

Ecuaciones exponenciales y logaritmos

Logaritmos para IB Análisis y Enfoques NS: definición, propiedades, cambio de base y ecuaciones exponenciales y logarítmicas, con ejercicios IB.

ecuacionganadora.com/recursos/ib-analisis-y-enfoques-ns/ecuaciones-exponenciales-y-logaritmos.html

Álvaro López · Calle Miguel Grau 1-32, Aldaia · 626 09 20 80

El logaritmo es la operación que «deshace» una potencia: responde a la pregunta «¿a qué exponente hay que elevar la base para obtener este número?». En este tema aprendes a **calcular y transformar logaritmos** y a **resolver ecuaciones** en las que la incógnita está en un exponente o dentro de un logaritmo, algo que aparece cada año en la Prueba 1.

Orden recomendado

Empieza por las **ecuaciones exponenciales** que se resuelven igualando bases; después estudia los **logaritmos y sus propiedades**, que permiten resolver las que no se pueden igualar, y termina con las **ecuaciones logarítmicas**, donde siempre hay que comprobar las soluciones. Al final tienes los **ejercicios de exámenes del IB** agrupados por tipo.

APARTADO 1

Ecuaciones exponenciales

IDEA CLAVE

Una ecuación exponencial es aquella en la que la incógnita aparece en un exponente. En este apartado verás los tres métodos que se resuelven sin logaritmos: igualar las bases, sacar factor común y el cambio de variable $t = a^x$. Son los que se piden en la Prueba 1 (sin calculadora) y la base de los apartados siguientes.

Qué es una ecuación exponencial

DEFINICIÓN • ECUACIÓN EXPONENCIAL

Una **ecuación exponencial** es una ecuación en la que la incógnita está en el exponente de una potencia de base constante. Por ejemplo, $2^{x+1} = 32$ o $9^x - 4 \cdot 3^x = -3$.

No lo son $x^2 = 9$ ni $x^3 = 8$: allí la incógnita está en la base. Aquí, en cambio, la base es fija y lo que buscas es el exponente.

Antes de resolver conviene recordar las propiedades de las potencias, porque casi todo el trabajo consiste en aplicarlas bien. Para $a > 0$:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Método 1: igualar las bases

Una potencia de base $a > 0$, con $a \neq 1$, toma cada valor **una sola vez**: si el exponente cambia, el resultado cambia. Esto permite «quitar» las bases cuando son iguales.

PROPIEDAD • IGUALDAD DE POTENCIAS DE LA MISMA BASE

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$$a^u = a^v \iff u = v$$

La razón es que a^x nunca repite valor. Por ejemplo, $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$; no existe otro exponente que dé 8. La condición $a \neq 1$ es necesaria: $1^u = 1^v$ se cumple siempre, sea cual sea u o v .

El problema es que la ecuación casi nunca viene con bases iguales. Hay que **escribir cada lado como potencia de una misma base**, normalmente un número pequeño (2, 3, 5, 10...). Las pistas habituales:

- Un número como 32, $\frac{1}{8}$ o $\sqrt{2}$ es una potencia de 2: 2^5 , 2^{-3} , $2^{1/2}$.
- Una fracción $(\frac{1}{4})^x$ se pasa a base 2 con exponente negativo: $(\frac{1}{4})^x = 2^{-2x}$.
- Una potencia de otra potencia se multiplica: $(9^x)^2 = 3^{4x}$.

MÉTODO • RESOLVER UNA ECUACIÓN IGUALANDO BASES

1. Elige una base común que permita escribir los dos lados (por ejemplo, 2 para 4, 8, $\frac{1}{2}$...).
2. Reescribe cada lado como una única potencia de esa base, aplicando las propiedades de las potencias.
3. Iguala los exponentes: $a^u = a^v \Rightarrow u = v$.
4. Resuelve la ecuación que queda (normalmente de primer o segundo grado).
5. Comprueba sustituyendo en la ecuación original.

Método 2: sacar factor común

Cuando hay varios términos con exponentes del tipo $x+1$, $x+2$, $x-1$... y la misma base, no se puede igualar bases todavía (hay una suma). Lo que se hace es separar el factor a^x con las propiedades del producto:

$$2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x \quad 5^{x-1} = \frac{5^x}{5}$$

Así todos los términos quedan como un número multiplicado por a^x , y se saca factor común. Por ejemplo, $2^{x+1} + 2^x = 2 \cdot 2^x + 2^x = 3 \cdot 2^x$.

MÉTODO • ECUACIONES CON EXPONENTES $x+k$ EN LA MISMA BASE

1. Escribe cada término como número por a^x : $a^{x+k} = a^k \cdot a^x$.
2. Suma o saca factor común de a^x y deja la ecuación en la forma $c \cdot a^x = d$.
3. Despeja $a^x = \frac{d}{c}$ y resuelve igualando bases.

Puedes escribir $t = a^x$ desde el principio para trabajar con menos símbolos: la ecuación pasa a ser $ct = d$ y al final deshaces el cambio.

Método 3: cambio de variable $t = a^x$

Si la ecuación mezcla a^{2x} (o $(a^x)^2$) con a^x y números, no hay forma de sacar factor común, pero sí de verla como una ecuación de segundo grado. Como $a^{2x} = (a^x)^2$, al llamar $t = a^x$ queda un polinomio en t .

PROPIEDAD • EL CAMBIO $t = a^x$ OBLIGA A $t > 0$

Para $a > 0$, la potencia a^x es siempre **positiva**. Por tanto, al hacer $t = a^x$ solo valen las soluciones $t > 0$. Una solución $t \leq 0$ se descarta, porque la ecuación $a^x = t$ no tiene solución.

Esta es la parte que más puntúa y más se olvida: puede que la ecuación en t tenga dos soluciones y solo una dé valores de x .

MÉTODO • ECUACIONES QUE SE REDUCEN A UNA CUADRÁTICA

1. Reescribe todos los términos con la misma base y exponentes $2x$ y x , de modo que aparezca $a^{2x} = (a^x)^2$ y a^x .
2. Haz el cambio $t = a^x$ y resuelve la ecuación en t (factorizando o con la fórmula).
3. **Descarta** las soluciones $t \leq 0$.
4. Para cada $t > 0$ que quede, resuelve $a^x = t$ igualando bases.
5. Comprueba cada solución x en la ecuación original.

Si la ecuación tiene t en un denominador (por ejemplo, $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{t}$), multiplica por t para quitarlo; no hay problema, porque $t > 0$ nunca es cero.

