\circ$, es isósceles: $AP = AB = 3\sqrt{2}$. 3. Entonces $3|t| = 3\sqrt{2}$, es decir, $t = \pm\sqrt{2}$. 4. Para $t = \sqrt{2}$: $P = (1 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2})$. Para $t = -\sqrt{2}$: $P = (1 + \sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$.

Resultado: a) $\cos \theta = \sqrt{\frac{9}{13}}$; b) (iii) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; c) $a = 1, b = 3$; e) $P(1 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2})$ o $P(1 + \sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$. Los apartados b) (i), (ii) y d) son demostraciones.

EJERCICIO 93

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

Una recta L tiene por ecuación $\frac{x-2}{p} = \frac{y-q}{2} = z-1$, donde $p, q \in \mathbb{R}$. Un plano Π tiene por ecuación $x + y + 3z = 9$.

- a) Muestre que L no es perpendicular a Π .
b) Sabiendo que L está contenida en el plano Π , halle el valor de p y el valor de q .

Considere ahora un caso distinto, en el que L y Π forman un ángulo agudo θ , donde $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

- c) (i) Muestre que $p = -2$.
(ii) Si L y Π se cortan en $z = -1$, halle el valor de q .

- a) 1. La dirección de L es $\mathbf{d} = (p, 2, 1)$ y el normal de Π es $\mathbf{n} = (1, 1, 3)$. 2. $L \perp \Pi$ exigiría que $\mathbf{d}$ y $\mathbf{n}$ fueran proporcionales. Pero $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{3}$ (segunda y tercera componente), así que no lo son. Por tanto L no es perpendicular a Π .
b) 1. L contenida en Π exige $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$: $p + 2 + 3 = 0$, luego $p = -5$. 2. Además el punto $(2, q, 1)$ de L debe estar en Π : $2 + q + 3 = 9$, luego $q = 4$.
c) (i) 1. El ángulo entre recta y plano cumple $\sin \theta = \frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{d}||\mathbf{n}|}$. Con $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = p + 5$, $|\mathbf{d}| = \sqrt{p^2 + 5}$ y $|\mathbf{n}| = \sqrt{11}$:
$$\frac{|p+5|}{\sqrt{p^2+5}\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow |p+5| = \sqrt{p^2+5}.$$
2. Elevamos al cuadrado: $p^2 + 10p + 25 = p^2 + 5$, luego $10p = -20$ y $p = -2$.
(ii) 1. Sea $z - 1 = \mu$ el valor común de las fracciones. Con $z = -1$ resulta $\mu = -2$. 2. Entonces $x = 2 + p\mu = 2 + 4 = 6$ e $y = q + 2\mu = q - 4$. 3. El punto $(6, q - 4, -1)$ está en Π : $6 + q - 4 - 3 = 9$, luego $q = 10$.

Resultado: b) $p = -5$, $q = 4$; c) (ii) $q = 10$. Los apartados a) y c) (i) son demostraciones.

EJERCICIO 94

★★★ Difícil

IB · P1 TZ0 Noviembre 2005

La recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{2}$ se refleja en el plano $x + y + z = 1$.

Calcule el ángulo entre la recta y su imagen. Expresé su respuesta en **radianes**.

1. La recta tiene dirección $\mathbf{d} = (1, 2, 2)$ y el plano tiene normal $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$.
2. Al reflejar en el plano, la componente de $\mathbf{d}$ a lo largo de $\mathbf{n}$ cambia de signo y la componente paralela al plano se conserva. La dirección de la imagen es

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d} - 2 \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ -4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3. Calculamos los módulos y el producto escalar de $\mathbf{d}$ y $(-7, -4, -4)$:

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}' \rightarrow -7 - 8 - 8 = -23, \quad |\mathbf{d}| = 3, \quad |(-7, -4, -4)| = \sqrt{49 + 16 + 16} = 9.$$

4. Entonces

$$\cos \theta = \frac{-23}{3 \cdot 9} = -\frac{23}{27} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{23}{27}\right) \approx 2,59 \text{ rad.}$$

5. Comprobación: si φ es el ángulo entre la recta y el plano, $\sin \varphi = \frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{d}||\mathbf{n}|} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$ y el ángulo entre la recta y su imagen es $2\varphi = 2 \arcsin \frac{5}{3\sqrt{3}} \approx 2,59 \text{ rad.}$

Resultado: $\theta = \arccos\left(-\frac{23}{27}\right) \approx 2,59 \text{ rad}$

EJERCICIO 95

★★★ Difícil

IB · P2 Noviembre 1998

Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 son

$L_1: \mathbf{r} = \mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 13\mathbf{k} + t(7\mathbf{i} + \mathbf{k})$, donde t es un escalar;

$$L_2: \frac{x+30}{2} = \frac{y+39}{1} = \frac{2-3z}{2}$$

Las ecuaciones de los planos P_1 y P_2 son $P_1: 6x + 3y - 2z = 12$

$P_2: \mathbf{r} = 22\mathbf{i} + \lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \mu(\mathbf{i} - 2\mathbf{k})$, donde λ y μ son escalares.

- Calcule el producto vectorial $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{k})$.
- Escriba dos vectores $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ perpendiculares a los planos P_1 y P_2 respectivamente.
 - Usando lo anterior, o de cualquier otra forma, calcule el ángulo agudo que forman los planos aproximado a la décima de grado más próxima.
- Muestre que L_2 es perpendicular a P_1 .
- Calcule las coordenadas del punto de intersección de L_2 y P_1 .
 - Usando lo anterior, o de cualquier otra manera, muestre que las dos rectas y los dos planos tienen un punto en común.

1. Desarrollamos con las componentes $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, -2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

- La normal de $P_1: 6x + 3y - 2z = 12$ se lee de los coeficientes: $\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. 2. P_2 está generado por los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, así que su normal es el producto vectorial del apartado a): $\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- El ángulo entre los planos es el ángulo entre sus normales (tomando el agudo):

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{|-12 + 6 + 2|}{\sqrt{49}\sqrt{9}} = \frac{4}{21}.$$

$$2. \alpha = \arccos \frac{4}{21} \approx 79,0^\circ.$$

1. La dirección de L_2 es $(2, 1, -\frac{2}{3})$, porque $\frac{2-3z}{2} = \frac{z-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}}$. Multiplicando por 3 se obtiene $(6, 3, -2)$. 2. Este vector coincide con $\mathbf{n}_1$, la normal de P_1 . Una recta cuya dirección es la normal de un plano es perpendicular a ese plano.

1. Escribimos L_2 con un parámetro s : $x = -30 + 2s$, $y = -39 + s$, $z = \frac{2-2s}{3}$. 2. Sustituimos en P_1 :

$$6(-30 + 2s) + 3(-39 + s) - 2 \cdot \frac{2-2s}{3} = 12 \Rightarrow -297 + 15s - \frac{4}{3} + \frac{4s}{3} = 12 \Rightarrow \frac{49}{3}s = \frac{931}{3} \Rightarrow s = 19.$$

$$3. \text{ El punto es } x = -30 + 38 = 8, y = -39 + 19 = -20, z = \frac{2-38}{3} = -12: (8, -20, -12).$$

1. Ya sabemos que $(8, -20, -12)$ está en L_2 y en P_1 . 2. En $L_1: x = 1 + 7t = 8 \Rightarrow t = 1$; entonces $y = -20$ y $z = -13 + 1 = -12$. Se cumple, luego está en L_1 . 3. En $P_2: (8, -20, -12) = (22, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(1, 0, -2)$. De $z: -2\mu = -12 \Rightarrow \mu = 6$; de $y: \lambda = -20$; de $x: 22 - 20 + 6 = 8$. Se cumple, luego está en P_2 . 4. Por tanto $(8, -20, -12)$ pertenece a las dos rectas y a los dos planos.

Resultado: a) $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$; b) $\mathbf{n}_1 = (6, 3, -2)$, $\mathbf{n}_2 = (-2, 2, -1)$, ángulo $\approx 79,0^\circ$; c) demostrado; d) $(8, -20, -12)$, punto común de L_1 , L_2 , P_1 y P_2 .

Distancias

EJERCICIO 96

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1999

Calcule la menor distancia del punto $A(0, 2, 2)$ a la recta $\mathbf{r} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$, donde t es un escalar.

1. La recta pasa por $B(5, 9, 6)$ con vector director $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, de módulo $|\mathbf{d}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

2. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{AB} \times \mathbf{d}| = \sqrt{36 + 36 + 9} = 9.$$

4. La distancia de un punto a una recta es $\frac{|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{d}|}{|\mathbf{d}|} = \frac{9}{3} = 3$.

Resultado: distancia mínima = 3

EJERCICIO 97

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2000

Calcule las coordenadas del punto de la recta $L: x = 1 - \lambda, y = 2 - 3\lambda, z = 2$ más cercano al origen.

1. Un punto genérico de L es $X(1 - \lambda, 2 - 3\lambda, 2)$.

2. El punto más cercano al origen es aquel en que $\overrightarrow{OX}$ es perpendicular a la recta. El vector director es $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{d} = 0: -(1 - \lambda) - 3(2 - 3\lambda) = 0$, es decir, $-1 + \lambda - 6 + 9\lambda = 0$, luego $10\lambda = 7$ y $\lambda = \frac{7}{10}$.

4. Sustituimos: $x = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$, $y = 2 - \frac{21}{10} = -\frac{1}{10}$, $z = 2$.

Resultado: $\left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}, 2\right)$

EJERCICIO 98

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2003

El punto A es el pie de la perpendicular trazada desde el punto $(1, 1, 9)$ al plano $2x + y - z = 6$. Halle las coordenadas de A .

1. La perpendicular al plano desde $Q(1, 1, 9)$ tiene como dirección el normal del plano, $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$: $(1 + 2t, 1 + t, 9 - t)$.

2. A es el punto de esa recta que está en el plano: $2(1 + 2t) + (1 + t) - (9 - t) = 6$.

3. Desarrollamos: $2 + 4t + 1 + t - 9 + t = 6$, es decir, $6t - 6 = 6$, luego $t = 2$.

4. $A(1 + 4, 1 + 2, 9 - 2) = (5, 3, 7)$.

Resultado: $A(5, 3, 7)$

EJERCICIO 99

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2013

La recta L_1 tiene por ecuación $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. La recta L_2 pasa por el origen, corta a L_1 y es perpendicular a L_1 .

- a) Halle una ecuación vectorial de L_2 .
b) Determine la distancia más corta entre el origen y L_1 .

- a) 1. L_2 corta a L_1 en un punto $F = (-5 - \lambda, -3 + 2\lambda, 2 + 2\lambda)$ y $\overrightarrow{OF}$ es perpendicular a L_1 . 2. Condición de perpendicularidad con el vector director $(-1, 2, 2)$:

$$(-5 - \lambda)(-1) + (-3 + 2\lambda)(2) + (2 + 2\lambda)(2) = 0 \Rightarrow 5 + \lambda - 6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda + 3 = 0.$$

3. $\lambda = -\frac{1}{3}$ y $F = \left(-\frac{14}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$. 4. L_2 pasa por O con dirección $\overrightarrow{OF}$, que es proporcional a $(-14, -11, 4)$:

$$\mathbf{r} = t \begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{r} = t \begin{pmatrix} -14/3 \\ -11/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

- b) 1. La distancia más corta del origen a L_1 es $|\overrightarrow{OF}|$, pues F es el pie de la perpendicular. 2. $|\overrightarrow{OF}| = \frac{1}{3}\sqrt{196 + 121 + 16} = \frac{\sqrt{333}}{3} = \sqrt{\frac{333}{9}} = \sqrt{37}$.

Resultado: a) $\mathbf{r} = t(-14, -11, 4)$; b) $d(O, L_1) = \sqrt{37} \approx 6,08$

EJERCICIO 100

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

- a) Halle la ecuación cartesiana del plano que contiene al origen O y a los dos puntos $A(1, 1, 1)$ y $B(2, -1, 3)$.
b) Halle la distancia desde el punto $C(10, 5, 1)$ al plano OAB .

- a) 1. Un normal es $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(3) - (1)(-1) \\ (1)(2) - (1)(3) \\ (1)(-1) - (1)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. 2. El plano es $4x - y - 3z = d$ y pasa por el origen, así que $d = 0$: $4x - y - 3z = 0$. Comprobamos con B : $8 + 1 - 9 = 0$.

- b) 1. Distancia de un punto a un plano: $d = \frac{|4(10) - 5 - 3(1)|}{\sqrt{16 + 1 + 9}}$. 2. $d = \frac{32}{\sqrt{26}} \approx 6,28$.

Resultado: a) $4x - y - 3z = 0$; b) $d = \frac{32}{\sqrt{26}} \approx 6,28$

EJERCICIO 101

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Sea P el punto $(1, 0, -2)$ y sea Π el plano $x + y - 2z + 3 = 0$. Sea P' el punto simétrico de P respecto al plano Π . Halle las coordenadas del punto P' .

1. La normal del plano es $\mathbf{n} = (1, 1, -2)$. La recta perpendicular a Π por P es

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Buscamos el pie de la perpendicular M (el punto de esa recta que está en Π):

$$(1 + t) + t - 2(-2 - 2t) + 3 = 0 \Rightarrow 1 + t + t + 4 + 4t + 3 = 0 \Rightarrow 6t + 8 = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{3}.$$

3. Entonces $M = (1 - \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -2 + \frac{8}{3}) = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

4. M es el punto medio de PP' , así que $P' = 2M - P$:

$$P' = (-\frac{2}{3} - 1, -\frac{8}{3} - 0, \frac{4}{3} + 2) = (-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{10}{3}).$$

(Equivale a usar $t = -\frac{8}{3}$, el doble del parámetro del pie, en la recta del paso 1.)