Cuando no se pueden igualar las bases

No todas las ecuaciones se arreglan con los métodos anteriores. En $2^x = 5$, el número 5 no es una potencia entera ni fraccionaria de 2, y no hay manera de igualar bases. Existe una solución, un número entre 2 y 3 (porque $2^2 = 4 < 5 < 8 = 2^3$), pero para escribirla con exactitud hace falta una herramienta nueva: los **logaritmos**, que se estudian en el apartado siguiente.

NOTA • EN LA PRUEBA 2

Si una ecuación exponencial no admite bases iguales, la Prueba 2 permite resolverla con la calculadora de pantalla gráfica (CPG), por ejemplo buscando el punto de corte de las dos gráficas. Aun así, cuando el enunciado pide el valor exacto o la Prueba 1 no deja calculadora, hay que usar los métodos de este apartado o los logaritmos.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Igualar bases con una fracción

Resuelve $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = 32$.

1. **Base común.** $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ y $32 = 2^5$. Las dos cantidades son potencias de 2.

2. **Reescribir cada lado como una potencia de 2:**

$$(2^{-2})^{x-2} = 2^5 \implies 2^{-2(x-2)} = 2^5$$

3. **Igualar exponentes:**

$$-2(x-2) = 5 \iff -2x + 4 = 5 \iff x = -\frac{1}{2}$$

4. **Comprobación.** Con $x = -\frac{1}{2}$: $x - 2 = -\frac{5}{2}$ y $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5/2} = 4^{5/2} = (\sqrt{4})^5 = 2^5 = 32$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Factor común y cambio de variable

Resuelve cada ecuación.

a) $3^{x+2} - 3^x = 216$

b) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

a) 1. **Separar el factor 3^x .** $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$, luego

$$9 \cdot 3^x - 3^x = 216 \iff 8 \cdot 3^x = 216 \iff 3^x = 27$$

2. **Igualar bases.** $27 = 3^3$, así que $x = 3$.

3. **Comprobación.** $3^5 - 3^3 = 243 - 27 = 216$.

b) 1. **Pasar todo a base 2.** $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$. La ecuación es $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

2. **Cambio de variable.** Con $t = 2^x$:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \iff (t - 4)(t + 1) = 0 \iff t = 4 \text{ o } t = -1$$

3. **Descartar.** Como $2^x > 0$ para todo x , la solución $t = -1$ no sirve: $2^x = -1$ no tiene solución.

4. **Deshacer el cambio.** $2^x = 4 = 2^2$, luego $x = 2$.

5. **Comprobación.** $4^2 - 3 \cdot 2^2 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$.

La ecuación de segundo grado tenía dos soluciones, pero la ecuación exponencial solo tiene una.

EJEMPLO 3 ★★★ Dificil

Un parámetro y el número de soluciones

Se considera la ecuación $2^x + 2^{3-x} = k$, donde k es una constante positiva.

- Para $k = 9$, halla todos los valores de x que cumplen la ecuación.
- Halla el valor de k para el cual la ecuación tiene exactamente una solución.
- Para ese valor de k , halla la solución.

1. **Cambio de variable (válido para cualquier k).** Como $2^{3-x} = \frac{2^3}{2^x} = \frac{8}{2^x}$, con $t = 2^x > 0$ la ecuación es

$$t + \frac{8}{t} = k$$

Multiplicamos por t , que es distinto de cero, y ordenamos:

$$t^2 - kt + 8 = 0$$

a) Con $k = 9$: $t^2 - 9t + 8 = 0 \iff (t - 1)(t - 8) = 0$, así que $t = 1$ o $t = 8$. Las dos son positivas y valen.

- $2^x = 1 = 2^0 \Rightarrow x = 0$.
- $2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$.

Comprobación: $2^0 + 2^3 = 1 + 8 = 9$ y $2^3 + 2^0 = 8 + 1 = 9$. Soluciones: $x = 0$ y $x = 3$.

b) Cada $t > 0$ da exactamente un valor de x . La ecuación en t debe tener entonces **una sola raíz positiva**, es decir, una raíz doble: el discriminante es cero.

$$\Delta = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = k^2 - 32 = 0 \iff k = \pm 4\sqrt{2}$$

Como $k > 0$, $k = 4\sqrt{2}$. (La raíz doble es $t = \frac{k}{2} = 2\sqrt{2} > 0$, así que vale.)

c) Con $k = 4\sqrt{2}$: $t = 2\sqrt{2} = 2 \cdot 2^{1/2} = 2^{3/2}$. Entonces $2^x = 2^{3/2}$ y $x = \frac{3}{2}$.

Comprobación: $2^{3/2} + 2^{3-3/2} = 2^{3/2} + 2^{3/2} = 2 \cdot 2^{3/2} = 4\sqrt{2}$.

En el examen: puntúa el planteamiento $t^2 - kt + 8 = 0$, justificar que $t > 0$ y razonar por qué una sola solución exige discriminante cero. No olvides deshacer el cambio en c): $t = 2\sqrt{2}$ no es el valor de x .

Errores típicos

ERROR TÍPICO · NO DESCARTAR T NEGATIVO O NULO

Tras $t = a^x$ aparecen soluciones como $t = -1$ o $t = -8$. Hay quien sigue con $2^x = -1$ y escribe una x inventada. Una potencia de base positiva nunca es negativa ni cero: esa solución se descarta explícitamente. Escribe « $t > 0$ » en cuanto hagas el cambio de variable.

ERROR TÍPICO • SUMAR O REPARTIR EXPONENTES DONDE NO SE PUEDE

$2^{x+1} + 2^x$ **no** es 2^{2x+1} : los exponentes se suman cuando las potencias se **multiplican**, no cuando se suman. Tampoco $2 \cdot 3^x = 6^x$: el 2 es un factor, no una base. Lo correcto es $2^{x+1} + 2^x = 2 \cdot 2^x + 2^x = 3 \cdot 2^x$. Y $(2^x)^2$ vale 2^{2x} , no 2^{x^2} .

ERROR TÍPICO • IGUALAR EXPONENTES CON BASES DISTINTAS

$a^u = b^v$ **no** significa $u = v$ salvo que $a = b$. Por ejemplo, $4^x = 2^{x+1}$ no se resuelve con $x = x + 1$. Primero hay que dejar las dos bases iguales: $4^x = 2^{2x}$ y entonces $2x = x + 1$, de donde $x = 1$.