Resultado: $P'(-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{10}{3})$

EJERCICIO 102

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2006

a) La recta l_1 pasa por el punto $A(0, 1, 2)$ y es perpendicular al plano $x - 4y - 3z = 0$.

Halle las ecuaciones cartesianas de l_1 .

b) La recta l_2 es paralela a l_1 y pasa por el punto $P(3, -8, -11)$. Halle la ecuación vectorial de la recta l_2 .

c) i) El punto Q pertenece a la recta l_1 de forma que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a l_1 y l_2 .

Halle las coordenadas de Q .

(ii) A partir de lo anterior, halle la distancia entre l_1 y l_2 .

a) 1. Una recta perpendicular a un plano tiene como dirección la normal del plano: $\mathbf{d} = (1, -4, -3)$. 2. Pasa por $A(0, 1, 2)$:

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-3}.$$

b) 1. l_2 tiene la misma dirección y pasa por $P(3, -8, -11)$:

$$l_2: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

c) i) 1. Un punto de l_1 es $Q(\mu, 1 - 4\mu, 2 - 3\mu)$, de modo que $\overrightarrow{PQ} = (\mu - 3, 9 - 4\mu, 13 - 3\mu)$. 2. Como l_1 y l_2 son paralelas, que $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a ambas equivale a $\overrightarrow{PQ} \cdot (1, -4, -3) = 0$:

$$(\mu - 3) - 4(9 - 4\mu) - 3(13 - 3\mu) = \mu - 3 - 36 + 16\mu - 39 + 9\mu = 26\mu - 78 = 0.$$

3. Entonces $\mu = 3$ y $Q = (3, 1 - 12, 2 - 9) = (3, -11, -7)$.

(ii) 1. $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, -3, 4)$. 2. La distancia entre las rectas paralelas es $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{0 + 9 + 16} = 5$.

Resultado: a) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-3}$; b) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$; c) i) $Q(3, -11, -7)$, ii) $d(l_1, l_2) = 5$

EJERCICIO 103

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2008

Los puntos A, B, C tienen vectores de posición $\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $3\mathbf{i} + \mathbf{k}$ respectivamente y se encuentran en el plano π .

- a) Calcule
- (i) el área del triángulo ABC ;
- (ii) la distancia más corta desde C a la recta AB ;
- (iii) la ecuación cartesiana del plano π .

La recta L pasa a través del origen y es normal al plano π y corta a π en el punto D .

- b) Calcule
- (i) las coordenadas del punto D ;
- (ii) la distancia de π al origen.

- a) 1. Los puntos son $A(1, 1, 2)$, $B(1, 2, 3)$, $C(3, 0, 1)$. Los vectores de los lados son $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Su producto vectorial es

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}.$$

- (i) El área del triángulo es la mitad del módulo: $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.
- (ii) 1. El área también vale $\frac{1}{2} |AB| h$, donde h es la distancia de C a la recta AB y $|AB| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$. 2. Entonces $\sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} h$, de donde $h = 2$.
- (iii) 1. El vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ es normal a π ; usamos $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, y entonces $\pi : y - z = d$. 2. Por A : $d = 1 - 2 = -1$. Luego $\pi : y - z = -1$, es decir, $y - z + 1 = 0$.
- b) (i) 1. La recta L tiene la dirección de la normal y pasa por el origen: $(x, y, z) = (0, s, -s)$. 2. Para que esté en π : $s - (-s) + 1 = 0$, es decir, $2s = -1$ y $s = -\frac{1}{2}$. 3. $D = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- (ii) La distancia de π al origen es $|OD| = \sqrt{0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (Con la fórmula: $\frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.)

Resultado: a) (i) $\sqrt{2}$; (ii) 2; (iii) $y - z + 1 = 0$. b) (i) $D(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

EJERCICIO 104

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2021

Las rectas L_1 y L_2 vienen dadas por las siguientes ecuaciones vectoriales, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$L_1 : \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L_2 : \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Muestre que L_1 y L_2 no se cortan.
- b) Halle la distancia mínima entre L_1 y L_2 .

- a) 1. Los vectores directores son $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: las rectas son paralelas. 2. Para que se corten tendrían que coincidir. El punto $(3, 2, -1)$ de L_1 está en L_2 solo si existe μ con $2 + \mu = 3$, $-\mu = 2$ y $4 + \mu = -1$. La primera da $\mu = 1$ y la segunda $\mu = -2$: es imposible. 3. Son paralelas y distintas, luego no se cortan.

- b) 1. La distancia mínima entre dos rectas paralelas es la distancia de un punto de una de ellas a la otra.

Tomamos $P(3, 2, -1) \in L_1$ y $Q(2, 0, 4) \in L_2$, con $\mathbf{d} = (1, -1, 1)$. 2. $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ y

$$\overrightarrow{QP} \times \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - (-5)(-1) \\ (-5)(1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{QP} \times \mathbf{d}| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

3. La distancia es

$$d = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \mathbf{d}|}{|\mathbf{d}|} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} \approx 4,24.$$

Resultado: a) las rectas son paralelas y distintas, no se cortan; b) $3\sqrt{2}$ ($= \sqrt{18} \approx 4,24$).

EJERCICIO 105

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 2001

El triángulo ABC tiene los vértices en los puntos $A(-1, 2, 3)$, $B(-1, 3, 5)$ y $C(0, -1, 1)$.

- a) Calcule el valor del ángulo θ entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

- b) Usando lo anterior, o de cualquier otra forma, calcule el área del triángulo ABC .

Sea L_1 la recta paralela a $\overrightarrow{AB}$ y que pasa por $D(2, -1, 0)$ y L_2 la recta paralela a $\overrightarrow{AC}$ y que pasa por $E(-1, 1, 1)$.

- c) i) Halle las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 .
(ii) Demuestre que L_1 y L_2 no se cortan.
d) Calcule la mínima distancia entre L_1 y L_2 .

- a) 1. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. 2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 - 3 - 4 = -7$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{14}$. 3. $\cos \theta = \frac{-7}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{-7}{\sqrt{70}}$, luego $\theta \approx 146,8^\circ$.

- b) 1.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{21}.$$

2. Área = $\frac{1}{2}\sqrt{21} \approx 2,29$. (También: $\frac{1}{2}\sqrt{70} \sin \theta$, con el mismo resultado.)

- c) i) 1. L_1 pasa por $D(2, -1, 0)$ con dirección $\overrightarrow{AB} = (0, 1, 2)$: $x = 2$, $y = -1 + t$, $z = 2t$. 2. L_2 pasa por $E(-1, 1, 1)$ con dirección $\overrightarrow{AC} = (1, -3, -2)$: $x = -1 + s$, $y = 1 - 3s$, $z = 1 - 2s$.

- (ii) 1. Los vectores directores no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. 2. Si se cortasen, habría t y s que cumplen las tres ecuaciones a la vez. De x : $2 = -1 + s$, luego $s = 3$. 3. De y : $-1 + t = 1 - 9 = -8$, luego $t = -7$. 4. De z : con $t = -7$, $z = -14$, pero con $s = 3$, $z = 1 - 6 = -5$. No coinciden, luego las rectas no se cortan (se cruzan).

- d) 1. Un vector perpendicular a ambas rectas es $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 2. $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. 3. La distancia entre dos rectas que se cruzan es la proyección de $\overrightarrow{DE}$ sobre $\mathbf{n}$:

$$d = \frac{|\overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|-12 + 4 - 1|}{\sqrt{21}} = \frac{9}{\sqrt{21}} \approx 1,96.$$

Resultado: a) $\theta \approx 146,8^\circ$; b) Área = $\frac{\sqrt{21}}{2} \approx 2,29$; c) i) $L_1: x = 2, y = -1 + t, z = 2t$ y $L_2: x = -1 + s, y = 1 - 3s, z = 1 - 2s$; ii) no se cortan; d) $\frac{9}{\sqrt{21}} \approx 1,96$

EJERCICIO 106

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2009

Dos rectas están definidas de la siguiente forma: $L_1: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $L_2: \frac{x-4}{-3} = \frac{y+7}{4} = -(z+3)$.

- a) Halle las coordenadas del punto A perteneciente a L_1 y del punto B perteneciente a L_2 tales que $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a L_1 y a L_2 .
- b) Halle $|\overrightarrow{AB}|$.
- c) Halle la ecuación cartesiana del plano π que contiene a L_1 y que no se corta con L_2 .

- a) 1. Escribimos L_2 en paramétricas: $x = 4 - 3s, y = -7 + 4s, z = -3 - s$, con vector director $(-3, 4, -1)$. 2. Un punto genérico de L_1 es $A = (-3 + 3\lambda, -4 + 2\lambda, 6 - 2\lambda)$ y uno de L_2 es $B = (4 - 3s, -7 + 4s, -3 - s)$. Entonces

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 - 3s - 3\lambda \\ -3 + 4s - 2\lambda \\ -9 - s + 2\lambda \end{pmatrix}.$$

3. $\overrightarrow{AB} \perp L_1: \overrightarrow{AB} \cdot (3, 2, -2) = 0$, es decir, $33 + s - 17\lambda = 0$. 4. $\overrightarrow{AB} \perp L_2: \overrightarrow{AB} \cdot (-3, 4, -1) = 0$, es decir, $-24 + 26s - \lambda = 0$. 5. De la primera, $s = 17\lambda - 33$. En la segunda: $26(17\lambda - 33) - \lambda = 24$, o sea $441\lambda = 882$, luego $\lambda = 2$ y $s = 1$. 6. $A = (3, 0, 2)$ y $B = (1, -3, -4)$.

- b) 1. $\overrightarrow{AB} = (-2, -3, -6)$, así que $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$.
- c) 1. El plano contiene a L_1 y no corta a L_2 , por lo que es paralelo a L_2 . Sus vectores directores son $(3, 2, -2)$ y $(-3, 4, -1)$, y un vector normal es

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - (-2) \cdot 4 \\ (-2)(-3) - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2. El plano es $2x + 3y + 6z = d$. Con el punto $A(3, 0, 2)$ de L_1 : $d = 6 + 12 = 18$. 3. Comprobamos que L_2 no está en el plano: el punto $(4, -7, -3)$ da $8 - 21 - 18 = -31 \neq 18$. Como la recta es paralela al plano y no tiene puntos en él, no se corta.

Resultado: a) $A(3, 0, 2)$ y $B(1, -3, -4)$; b) $|\overrightarrow{AB}| = 7$; c) $2x + 3y + 6z - 18 = 0$

EJERCICIO 107

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2004

La ecuación de una recta l_1 es $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-9}{-2}$.

a) Sea M un punto de l_1 con parámetro μ .

Expresa las coordenadas de M en función de μ .

b) La recta l_2 es paralela a l_1 y pasa por $P(4, 0, -3)$.

(i) Escribe una ecuación para l_2 .

(ii) Expresa $\overrightarrow{PM}$ en función de μ .

c) El vector $\overrightarrow{PM}$ es perpendicular a l_1 .

(i) Halle el valor de μ .

(ii) Halle la distancia entre l_1 y l_2 .

d) El plano π_1 contiene a l_1 y a l_2 .

Halle una ecuación de π_1 , expresando la respuesta en la forma $Ax + By + Cz = D$.

e) El plano π_2 tiene por ecuación $x - 5y - z = -11$.

Compruebe que l_1 es la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 .

a) 1. Igualamos las fracciones al parámetro μ : $x = -2 + 3\mu$, $y = \mu$, $z = 9 - 2\mu$. 2. Así, $M(-2 + 3\mu, \mu, 9 - 2\mu)$.

b) i) 1. l_2 tiene la misma dirección $(3, 1, -2)$ y pasa por $P(4, 0, -3)$:

$$l_2 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x = 4 + 3t, \quad y = t, \quad z = -3 - 2t.$$

(ii) 1. $\overrightarrow{PM} = M - P = \begin{pmatrix} -2 + 3\mu - 4 \\ \mu - 0 \\ 9 - 2\mu + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 3\mu \\ \mu \\ 12 - 2\mu \end{pmatrix}$.

c) i) 1. $\overrightarrow{PM} \perp l_1$ significa $\overrightarrow{PM} \cdot (3, 1, -2) = 0$:

$$3(-6 + 3\mu) + \mu - 2(12 - 2\mu) = -18 + 9\mu + \mu - 24 + 4\mu = 14\mu - 42 = 0.$$

2. Luego $\mu = 3$.

(ii) 1. Con $\mu = 3$: $\overrightarrow{PM} = (3, 3, 6)$. 2. Como es perpendicular a las dos rectas paralelas, su módulo es la distancia entre ellas:

$$d(l_1, l_2) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{9 + 9 + 36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \approx 7,35.$$

d) 1. El plano π_1 contiene la dirección $(3, 1, -2)$ y el vector $\overrightarrow{PM} = (3, 3, 6)$, que es proporcional a $(1, 1, 2)$. 2. La normal es

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. El plano es $2x - 4y + z = D$. Con $P(4, 0, -3)$: $D = 8 - 0 - 3 = 5$. 4. $\pi_1 : 2x - 4y + z = 5$ (equivale a $-2x + 4y - z + 5 = 0$).

e) 1. Un punto de l_1 , por ejemplo $(-2, 0, 9)$ ($\mu = 0$), cumple π_1 : $-4 - 0 + 9 = 5$; y cumple π_2 : $-2 - 0 - 9 = -11$. 2. La dirección $(3, 1, -2)$ cumple los dos planos (es perpendicular a sus normales): con π_1 , $6 - 4 - 2 = 0$; con π_2 , $3 - 5 + 2 = 0$. 3. Por tanto l_1 está contenida en π_1 y en π_2 . Como las normales $(2, -4, 1)$ y $(1, -5, -1)$ no son proporcionales, los planos no son paralelos y se cortan en una única recta. Esa recta es l_1 .

Resultado: a) $M(-2 + 3\mu, \mu, 9 - 2\mu)$; b) i) $l_2: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ii) $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} -6 + 3\mu \\ \mu \\ 12 - 2\mu \end{pmatrix}$; c) i) $\mu = 3$, ii) $d = 3\sqrt{6}$; d) $2x - 4y + z = 5$; e) comprobado.

EJERCICIO 108

★★★ Dificil

IB · P1 TZ1 Mayo 2011

Los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(-3, 1, 4)$, $C(5, -1, 2)$ y $D(5, 3, 7)$ son los vértices de un tetraedro.

- a) Encuentre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
b) Encuentre la ecuación cartesiana del plano Π que contiene la cara ABC .
c) Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por D y es perpendicular a Π .

Usando lo anterior, o de otra manera, calcule la distancia más corta de D a Π .

- d) (i) Calcule el área del triángulo ABC .
(ii) Calcule el volumen del tetraedro $ABCD$.
e) Determine cuál de los vértices B o D está más cerca de su cara opuesta.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- b) 1. Una normal al plano es

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 - 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 4 - (-4) \cdot 1 \\ (-4)(-3) - (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Entonces $\Pi: x + 2y + 2z = d$, y con $A(1, 2, 1)$: $d = 1 + 4 + 2 = 7$. 3. $\Pi: x + 2y + 2z - 7 = 0$.

- c) 1. La recta por D perpendicular a Π tiene la dirección de la normal: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. 2. La distancia de D a Π es

$$d(D, \Pi) = \frac{|5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 - 7|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{18}{3} = 6.$$

- d) (i) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial: $\frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$.

(ii) El volumen es $\frac{1}{3} \cdot \text{área de la base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 6 = 24$.

- e) 1. La distancia de D a su cara opuesta ABC es 6. 2. Para B hay que calcular la distancia h_B a la cara ACD .

Usamos $V = \frac{1}{3} \text{Área}(ACD) h_B$. 3. $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, con $\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 19 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix}$ y módulo

$\sqrt{361 + 400 + 256} = \sqrt{1017}$. Entonces $\text{Área}(ACD) = \frac{1}{2} \sqrt{1017} \approx 15,9$. 4. $h_B = \frac{3V}{\text{Área}(ACD)} = \frac{72}{\sqrt{1017}} \approx 2,26$. 5.

Como $2,26 < 6$, el vértice B está más cerca de su cara opuesta.

Resultado: a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. b) $x + 2y + 2z - 7 = 0$. c) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $d(D, \Pi) = 6$. d) (i) 12; (ii)

24. e) B está más cerca de su cara opuesta.

EJERCICIO 109

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2015

Dos rectas l_1 y l_2 están dadas respectivamente por las ecuaciones $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OA} + \lambda \mathbf{v}$ y $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OB} + \mu \mathbf{w}$ donde $\overrightarrow{OA} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y O es el origen. Sea P un punto en l_1 y sea Q un punto en l_2 .

- Calcule $\overrightarrow{PQ}$ en función de λ y μ .
- Hallar el valor de λ y el valor de μ para el cual $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a los vectores de dirección de l_1 y l_2 .
- Usando lo anterior encuentre la distancia más corta entre l_1 y l_2 .
- Halle la ecuación cartesiana del plano Π , que contiene la recta l_1 y es paralelo al vector de dirección de la recta l_2 .

Sea $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OB} + \eta(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

- Hallar el valor de η para el cual el punto T se encuentra en el plano Π .
- Para este valor de η , calcule $|\overrightarrow{BT}|$.
- Indique lo que usted nota acerca de sus respuestas a (c) y (f), y dé una interpretación de este resultado.

a) 1. $P = A + \lambda \mathbf{v} = (1 + \lambda, 2 + \lambda, 3 + \lambda)$ y $Q = B + \mu \mathbf{w} = (2 + \mu, 1 - \mu, -1 + 2\mu)$. 2. $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 1 + \mu - \lambda \\ -1 - \mu - \lambda \\ -4 + 2\mu - \lambda \end{pmatrix}$.

b) 1. $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{v} = 0$: $(1 + \mu - \lambda) + (-1 - \mu - \lambda) + (-4 + 2\mu - \lambda) = -4 + 2\mu - 3\lambda = 0$. 2. $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{w} = 0$: $(1 + \mu - \lambda) - (-1 - \mu - \lambda) + 2(-4 + 2\mu - \lambda) = -6 + 6\mu - 2\lambda = 0$, es decir, $\lambda = 3\mu - 3$. 3. Sustituimos en la primera: $-4 + 2\mu - 9\mu + 9 = 0$, luego $5 - 7\mu = 0$ y $\mu = \frac{5}{7}$. 4. Entonces $\lambda = \frac{15}{7} - 3 = -\frac{6}{7}$.

c) 1. Con estos valores, $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} \\ -1 - \frac{5}{7} + \frac{6}{7} \\ -4 + \frac{10}{7} + \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 2. La distancia más corta entre las rectas es la longitud de este segmento común perpendicular:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{6}{7} \sqrt{9 + 1 + 4} = \frac{6\sqrt{14}}{7} \approx 3,21.$$

- d) 1. La normal de Π es perpendicular a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Entonces $\Pi : 3x - y - 2z = d$, y con $A(1, 2, 3) \in l_1$: $d = 3 - 2 - 6 = -5$. 3. $\Pi : 3x - y - 2z + 5 = 0$.

e) 1. $T = B + \eta(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (2 + 3\eta, 1 - \eta, -1 - 2\eta)$. 2. Lo imponemos en Π : $3(2 + 3\eta) - (1 - \eta) - 2(-1 - 2\eta) + 5 = 0$, es decir, $6 + 9\eta - 1 + \eta + 2 + 4\eta + 5 = 12 + 14\eta = 0$. 3. $\eta = -\frac{6}{7}$.

f) $\overrightarrow{BT} = \eta(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$, luego $|\overrightarrow{BT}| = |\eta| \sqrt{9 + 1 + 4} = \frac{6}{7} \sqrt{14} = \frac{6\sqrt{14}}{7}$.

- g) Las dos distancias coinciden: $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{BT}| = \frac{6\sqrt{14}}{7}$. El vector $\overrightarrow{BT}$ es perpendicular a Π y a l_2 , así que su longitud es la distancia entre el plano Π y la recta l_2 (paralela a Π), que es la distancia más corta entre l_1 (contenida en Π) y l_2 .

Resultado: a) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 + \mu - \lambda \\ -1 - \mu - \lambda \\ -4 + 2\mu - \lambda \end{pmatrix}$. b) $\lambda = -\frac{6}{7}$, $\mu = \frac{5}{7}$. c) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$. d) $3x - y - 2z + 5 = 0$. e) $\eta = -\frac{6}{7}$. f) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$. g)

Ambas coinciden: es la distancia más corta entre las dos rectas.

Posiciones relativas e intersecciones

EJERCICIO 110 ★ Básico IB · P1 Mayo 1999

Encuentre las coordenadas del punto donde la recta dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x &= 2\lambda + 4 \\y &= -\lambda - 2 \\z &= 3\lambda + 2\end{aligned}$$

corta al plano con la ecuación $2x + 3y - z = 2$.

1. Sustituimos las ecuaciones de la recta en la del plano:

$$2(2\lambda + 4) + 3(-\lambda - 2) - (3\lambda + 2) = 2.$$

2. Desarrollamos: $4\lambda + 8 - 3\lambda - 6 - 3\lambda - 2 = 2$, es decir, $-2\lambda = 2$, luego $\lambda = -1$.

3. Volvemos a las paramétricas con $\lambda = -1$: $x = 2$, $y = -1$, $z = -1$.

Resultado: punto de corte $(2, -1, -1)$

EJERCICIO 111 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2004

La recta $x - 1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ y el plano $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1$ se cortan en el punto P . Calcule las coordenadas de P .

1. Pasamos la recta a paramétricas igualando las tres fracciones a t : $x = 1 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = 3t$.

2. El plano $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1$ en coordenadas es $x + 2y - z = 1$.

3. Sustituimos la recta en el plano: $(1 + t) + 2(-1 + 2t) - 3t = 1$, es decir, $2t - 1 = 1$, luego $t = 1$.

4. Con $t = 1$: $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$.

Resultado: $P(2, 1, 3)$

EJERCICIO 112 ★ Básico IB · P1 TZ2 Mayo 2004

La recta $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{k} + \mu(\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$ y el plano $2x - y + z + 2 = 0$ se cortan en el punto P . Halle las coordenadas de P .

1. Las ecuaciones paramétricas de la recta son $x = 1 + \mu$, $y = -\mu$, $z = 1 + 2\mu$.

2. Sustituimos en el plano: $2(1 + \mu) - (-\mu) + (1 + 2\mu) + 2 = 0$, es decir, $5\mu + 5 = 0$, de donde $\mu = -1$.

3. Con $\mu = -1$: $x = 0$, $y = 1$, $z = -1$.

Resultado: $P(0, 1, -1)$

EJERCICIO 113 ★ Básico IB · P2 TZ0 Noviembre 2015

Los tres planos cuyas ecuaciones cartesianas son $2x + 3y - z = 11$, $x + 2y + z = 3$ y $5x - y - z = 10$ se cortan en el punto P . Halle las coordenadas de P .

1. Sumamos las dos primeras ecuaciones para eliminar z : $3x + 5y = 14$.

2. Sumamos la segunda y la tercera: $6x + y = 13$, es decir $y = 13 - 6x$.

3. Sustituimos en $3x + 5y = 14$: $3x + 65 - 30x = 14$, luego $-27x = -51$ y $x = \frac{17}{9}$.

4. $y = 13 - \frac{102}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$.

5. De la segunda ecuación, $z = 3 - x - 2y = 3 - \frac{17}{9} - \frac{30}{9} = -\frac{20}{9}$.

6. En la Prueba 2 se comprueba resolviendo el sistema con la calculadora.

Resultado: $P\left(\frac{17}{9}, \frac{5}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

EJERCICIO 114

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

Halle las coordenadas del punto de intersección de los planos definidos por las ecuaciones $x + y + z = 3$, $x - y + z = 5$, $x + y + 2z = 6$.

1. Restamos la primera ecuación a la tercera: $(x + y + 2z) - (x + y + z) = 6 - 3$, luego $z = 3$.
2. Restamos la segunda a la primera: $(x + y + z) - (x - y + z) = 3 - 5$, luego $2y = -2$ y $y = -1$.
3. Sustituimos en la primera: $x - 1 + 3 = 3$, así que $x = 1$.
4. Comprobamos en la segunda: $1 + 1 + 3 = 5$ y en la tercera: $1 - 1 + 6 = 6$. Se cumplen. (Con la CPG se resuelve el sistema 3×3 directamente.)

Resultado: $(1, -1, 3)$

EJERCICIO 115

★ Básico

IB · P1 TZ2 Mayo 2016

El siguiente sistema de ecuaciones representa tres planos en el espacio.

$$x + 3y + z = -1$$

$$x + 2y - 2z = 15$$

$$2x + y - z = 6$$

Halle las coordenadas del punto de intersección de los tres planos.

1. El punto de intersección es la solución del sistema. Se puede resolver con la CPG, o por eliminación.
2. Restamos la segunda ecuación a la primera: $y + 3z = -16$. (1)
3. Restamos al doble de la segunda la tercera: $2(x + 2y - 2z) - (2x + y - z) = 30 - 6$, es decir, $3y - 3z = 24$, o sea $y - z = 8$. (2)
4. Restamos (2) de (1): $4z = -24$, luego $z = -6$.
5. De (2): $y = 8 + z = 2$. De la primera ecuación: $x = -1 - 3y - z = -1 - 6 + 6 = -1$.
6. Comprobamos en la tercera: $2(-1) + 2 - (-6) = 6$. Se cumple.

Resultado: $(-1, 2, -6)$

EJERCICIO 116

★ Básico

IB · P1 TZ1 Mayo 2005

La recta $\frac{x-3}{2} = y+1 = \frac{5-z}{3}$ y el plano $2x - y + 3z = 10$ se cortan en el punto P .

Calcule las coordenadas de P .

1. Igualamos las tres fracciones a un parámetro s : $x = 3 + 2s$, $y = -1 + s$, $5 - z = 3s \Rightarrow z = 5 - 3s$.
2. Sustituimos en el plano:
$$2(3 + 2s) - (-1 + s) + 3(5 - 3s) = 6 + 4s + 1 - s + 15 - 9s = 22 - 6s = 10.$$
3. Resolvemos: $6s = 12$, luego $s = 2$.

4. Volvemos a la recta: $x = 7, y = 1, z = -1$.

Resultado: $P(7, 1, -1)$

EJERCICIO 117

★ Básico

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

Demostración

Un plano Π tiene por ecuación $\mathbf{r} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 16$ y una recta l tiene por ecuaciones $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-6}{4}$.