Resumen

- Ecuación exponencial: la incógnita está en el exponente. Para $a > 0$ y $a \neq 1$, $a^u = a^v \iff u = v$.
- **Igualar bases:** escribe los dos lados como potencia de la misma base (por ejemplo $\frac{1}{4} = 2^{-2}$) e iguala los exponentes.
- **Factor común:** con exponentes $x + k$, usa $a^{x+k} = a^k a^x$ y deja $c \cdot a^x = d$.
- **Cambio de variable:** $t = a^x$ convierte a^{2x} y a^x en una cuadrática en t ; **solo valen las soluciones** $t > 0$.
- Si no se pueden igualar bases (como $2^x = 5$), se usan logaritmos: apartado siguiente.

APARTADO 2

Logaritmos: definición, propiedades y cambio de base

IDEA CLAVE

Un logaritmo es el exponente que hay que poner a una base para obtener un número. Con él se resuelven ecuaciones como $3^x = 20$, donde no se pueden igualar las bases. En este apartado aprendes la definición, las propiedades que convierten productos en sumas y potencias en productos, el cambio de base y cómo expresar un logaritmo en función de otros; es la herramienta de varias preguntas de la Prueba 1 y de la Prueba 2.

Definición de logaritmo

Sabes que $2^3 = 8$. La pregunta inversa es: si conozco la base 2 y el resultado 8, ¿cuál es el exponente? Ese número, 3, es el logaritmo en base 2 de 8.

DEFINICIÓN · LOGARITMO EN BASE a

Sean $a > 0$ con $a \neq 1$, y $x > 0$. El **logaritmo en base a de x** es el número y que, puesto como exponente de a , da x :

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Las dos condiciones tienen una razón:

- La base debe ser positiva y distinta de 1: si $a = 1$, todas las potencias valen 1 y no se llegaría a ningún otro número.
- El argumento debe ser positivo: una base positiva elevada a cualquier exponente real da siempre un número positivo, así que no existe $\log_a 0$ ni el logaritmo de un número negativo.

Calcular un logaritmo es, entonces, pensar en una potencia. Ejemplos: $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$; $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{8}$; $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$.

Dos bases son tan frecuentes que tienen nombre y símbolo propios:

DEFINICIÓN · LOGARITMO DECIMAL Y NEPERIANO

- **Logaritmo decimal** (base 10): $\log x$ significa $\log_{10} x$.
- **Logaritmo neperiano** o natural (base e): $\ln x$ significa $\log_e x$, donde $e \approx 2,71828$ es un número irracional.

Así, $\log 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$, y $\ln e^5 = 5$ porque $e^5 = e^5$. La calculadora da $\log x$ y $\ln x$ directamente; el número e aparecerá de forma natural cuando estudies las funciones exponencial y logarítmica y el cálculo.

Consecuencias directas de la definición

Leer la definición «de ida y vuelta» da tres resultados que se usan constantemente:

PROPIEDAD · VALORES Y RELACIONES BÁSICAS

Para $a > 0, a \neq 1$:

1. $\log_a 1 = 0$, porque $a^0 = 1$.
2. $\log_a a = 1$, porque $a^1 = a$.
3. $a^{\log_a x} = x$ para $x > 0$, y $\log_a(a^n) = n$ para todo $n \in \mathbb{R}$.

La tercera dice que elevar a al exponente que es el logaritmo en base a de x devuelve x : potenciar y tomar logaritmo son operaciones inversas. Por ejemplo, $7^{\log_7 5} = 5$ y $\log_{10} 10^{-4} = -4$. Esta propiedad también sirve para eliminar un logaritmo o una exponencial en una ecuación.

Propiedades de los logaritmos

Las potencias convierten sumas de exponentes en productos: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$. Como un logaritmo es un exponente, esa regla se traduce directamente.

PROPIEDAD · PRODUCTO, COCIENTE Y POTENCIA

Para $a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0, m \in \mathbb{R}$:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^m) = m \log_a x$

Por qué son ciertas. Llama $p = \log_a x$ y $q = \log_a y$, es decir, $x = a^p$ e $y = a^q$.

- Producto: $xy = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, luego $\log_a(xy) = p + q$.
- Cociente: $\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, luego $\log_a \frac{x}{y} = p - q$.
- Potencia: $x^m = (a^p)^m = a^{pm}$, luego $\log_a(x^m) = mp$.

Con la propiedad de la potencia se tratan también las raíces, porque $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$: por ejemplo, $\log_a \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_a x$.

Dos precauciones imprescindibles:

- **No existe** una regla para $\log_a(x + y)$ ni para $\log_a(x - y)$. Tampoco $\frac{\log_a x}{\log_a y}$ se simplifica en $\log_a(x - y)$.
- Las propiedades valen **solo si todos los argumentos son positivos**. Por ejemplo, $\log(x^2) = 2 \log x$ solo es cierto para $x > 0$; si x puede ser negativo, lo correcto es $\log(x^2) = 2 \log|x|$.

MÉTODO · SIMPLIFICAR UNA EXPRESIÓN CON LOGARITMOS

1. Escribe cada argumento como producto, cociente y potencias (las raíces, como exponentes fraccionarios).
2. Aplica las propiedades de fuera hacia dentro: primero producto y cociente, después las potencias.
3. Sustituye los logaritmos conocidos: $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$ y, en general, cualquier valor que el enunciado dé.
4. Agrupa los términos iguales y simplifica.

Un ejemplo corto: $\log_5 50 - \log_5 2 = \log_5 \frac{50}{2} = \log_5 25 = 2$. Y al revés: $2 \log 5 + \log 4 = \log 25 + \log 4 = \log 100 = 2$.

Cambio de base

La calculadora solo tiene teclas para $\log$ y $\ln$. Para calcular un logaritmo en otra base se usa una fórmula que lo reescribe en una base que sí conozcamos.

TEOREMA · CAMBIO DE BASE

Para $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ y $x > 0$:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Demostración breve. Sea $m = \log_a x$, es decir, $a^m = x$. Tomando $\log_b$ en los dos lados y usando la propiedad de la potencia, $m \log_b a = \log_b x$. Al despejar m sale la fórmula.

Por ejemplo, $\log_4 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 4} = \frac{5}{2}$, o bien, con la base 10, $\log_4 7 = \frac{\log 7}{\log 4} \approx 1,40$. Un caso particular muy útil se obtiene con $x = b$:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

NOTA · CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes calcular $\log_a x$ con cualquier base directamente con la calculadora de pantalla gráfica (CPG), sin aplicar la fórmula. En la Prueba 1, que no permite calculadora, el cambio de base se usa para que los logaritmos queden en una base común y se simplifiquen a mano.