Compruebe que la recta l está contenida en el plano Π .

1. El plano es $2x - y + z = 16$, con normal $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$. La recta pasa por $(4, -2, 6)$ y tiene dirección $\mathbf{d} = (-1, 2, 4)$.
2. Para que la recta esté contenida en el plano hacen falta dos cosas: que un punto de la recta esté en el plano y que la dirección sea perpendicular a la normal.
3. Punto: $2 \cdot 4 - (-2) + 6 = 8 + 2 + 6 = 16$. El punto $(4, -2, 6)$ está en Π .
4. Dirección: $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = (-1)(2) + 2(-1) + 4 \cdot 1 = -2 - 2 + 4 = 0$. La recta es paralela al plano.
5. Una recta paralela a un plano que tiene un punto en él está contenida en el plano.

Queda demostrado.

EJERCICIO 118

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2010

Los tres planos

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= 3 \\ 4x + 5y - 2z &= -3 \\ 3x + 4y - 3z &= -7 \end{aligned}$$

se cortan en un punto de coordenadas (a, b, c) .

- a) Halle el valor de a, b y c .
- b) Las ecuaciones de otros tres planos son:

$$\begin{aligned} 2x - 4y - 3z &= 4 \\ -x + 3y + 5z &= -2 \\ 3x - 5y - z &= 6 \end{aligned}$$

Halle una ecuación vectorial de la recta de intersección de estos tres planos.

- a) 1. Eliminamos x . Restamos a la segunda ecuación el doble de la primera: $(4x + 5y - 2z) - 2(2x - 2y - z) = -3 - 6$, es decir, $9y = -9$, luego $y = -1$. 2. Eliminamos también x entre la primera y la tercera: $2 \cdot (3x + 4y - 3z) - 3 \cdot (2x - 2y - z) = 2 \cdot (-7) - 3 \cdot 3$, es decir, $14y - 3z = -23$. 3. Con $y = -1$: $-14 - 3z = -23$, luego $z = 3$. 4. De la primera ecuación: $2x + 2 - 3 = 3$, luego $x = 2$. 5. En la Prueba 2 el sistema también se resuelve directamente con la CPG.
- b) 1. Sumamos a la primera ecuación el doble de la segunda: $(2x - 4y - 3z) + 2(-x + 3y + 5z) = 4 + 2(-2)$, es decir, $2y + 7z = 0$, luego $y = -\frac{7z}{2}$. 2. De la segunda ecuación: $x = 3y + 5z + 2 = -\frac{21z}{2} + 5z + 2 = 2 - \frac{11z}{2}$. 3. Comprobamos con la tercera: $3x - 5y - z = 6 - \frac{33z}{2} + \frac{35z}{2} - z = 6$, que se cumple para todo z . Los tres planos comparten una recta. 4. Tomamos $z = 2t$: $x = 2 - 11t, y = -7t, z = 2t$.

Resultado: a) $a = 2, b = -1, c = 3$; b) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 119

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2001

Calcule la ecuación de la recta de intersección de los dos planos $-4x + y + z = -2$ y $3x - y + 2z = -1$.

1. Un vector director de la recta es perpendicular a los dos vectores normales $\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{d} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 - (-4) \cdot 2 \\ (-4)(-1) - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Buscamos un punto común. Con $z = 0$: $-4x + y = -2$ y $3x - y = -1$. Sumándolas, $-x = -3$, luego $x = 3$ e $y = 10$. El punto es $(3, 10, 0)$.
3. Comprobamos en los dos planos: $-12 + 10 = -2$ y $9 - 10 = -1$. Correcto.
4. Con $z = t$ obtenemos unas ecuaciones paramétricas.

Resultado: $x = 3 + 3t$, $y = 10 + 11t$, $z = t$

EJERCICIO 120

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 2002

Halle una ecuación de la recta de intersección de los siguientes planos

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 2 \\ 2x + 3y - 5z &= 3 \end{aligned}$$

1. El vector director es perpendicular a los dos vectores normales $(1, 2, -3)$ y $(2, 3, -5)$:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-5) - (-3) \cdot 3 \\ (-3) \cdot 2 - 1 \cdot (-5) \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y usamos el vector proporcional $(1, 1, 1)$.

2. Buscamos un punto común. Con $z = 0$: $x + 2y = 2$ y $2x + 3y = 3$. De la primera, $x = 2 - 2y$; en la segunda, $4 - 4y + 3y = 3$, luego $y = 1$ y $x = 0$. El punto es $(0, 1, 0)$.
3. Comprobamos: $0 + 2 = 2$ y $0 + 3 = 3$. Correcto.
4. La recta, en forma continua, es $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

Resultado: $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

EJERCICIO 121

★★ Medio

IB · P1 Mayo 2002

Las ecuaciones vectoriales de las rectas L_1 y L_2 son

$$L_1: \mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

$$L_2: \mathbf{r} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k} + \mu(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

Las dos rectas se cortan en el punto P . Halle el vector de posición de P .

1. Igualamos las coordenadas de los puntos de las dos rectas: $(1 + \lambda, 1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda) = (1 + 2\mu, 4 + \mu, 5 + 2\mu)$.
2. De la primera: $\lambda = 2\mu$.
3. De la segunda: $1 + 4\mu = 4 + \mu$, luego $\mu = 1$ y $\lambda = 2$.
4. Comprobamos en la tercera: $1 + 3 \cdot 2 = 7$ y $5 + 2 \cdot 1 = 7$. Se cumple.
5. Con $\lambda = 2$: $P(3, 5, 7)$.

Resultado: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 122

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2010

Considere el plano cuya ecuación es $4x - 2y - z = 1$ y la recta que viene dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 - 2\lambda$$

$$y = (2k - 1) + \lambda$$

$$z = -1 + k\lambda$$

Sabiendo que la recta es perpendicular al plano, halle:

- el valor de k .
- las coordenadas del punto de intersección de la recta y el plano.

a) 1. El vector director de la recta es $(-2, 1, k)$ y el vector normal del plano es $(4, -2, -1)$. 2. Si la recta es perpendicular al plano, ambos vectores son paralelos: $\frac{-2}{4} = \frac{1}{-2} = \frac{k}{-1}$. 3. Las dos primeras razones valen $-\frac{1}{2}$, luego $\frac{k}{-1} = -\frac{1}{2}$ y $k = \frac{1}{2}$.

b) 1. Con $k = \frac{1}{2}$ la recta es $x = 3 - 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -1 + \frac{\lambda}{2}$. 2. Sustituimos en el plano: $4(3 - 2\lambda) - 2\lambda - (-1 + \frac{\lambda}{2}) = 1$, es decir, $13 - \frac{21}{2}\lambda = 1$, luego $\lambda = \frac{8}{7}$. 3. El punto es $(3 - \frac{16}{7}, \frac{8}{7}, -1 + \frac{4}{7}) = (\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{3}{7})$.

Resultado: (a) $k = \frac{1}{2}$; (b) $(\frac{5}{7}, \frac{8}{7}, -\frac{3}{7})$

EJERCICIO 123

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2004

Considere los cuatro puntos $A(1, 4, -1)$, $B(2, 5, -2)$, $C(5, 6, 3)$ y $D(8, 8, 4)$. Halle el punto de intersección entre las rectas (AB) y (CD) .

1. Direcciones: $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ y $\overrightarrow{CD} = (3, 2, 1)$.

2. Ecuaciones paramétricas: $(AB) : (1 + s, 4 + s, -1 - s)$ y $(CD) : (5 + 3t, 6 + 2t, 3 + t)$.

3. Igualamos las dos primeras coordenadas: $1 + s = 5 + 3t$ y $4 + s = 6 + 2t$. Restando: $3 = 1 - t$, luego $t = -2$, y entonces $s = -2$.

4. Comprobamos la tercera coordenada: $-1 - s = 1$ y $3 + t = 1$. Coinciden, así que las rectas se cortan.

5. El punto se obtiene con $s = -2$: $(1 - 2, 4 - 2, -1 + 2) = (-1, 2, 1)$.

Resultado: $(-1, 2, 1)$

EJERCICIO 124

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

Considere las rectas l_1 y l_2 definidas mediante

$$l_1: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } l_2: \frac{6-x}{3} = \frac{y-2}{4} = 1-z \text{ donde } a \text{ es una constante.}$$

Sabiendo que las rectas l_1 y l_2 se cortan en un punto P,

- halle el valor de a ;
- determine las coordenadas del punto de intersección P.

- a) 1. Escribimos l_2 en paramétricas con $\frac{6-x}{3} = \frac{y-2}{4} = 1-z = \mu$: $x = 6 - 3\mu$, $y = 2 + 4\mu$, $z = 1 - \mu$. 2. Un punto de l_1 es $(-3 + \beta, -2 + 4\beta, a + 2\beta)$. Igualamos coordenadas:

$$-3 + \beta = 6 - 3\mu, \quad -2 + 4\beta = 2 + 4\mu, \quad a + 2\beta = 1 - \mu.$$

3. De la segunda: $\beta = 1 + \mu$. En la primera: $-3 + 1 + \mu = 6 - 3\mu$, $4\mu = 8$, $\mu = 2$ y $\beta = 3$. 4. En la tercera: $a + 6 = 1 - 2 = -1$, luego $a = -7$.

- b) 1. Con $\mu = 2$ en l_2 : $x = 6 - 6 = 0$, $y = 2 + 8 = 10$, $z = 1 - 2 = -1$. 2. Comprobamos con l_1 ($\beta = 3$): $(-3 + 3, -2 + 12, -7 + 6) = (0, 10, -1)$.

Resultado: a) $a = -7$; b) $P(0, 10, -1)$

EJERCICIO 125

★★ Medio

IB · P2 Noviembre 1997

Considere las rectas L_1 y L_2 dadas por las ecuaciones

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{4} \quad L_2: \frac{x+2}{2} = y-1 = 2-z$$

- Muestre que el vector $-2\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ es perpendicular a las rectas L_1 y L_2 .
- Muestre que L_1 y L_2 no se cortan.
- Calcule la ecuación del plano que contiene a L_1 y es paralelo a L_2 .

Dé su respuesta en la forma $ax + by + cz = d$.

- a) 1. Dirección de L_1 : igualando las fracciones a s , $x = 2 + 3s$, $y = 1 - 2s$, $z = 4s$, luego $\mathbf{d}_1 = (3, -2, 4)$ y pasa por $(2, 1, 0)$. 2. Dirección de L_2 : igualando a t , $x = -2 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$, luego $\mathbf{d}_2 = (2, 1, -1)$ y pasa por $(-2, 1, 2)$. 3. $(-2, 11, 7) \cdot (3, -2, 4) = -6 - 22 + 28 = 0$ y $(-2, 11, 7) \cdot (2, 1, -1) = -4 + 11 - 7 = 0$. Es perpendicular a ambas rectas.
- b) 1. Las direcciones $(3, -2, 4)$ y $(2, 1, -1)$ no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. 2. Buscamos un punto común: $2 + 3s = -2 + 2t$, $1 - 2s = 1 + t$, $4s = 2 - t$. 3. De la segunda, $t = -2s$. En la primera: $2 + 3s = -2 - 4s$, luego $s = -\frac{4}{7}$ y $t = \frac{8}{7}$. 4. En la tercera: $4s = -\frac{16}{7}$ y $2 - t = \frac{6}{7}$. No coinciden. 5. El sistema no tiene solución: las rectas no se cortan.
- c) 1. El plano contiene a L_1 y es paralelo a L_2 , así que sus vectores directores son $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_2$. Un normal es $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$, y por el apartado a) puede tomarse $\mathbf{n} = (-2, 11, 7)$. 2. El plano es $-2x + 11y + 7z = d$. Pasa por $(2, 1, 0)$ de L_1 : $d = -4 + 11 = 7$. 3. $-2x + 11y + 7z = 7$. Comprobamos con otro punto de L_1 , $(5, -1, 4)$: $-10 - 11 + 28 = 7$.

Resultado: c) $-2x + 11y + 7z = 7$. Los apartados a) y b) son demostraciones.

EJERCICIO 126

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

Las rectas l_1 y l_2 tienen por ecuaciones $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ respectivamente, donde λ y μ son parámetros.

- a) Compruebe que l_1 pasa por el punto $(2, -7, 4)$.
b) Determine si las rectas l_1 y l_2 se cortan.

- a) 1. Un punto está en l_1 si existe un λ que reproduce sus tres coordenadas:

$$4 + \lambda = 2, \quad 3 + 5\lambda = -7, \quad -2\lambda = 4.$$

2. La primera da $\lambda = -2$, y ese valor cumple también la segunda ($3 - 10 = -7$) y la tercera ($-2 \cdot (-2) = 4$).
3. Luego $(2, -7, 4)$ pertenece a l_1 .

- b) 1. Igualamos las coordenadas de un punto de l_1 y uno de l_2 :

$$4 + \lambda = 2$$

$$3 + 5\lambda = -1 + 2\mu$$

$$-2\lambda = 3 - 3\mu$$

2. De la primera, $\lambda = -2$. Sustituyendo en la segunda: $3 - 10 = -1 + 2\mu$, de donde $\mu = -3$. 3. Comprobamos en la tercera: el primer miembro vale $-2 \cdot (-2) = 4$ y el segundo $3 - 3 \cdot (-3) = 12$. No coinciden. 4. El sistema no tiene solución, así que las rectas no tienen ningún punto común.

Resultado: a) $\lambda = -2$ da el punto $(2, -7, 4)$. b) Las rectas no se cortan.

EJERCICIO 127

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2008

Encuentre la ecuación vectorial de la recta de intersección de los tres planos representados por el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x - 7y + 5z = 1$$

$$6x + 3y - z = -1$$

$$-14x - 23y + 13z = 5$$

- Usamos z como parámetro y despejamos x e y con las dos primeras ecuaciones. De la segunda, $z = 6x + 3y + 1$.
- Sustituimos en la primera: $2x - 7y + 5(6x + 3y + 1) = 1$, es decir, $32x + 8y = -4$, o sea $8x + 2y = -1$.
- Sustituimos en la tercera: $-14x - 23y + 13(6x + 3y + 1) = 5$, es decir, $64x + 16y = -8$, o sea $8x + 2y = -1$. Es la misma ecuación, así que la tercera no añade información y los tres planos se cortan en una recta (el sistema es compatible indeterminado).
- Con $x = s$: $y = \frac{-1 - 8s}{2} = -\frac{1}{2} - 4s$ y $z = 6s + 3(-\frac{1}{2} - 4s) + 1 = -\frac{1}{2} - 6s$. Es una forma válida; para tener un punto y un vector más cómodos, reparametrizamos con $z = t$.
- De $z = -\frac{1}{2} - 6s$ obtenemos $s = -\frac{1}{12} - \frac{t}{6}$, y entonces $x = -\frac{1}{12} - \frac{t}{6}$, $y = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}t$. Es decir, con $z = t$:
$$x = -\frac{1}{12} - \frac{1}{6}t, \quad y = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}t, \quad z = t.$$
- Multiplicando el vector director por 6 (cambiando el parámetro $t = 6u$): punto $(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}, 0)$ y dirección $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.
- Comprobación del vector director: es perpendicular a las tres normales, pues $2(-1) - 7 \cdot 4 + 5 \cdot 6 = 0$, $6(-1) + 3 \cdot 4 - 6 = 0$ y $-14(-1) - 23 \cdot 4 + 13 \cdot 6 = 0$.

Resultado: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 128

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

Los planos $2x + 3y - z = 5$ y $x - y + 2z = k$ se cortan en la recta $5x + 1 = 9 - 5y = -5z$.

Encuentre el valor de k .

1. Todos los puntos de la recta deben estar en el segundo plano. Para obtener un punto de la recta tomamos $x = 0$: $5x + 1 = 1$, luego $9 - 5y = 1$ da $y = \frac{8}{5}$ y $-5z = 1$ da $z = -\frac{1}{5}$. El punto es $(0, \frac{8}{5}, -\frac{1}{5})$.
2. Comprobamos que está en el primer plano: $2 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{8}{5} - (-\frac{1}{5}) = \frac{24}{5} + \frac{1}{5} = 5$. Se cumple.
3. Imponemos que esté en el segundo plano: $k = 0 - \frac{8}{5} + 2(-\frac{1}{5}) = -\frac{10}{5} = -2$.
4. Comprobación con otro punto: con $5x + 1 = 9 - 5y = -5z = u$ se tiene $x = \frac{u-1}{5}$, $y = \frac{9-u}{5}$, $z = -\frac{u}{5}$, y entonces $x - y + 2z = \frac{(u-1)-(9-u)-2u}{5} = -2$ para cualquier u .

Resultado: $k = -2$

EJERCICIO 129

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2011

Dos planos Π_1 y Π_2 tienen por ecuación $2x + y + z = 1$ y $3x + y - z = 2$, respectivamente.

- a) Halle la ecuación vectorial de L , la recta de intersección de Π_1 y Π_2 .
- b) Compruebe que el plano Π_3 , que es perpendicular a Π_1 y contiene a L , tiene por ecuación $x - 2z = 1$.
- c) El punto P tiene coordenadas $(-2, 4, 1)$, el punto Q pertenece a Π_3 y PQ es perpendicular a Π_2 . Halle las coordenadas de Q .

- a) 1. La dirección de L es perpendicular a las dos normales $\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Un punto de L : con $z = 0$ el sistema $2x + y = 1$, $3x + y = 2$ da (restando) $x = 1$ y $y = -1$. El punto es

$$(1, -1, 0). \quad 3. L: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- b) 1. Π_3 contiene a L y es perpendicular a Π_1 , así que su normal es perpendicular a la dirección de L y a $\mathbf{n}_1$. Sirve

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - (-5) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Entonces $\Pi_3: x - 2z = d$. Pasa por $(1, -1, 0)$, que está en L : $d = 1$. 3. Por tanto $\Pi_3: x - 2z = 1$, como se quería comprobar.

- c) 1. PQ es perpendicular a Π_2 , luego $Q = P + s\mathbf{n}_2 = (-2 + 3s, 4 + s, 1 - s)$. 2. Q está en Π_3 : $(-2 + 3s) - 2(1 - s) = 1$, es decir, $-4 + 5s = 1$ y $s = 1$. 3. $Q = (1, 5, 0)$.

Resultado: a) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. b) $\Pi_3: x - 2z = 1$. c) $Q(1, 5, 0)$.

EJERCICIO 130

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

Consideremos las siguientes ecuaciones, donde $a, b \in \mathbb{R}$:

$$x + 3y + (a - 1)z = 1$$

$$2x + 2y + (a - 2)z = 1$$

$$3x + y + (a - 3)z = b$$

- a) Si cada una de estas ecuaciones define un plano, muestre que, para cualquier valor de a , los planos no se cortan en un punto único.
- b) Halle el valor de b para el cual la intersección de los planos es una recta.

- a) 1. Los coeficientes de las incógnitas forman las filas $F_1 = (1, 3, a - 1)$, $F_2 = (2, 2, a - 2)$ y $F_3 = (3, 1, a - 3)$.
2. Se cumple $2F_2 - F_1 = (4 - 1, 4 - 3, 2a - 4 - a + 1) = (3, 1, a - 3) = F_3$ para todo a . 3. Entonces el determinante de la matriz de coeficientes es 0 para cualquier a (una fila es combinación de las otras), y el sistema nunca tiene solución única: o no tiene solución o tiene infinitas.
- b) 1. Aplicamos la misma combinación a los términos independientes: $2 \cdot 1 - 1 = 1$. Para que la tercera ecuación sea consecuencia de las dos primeras hace falta que $b = 1$. 2. Si $b \neq 1$, la tercera ecuación contradice a las otras dos y el sistema no tiene solución (los planos no tienen ningún punto común). 3. Si $b = 1$, la tercera ecuación sobra y quedan dos ecuaciones independientes (los planos F_1 y F_2 no son paralelos porque $(1, 3)$ y $(2, 2)$ no son proporcionales). Dos planos no paralelos se cortan en una recta.

Resultado: a) La tercera fila es $2F_2 - F_1$, el sistema no tiene solución única. b) $b = 1$.

EJERCICIO 131

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2014

- a) Muestre que el siguiente sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones.

$$x + y + 2z = -2$$

$$3x - y + 14z = 6$$

$$x + 2y = -5$$

El sistema de ecuaciones representa tres planos en el espacio.

- b) Halle las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los tres planos.

- a) 1. Eliminamos x de la segunda y la tercera ecuación con la primera: $F_2 - 3F_1$ y $F_3 - F_1$:

$$x + y + 2z = -2$$

$$-4y + 8z = 12$$

$$y - 2z = -3$$

2. Multiplicamos la tercera por 4 y la sumamos a la segunda ($4F_3 + F_2$):

$$x + y + 2z = -2$$

$$-4y + 8z = 12$$

$$0 = 0$$

3. La última ecuación se cumple siempre, así que quedan dos ecuaciones independientes con tres incógnitas: el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

- b) 1. De $-4y + 8z = 12$ obtenemos $y = -3 + 2z$. 2. Tomamos $z = t$: $y = -3 + 2t$. De la primera ecuación, $x = -2 - y - 2z = -2 + 3 - 2t - 2t = 1 - 4t$. 3. Ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 - 4t, \quad y = -3 + 2t, \quad z = t.$$

4. Comprobación en la tercera ecuación original: $x + 2y = 1 - 4t - 6 + 4t = -5$.

Resultado: a) La tercera ecuación se anula al combinar las otras dos: infinitas soluciones. b) $x = 1 - 4t$, $y = -3 + 2t$, $z = t$.

EJERCICIO 132

★★ Medio

IB · P2 TZ1 Mayo 2009

Consideremos los planos definidos por las ecuaciones $x + y + 2z = 2$, $2x - y + 3z = 2$ y $5x - y + az = 5$ donde a es un número real.

- a) Si $a = 4$ encuentra las coordenadas del punto de intersección de los tres planos.
b) (i) Encuentre el valor de a para el cual los planos no se cortan en un punto único.
(ii) Para este valor de a demuestre que los tres planos no tienen ningún punto común.

- a) 1. Sumamos las dos primeras ecuaciones: $3x + 5z = 4$. 2. Restamos la segunda a la tercera (con $a = 4$): $(5x - y + 4z) - (2x - y + 3z) = 5 - 2$, es decir $3x + z = 3$. 3. Restamos esta última a $3x + 5z = 4$: $4z = 1$, luego $z = \frac{1}{4}$. 4. De $3x + z = 3$: $3x = \frac{11}{4}$, así que $x = \frac{11}{12}$. 5. De la primera ecuación: $y = 2 - x - 2z = 2 - \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$. 6. El punto de intersección es $\left(\frac{11}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}\right)$.
b) (i) 1. En general, restando la segunda ecuación a la tercera obtenemos $3x + (a - 3)z = 3$. Junto con $3x + 5z = 4$, al restar queda $(a - 8)z = -1$. 2. Si $a \neq 8$, z queda determinado y el sistema tiene solución única. Los planos no se cortan en un punto único cuando $a = 8$.

(Equivalentemente, el determinante de los coeficientes es $24 - 3a$, que se anula para $a = 8$.)

- (ii) 1. Con $a = 8$ las ecuaciones $3x + 5z = 4$ y $3x + 5z = 3$ (esta última sale de restar la segunda a la tercera) se contradicen: $4 = 3$ es imposible. 2. El sistema es incompatible, así que los tres planos no tienen ningún punto común.

Resultado: a) $\left(\frac{11}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}\right)$; b) i) $a = 8$; ii) el sistema es incompatible, no hay ningún punto común.

EJERCICIO 133

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2008

- a) Halle el conjunto de valores k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones no tiene solución

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= k \\ 3x + y + 2z &= 4 \\ 5x + 7z &= 5\end{aligned}$$

- b) Describa la relación geométrica que existe entre los tres planos representados por este sistema de ecuaciones.

- a) 1. Buscamos si la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras en el lado izquierdo: $\alpha(1, 2, -3) + \beta(3, 1, 2) = (5, 0, 7)$. De la coordenada y : $2\alpha + \beta = 0$, luego $\beta = -2\alpha$. De la coordenada x : $\alpha + 3\beta = 5$, o sea $-5\alpha = 5$ y $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Comprobamos con z : $3 + 4 = 7$. Correcto. 2. Entonces el determinante de los coeficientes es 0 y la tercera ecuación equivale a $-(1 \cdot 3) + 2(2 \cdot 3)$ en la parte izquierda. Para que el sistema sea compatible, el lado derecho debe cumplir lo mismo: $-k + 2 \cdot 4 = 5$, es decir $k = 3$. 3. Si $k \neq 3$, la ecuación $5x + 7z = 5$ contradice a las otras dos ($5x + 7z = 8 - k$) y el sistema no tiene solución.
b) 1. Para $k = 3$: las ecuaciones tienen rango 2 y ningún par de planos es paralelo. Los tres planos pasan por una misma recta (se cortan según una recta). 2. Para $k \neq 3$: no hay ningún punto común a los tres, pero los planos no son paralelos entre sí. Se cortan dos a dos según tres rectas paralelas, formando un prisma triangular.

Resultado: a) $k \neq 3$ (para todo $k \in \mathbb{R}$ salvo $k = 3$); b) si $k = 3$ los tres planos se cortan según una recta; si $k \neq 3$ no tienen ningún punto común y se cortan dos a dos según rectas paralelas.

EJERCICIO 134

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2022

Considere los tres planos

$$\Pi_1 : 2x - y + z = 4$$

$$\Pi_2 : x - 2y + 3z = 5$$

$$\Pi_3 : -9x + 3y - 2z = 32$$

- a) Muestre que los tres planos no se cortan.
- b) i) Compruebe que el punto $P(1, -2, 0)$ pertenece a Π_1 y Π_2 .
- (ii) Calcule la ecuación vectorial de L , la recta de intersección de Π_1 y Π_2 .
- c) Calcule la distancia entre L y Π_3 .

a) 1. Buscamos una combinación de Π_1 y Π_2 que reproduzca el lado izquierdo de Π_3 : $-5(2x - y + z) + (x - 2y + 3z) = -9x + 3y - 2z$. 2. Aplicando la misma combinación al lado derecho: $-5 \cdot 4 + 5 = -15$. Todo punto común a Π_1 y Π_2 cumpliría entonces $-9x + 3y - 2z = -15$. 3. Pero Π_3 exige $-9x + 3y - 2z = 32$, y $-15 \neq 32$. El sistema es incompatible: los tres planos no tienen ningún punto común.

b) i) Π_1 : $2 \cdot 1 - (-2) + 0 = 4$. Correcto. Π_2 : $1 - 2(-2) + 3 \cdot 0 = 5$. Correcto.