Resolver $a^x = b$ con logaritmos

Si no se pueden igualar las bases (como en $3^x = 20$, porque 20 no es una potencia entera de 3), se toma logaritmo en los dos miembros. Gracias a la propiedad de la potencia, el exponente «baja» y la incógnita queda libre.

MÉTODO · RESOLVER $a^{f(x)} = b$ TOMANDO LOGARITMOS

1. Aísla la exponencial, de modo que quede $a^{f(x)} = b$ con $b > 0$. (Si $b \leq 0$, no hay solución, porque una potencia de base positiva es siempre positiva.)
2. Toma logaritmo en los dos miembros, en la base que prefieras ($\log$ o $\ln$; el resultado es el mismo).
3. Baja el exponente: $f(x) \cdot \ln a = \ln b$.
4. Despeja x . La **respuesta exacta** es un cociente de logaritmos; la **aproximada** se obtiene con la calculadora.
5. Comprueba el resultado sustituyendo en la ecuación original.

Con una sola exponencial, $a^x = b$ da $x = \frac{\ln b}{\ln a} = \log_a b$: es la propia definición. Si la incógnita aparece en el exponente **de ambos lados** (por ejemplo, $2^x = 3^{x-1}$), se baja el exponente en los dos y se agrupan los términos en x antes de despejar.

En el IB se pide a menudo la solución exacta («dé la respuesta en la forma $\frac{\ln a}{\ln b}$ ») o redondeada a tres cifras significativas. Si piden exacta, no la sustituyas por un decimal.

Expresar un logaritmo en función de otros

Un tipo de pregunta frecuente da el valor (o un nombre) de algunos logaritmos y pide expresar otro en función de ellos. El procedimiento es descomponer el argumento y aplicar las propiedades.

MÉTODO · EXPRESAR $\log_a N$ EN FUNCIÓN DE UNOS LOGARITMOS DADOS

1. Factoriza el argumento N (o escribe sus potencias y raíces) en términos de los números que te dan.
2. Aplica producto, cociente y potencia hasta que solo queden los logaritmos dados.
3. Si la base cambia, usa el cambio de base y escribe todo en la misma.
4. Los números que no aparecen en los datos se pueden obtener con $\log_a a = 1$ o con relaciones como $5 = \frac{10}{2}$ (en base 10, $\log 5 = 1 - \log 2$).

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Calcular logaritmos a partir de la definición

Calcula, sin calculadora:

- a) $\log_3 81$
- b) $\log_2 \frac{1}{32}$
- c) $\log_8 4$
- d) $\ln \sqrt[3]{e}$
- e) Halla x si $\log_x 49 = 2$, con $x > 0$ y $x \neq 1$.

Se plantea cada logaritmo como la pregunta «¿a qué exponente elevo la base?».

- a) $3^4 = 81$, luego $\log_3 81 = 4$.
- b) $\frac{1}{32} = 2^{-5}$, luego $\log_2 \frac{1}{32} = -5$.
- c) Se escribe $8 = 2^3$ y $4 = 2^2$. Se busca y con $8^y = 4$, es decir, $2^{3y} = 2^2$, luego $3y = 2$ y $\log_8 4 = \frac{2}{3}$.
- d) $\sqrt[3]{e} = e^{1/3}$, luego $\ln \sqrt[3]{e} = \frac{1}{3}$.
- e) Por la definición, $\log_x 49 = 2 \iff x^2 = 49$, es decir, $x = \pm 7$. La base debe ser positiva, así que $x = 7$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Un logaritmo en función de $\log 2$ y $\log 3$

Sean $p = \log 2$ y $q = \log 3$ (logaritmos decimales). Expresa en función de p y de q :

- a) $\log 72$
- b) $\log 5$
- c) $\log_{12} 18$

- a) Se factoriza $72 = 2^3 \cdot 3^2$ y se aplican producto y potencia:

$$\log 72 = \log 2^3 + \log 3^2 = 3 \log 2 + 2 \log 3 = 3p + 2q$$

- b) El número 5 no se puede formar con 2 y 3, pero $5 = \frac{10}{2}$ y $\log 10 = 1$:

$$\log 5 = \log 10 - \log 2 = 1 - p$$

- c) Cambio de base a base 10:

$$\log_{12} 18 = \frac{\log 18}{\log 12}$$

Se factorizan: $18 = 2 \cdot 3^2$ y $12 = 2^2 \cdot 3$. Entonces $\log 18 = p + 2q$ y $\log 12 = 2p + q$, y

$$\log_{12} 18 = \frac{p + 2q}{2p + q}$$

Comprobación numérica con $p \approx 0,3010$ y $q \approx 0,4771$: $\log 12 \approx 1,857$ y $3p + 2q \approx 1,857$.

EJEMPLO 3 ★★★ Difícil

Exponenciales con incógnita en ambos lados y duplicar un capital

- Resuelve $3^{2x-1} = 5^{x+2}$. Da la solución exacta en función de $\ln 3$ y $\ln 5$.
- Da el valor de x aproximado a tres cifras significativas.
- Un capital se invierte con un interés compuesto anual del 4,5 %, de modo que al cabo de n años se multiplica por $1,045^n$. Halla el menor número entero de años n para que el capital supere el doble del inicial.

1. Tomar **logaritmo neperiano** en los dos miembros (ambos son positivos):

$$\ln 3^{2x-1} = \ln 5^{x+2}$$

2. Bajar los exponentes:

$$(2x - 1) \ln 3 = (x + 2) \ln 5$$

3. Agrupar los términos en x y despejar:

$$2x \ln 3 - x \ln 5 = 2 \ln 5 + \ln 3 \implies x(2 \ln 3 - \ln 5) = 2 \ln 5 + \ln 3$$

$$x = \frac{2 \ln 5 + \ln 3}{2 \ln 3 - \ln 5}$$

4. **Forma compacta (opcional)**. Como $2 \ln 5 + \ln 3 = \ln 75$ y $2 \ln 3 - \ln 5 = \ln \frac{9}{5}$, la solución también se escribe $x = \frac{\ln 75}{\ln \frac{9}{5}}$. Ambas formas son exactas.

- Con la calculadora, $x \approx 7,345 \dots$, es decir, $x \approx 7,35$.

Comprobación: con $x = 7,345 \dots$, $3^{2x-1} \approx 3,405 \cdot 10^6$ y $5^{x+2} \approx 3,405 \cdot 10^6$.