(ii) 1. El vector director de L es perpendicular a las dos normales:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(3) - (1)(-2) \\ (1)(1) - (2)(3) \\ (2)(-2) - (-1)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Con el punto P del apartado anterior:

$$L : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

c) 1. La normal de Π_3 es $(-9, 3, -2)$ y $(1, 5, 3) \cdot (-9, 3, -2) = -9 + 15 - 6 = 0$: la recta es paralela al plano, y como no se cortan (apartado a), no está contenida en él. 2. La distancia entre L y Π_3 es la distancia de cualquier punto de L , por ejemplo $P(1, -2, 0)$, al plano:

$$d = \frac{|-9 \cdot 1 + 3(-2) - 2 \cdot 0 - 32|}{\sqrt{81 + 9 + 4}} = \frac{47}{\sqrt{94}} = \frac{\sqrt{94}}{2} \approx 4,85.$$

Resultado: a) el sistema es incompatible; b) ii) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; c) $d = \frac{\sqrt{94}}{2} \approx 4,85$.

EJERCICIO 135

★★★ Difícil

IB · P2 TZ0 Noviembre 2008

Dadas las rectas $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Compruebe que estas dos rectas se cortan y halle el punto de intersección, A .
- Halle la ecuación cartesiana del plano π que contiene estas dos rectas.
- Sea B el punto de intersección del plano π y la recta $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$. Halle las coordenadas de B .
- Si C es el punto medio de AB , halle la ecuación vectorial de la recta que es perpendicular al plano π y que pase por C .

1. Igualamos las coordenadas:

$$3 + 2m = 1 + 4n, \quad 2 - m = 4 - n, \quad 7 + 2m = 2 + n.$$

2. De la segunda, $n = m + 2$. En la primera: $3 + 2m = 1 + 4m + 8$, luego $m = -3$ y $n = -1$. 3. Comprobamos en la tercera: $7 + 2(-3) = 1$ y $2 + (-1) = 1$. Se cumple, así que las rectas se cortan. 4. Con $m = -3$ en $\mathbf{r}_1$: $A = (3 - 6, 2 + 3, 7 - 6) = (-3, 5, 1)$.

1. Un vector normal al plano es el producto vectorial de los vectores directores:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. El plano es $x + 6y + 2z = d$. Con $A(-3, 5, 1)$: $d = -3 + 30 + 2 = 29$.

1. Los puntos de la recta son $(-8 + 3\lambda, -3 + 8\lambda, 2\lambda)$. Los sustituimos en el plano:

$$(-8 + 3\lambda) + 6(-3 + 8\lambda) + 2(2\lambda) = 29 \Rightarrow 55\lambda - 26 = 29 \Rightarrow \lambda = 1.$$

2. $B = (-5, 5, 2)$.

1. El punto medio de AB es $C = \left(\frac{-3-5}{2}, \frac{5+5}{2}, \frac{1+2}{2} \right) = \left(-4, 5, \frac{3}{2} \right)$. 2. El vector director es el normal $(1, 6, 2)$:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Resultado: a) $A(-3, 5, 1)$; b) $x + 6y + 2z - 29 = 0$; c) $B(-5, 5, 2)$; d) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 136

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2005

a) Sea π_1 el plano de ecuación $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Sea π_2 el plano de ecuación $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(i) Compruebe que $\lambda = \mu$ para los puntos comunes a π_1 y π_2 .

(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle una ecuación vectorial de la recta de intersección entre π_1 y π_2 .

b) El plano π_3 contiene a la recta $\frac{2-x}{3} = \frac{y}{-4} = z+1$ y es perpendicular a $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Halle la ecuación cartesiana de π_3 .

c) Halle la intersección entre π_1 , π_2 y π_3 .

a) i) 1. Un punto común cumple

$$2 - 2\lambda + \mu = 2 + s + t, \quad 1 + \lambda - 3\mu = 2s + t, \quad 1 + 8\lambda - 9\mu = 1 + s + t.$$

2. La primera ecuación da $s + t = -2\lambda + \mu$ y la tercera da $s + t = 8\lambda - 9\mu$. Igualando: $-2\lambda + \mu = 8\lambda - 9\mu$, es decir, $10\mu = 10\lambda$, luego $\lambda = \mu$.

a) ii) 1. Con $\mu = \lambda$ los puntos de π_1 que están también en π_2 son

$$\begin{pmatrix} 2 - 2\lambda + \lambda \\ 1 + \lambda - 3\lambda \\ 1 + 8\lambda - 9\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 1 - 2\lambda \\ 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Resolviendo el sistema se comprueba que a cada λ le corresponden valores de s y de t (con $t = -1$ y $s = 1 - \lambda$), así que todos esos puntos pertenecen a π_2 . La recta de intersección es

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) 1. La recta tiene ecuaciones paramétricas $x = 2 - 3k$, $y = -4k$, $z = -1 + k$: pasa por $(2, 0, -1)$ y su vector director es $(-3, -4, 1)$. 2. Que el plano sea perpendicular al vector $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ significa que ese vector es normal al plano: $3x - 2y + z = d$. 3. Con el punto $(2, 0, -1)$: $d = 6 - 0 - 1 = 5$. 4. Comprobamos que el plano contiene a la recta: $(-3, -4, 1) \cdot (3, -2, 1) = -9 + 8 + 1 = 0$.

c) 1. Sustituimos la recta de a) ii) en π_3 :

$$3(2 - \lambda) - 2(1 - 2\lambda) + (1 - \lambda) - 5 = 6 - 3\lambda - 2 + 4\lambda + 1 - \lambda - 5 = 0.$$

2. El resultado es $0 = 0$ para todo λ : toda la recta está en π_3 . Los tres planos se cortan en esa recta.

Resultado: a) ii) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $3x - 2y + z - 5 = 0$; c) los tres planos se cortan en la recta del apartado

a) ii).

EJERCICIO 137

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2015

Las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 son

$$L_1: \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad L_2: \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- a) Muestre que las rectas L_1 y L_2 son alabeadas.
b) Halle el ángulo agudo que forman las rectas L_1 y L_2 .
c) (i) Halle un vector perpendicular a ambas rectas.
(ii) A partir de lo anterior, determine una ecuación de la recta L_3 que es perpendicular a L_1 y L_2 y que corta a ambas rectas.

- a) 1. Los vectores directores $\mathbf{d}_1 = (-1, 1, 2)$ y $\mathbf{d}_2 = (2, 1, 6)$ no son proporcionales, así que las rectas no son paralelas. 2. Veamos si se cortan: igualamos coordenadas,

$$1 - \lambda = 1 + 2\mu, \quad 2 + \lambda = 2 + \mu, \quad 2 + 2\lambda = 4 + 6\mu.$$

3. De la primera, $\lambda = -2\mu$; de la segunda, $\lambda = \mu$. Entonces $\mu = 0$ y $\lambda = 0$. 4. En la tercera ecuación queda $2 = 4$, que es falso. No hay punto común. 5. Rectas que no son paralelas ni se cortan son alabeadas.

- b) 1. El ángulo agudo entre dos rectas cumple $\cos \theta = \frac{|\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2|}{|\mathbf{d}_1||\mathbf{d}_2|}$. 2. $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = -2 + 1 + 12 = 11$, $|\mathbf{d}_1| = \sqrt{6}$, $|\mathbf{d}_2| = \sqrt{41}$. 3. $\cos \theta = \frac{11}{\sqrt{246}}$, luego $\theta \approx 45,5^\circ$.

- c) (i) Un vector perpendicular a ambas rectas es el producto vectorial

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 6 \\ (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- (ii) 1. L_3 tiene dirección $\mathbf{n} = (4, 10, -3)$. Buscamos P en L_1 y Q en L_2 tales que $\overrightarrow{PQ}$ sea paralelo a $\mathbf{n}$. 2. $P = (1 - \lambda, 2 + \lambda, 2 + 2\lambda)$ y $Q = (1 + 2\mu, 2 + \mu, 4 + 6\mu)$, así que $\overrightarrow{PQ} = (2\mu + \lambda, \mu - \lambda, 2 + 6\mu - 2\lambda)$. 3. Imponemos $\overrightarrow{PQ} = c(4, 10, -3)$:

$$2\mu + \lambda = 4c, \quad \mu - \lambda = 10c, \quad 2 + 6\mu - 2\lambda = -3c.$$

4. Sumando las dos primeras, $3\mu = 14c$, es decir $\mu = \frac{14c}{3}$, y entonces $\lambda = \mu - 10c = -\frac{16c}{3}$. 5. En la tercera: $2 + 28c + \frac{32c}{3} = -3c$, de donde $\frac{125c}{3} = -2$ y $c = -\frac{6}{125}$. Por tanto $\lambda = \frac{32}{125}$ (y $\mu = -\frac{28}{125}$). 6. $P = \left(\frac{93}{125}, \frac{282}{125}, \frac{314}{125}\right)$ está en L_1 y en L_3 . Una ecuación de L_3 es

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 93/125 \\ 282/125 \\ 314/125 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \text{o bien} \quad \frac{x - \frac{93}{125}}{4} = \frac{y - \frac{282}{125}}{10} = \frac{z - \frac{314}{125}}{-3}.$$

Resultado: b) $\theta \approx 45,5^\circ$; c) (i) $4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; (ii) $\frac{x - \frac{93}{125}}{4} = \frac{y - \frac{282}{125}}{10} = \frac{z - \frac{314}{125}}{-3}$. El apartado a) queda demostrado.

EJERCICIO 138

★★★ Difícil

IB · P2 Noviembre 1996

(i) Las dos rectas L y M y el plano P vienen dados por

$$L: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad M: \frac{x-6}{-4} = \frac{y}{2} = z+10 \quad P: x+3y-2z=4.$$

- Calcule las coordenadas del punto de intersección de la recta L y el plano P .
- Calcule el ángulo agudo entre la recta L y P , dando su respuesta a la décima de grado más cercana.
- Muestre que la recta M es paralela al plano P .
- Muestre que las rectas L y M no se cortan.
- Calcule la distancia más corta entre las rectas L y M .

a) 1. Forma paramétrica de L : $(3+2t, -1+4t, 2-t)$. 2. Sustituimos en P : $(3+2t) + 3(-1+4t) - 2(2-t) = 4 \Rightarrow 16t - 4 = 4 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$. 3. Punto: $\left(4, 1, \frac{3}{2}\right)$.

b) 1. Dirección de L : $\mathbf{d}_L = (2, 4, -1)$; normal de P : $\mathbf{n} = (1, 3, -2)$. 2. $\sin \theta = \frac{|\mathbf{d}_L \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{d}_L||\mathbf{n}|} = \frac{2+12+2}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{294}} \approx 0,933$. 3. $\theta \approx 68,9^\circ$.

c) 1. Dirección de M : $\mathbf{d}_M = (-4, 2, 1)$ (en $z+10$ el denominador es 1). 2. $\mathbf{d}_M \cdot \mathbf{n} = -4+6-2=0$: M es paralela a P o está contenida en él. 3. M pasa por $(6, 0, -10)$ y $6+0+20=26 \neq 4$: ese punto no está en P . Luego M es paralela a P sin estar contenida en él.

d) 1. $\mathbf{d}_L = (2, 4, -1)$ y $\mathbf{d}_M = (-4, 2, 1)$ no son proporcionales: no son paralelas. 2. Si se cortaran: $3+2t = 6-4s$, $-1+4t = 2s$, $2-t = -10+s$. 3. De la segunda, $s = -\frac{1}{2} + 2t$; en la primera, $3+2t = 6-4(-\frac{1}{2}+2t) = 8-8t$, de donde $10t = 5$, $t = \frac{1}{2}$ y $s = \frac{1}{2}$. 4. En la tercera ecuación: $2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ frente a $-10+\frac{1}{2} = -\frac{19}{2}$. No coinciden. Las rectas no se cortan (son alabeadas).

e) 1. Vector perpendicular a las dos: $\mathbf{d}_L \times \mathbf{d}_M = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \\ (-1)(-4) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix}$, proporcional a $(3, 1, 10)$. 2.

Puntos $A(3, -1, 2) \in L$ y $B(6, 0, -10) \in M$: $\overrightarrow{AB} = (3, 1, -12)$. 3. $d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (3, 1, 10)|}{|(3, 1, 10)|} = \frac{|9+1-120|}{\sqrt{110}} = \frac{110}{\sqrt{110}} = \sqrt{110} \approx 10,5$.

Resultado: a) $\left(4, 1, \frac{3}{2}\right)$; b) $68,9^\circ$; e) $d(L, M) = \sqrt{110}$. Los apartados c) y d) quedan demostrados.

EJERCICIO 139

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 1998

Las ecuaciones de los planos P_1 y P_2 vienen dadas por

$$P_1 : \mathbf{r} \cdot (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -1 \quad P_2 : \mathbf{r} \cdot (-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 4$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es el vector de posición para un punto en el plano.

a) Sea L la recta intersección de los dos planos P_1 y P_2 .

(i) Muestre que L es paralela a $3\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(ii) Muestre que el punto $A(0, -1, -1)$ pertenece a la recta L .

Usando esto, o de cualquier otra manera, calcule la ecuación de L .

La ecuación de un tercer plano P_3 viene dada por $P_3 : \mathbf{r} \cdot (-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = c$.

b) Determine el valor de c para que los tres planos P_1 , P_2 y P_3 se corten y deduzca si este valor de c da un punto de intersección o una línea de intersección.

c) Para $c = 5$,

(i) Muestre que el plano P_3 es paralelo a la recta L ;

(ii) Calcule la distancia entre la recta L y el plano P_3 .