- Se plantea $1,045^n > 2$. Tomando logaritmos (ambos miembros positivos) y como $\ln 1,045 > 0$:

$$n \ln 1,045 > \ln 2 \iff n > \frac{\ln 2}{\ln 1,045} \approx 15,75$$

El menor entero que cumple la desigualdad es $n = 16$. Comprobación: $1,045^{15} \approx 1,935 < 2$ y $1,045^{16} \approx 2,022 > 2$.

En el examen: puntúa tomar logaritmos, bajar bien los exponentes y agrupar los términos en x ; el error habitual es no usar paréntesis en $(2x - 1) \ln 3$. En c) hay que **redondear hacia arriba** al entero siguiente, no al más cercano (15,75 pide 16 años y no 15).

Errores típicos

ERROR TÍPICO • APLICAR PROPIEDADES QUE NO EXISTEN

$\log(x + y)$ **no** es $\log x + \log y$: esa suma de logaritmos es $\log(xy)$. Por ejemplo, $\log 100 + \log 10 = 3$, que es $\log 1000$, y no $\log 110$. Tampoco $\frac{\log x}{\log y} = \log(x - y)$ ni $(\log x)^2 = 2 \log x$. Solo hay tres reglas: producto, cociente y potencia del **argumento**.

ERROR TÍPICO · CONFUNDIR EL COCIENTE DE LOGARITMOS CON LA RESTA

$\frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0,903}{0,301} = 3$, pero $\log 8 - \log 2 = \log 4 \approx 0,602$. Esos dos resultados no se parecen. La resta de logaritmos es el logaritmo de un cociente; el cociente de logaritmos es un cambio de base ($\frac{\log 8}{\log 2} = \log_2 8$).

ERROR TÍPICO · BAJAR EL EXPONENTE SIN PARÉNTESIS

Al tomar logaritmos en $3^{2x-1} = 5^{x+2}$, el exponente completo baja multiplicando todo el logaritmo: $(2x - 1) \ln 3$. Escribir $2x - 1 \ln 3$ o $2x - \ln 3$ es un error muy frecuente. Pon los paréntesis y no aproximes el resultado antes de despejar si piden la respuesta exacta.

Resumen

- $\log_a x = y \iff a^y = x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$. $\log x$ es base 10 y $\ln x$ es base e .
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a^{\log_a x} = x$ y $\log_a a^n = n$.
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ y $\log_a x^m = m \log_a x$. No hay regla para $\log_a(x \pm y)$.
- Cambio de base: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$; en particular $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.
- Para resolver $a^{f(x)} = b$ se toma logaritmo y se baja el exponente: x sale como cociente de logaritmos (exacto) y se aproxima con la calculadora si se pide.
- Para expresar un logaritmo en función de otros se factoriza el argumento y se aplican producto, cociente y potencia.

APARTADO 3

Ecuaciones logarítmicas

IDEA CLAVE

Una ecuación logarítmica es aquella en la que la incógnita aparece dentro de un logaritmo. Se resuelve juntando todo en un solo logaritmo por lado y «quitándolo», y siempre se termina comprobando que los argumentos son positivos, porque el proceso puede introducir soluciones que no valen. En el examen del IB es uno de los pasos que más puntos se pierden por olvido.

Qué es una ecuación logarítmica y cuándo tiene sentido

Una **ecuación logarítmica** contiene la incógnita en el argumento de uno o más logaritmos (o en la base). Un logaritmo solo existe cuando su argumento es **estrictamente positivo**: $\log_a N$ requiere $N > 0$ (y la base $a > 0, a \neq 1$). Por eso, antes de resolver, conviene anotar las condiciones que debe cumplir x . Por ejemplo, en $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$ hace falta $x+2 > 0$ y $x-1 > 0$, es decir, $x > 1$.

Aquí usamos sin repetirlas las propiedades de logaritmos y sus propiedades: producto, cociente, potencia y cambio de base. Recuerda que en el IB $\log x$ significa $\log_{10} x$ y $\ln x$ significa $\log_e x$.

Agrupar en un solo logaritmo

Hay dos formas de «quitar» el logaritmo, y ambas salen de que la función logarítmica es inyectiva (valores distintos del argumento dan logaritmos distintos).

PROPIEDAD · DOS FORMAS DE ELIMINAR EL LOGARITMO

Sea $a > 0, a \neq 1$.

1. **Igualdad de logaritmos**: si $\log_a M = \log_a N$, entonces $M = N$ (con $M > 0, N > 0$).
2. **Definición**: si $\log_a M = k$, entonces $M = a^k$.

La primera dice que dos logaritmos de la misma base solo pueden ser iguales si sus argumentos lo son. La segunda es la definición de logaritmo leída al revés: $\log_a M = k \iff a^k = M$. Se usa cuando uno de los lados es un número.

MÉTODO · RESOLVER UNA ECUACIÓN LOGARÍTMICA

1. Escribe las **condiciones**: cada argumento debe ser positivo.
2. Aplica las propiedades para dejar **un solo logaritmo** a cada lado (o un solo logaritmo en un lado y un número en el otro). Si hay un número suelto, escríbelo como logaritmo: por ejemplo, $1 = \log_a a$.
3. Quita el logaritmo: iguala los argumentos o aplica la definición.
4. Resuelve la ecuación que resulta (suele ser de primer o segundo grado).
5. **Comprueba** cada solución en las condiciones del paso 1 y descarta las que no las cumplen.

El paso 5 no es opcional. Al juntar logaritmos con las propiedades, la ecuación nueva puede tener más soluciones que la original: $\log(x+1) + \log(x-3)$ solo existe para $x > 3$, mientras que $\log((x+1)(x-3))$ también existe cuando ambos factores son negativos, es decir, para $x < -1$.

NOTA · DOS LADOS CON LOGARITMOS O UN LADO CON NÚMERO

Cuando aparece $\log_a(\dots) = \log_a(\dots)$ basta igualar los argumentos. Cuando aparece $\log_a(\dots) = k$ con k un número, se aplica la definición: el argumento vale a^k . Si el logaritmo es $\ln$, el resultado puede quedar con e : por ejemplo, $\ln(x-1) = 2$ da $x = 1 + e^2$. En la Prueba 1 se deja el valor exacto; en la Prueba 2 se da también una aproximación a tres cifras significativas si el enunciado lo pide.

Cambio de variable

Hay ecuaciones donde el logaritmo aparece elevado al cuadrado y también sin elevar. Se resuelven como una cuadrática en el propio logaritmo.