Las ecuaciones cartesianas son $P_1 : 3x - y + 2z = -1$, $P_2 : -2x + y - 5z = 4$ y $P_3 : -4x + y + z = c$, con normales $\mathbf{n}_1 = (3, -1, 2)$, $\mathbf{n}_2 = (-2, 1, -5)$ y $\mathbf{n}_3 = (-4, 1, 1)$.

a) i) 1. La recta L está en los dos planos, así que su dirección es perpendicular a $\mathbf{n}_1$ y a $\mathbf{n}_2$. Un vector con esa propiedad es su producto vectorial:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} (-1)(-5) - 2 \cdot 1 \\ 2(-2) - 3(-5) \\ 3 \cdot 1 - (-1)(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Luego L es paralela a $3\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(ii) 1. Sustituimos $A(0, -1, -1)$ en $P_1 : 3 \cdot 0 - (-1) + 2(-1) = 1 - 2 = -1$. Se cumple. 2. En $P_2 : -2 \cdot 0 + (-1) - 5(-1) = -1 + 5 = 4$. Se cumple. 3. Como A está en los dos planos, $A \in L$, y la recta pasa por A con dirección $(3, 11, 1)$:

$$L : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = 3t, \quad y = -1 + 11t, \quad z = -1 + t.$$

b) 1. Los tres planos tienen un punto común si lo tiene P_3 con L (que es la intersección de P_1 y P_2). Sustituimos los puntos de L en P_3 :

$$-4(3t) + (-1 + 11t) + (-1 + t) = -12t + 11t + t - 2 = -2.$$

2. El resultado no depende de t . Por tanto, $-2 = c$ es la única condición: si $c = -2$ todos los puntos de L están en P_3 ; si $c \neq -2$, ningún punto de L está en P_3 . 3. Para que los tres planos se corten, $c = -2$, y entonces su intersección es toda la recta L : es una **línea de intersección**.

c) i) 1. Con $c = 5$, el vector director de L cumple $(3, 11, 1) \cdot (-4, 1, 1) = -12 + 11 + 1 = 0$, así que L es perpendicular a $\mathbf{n}_3$, es decir, paralela al plano P_3 o contenida en él. 2. Como A no está en P_3 (da $-2 \neq 5$), L no está contenida en P_3 . Por tanto L es paralela a P_3 .

(ii) 1. La distancia de la recta al plano es la de cualquiera de sus puntos al plano; usamos $A(0, -1, -1)$ y $P_3 : -4x + y + z - 5 = 0$:

$$d = \frac{|-4 \cdot 0 + (-1) + (-1) - 5|}{\sqrt{16 + 1 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{18}} = \frac{7}{3\sqrt{2}} \approx 1,65.$$

Resultado: a) $L : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $c = -2$, los tres planos se cortan en una recta; c) $d(L, P_3) = \frac{7}{3\sqrt{2}} \approx 1,65$

EJERCICIO 140

★★★ Difícil

IB · P2 Mayo 1997

a) La recta L_1 es paralela al vector $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y pasa por el punto $(2, 3, 7)$.

Calcule la ecuación vectorial de la recta.

b) La ecuación del plano, E , está dada por $2x + 3y - 4z + 21 = 0$.

Calcule el punto de intersección de la recta L_1 y el plano E .

c) Calcule la ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano E .

d) Las ecuaciones paramétricas de otra recta L_2 son $x = t$, $y = t$, $z = -t$, $-\infty < t < \infty$.

Muestre que

(i) L_1 no es paralela a L_2 ;

(ii) L_1 no corta a L_2 .

e) Sea O el origen y P el punto $(-1, 2, 4)$.

(i) Calcule un vector $\mathbf{w}$ paralelo a la recta L_2 .

(ii) Calcule el vector $\overrightarrow{PO}$.

(iii) Calcule la distancia más corta entre las rectas L_1 y L_2 usando la fórmula

$$d = \frac{|\overrightarrow{PO} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

a) 1. La recta pasa por $(2, 3, 7)$ con dirección $\mathbf{v} = (3, 1, 3)$:

$$L_1 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) 1. Un punto genérico de L_1 es $(2 + 3\lambda, 3 + \lambda, 7 + 3\lambda)$. Lo sustituimos en E :

$$2(2 + 3\lambda) + 3(3 + \lambda) - 4(7 + 3\lambda) + 21 = 4 + 6\lambda + 9 + 3\lambda - 28 - 12\lambda + 21 = 6 - 3\lambda = 0.$$

2. Luego $\lambda = 2$ y el punto de corte es $(8, 5, 13)$.

c) 1. Un plano paralelo a E tiene la misma normal: $2x + 3y - 4z + D = 0$. 2. Pasa por $(1, 2, 3)$: $2 + 6 - 12 + D = 0 \Rightarrow D = 4$. 3. El plano es $2x + 3y - 4z + 4 = 0$.

d) i) 1. Las direcciones son $(3, 1, 3)$ y $(1, 1, -1)$. Si fueran proporcionales, $(3, 1, 3) = k(1, 1, -1)$, la primera componente exigiría $k = 3$ y la segunda $k = 1$, lo cual es imposible. Por tanto L_1 no es paralela a L_2 .

(ii) 1. Un punto común cumpliría $2 + 3\lambda = t$, $3 + \lambda = t$, $7 + 3\lambda = -t$. 2. De las dos primeras: $2 + 3\lambda = 3 + \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ y $t = \frac{7}{2}$. 3. En la tercera: $7 + \frac{3}{2} = \frac{17}{2}$ y $-t = -\frac{7}{2}$. No coinciden, así que no hay solución: L_1 no corta a L_2 .

e) i) 1. La dirección de L_2 es $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(ii) 1. $\overrightarrow{PO} = O - P = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(iii) 1. Calculamos

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}.$$

2. El producto escalar es $\overrightarrow{PO} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 1(-4) + (-2)(6) + (-4)(2) = -24$. 3. Entonces

$$d = \frac{|-24|}{2\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{7} \approx 3,21.$$

(Aquí P está en L_1 , con $\lambda = -1$, y O está en L_2 , con $t = 0$.)

Resultado: a) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; b) $(8, 5, 13)$; c) $2x + 3y - 4z + 4 = 0$; e) i) $\mathbf{w} = (1, 1, -1)$, ii) $\overrightarrow{PO} = (1, -2, -4)$, iii)

$$d = \frac{12}{\sqrt{14}} \approx 3,21$$

EJERCICIO 141

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2012

a) Halle los valores de k para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones no tiene solución y el valor de k para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 3 \\ x + 5y - 2z &= 1 \\ 16y - 6z &= k \end{aligned}$$

b) Sabiendo que el sistema de ecuaciones se puede resolver, halle las soluciones en forma de ecuación vectorial de una recta, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$, donde las componentes de $\mathbf{b}$ son números enteros.

c) El plano π es paralelo tanto a la recta del apartado (b) como a la recta $\frac{x-4}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-2}{0}$.

Sabiendo que el punto $(1, 2, 0)$ pertenece a π , compruebe que la ecuación cartesiana de π es $16x + 24y - 11z = 64$.

d) El eje z corta al plano π en el punto P . Halle las coordenadas de P .

e) Halle el ángulo entre la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{2}$ y el plano π .

a) 1. Restamos las dos primeras ecuaciones: $(x + 5y - 2z) - (x - 3y + z) = 1 - 3$, es decir, $8y - 3z = -2$. 2. Multiplicando por 2: $16y - 6z = -4$. 3. La tercera ecuación dice $16y - 6z = k$. Si $k \neq -4$ contradice a la anterior y el sistema no tiene solución. Si $k = -4$ la tercera es consecuencia de las otras dos y quedan dos ecuaciones con tres incógnitas: infinitas soluciones.

b) 1. Con $k = -4$ el sistema equivale a $x - 3y + z = 3$ y $8y - 3z = -2$. 2. Tomamos $z = t$: $y = \frac{3t-2}{8}$. 3. $x = 3 + 3y - z = 3 + \frac{9t-6}{8} - t = \frac{18+t}{8}$. 4. Entonces $(x, y, z) = \left(\frac{9}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right) + \frac{t}{8}(1, 3, 8)$. Tomando $\lambda = \frac{t}{8}$:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

c) 1. Las direcciones de las dos rectas son $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. La normal del plano es perpendicular a ambas:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 8 \cdot (-2) \\ 8 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

2. Entonces $\pi : 16x + 24y - 11z = d$. Con $(1, 2, 0)$: $d = 16 + 48 = 64$. 3. $\pi : 16x + 24y - 11z = 64$.

d) 1. Los puntos del eje z son $(0, 0, z)$. Sustituyendo: $-11z = 64$, luego $z = -\frac{64}{11}$. 2. $P = (0, 0, -\frac{64}{11})$.

e) 1. La dirección de la recta es $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y la normal del plano $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ -11 \end{pmatrix}$. 2. $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 48 + 96 - 22 = 122$,
 $|\mathbf{d}| = \sqrt{29}$ y $|\mathbf{n}| = \sqrt{256 + 576 + 121} = \sqrt{953}$. 3. $\sin \theta = \frac{122}{\sqrt{29}\sqrt{953}} = \frac{122}{\sqrt{27637}} \approx 0,734$, luego $\theta \approx 47,2^\circ$.

Resultado: a) sin solución si $k \neq -4$; infinitas soluciones si $k = -4$. b) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$. c) $16x + 24y - 11z = 64$. d) $P(0, 0, -\frac{64}{11})$. e) $\theta \approx 47,2^\circ$.

EJERCICIO 142

★★★ Dificil

IB · P2 TZ1 Mayo 2011

Las ecuaciones de tres planos, vienen dadas por

$$ax + 2y + z = 3$$

$$-x + (a + 1)y + 3z = 1, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$-2x + y + (a + 2)z = k$$

- a) Sabiendo que $a = 0$, muestre que los tres planos se cortan en un punto.
 b) Halle el valor de a tal que los tres planos no se corten en un punto.
 c) Sabiendo que los tres planos no se cortan en un punto, encuentre el valor de k tal que los planos se corten en una recta y encuentre una ecuación de esta recta en la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$.

- a) 1. Los tres planos se cortan en un punto cuando el determinante de la matriz de coeficientes no es cero. Con $a = 0$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (2 - 3) - 2 \cdot (-2 + 6) + 1 \cdot (-1 + 2) = -8 + 1 = -7.$$

2. Como $-7 \neq 0$, el sistema es compatible determinado: los tres planos se cortan en un único punto.

- b) 1. Calculamos el determinante para un valor cualquiera de a (con la CPG o a mano):

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ -1 & a+1 & 3 \\ -2 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = (a-1)(a^2 + 4a + 7).$$

2. El factor $a^2 + 4a + 7$ nunca se anula (su discriminante es $16 - 28 < 0$). El determinante es cero solo si $a = 1$, que es el valor buscado.

- c) 1. Con $a = 1$ el sistema es:

$$x + 2y + z = 3, \quad -x + 2y + 3z = 1, \quad -2x + y + 3z = k.$$

2. Sumando las dos primeras: $4y + 4z = 4$, es decir $y + z = 1$. 3. Restando la tercera a la segunda: $x + y = 1 - k$. 4. Sustituyendo $z = 1 - y$ en la primera: $x + 2y + 1 - y = 3$, es decir $x + y = 2$. 5. Para que el sistema sea compatible hace falta $1 - k = 2$, o sea $k = -1$. Entonces el sistema se reduce a dos ecuaciones independientes y los planos se cortan en una recta. 6. Tomando $z = \lambda$: $y = 1 - \lambda$ y $x = 2 - y = 1 + \lambda$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resultado: a) el determinante vale $-7 \neq 0$, se cortan en un punto; b) $a = 1$; c) $k = -1$ y $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problemas de contexto

EJERCICIO 143

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2012

Dos barcos, A y B , se mueven de manera que en el tiempo t horas, sus vectores de posición, en kilómetros, son $\mathbf{r}_A = (9t)\mathbf{i} + (3 - 6t)\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_B = (7 - 4t)\mathbf{i} + (7t - 6)\mathbf{j}$.

- Encuentre las coordenadas del punto común de las trayectorias de los dos barcos.
- Muestre que los barcos no chocan.

a) 1. La trayectoria de A tiene ecuaciones $x = 9t$, $y = 3 - 6t$. Eliminando el tiempo ($t = \frac{x}{9}$): $y = 3 - \frac{2x}{3}$. 2. La trayectoria de B tiene $x = 7 - 4t$, $y = 7t - 6$. Con $t = \frac{7-x}{4}$: $y = \frac{7(7-x)}{4} - 6 = \frac{25-7x}{4}$. 3. Igualamos: $3 - \frac{2x}{3} = \frac{25-7x}{4}$. Multiplicando por 12: $36 - 8x = 75 - 21x$, luego $13x = 39$ y $x = 3$. 4. Entonces $y = 3 - 2 = 1$. El punto común de las trayectorias es $(3, 1)$.

b) 1. El barco A está en $(3, 1)$ cuando $9t = 3$, es decir $t = \frac{1}{3}$ h (y con ese valor $3 - 6t = 1$, correcto). 2. El barco B está en $(3, 1)$ cuando $7 - 4t = 3$, es decir $t = 1$ h (y con ese valor $7t - 6 = 1$, correcto). 3. Pasan por el punto de corte en instantes distintos ($\frac{1}{3}$ h y 1 h), así que nunca están a la vez en el mismo lugar: no chocan.