MÉTODO · CAMBIO DE VARIABLE $t = \log_a x$

1. Reduce todos los logaritmos a la misma base y el mismo argumento x (con $\log_a x^k = k \log_a x$).
2. Llama $t = \log_a x$. Cuidado: $(\log_a x)^2 = t^2$, pero $\log_a(x^2) = 2t$.
3. Resuelve la ecuación en t .
4. Deshaz el cambio: $x = a^t$ para cada valor de t . Como $a^t > 0$ siempre, estas soluciones cumplen $x > 0$, pero comprueba cualquier otra condición que apareciera.

Logaritmos de bases distintas

Si en la ecuación hay logaritmos de bases diferentes, no se pueden juntar con las propiedades. Antes hay que pasar todos a una misma base con la fórmula del cambio de base:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Conviene elegir como base nueva la que haga más sencillos los cálculos, normalmente la menor o la que sea potencia de las demás. Por ejemplo, $\log_4 N = \frac{\log_2 N}{\log_2 4} = \frac{\log_2 N}{2}$ y $\log_{1/2} N = -\log_2 N$.

Sistemas con exponenciales y logaritmos

En un sistema, cada ecuación se prepara por separado hasta llegar a una relación sencilla entre x e y .

- Una ecuación **exponencial** se convierte, igualando bases, en una ecuación entre exponentes (normalmente lineal).
- Una ecuación **logarítmica** se agrupa en un logaritmo y se convierte en una relación entre argumentos (una igualdad o un producto).

Después se resuelve el sistema que queda (por sustitución casi siempre) y se **comprueban las soluciones en las ecuaciones originales**, porque los argumentos de los logaritmos deben ser positivos para x y para y .

NOTA · PRUEBA 2: COMPROBAR CON LA CALCULADORA

En la Prueba 2 puedes usar la calculadora de pantalla gráfica (CPG) para resolver una ecuación logarítmica que no se simplifique a mano, o para comprobar tu resultado: representa los dos lados como funciones y busca la intersección, o sustituye la solución en la ecuación original. Aun así, en las preguntas que piden «halle algebraicamente» o en la Prueba 1 hay que escribir el desarrollo.

Ejemplos resueltos

EJEMPLO 1 ★ Básico

Aplicar la definición y juntar dos logaritmos

Resuelve las ecuaciones.

- a) $\log_5(2x - 1) = 2$
b) $\log x + \log(x - 3) = 1$

- a) 1. **Condición:** $2x - 1 > 0$, es decir, $x > \frac{1}{2}$.
2. **Definición:** $2x - 1 = 5^2 = 25$, de donde $2x = 26$ y $x = 13$.
3. **Comprobación:** $13 > \frac{1}{2}$ y $\log_5(25) = 2$. Es válida.
- b) 1. **Condiciones:** $x > 0$ y $x - 3 > 0$, luego $x > 3$.
2. **Un solo logaritmo.** El número 1 es $\log 10$ (base 10). Con la propiedad del producto:
$$\log(x(x - 3)) = \log 10 \implies x(x - 3) = 10$$

3. **Resolver:** $x^2 - 3x - 10 = 0$, es decir, $(x - 5)(x + 2) = 0$, con $x = 5$ o $x = -2$.
4. **Comprobación:** $x = 5$ cumple $x > 3$ y $\log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$. Pero $x = -2$ no cumple $x > 3$: $\log(-2)$ no existe. Se descarta.

La única solución es $x = 5$.

EJEMPLO 2 ★★ Medio

Cambio de variable y bases distintas

Resuelve las ecuaciones.

- a) $(\ln x)^2 - \ln(x^3) = -2$
b) $\log_3 x = \log_9(3x + 10)$

- a) 1. **Condición:** $x > 0$.
2. **Preparar.** $\ln(x^3) = 3 \ln x$. La ecuación queda $(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0$.
3. **Cambio de variable:** $t = \ln x$ da $t^2 - 3t + 2 = 0$, es decir, $(t - 1)(t - 2) = 0$, con $t = 1$ o $t = 2$.
4. **Deshacer el cambio:** $\ln x = 1 \Rightarrow x = e$ y $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^2$. Ambas son positivas: las dos valen.
- b) 1. **Condiciones:** $x > 0$ y $3x + 10 > 0$. Basta $x > 0$.
2. **Misma base.** Pasamos el logaritmo de base 9 a base 3:
$$\log_9(3x + 10) = \frac{\log_3(3x + 10)}{\log_3 9} = \frac{\log_3(3x + 10)}{2}$$

3. **Ecuación:** $\log_3 x = \frac{\log_3(3x + 10)}{2}$, luego $2 \log_3 x = \log_3(3x + 10)$, es decir, $\log_3 x^2 = \log_3(3x + 10)$.
4. **Igualar argumentos:** $x^2 = 3x + 10$, es decir, $x^2 - 3x - 10 = 0$, con $x = 5$ o $x = -2$.
5. **Comprobación:** $x = -2$ no cumple $x > 0$ y se descarta. Para $x = 5$: $\log_3 5$ y $\log_9 25 = \frac{\log_3 25}{2} = \log_3 5$. Vale.

EJEMPLO 3

★★★ Difícil

Sistema con una exponencial y dos logaritmos de bases distintas

Resuelve el sistema

$$\begin{cases} 9^x = 3^{y+1} \\ \log_2 x + 2 \log_4 y = 1 + \log_2 3 \end{cases}$$

e indica el par (x, y) que es solución.

1. **Condiciones.** Por los logaritmos de la segunda ecuación: $x > 0$ e $y > 0$.

2. **Primera ecuación (igualar bases).** $9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$, así que $3^{2x} = 3^{y+1}$ y por tanto

$$2x = y + 1 \implies y = 2x - 1$$

3. **Segunda ecuación (misma base).** $2 \log_4 y = 2 \cdot \frac{\log_2 y}{\log_2 4} = \log_2 y$. Además, $1 = \log_2 2$. La ecuación pasa a ser

$$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 2 + \log_2 3 \implies \log_2(xy) = \log_2 6 \implies xy = 6$$

4. **Sustitución.** Con $y = 2x - 1$: $x(2x - 1) = 6$, es decir, $2x^2 - x - 6 = 0$. Las soluciones son $x = 2$ y $x = -\frac{3}{2}$.

5. **Hallar y :** para $x = 2$, $y = 3$; para $x = -\frac{3}{2}$, $y = -4$.

6. **Comprobación.** El par $(-\frac{3}{2}, -4)$ cumple $xy = 6$ y la primera ecuación, pero x e y son negativos: $\log_2 x$ y $\log_4 y$ no existen. Se descarta. Con $(2, 3)$: $9^2 = 81 = 3^4$ y $\log_2 2 + 2 \log_4 3 = 1 + \log_2 3$. Vale.

La solución es $(x, y) = (2, 3)$.

En el examen: puntúa cada transformación (bases iguales en la exponencial, cambio de base en el logaritmo, producto $xy = 6$) y la ecuación de segundo grado. Si dejas el par $(-\frac{3}{2}, -4)$ sin descartar, pierdes el último punto: razona que los argumentos deben ser positivos.

Errores típicos

ERROR TÍPICO • NO COMPROBAR LAS SOLUCIONES

Es el fallo más caro del apartado. Tras resolver la ecuación de segundo grado se obtienen dos soluciones y se dan las dos por buenas, sin ver que una hace negativo el argumento de un logaritmo. Por ejemplo, $\log x + \log(x - 3) = 1$ lleva a $x^2 - 3x - 10 = 0$ y a $x = 5$ o $x = -2$, pero solo $x = 5$ vale: con $x = -2$ aparece $\log(-2)$, que no existe. Sustituye cada solución **en la ecuación original**, no en la que ya has simplificado.

ERROR TÍPICO • QUITAR LOGARITMOS QUE NO SON DE LA MISMA BASE, O CON NÚMEROS SUELTOS

De $\log_2 M = \log_3 N$ no se puede deducir $M = N$: las bases son distintas. Y de $\log M + 3 = \log N$ tampoco se deduce $M + 3 = N$: el 3 hay que escribirlo como logaritmo ($3 = \log 10^3$ en base 10) y juntarlo. Solo se pueden igualar argumentos cuando hay **un único logaritmo de la misma base a cada lado**.

ERROR TÍPICO · CONFUNDIR $(\log x)^2$ CON $\log(x^2)$ Y $\log(x + y)$ CON $\log x + \log y$

$(\log x)^2$ es el cuadrado del logaritmo y no se simplifica; $\log(x^2) = 2 \log x$ sí. Por tanto, en el cambio de variable $t = \log x$, el primero se convierte en t^2 y el segundo en $2t$. Del mismo modo, $\log(x + y)$ **no** es $\log x + \log y$: la propiedad del producto es $\log(xy) = \log x + \log y$. Si $\log(x + 3)$ aparece en una ecuación, no se puede «separar».

Resumen

- Una ecuación logarítmica tiene la incógnita en el argumento de un logaritmo. Antes de resolver, escribe las condiciones: todos los argumentos deben ser mayores que 0.
- Para quitar el logaritmo: si $\log_a M = \log_a N$, entonces $M = N$; si $\log_a M = k$, entonces $M = a^k$.
- Agrupa con las propiedades hasta tener un solo logaritmo por lado; un número suelto se escribe como logaritmo ($1 = \log_a a$).
- Si la ecuación tiene $(\log x)^2$ y $\log x$, el cambio $t = \log_a x$ da una cuadrática; después se deshace con $x = a^t$.
- Con bases distintas, pasa todo a una misma base con $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$.
- Sistemas: la exponencial se resuelve igualando bases y la logarítmica agrupando; resuelve el sistema resultante.
- **Siempre** comprueba las soluciones en la ecuación original y descarta las que dejan un argumento negativo o cero.

CIERRE DEL TEMA

Ejercicios IB del tema 2

Ejercicios de exámenes del IB agrupados por tipo y, dentro de cada tipo, de menos a más difícil. Intenta cada uno antes de abrir la solución.

Ecuaciones exponenciales

EJERCICIO 1 ★ Básico IB · P1 Mayo 1998

Calcule todos los valores reales de x para los que $3^{x^2-1} = (\sqrt{3})^{126}$

$$x = 8 \quad x = -8$$

EJERCICIO 2 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2014

Resuelva la ecuación $8^{x-1} = 6^{3x}$. Exprese la respuesta en función de $\ln 2$ y $\ln 3$.

$$x = -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

EJERCICIO 3 ★★ Medio IB · P1 Mayo 2003

Halle el valor exacto de x que satisface la ecuación $(3^x)(4^{2x+1}) = 6^{x+2}$. Exprese su respuesta en la forma $\frac{\ln a}{\ln b}$, donde $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$x = \frac{\ln 9}{\ln 8}$$

EJERCICIO 4 ★★ Medio IB · P1 Noviembre 2003

Resuelva $2(5^{x+1}) = 1 + \frac{3}{5^x}$, expresando la respuesta en la forma $a + \log_5 b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$x = -1 + \log_5 3$$

EJERCICIO 5 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2007

La solución de $2^{2x+3} = 2^{x+1} + 3$ se puede expresar en la forma $a + \log_2 b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Calcule el valor de a y el de b .

$$a + \log_2 b = -2 + \log_2 3 \quad a = -2 \quad b = 3$$

EJERCICIO 6 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2007

- a) Resuelva la ecuación $2(4^x) + 4^{-x} = 3$.
 b) (i) Resuelva para x la ecuación $a^x = e^{2x+1}$ donde $a > 0$, y dando la respuesta en función de a .
 (ii) ¿Para qué valor de a no existe ninguna solución para la ecuación?

a) $x = 0$ $x = -\frac{1}{2}$ b) (i) $x = \frac{1}{\ln a - 2}$ (ii) $a = e^2$

EJERCICIO 7 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2010

Resolver la ecuación $4^{x-1} = 2^x + 8$.

$x = 3$

EJERCICIO 8 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2016

Resuelva la ecuación $4^x + 2^{x+2} = 3$.

$x = \frac{\ln(-2 + \sqrt{7})}{\ln 2}$

Logaritmos: definición, propiedades y cambio de base

EJERCICIO 9 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2008

Escriba $\ln(x^2 - 1) - 2\ln(x + 1) + \ln(x^2 + x)$ como un único logaritmo, de la forma más simplificada posible.

$\ln(x^2 - 1) - 2\ln(x + 1) + \ln(x^2 + x) = \ln(x^2 - x)$

EJERCICIO 10 ★★ Medio IB · P1 TZ2 Mayo 2015

Sabiendo que $\log_x y = 4\log_y x$, halle todas las posibles expresiones de y en función de x .