Resultado: a) $(3, 1)$; b) A pasa por $(3, 1)$ en $t = \frac{1}{3}$ h y B en $t = 1$ h; son tiempos distintos, por lo que los barcos no chocan.

EJERCICIO 144

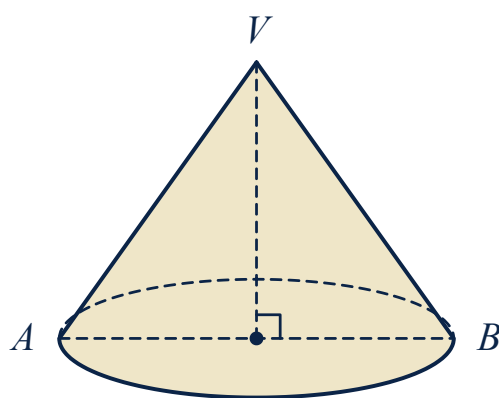
★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2022

Considere un círculo de diámetro AB , donde A tiene por coordenadas $(1, 4, 0)$ y B tiene por coordenadas $(-3, 2, -4)$.

- Halle:
 - Las coordenadas del centro del círculo
 - El radio del círculo

El círculo es la base de un cono recto cuyo vértice V tiene por coordenadas $(-1, -1, 0)$.



- Halle el volumen exacto del cono.

a) (i) 1. El centro es el punto medio de $[AB]$:

$$M = \left(\frac{1 + (-3)}{2}, \frac{4 + 2}{2}, \frac{0 + (-4)}{2} \right) = (-1, 3, -2).$$

(ii) 1. El diámetro mide $|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$. 2. El radio es la mitad: $r = 3$.

b) 1. Como el cono es recto, la altura es la distancia del vértice V al centro M de la base: $\overrightarrow{MV} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $h = \sqrt{0 + 16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. 2. El volumen del cono es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}\pi \approx 42,1.$$

Resultado: a) i) centro $(-1, 3, -2)$; ii) radio 3; b) $V = 6\sqrt{5}\pi$ (unidades cúbicas).

EJERCICIO 145

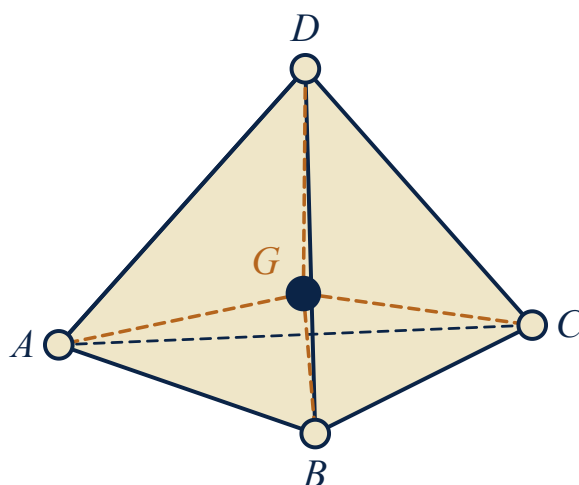
★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2012

Las coordenadas de los puntos A , B y C son $(5, -2, 5)$, $(5, 4, -1)$ y $(-1, -2, -1)$, respectivamente.

- Demuestre que $AB = AC$ y que $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
- Encuentre la ecuación cartesiana de Π , el plano que pasa por A , B y C .
- (i) Halle la ecuación cartesiana de Π_1 , el plano perpendicular a (AB) que pasa por el punto medio de $[AB]$.
(ii) Encuentre la ecuación cartesiana de Π_2 , el plano perpendicular a (AC) que pasa por el punto medio de $[AC]$.
- Encuentre la ecuación vectorial de L , la recta de intersección de Π_1 y Π_2 , y demuestre que es perpendicular a Π .

Una molécula de metano consiste en un átomo de carbono con cuatro átomos de hidrógeno simétricamente colocados alrededor de él en tres dimensiones.



Las posiciones de los centros de tres de los átomos de hidrógeno son A , B y C tal como están dadas en la gráfica. La posición del centro del cuarto átomo de hidrógeno es D .

- Utilizando el hecho de que $AB = AD$, muestre que las coordenadas de una de las posibles posiciones del cuarto átomo de hidrógeno es $(-1, 4, 5)$.
- Sabiendo que $D(-1, 4, 5)$, muestre que las coordenadas de G , la posición del centro del átomo de carbono, es $(2, 1, 2)$.

Usando lo anterior, calcule $\widehat{DGA}$, el ángulo de unión del carbono.

1. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ y $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$. 2. $AB = \sqrt{0 + 36 + 36} = 6\sqrt{2}$ y $AC = \sqrt{36 + 0 + 36} = 6\sqrt{2}$. Luego $AB = AC$.
3. Producto escalar: $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 + 0 + 36 = 36$. 4. $\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$, por tanto $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
1. Un vector normal es $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6(-6) - (-6)(0) \\ (-6)(-6) - 0 \cdot (-6) \\ 0 \cdot 0 - 6(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix} = 36 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2. El plano es $-x + y + z = d$. Con A : $d = -5 - 2 + 5 = -2$. 3. Π : $-x + y + z + 2 = 0$. Comprobación: B : $-5 + 4 - 1 = -2$ y C : $1 - 2 - 1 = -2$.
- (i) 1. El plano Π_1 tiene como normal $\vec{AB}$, paralelo a $(0, 1, -1)$: $y - z = d$. 2. El punto medio de $[AB]$ es $M_1 = (5, 1, 2)$, así que $d = 1 - 2 = -1$. 3. Π_1 : $y - z + 1 = 0$.
(ii) 1. La normal de Π_2 es $\vec{AC}$, paralelo a $(1, 0, 1)$: $x + z = d$. 2. El punto medio de $[AC]$ es $M_2 = (2, -2, 2)$, así que $d = 2 + 2 = 4$. 3. Π_2 : $-x - z + 4 = 0$ (es decir, $x + z = 4$).

- d) 1. Los puntos de L cumplen $y - z = -1$ y $x + z = 4$. Tomando $z = t$ como parámetro: $y = t - 1$, $x = 4 - t$. 2. Ecuación vectorial:

$$L: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. El vector director $(-1, 1, 1)$ es exactamente la normal de Π calculada en b). Una recta cuyo vector director es paralelo a la normal de un plano es perpendicular a ese plano.

- e) 1. Π_1 y Π_2 son los planos formados por los puntos que equidistan de A y B y de A y C respectivamente, así que L está formada por los puntos que equidistan de A , B y C . Como $AB = AC = AD$ y los cuatro átomos están colocados simétricamente, $AB = BC = AC = AD = BD = CD$ y D equidista de A , B y C , es decir,

D está en L . 2. Un punto de L es $D = (4 - t, t - 1, t)$. Entonces $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 - t \\ t + 1 \\ t - 5 \end{pmatrix}$. 3. Imponemos $AD^2 =$

$$AB^2 = 72:$$

$$2(t + 1)^2 + (t - 5)^2 = 72 \Rightarrow 3t^2 - 6t - 45 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 15 = 0.$$

4. Las soluciones son $t = 5$ y $t = -3$. Con $t = 5$ se obtiene $D = (-1, 4, 5)$ (y con $t = -3$, $D = (7, -4, -3)$, la posición simétrica al otro lado del plano Π). Por tanto $(-1, 4, 5)$ es una de las posiciones posibles.

- f) 1. En una molécula simétrica el centro G del carbono equidista de los cuatro átomos de hidrógeno. Equidistar de A , B y C significa estar en L : $G = (4 - s, s - 1, s)$. 2. Imponemos $GA = GD$:

$$GA^2 = (-1 - s)^2 + (s + 1)^2 + (s - 5)^2 = 3s^2 - 6s + 27, \quad GD^2 = (5 - s)^2 + (s - 5)^2 + (s - 5)^2 = 3s^2 - 30s + 75.$$

3. Igualando: $-6s + 27 = -30s + 75$, de donde $24s = 48$ y $s = 2$. Entonces $G = (2, 1, 2)$. 4. Comprobación:

$\overrightarrow{GA} = (3, -3, 3)$, $\overrightarrow{GB} = (3, 3, -3)$, $\overrightarrow{GC} = (-3, -3, -3)$, $\overrightarrow{GD} = (-3, 3, 3)$; los cuatro tienen módulo $3\sqrt{3}$. 5.

Ángulo de unión: $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{GA} = -9 - 9 + 9 = -9$ y $|\overrightarrow{GD}||\overrightarrow{GA}| = 27$, luego

$$\cos \widehat{DGA} = \frac{-9}{27} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{DGA} = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109,5^\circ.$$

Resultado: b) $\Pi: -x + y + z + 2 = 0$; c) i) $\Pi_1: y - z + 1 = 0$; ii) $\Pi_2: -x - z + 4 = 0$; d) $L: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} +$

$t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; f) $G = (2, 1, 2)$ y $\widehat{DGA} \approx 109,5^\circ$. Quedan demostrados a), d), e) y f).

EJERCICIO 146

★★★ Difícil

IB · P2 TZ2 Mayo 2022

Dos aviones (A y B) tienen por vector de posición respecto al origen O , respectivamente

$$\mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donde t representa el tiempo en minutos y $0 \leq t \leq 2,5$.

Las componentes de cada vector columna representan el desplazamiento hacia el este de O , el desplazamiento hacia el norte de O y la altura sobre el nivel del mar, y todas ellas se miden en kilómetros.

- Hallar la demora-expresada con tres cifras- con la que está viajando el avión B .
- Muestre que el avión A viaja a mayor velocidad que el avión B .
- Halle el ángulo agudo que forman las trayectorias de vuelo de los dos aviones.

Dé la respuesta en grados.

Las trayectorias de vuelo de los dos aviones se cruzan en el punto P .

- (i) Halle las coordenadas de P .
- (ii) Determine el tiempo que transcurre desde que el primer avión llega a P hasta que el segundo avión llega a P .

Sea $D(t)$ la distancia que hay entre el avión A y el avión B para $0 \leq t \leq 2,5$.

- Halle el valor mínimo de $D(t)$.

1. El vector velocidad de B es $(4, 2, -2)$: 4 km/min hacia el este y 2 km/min hacia el norte (la componente vertical no influye en la demora). 2. La demora se mide desde el norte en sentido horario. El ángulo respecto al norte cumple $\tan \theta = \frac{\text{este}}{\text{norte}} = \frac{4}{2} = 2$. 3. $\theta = \arctan 2 \approx 63,4^\circ$. Con tres cifras, la demora es 063° .

1. La rapidez es el módulo del vector velocidad. Para A : $|(-6, 2, 4)| = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \approx 7,48$ km/min. 2. Para B : $|(4, 2, -2)| = \sqrt{16 + 4 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \approx 4,90$ km/min. 3. Como $7,48 > 4,90$, el avión A viaja a mayor velocidad que el B .

1. El ángulo agudo entre las trayectorias cumple $\cos \theta = \frac{|\mathbf{d}_A \cdot \mathbf{d}_B|}{|\mathbf{d}_A||\mathbf{d}_B|}$. 2. $\mathbf{d}_A \cdot \mathbf{d}_B = -24 + 4 - 8 = -28$, y $|\mathbf{d}_A||\mathbf{d}_B| = \sqrt{56}\sqrt{24} = \sqrt{1344}$. 3. $\cos \theta = \frac{28}{\sqrt{1344}} \approx 0,7638$, de donde $\theta \approx 40,2^\circ$.

- (i) 1. Igualamos las posiciones con tiempos distintos (t para A y s para B), porque las trayectorias pueden cruzarse sin que los aviones coincidan:

$$19 - 6t = 1 + 4s, \quad -1 + 2t = 2s, \quad 1 + 4t = 12 - 2s.$$

2. De la segunda, $s = t - \frac{1}{2}$. En la primera: $19 - 6t = 1 + 4t - 2$, luego $10t = 20$ y $t = 2$, $s = \frac{3}{2}$. 3.

Comprobamos en la tercera: $1 + 8 = 9$ y $12 - 3 = 9$. Correcto. 4. $P = (19 - 12, -1 + 4, 1 + 8) = (7, 3, 9)$.

- (ii) 1. El avión B llega a P en $s = 1,5$ min y el avión A en $t = 2$ min. 2. Entre ambas llegadas pasan $2 - 1,5 = 0,5$ minutos.

1. El vector entre los aviones en el mismo instante t es $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} 18 - 10t \\ -1 \\ 6t - 11 \end{pmatrix}$. 2. $D(t)^2 = (18 - 10t)^2 + 1 + (6t - 11)^2 = 136t^2 - 492t + 446$. 3. D es mínima donde lo es D^2 (parábola con mínimo en el vértice): $t = \frac{492}{272} = \frac{123}{68} \approx 1,81$ min, que está dentro de $0 \leq t \leq 2,5$. También se puede obtener con la CPG minimizando $D(t)$. 4. $D^2 \left(\frac{123}{68} \right) = 446 - \frac{492^2}{4 \cdot 136} = \frac{35}{34}$, luego $D_{\min} = \sqrt{\frac{35}{34}} \approx 1,01$ km.

Resultado: a) 063° ; b) $v_A \approx 7,48$ km/min $>$ $v_B \approx 4,90$ km/min; c) $40,2^\circ$; d) i) $P(7, 3, 9)$; ii) 0,5 minutos; e) $D_{\min} \approx 1,01$ km (para $t \approx 1,81$ min).