$y = x^2$ $y = \frac{1}{x^2}$

EJERCICIO 11 ★★ Medio IB · P1 Mayo 1996

- a) Sabiendo que $\log_a c = \log_a b \times \log_b c$, exprese $\log_4 x^3 + \log_2 x^2 = \log_8 128^3$ en función de logaritmos en base 2.
 b) Usando lo anterior, o de cualquier otra forma, resuelva la ecuación del apartado (a).

a) $\frac{\log_2 x^3}{\log_2 4} + \log_2 x^2 = \frac{\log_2 128^3}{\log_2 8}$ b) $x = 4$

EJERCICIO 12

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2017

Sabiendo que $\log_{10} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(p+2q) \right) = \frac{1}{2}(\log_{10} p + \log_{10} q)$, $p > 0$, $q > 0$, halle p en función de q .

$$p = 2q$$

EJERCICIO 13

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2016

Encuentre los valores enteros de m y n para los cuales $m - n \log_3 2 = 10 \log_9 6$

$$m = 5 \quad n = -5$$

EJERCICIO 14

★★★ Difícil

IB · P1 Noviembre 1997

- a) Sabiendo que $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, calcule los números reales k y m tales que $\log_9 x^3 = k \log_3 x$ y $\log_{27} 512 = m \log_3 8$.
- b) Calcule los valores de x para los cuales $\log_9 x^3 + \log_3 x^{\frac{1}{2}} = \log_{27} 512$.

$$a) \quad k = \frac{3}{2} \quad m = 1 \quad b) \quad x = 2\sqrt{2}$$

EJERCICIO 15

★★★ Difícil

IB · P1 TZ1 Mayo 2014

Considere $a = \log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \dots \times \log_{31} 32$. Sabiendo que $a \in \mathbb{Z}$, calcule el valor de a .

$$a = \log_2 32 = 5$$

Ecuaciones logarítmicas

EJERCICIO 16

★ Básico

IB · P1 Noviembre 2003

Resuelva $\log_{16} \sqrt[3]{100 - x^2} = \frac{1}{2}$.

$$x = 6 \quad y \quad x = -6$$

EJERCICIO 17

★ Básico

IB · P1 TZ0 Mayo 2006

Resolver $|\ln(x+3)| = 1$, dando las soluciones de forma exacta.

$$x = e - 3 \quad x = \frac{1}{e} - 3$$

EJERCICIO 18 ★ Básico IB · P1 TZ1 Mayo 2017

Calcule la solución de $\log_2 x - \log_2 5 = 2 + \log_2 3$

$$x = 60$$

EJERCICIO 19 ★ Básico IB · P1 TZ0 Noviembre 2017

Resuelva la ecuación $\log_2(x+3) + \log_2(x-3) = 4$.

$$x = 5$$

EJERCICIO 20 ★★ Medio IB · P2 TZ2 Mayo 2010

- a) Halle la solución de la ecuación $\ln 2^{4x-1} = \ln 8^{x+5} + \log_2 16^{1-2x}$; exprese la respuesta en función de $\ln 2$.
b) Utilizando este valor de x , halle el valor de a para el cual $\log_a x = 2$; dé la respuesta con una aproximación de 3 cifras decimales.

a) $x = \frac{4 + 16 \ln 2}{8 + \ln 2}$ b) $a = 1,318$

EJERCICIO 21 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2013

Resuelva las siguientes ecuaciones:

- a) $\log_2(x-2) = \log_4(x^2 - 6x + 12)$
b) $x^{\ln x} = e^{(\ln x)^3}$

a) $x = 4$ b) $x = 1$ $x = e$

EJERCICIO 22 ★★ Medio IB · P1 TZ1 Mayo 2005

Resuelva la ecuación $2 \log_3(x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) = 2$.

$$x = 15$$

EJERCICIO 23 ★★ Medio IB · P1 TZ0 Noviembre 2006

Resolver la ecuación $9 \log_5 x = 25 \log_x 5$, dando sus soluciones en la forma $5^{\frac{p}{q}}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

$$x = 5^{\frac{5}{3}} \quad x = 5^{-\frac{5}{3}}$$

EJERCICIO 24

★★ Medio

IB · P1 TZ2 Mayo 2007

Resuelva $2(\ln x)^2 = 3 \ln x - 1$ para la variable x . De las respuestas de forma exacta.

$$x = e \quad x = e^{\frac{1}{2}}$$

EJERCICIO 25

★★ Medio

IB · P1 TZ1 Mayo 2012

Resolver la ecuación $2 - \log_3(x + 7) = \log_{\frac{1}{3}} 2x$.

$$x = \frac{7}{17}$$

EJERCICIO 26

★★ Medio

IB · P1 TZ0 Noviembre 2021

Resuelva la ecuación $\log_3 \sqrt{x} = \frac{1}{2 \log_2 3} + \log_3 (4x^3)$, $x > 0$.

$$x = \frac{1}{2}$$

Sistemas con exponenciales y logaritmos

EJERCICIO 27

★★ Medio

IB · P2 TZ0 Noviembre 2010

Resuelva las ecuaciones

$$\begin{cases} \ln \frac{x}{y} = 1 \\ \ln x^3 + \ln y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x = e^{\frac{7}{5}} \quad y = e^{\frac{2}{5}}$$

EJERCICIO 28

★★ Medio

IB · P2 TZ2 Mayo 2016

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \ln \frac{y}{x} = 2 \\ \ln x^2 + \ln y^3 = 7 \end{cases}$$

$$y = e^{\frac{11}{5}} \quad x = e^{\frac{1}{5}}$$

EJERCICIO 29

★★ Medio

IB · P1 Noviembre 1998

Resuelva el sistema de ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4^x = 8^y \end{cases}$$

$$y = \frac{10}{7} \quad x = \frac{15}{7}$$

EJERCICIO 30

★★★ Difícil

IB · P1 TZ2 Mayo 2019

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \log_2 6x = 1 + 2\log_2 y \\ 1 + \log_6 x = \log_6(15y - 25) \end{cases}$$

$$y = 5 \quad x = \frac{25}{3} \quad y = \frac{5}{2} \quad x = \frac{25}{12}$$

EJERCICIO 31

★★★ Difícil

IB · P2 TZ1 Mayo 2011

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \log_{x+1} y = 2 \\ \log_{y+1} x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x \approx 1,70 \quad y \approx 7,27$$

(De $y = (x + 1)^2$ y $x^4 = y + 1$ se llega a $x^3 - x^2 - 2 = 0$, cuya única raíz real es $x \approx 1,6956$.)

Nota: la solución del libro da $x = 1,69$ e $y = 7,24$, pero $y = (x + 1)^2$ con $x \approx 1,6956$ da $y \approx 7,266$: el libro trunca x y arrastra el error a y .